Cálculo con wxMaxima

Jerónimo Alaminos Prats

José Extremera Lizana

Pilar Muñoz Rivas

23 enero 2012

Índice

Números reales y aritmética de ordenador

El conjunto de los números reales

1

Existen diferentes formas de formalizar el conjunto de los números reales aunque se pueden agrupar en dos variantes: constructivos y axiomáticos. Los primeros son demasiado laboriosos para un curso de Cálculo y, por este motivo, hemos preferido dejarlos de lado. En su lugar, hemos asumido que el conjunto de los números reales es conocido por el lector y elegimos la definición axiomática de este conjunto.

1.1 El conjunto de los números reales

Vamos a definir el conjunto de los números reales, $\mathbb{R}$, en términos de qué sabemos hacer con sus elementos, qué propiedades tienen. Estas propiedades que vamos a presentar aquí se llaman axiomas y, por supuesto, no son todas las propiedades de los números reales sino las mínimas, y es que a partir de ellas se obtienen el resto de propiedades.

Es difícil que, si alguien nos pregunta, seamos capaces de dar una respuesta clara de qué es un número pero sí somos capaces de decir qué cosas podemos hacer con ellos.

En el conjunto de los números reales tenemos definidas varias operaciones. La primera que todos aprendemos es la *suma.*

Suma de números reales

Las suma verifica, entre otras, las siguientes propiedades. Sean a, b y c números reales cualesquiera.

a) Propiedad *asociativa:* $a + (b + c) = (a + b) + c$.

b) Propiedad *conmutativa:* $a + b = b + a$.

c) Existencia de *elemento neutro:* $a + 0 = a$.

d) Existencia de *elemento opuesto:* $a + (-a) = 0$.

Estas cuatro propiedades se resumen diciendo que $(\mathbb{R}, +)$ es un *grupo abeliano* o *conmutativo.*

Producto de números reales

Además de la suma también sabemos multiplicar números reales. Por el mismo motivo, se supone que sabemos dividir. Mucho cuidado con esta afirmación. No estamos hablando de cómo se dividen números sino de que, supuesto conocido el producto de números, la división es la operación inversa. Ocurre lo mismo con la suma: no hemos dicho como se restan números reales pero, en teoría, restar un número es simplemente sumar el número cambiado de signo, es decir, sumar el opuesto. Con el producto, dividir por un número a es multiplicar por el inverso, al que llamaremos $1/a$.

Sean a, b y c números reales. Entonces se verifican las siguientes propiedades.

5) Propiedad *asociativa:* $a(bc) = (ab)c$.

6) Propiedad *conmutativa:* $ab = ba$.

7) Existencia de *elemento neutro:* $a1 = 1a$.

8) Existencia de *elemento inverso:* Si a es distinto de 0 entonces $a\frac{1}{a} = 1$.

Observación 1.1. El elemento opuesto en el caso de la suma y el elemento inverso para el producto son únicos. En el caso de la suma la notación es siempre la misma: el opuesto de a es $-a$ y en vez de escribir $b + (-a)$ escribiremos $b - a$. Para el inverso del producto usaremos indistintamente la notación $\frac{1}{a}$ o a^{-1} y también es más usual escribir $\frac{b}{a}$ que $b\frac{1}{a}$.

Una vez que tenemos la suma y el producto, hay otra propiedad que hace que se relacionen de forma buena:

9) propiedad *distributiva:* $a(b + c) = ab + ac$.

Orden

El orden en el conjunto de los números reales también es algo conocido por el lector. Lo podemos ver de varias formas: sabemos cuándo un número es positivo o somos capaces de decidir cuál de dos números es el mayor. Hagamos un breve resumen de las propiedades relacionadas con el orden. Evidentemente las propiedades podemos exponerlas sobre “ser menor que”, “ser mayor que” o también sobre “ser mayor o igual que” o “ser menor o igual que”. Como hay que elegir una de las posibilidades elegimos esta última aunque el resto nos darían propiedades análogas.

10) Propiedad *reflexiva:* $a \leq a$.

11) Propiedad *antisimétrica:* si $a \leq b$ y $b \leq a$, entonces $a = b$.

12) Propiedad *transitiva:* si $a \leq b$ y $b \leq c$, entonces $a \leq c$.

13) El orden es *total:* dado $a \in \mathbb{R}$, se cumple que $a \geq 0$ o que $a \leq 0$ o, lo que es lo mismo, dados a, $b \in \mathbb{R}$, se cumple que $a \leq b$ o que $b \leq a$.

Las siguientes propiedades relacionan la suma y el producto con el orden que acabamos de presentar.

14) Si $a \leq b$, entonces $a + c \leq b + c$.

15) Si $a \leq b$ y $c \geq 0$, entonces $ac \leq bc$.

El último axioma

Las propiedades que hemos comentado hasta ahora no determinan de manera única el conjunto de los números reales. El conjunto de los número racionales también las verifica como se puede comprobar fácilmente. ¿Cual es la diferencia entre ambos conjuntos? ¿Qué sabemos hacer en $\mathbb{R}$ que no podamos hacer en $\mathbb{Q}$? Siempre que se hace esta pregunta en clase las respuestas suelen ser del tipo: raíces cuadradas, logaritmos, senos o cosenos, etc. Aunque se podría intentar seguir por ahí, ese camino puede tener más dificultades a posteriori que el que vamos a elegir.

Necesitamos, por tanto, alguna propiedad más para diferenciarlos. En la Figura 1.1, podemos ver la propiedad que vamos a utilizar: si cada uno de los elementos de un conjunto A son más pequeños que los un conjunto B, entonces se puede encontrar un número entre ambos. Esta propiedad parece, en principio, sencilla y si nos fijamos en la figura no da la impresión de que nos permita distinguir entre reales y racionales. Parece evidente que existen racionales x que podemos "colocar" entre A y B. ¿Y si los pegamos un poco más? ¿Qué ocurre si tomamos $A =]-\infty, x[$ y como $B =]x, +\infty[$? La única posibilidad que nos queda, el único número entre A y B es x. Si dicho número es racional, perfecto. No hay problema, pero ¿y si es irracional? Por ejemplo, en la Figura 1.2, el número π es el único punto entre los dos conjuntos.

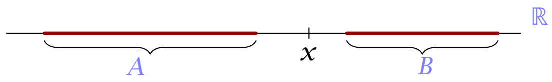


Figura 1.1

Esta propiedad es el axioma que nos falta para terminar de definir el conjunto de los números reales:

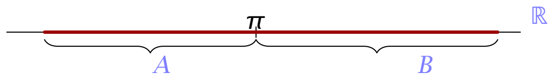


Figura 1.2

16) Dados dos conjuntos A y B verificando que $a \leq b$ para cualesquiera $a \in A$ y $b \in B$, existe x tal que $a \leq x \leq b$, $\forall a \in A$, $\forall b \in B$.

Resumiendo, el conjunto de los números reales, $\mathbb{R}$, es el único conjunto que verifica los dieciséis axiomas anteriores.

1.2 Naturales, enteros, racionales e irracionales

Números naturales

El conjunto de los números naturales, al que denotaremos $\mathbb{N}$, es

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$$

La inclusión del cero como número natural es una convención. En algunos textos aparece como natural y en otros no. Nosotros no lo vamos a incluir para simplificar algunas notaciones. Por ejemplo, para poder hablar de $\log(n)$ o de $\frac{1}{n}$ sin necesidad de estar recordando constantemente que n no puede ser cero.

Números enteros

El conjunto de los números enteros, $\mathbb{Z}$, es

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

La operación suma en $\mathbb{Z}$ es una operación interna: la suma (y la resta) de enteros es un entero. No ocurre lo mismo con el producto. El inverso de un número entero no nulo es un número racional.

Números racionales e irracionales

Los números racionales son aquellos que se pueden expresar como cociente de un entero y un natural:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \colon p \in \mathbb{Z},\, q \in \mathbb{N} \right\}.$$

Los números irracionales, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, son aquellos que no son racionales. Probablemente estás más acostumbrado a tratar con la representación decimal de los números reales. Los racionales tienen una cantidad finita de decimales o infinita periódica. Los irracionales, por tanto, tienen una cantidad infinita de decimales no periódicos.

Observación 1.2. El conjunto de los números irracionales *no* es, ni siquiera, un espacio vectorial como lo es el conjunto de los números racionales. El elemento neutro para la suma o el producto, 0 y 1, no son irracionales. Es muy fácil encontrar ejemplos de que la suma y el producto de números irracionales no es necesariamente un numero irracional: $\frac{2\pi}{\pi} = 2$.

Número algebraico

Número trascendente

Dentro de los números reales podemos distinguir entre números algebraicos y números trascendentes. Un número es *algebraico* si es solución de un polinomio con coeficientes enteros. Por ejemplo, cualquier racional o $\sqrt{2}$ son números algebraicos. Si no se puede expresar como raíz de un polinomio con coeficientes enteros diremos que es un número *trascendente.*

No es fácil buscar las raíces irracionales de un polinomio, pero sí podemos buscar las posibles raíces racionales de un polinomio con coeficientes enteros.

Observación 1.3. Dada la ecuación $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$, donde a_0, a_1,...,a_n son números enteros y $a_0 a_n \neq 0$, si la ecuación tiene una raíz racional p/q (con p y q primos entre si), entonces p divide a a_0 y q divide a a_n.

El conocimiento de las raíces racionales nos puede servir para comprobar que un número no es racional.

Ejemplo 1.4. Las únicas posibles raíces racionales del polinomio $x^2 - 2 = 0$ son ± 1, ± 2. Cómo ninguna de ellas es solución del polinomio, $\sqrt{2}$ no puede ser un número racional.
La otra demostración usual de que $\sqrt{2}$ no es un número racional utiliza la descomposición en primos de un número y la reducción al absurdo: supongamos que $\sqrt{2}$ fuera racional. Eso quiere decir que podría escribirse de la forma $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, donde $\frac{p}{q}$ es una fracción irreducible. Si elevamos al cuadrado obtenemos que $2q^2 = p^2$ y, en consecuencia, p^2 es un número par. Pero para que el cuadrado de un número sea par, necesariamente dicho número debe ser par. Luego $p = 2a$ para conveniente a. Sustituyendo, $q^2 = 2a^2$ y, por tanto, q también es par. Hemos obtenido una contradicción: la fracción p/q no puede ser irreducible y, a la vez, que numerador y denominador sean pares. Por tanto, $\sqrt{2}$ no puede ser racional.
Comprueba tú mismo que con las mismas ideas puedes comprobar que la raíz cuadrada de un natural es otro natural o un número irracional.

1.3 Valor absoluto

La distancia entre dos números reales se mide calculando la diferencia entre el mayor y el menor de ellos. La función que mide la distancia al cero es la función valor absoluto.

Valor Absoluto

Definición 1.5. Se define el *valor absoluto* de un número real x como

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0 \\ -x, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Proposición 1.6. *Dados $x, y \in \mathbb{R}$, se verifican las siguientes afirmaciones.*

a) $|x| \geq 0$, *y* $|x| = 0 \iff x = 0$,

b) $|x| \leq y \iff -y \leq x \leq y$,

c) $|x+y| \leq |x| + |y|$ *(desigualdad triangular),*

d) $||x| - |y|| \leq |x - y|$,

e) $|xy| = |x||y|$.

Para demostrar cualquiera de estas desigualdades o, en general, para trabajar con expresiones en las que intervienen valores absolutos tenemos varias posibilidades. La primera de ellas es discutir los distintos casos que se pueden presentar. Veamos un ejemplo.

Ejemplo 1.7. ¿Cuándo es cierta la desigualdad $|x-3| < |x-1|$?
Lo que vamos a hacer es eliminar el valor absoluto (una función definida a trozos) discutiendo todas las posibilidades:

a) si $x \leq 1$, $|x-3| < |x-1| \iff -(x-3) < -(x-1) \iff -3 > -1$ lo que, claramente, no es cierto,

b) si $1 \leq x \leq 3$, $|x-3| < |x-1| \iff -(x-3) < (x-1) \iff 2 < x$, y por último

c) si $x \geq 3$, $|x-3| < |x-1| \iff (x-3) < (x-1) \iff -3 < -1$.

Resumiendo, la desigualdad es cierta si, y sólo si, $x > 2$.

También podemos aprovechar el hecho de que elevar al cuadrado conserva el orden en los reales positivos: $0 < a < b \iff a^2 < b^2$. Vamos a utilizar esto para demostrar la desigualdad triangular:

$$\begin{aligned} |x+y| \leq |x| + |y| &\iff |x+y|^2 \leq (|x| + |y|)^2 \\ &\iff x^2 + y^2 + 2xy \leq x^2 + y^2 + 2|xy| \\ &\iff xy \leq |xy|, \end{aligned}$$

lo cual, evidentemente, es cierto. Observa que, de regalo, hemos probado que la igualdad en la desigualdad triangular es cierta si, y sólo si, $xy = |xy|$ o, lo que es lo mismo, si x e y tienen el mismo signo. Prueba tú a demostrar el resto de afirmaciones de la proposición anterior.

1.4 El principio de inducción

La definición del conjunto de los números naturales puede hacerse como la definición que hemos dado del conjunto de los números reales mediante una serie de propiedades que lo caractericen en lugar de especificar cuáles son sus elementos. Si el axioma del supremo es la propiedad clave que nos ha permitido definir los números reales, en el caso de los naturales dicha propiedad es la de ser inductivo.

Definición 1.8. Un subconjunto A de los números reales diremos que es *inductivo* si verifica las siguientes dos propiedades: **Conjunto inductivo**

a) $1 \in A$,

b) si $a \in A$, entonces $a + 1 \in A$.

Ejemplo 1.9.

a) $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}^+$ son conjuntos inductivos.

b) Ningún conjunto acotado puede ser un conjunto inductivo.

Definición 1.10. El conjunto de los números naturales es el menor conjunto inductivo o, lo que es lo mismo, la intersección de todos los conjuntos inductivos.

Proposición 1.11 (Principio de inducción). *Sea A un subconjunto de los números reales verificando que*

a) A es inductivo,

b) $A \subset \mathbb{N}$.

Entonces $A = \mathbb{N}$.

En otras palabras, para demostrar que un subconjunto del conjunto de los números naturales, $A \subset \mathbb{N}$, es, en realidad, el conjunto de los naturales es suficiente con comprobar que

a) $1 \in A$, y que

b) si $n \in A$, entonces $n + 1 \in A$.

La principal utilidad de este principio es demostrar que una propiedad indicada en el conjunto de los naturales es cierta. Por ejemplo, la propiedad "todos los números de la forma $n^3 + 5n$ son divisibles por 6" son en realidad muchas (tantas como naturales) afirmaciones. No es difícil fijar un natural y comprobar que para ese concreto la propiedad es cierta. Pero, ¿cómo podemos hacerlo para todos a la vez? En este tipo de demostraciones, el principio de inducción nos proporciona una ventaja. Para demostrar que se cumple para un natural puede suponerse que la propiedad es cierta para el natural anterior (hipótesis de inducción). Esto puede ser muy útil en algunas ocasiones.

Ejemplo 1.12. Demostrar que $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$, para cualquier $n \in \mathbb{N}$.
Lo demostramos usando el método de inducción. Tenemos que comprobar que el conjunto

$$A = \left\{n \in \mathbb{N};\ 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2\right\}$$

coincide con $\mathbb{N}$. Para ello es suficiente con demostrar que A es un conjunto inductivo, o sea, tenemos que comprobar que

a) la propiedad es cierta para $n = 1$, y que

b) si la propiedad es cierta para un número natural, también es cierta para el siguiente número natural.

Vamos allá.

a) Es inmediato comprobar que la propiedad se cumple la propiedad para $n = 1$.

b) Supongamos que se cumple para un natural fijo m y comprobemos que se cumple para $m + 1$:

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2m - 1) + (2m + 1) = m^2 + (2m + 1) = (m + 1)^2.$$

Por tanto, $A = \mathbb{N}$ y la propiedad se cumple para todos los naturales.

1.4.1 Una aplicación del principio de inducción: el binomio de Newton

¿Cuántas posibilidades tienes de que aciertes la lotería primitiva? Tienes que escoger 6 números de entre 47 sin importar el orden. El número de combinaciones posibles es $\binom{47}{6}$.

Las combinaciones sin repetición de n elementos tomados de p en p se definen como las distintas agrupaciones formadas con p elementos distintos, eligiéndolos de entre los n elementos de que disponemos, considerando una variación distinta a otra sólo si difieren en algún elemento, y sin tener en cuenta el orden de colocación de sus elementos. El número de combinaciones que se pueden construir de esta forma es

$$\binom{n}{p} = \frac{n\omega}{p\omega(n-p)\omega}$$

A los números de la forma $\binom{n}{p}$, "n sobre p" se les suele llamar números *combinatorios*. Recordemos que el factorial de un número natural n es

Números combinatorios

$$n\omega = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$$

y que $0\omega = 1$.

Las siguientes propiedades de los números combinatorios son fáciles de comprobar y nos serán muy útiles.

a) $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$, para cualquier $n \in \mathbb{N}$.

b) $\binom{n}{i} + \binom{n}{i-1} = \binom{n+1}{i}$, para cualesquiera $i \leq n$ naturales.

Proposición 1.13 (Binomio de Newton). *Dados $a, b \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$, se cumple que*

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^i$$

Demostración. Vamos a probarlo usando el método de inducción. Es claro que la propiedad es cierta para $n = 1$. Supongamos que es cierta para un natural fijo n y comprobemos que se cumple para $n+1$:

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n \\
&= (a+b) \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^i \\
&= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i+1} b^i + \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^{i+1} \\
&= \binom{n}{0} a^{n+1} + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} a^{n+1-i} b^i + \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} a^{n-i} b^{i+1} + \binom{n}{n} b^{n+1} \\
&= \binom{n+1}{0} a^{n+1} + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} a^{n+1-i} b^i + \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} a^{n-i} b^{i+1} + \binom{n+1}{n+1} b^{n+1} \\
&= \binom{n+1}{0} a^{n+1} + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} a^{n+1-i} b^i + \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j-1} a^{n+1-j} b^j + \binom{n+1}{n+1} b^{n+1} \\
&= \binom{n+1}{0} a^{n+1} + \sum_{i=1}^{n} \left[\binom{n}{i} + \binom{n}{i-1} \right] a^{n+1-i} b^i + \binom{n+1}{n+1} b^{n+1}
\end{aligned}$$

$$= \binom{n+1}{0} a^{n+1} + \sum_{i=1}^{n} \binom{n+1}{i} a^{n+1-i} b^i + \binom{n+1}{n+1} b^{n+1}$$
$$= \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} a^{n+1-i} b^i . \square$$

La utilidad del binomio de Newton estriba en que no es necesario calcular el desarrollo completo de $(x+3)^{15}$ si sólo nos interesa el coeficiente de x^4 que, por cierto, es $\binom{15}{4} 3^{11}$.

Triángulo de Pascal o de Tartaglia

Los coeficientes del desarrollo de $(a+b)^n$ también se pueden encontrar usando el llamado triángulo de Pascal (o de Tartaglia). Este consiste en lo siguiente: comenzamos con un 1, en cada línea nueva añadimos unos en los extremos y bajo cada par de números colocamos su suma. El resultado que se obtiene nos da los coeficientes del binomio de Newton.

n	triángulo de Pascal	nº combinatorio	$(\mathbf{a}+\mathbf{b})^{\mathbf{n}}$
0	1	$\binom{0}{0}$	
1	1 1	$\binom{1}{0}$ $\binom{1}{1}$	$a+b$
2	1 2 1	$\binom{2}{0}$ $\binom{2}{1}$ $\binom{2}{2}$	$a^2+2ab+b^2$
3	1 3 3 1	$\binom{3}{0}$ $\binom{3}{1}$ $\binom{3}{2}$ $\binom{3}{3}$	$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

Tabla 1.1 Triángulo de Pascal o Tartaglia

1.5 Conjuntos destacados

Definición 1.14.

a) Sea $A \subset \mathbb{R}$, diremos que $M \in \mathbb{R}$ es una *cota superior* o *mayorante* (resp. *inferior* o *minorante*) de A si $a \leq M$ para cualquier $a \in A$ (resp. $a \geq M$).
El conjunto $A \subset \mathbb{R}$ está *acotado superiormente* o *mayorado* (resp. *acotado inferiormente* o *minorado*) si tiene una cota superior (resp. inferior). Por último el conjunto está *acotado* si está mayorado y minorado.

b) Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}$. Diremos que $a_0 \in A$ es el *máximo absoluto* (resp. *mínimo absoluto*) de A si verifica que $a \leq a_0$ (resp. $a \geq a_0$) para cualquier $a \in A$ y lo llamaremos $\max(A)$ (resp. $\min(A)$).

Veamos algunos ejemplos de estos conceptos.

Ejemplo 1.15.

a) El conjunto de los números naturales no es un conjunto acotado. Concretamente, no es un conjunto acotado superiormente pero sí está acotado inferiormente. Como no está acotado superiormente no tiene máximo. Sí tiene mínimo: $1 \leq n$ para cualquier natural n.

b) El conjunto $\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ está acotado superior e inferiormente: $0 \leq \frac{1}{n} \leq 1$ para cualquier natural n. Tiene máximo: el 1, pero no tiene mínimo. El mínimo podría ser el cero pero no pertenece al conjunto.

A la vista de los ejemplos, la existencia de máximo implica que el conjunto esta acotado pero el recíproco no es cierto. Hay conjuntos acotados y que no tienen ni máximo ni mínimo: piensa en el intervalo $]0,1[$. Sin embargo, aunque ni el 0 ni el 1 sean ni máximo ni mínimo, sí parece claro que tienen un papel destacado. De alguna forma son los extremos del conjunto, pertenezcan o no a dicho conjunto. El supremo y el ínfimo van a ser una forma de reconocer este tipo de puntos.

Definición 1.16. Sea A un subconjunto acotado superiormente de $\mathbb{R}$. El *supremo* del conjunto A, $\sup(A)$, es el mínimo del conjunto de las cotas superiores de A. Análogamente se define el *ínfimo* de un conjunto acotado inferiormente como el máximo de sus cotas inferiores y lo notaremos $\inf(A)$.

Si llamamos, para A un conjunto mayorado, $M(A)$ al conjunto de sus mayorantes, entonces

$$\sup(A) = \min(M(A)).$$

Cabe preguntarse si un conjunto mayorado tiene supremo. La situación es la siguiente: si A es un conjunto mayorado el conjunto de sus mayorantes, $M(A)$, está minorado. Sabemos que un conjunto minorado no tiene por qué tener mínimo pero ¿y si el conjunto minorado del que estamos hablando es un conjunto de mayorantes?

Pues bien, se puede comprobar que la última propiedad de los números reales se puede reformular de la siguiente forma:

Axioma del supremo: *todo conjunto acotado superiormente tiene supremo.*

Este axioma es equivalente al "axioma del ínfimo". Sólo hay que darse cuenta de que si cambiamos el signo las desigualdades también cambian.

Ejemplo 1.17. Los extremos de un intervalo acotado son el supremo e ínfimo de dicho intervalo independientemente de si pertenecen o no al intervalo. En el caso particular de que alguno de ellos esté en dicho intervalo serán, además máximo o mínimo (lo que corresponda).

Proposición 1.18. *Sea A un conjunto acotado superiormente y sea x el supremo de A.*

a) Si $x \notin A$, entonces A no tiene máximo.

b) Si $x \in A$, entonces A tiene máximo y, de hecho, $x = \max(A)$.

La siguiente proposición será útil en la demostración de algunos resultados posteriores.

Proposición 1.19. *Sea $A \subset \mathbb{R}$ un subconjunto acotado superiormente y sea $x \in \mathbb{R}$. Entonces*

$$x = \sup(A) \iff \begin{cases} i)\ a \le x, \ \text{para todo } a \in A \\ ii)\ \text{dado } \varepsilon > 0, \ \exists\, a \in A \text{ tal que } x - \varepsilon < a. \end{cases}$$

1.5.1 Intervalos

Los conjuntos que van a jugar un papel más destacado son los intervalos.

Definición 1.20. Un subconjunto I de $\mathbb{R}$ es un *intervalo* si para cualesquiera $x, y \in I$ se cumple que $[x, y] = \{t \in \mathbb{R} \colon x \le t \le y\} \subset I$.

Ya conoces cuales son los distintos intervalos: abiertos, semiabiertos, cerrados, acotados o no:

$$
\begin{aligned}
[a,b] &= \{x \in \mathbb{R} \colon a \le x \le b\} \\
]a,b] &= \{x \in \mathbb{R} \colon a < x \le b\} \\
[a,b[&= \{x \in \mathbb{R} \colon a \le x < b\} \\
]a,b[&= \{x \in \mathbb{R} \colon a < x < b\} \\
[a,+\infty[&= \{x \in \mathbb{R} \colon a \le x\} \\
]a,+\infty[&= \{x \in \mathbb{R} \colon a < x\} \\
]-\infty,b] &= \{x \in \mathbb{R} \colon x \le b\} \\
]-\infty,b[&= \{x \in \mathbb{R} \colon x < b\}
\end{aligned}
$$

Definición 1.21. Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}$.

a) Diremos que $a \in A$ es un *punto interior* si existe $\varepsilon > 0$ tal que $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\subset I$.

b) El *interior* de A es el conjunto, $\mathring{A} = \{a \in A \colon a \text{ es un punto interior}\}$. Diremos que el conjunto A es *abierto* si coincide con su interior.

c) Diremos que $x \in \mathbb{R}$ es un *punto adherente* si para cualquier $\varepsilon > 0$ se tiene que

$$]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\cap A \neq \emptyset.$$

d) El *cierre* o *adherencia* del conjunto A es $\overline{A} = \{x \in \mathbb{R} \colon x \text{ es un punto adherente de } A\}$. Diremos que el conjunto A es *cerrado* si coincide con su adherencia.

e) Diremos que $x \in \mathbb{R}$ es un *punto de acumulación* de A si para cualquier r positivo se cumple que

$$]a-r, a+r[\cap (A \setminus \{a\}) \neq \emptyset.$$

Notaremos A' al conjunto de todos los puntos de acumulación de A.

f) Diremos que $x \in \mathbb{R}$ es un *punto aislado* del conjunto A si existe $r > 0$ tal que

$$]a-r, a+r[\cap A = \{a\}.$$

g) La *frontera* de A es $\operatorname{Fr}(A) = \overline{A} \setminus \mathring{A}$.

Ejemplo 1.22.

a) Los intervalos abiertos, ya sean acotados o no, son conjuntos abiertos. De la misma forma los intervalos cerrados son conjuntos cerrados.

b) El conjunto de los naturales $\mathbb{N}$ es cerrado y tiene interior vacío al igual que $\mathbb{Z}$. Además todos sus puntos son aislados.

c) El conjunto $A = \left\{\frac{1}{n} \colon n \in \mathbb{N}\right\}$ tiene interior vacío, todos sus puntos son aislados y su cierre es $A \cup \{0\}$. Más concretamente, 0 es un punto de acumulación de A.

Proposición 1.23. *Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}$. Se verifican las siguientes afirmaciones.*

a) $\mathring{A} \subset A \subset \overline{A}$, *b) A es abierto si, y sólo si, $\mathbb{R} \setminus A$ es cerrado.*

1.6 Ejercicios

Ejercicio 1.1. Calcula para quÃ© valores de x se verifica que $\frac{2x-3}{x+2} < \frac{1}{3}$.

Ejercicio 1.2. Encuentra aquellos valores de x que verifican que:

a) $\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} > 0$,
b) $x^2 - 5x + 9 > x$,
c) $x^3(x-2)(x+3)^2 < 0$,
d) $x^2 \leqslant x$,
e) $x^3 \leqslant x$,
f) $x^2 - 3x - 2 < 10 - 2x$.

Ejercicio 1.3. Discute para qué valores de x se verifica que:

a) $|x-1|\,|x+2| = 3$,
b) $|x^2 - x| > 1$,
c) $|x-1| + |x+1| < 1$,
d) $|x+1| < |x+3|$.

Ejercicio 1.4.

a) Calcula para qué valores de x se verifica que $x^4 - 2x^2 > x^2 - 2$.
b) Calcula para qué valores de x se verifica que $\frac{x^2-4x-2}{x^3+1} > 0$.
c) Calcula para qué valores de x se verifica la desigualdad $\frac{1-2x}{x^2-4} > \frac{1}{2}$.
d) Calcula para qué valores de $x \in \mathbb{R}$ se verifica que $|x-6|\,(1+|x-3|) \geq 1$.
e) Calcula para qué valores de $x \in \mathbb{R}$ se verifica que $\frac{3-x}{x+4} < \frac{x+2}{2x-3}$.
f) Calcula para qué valores de $x \in \mathbb{R}$ se verifica que $\left|\frac{x^3-5}{x^2-2x-3}\right| \leq 1$.

Ejercicio 1.5. ¿Para qué valores de x se cumple la desigualdad $x^2 - (a+b)x + ab < 0$?

 Introducción al Análisis Numérico

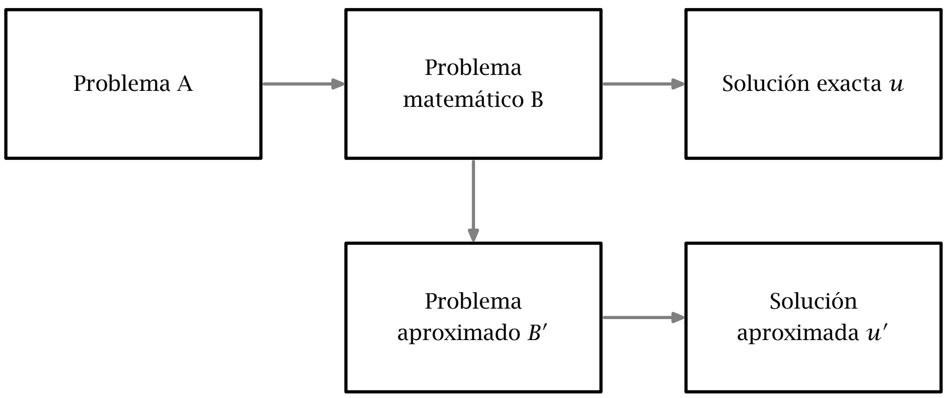
Introducción al Análisis Numérico

2

2.1 Introducción al Análisis Numérico

El análisis numérico usa métodos para aproximar de forma eficiente las soluciones de un problema matemático. De forma usual involucra cambiar cantidades que no pueden ser calculadas explícitamente por aproximaciones y, por tanto, es muy importante el manejo de los errores cometidos.

En la práctica, un problema matemático se suele derivar de un problema físico sobre el que se hacen algunas suposiciones y/o simplificaciones hasta un obtener un modelo matemático. Normalmente las suposiciones permiten trabajar con un problema matemático resoluble que se suele complicar más cuando eliminamos dichas suposiciones. Dado que el problema matemático es una aproximación al problema físico, tiene interés encontrar soluciones aproximadas al menos al problema matemático. El análisis numérico está interesado en el desarrollo de métodos (algoritmos) que construyan de forma explícita y en una cantidad finita de pasos una solución aproximada. Tienen más interés por tanto aquellas demostraciones o construcciones que permiten encontrar explícitamente la solución.



En resumen, comenzamos con un problema real A, dicho problema lo trasladamos a un problema matemático B con solución exacta u y, por último, este problema se puede cambiar por un problema matemático más sencillo B' con solución u'. De este desarrollo surgen algunos problemas que hay que considerar:

a) ¿Cómo podemos medir el parecido o la diferencia entre B y B'?

b) Problemas de estabilidad; es inevitable cometer errores en el cálculo, debido a los redondeos que efectúan los computadores. Interesa que pequeños errores cometidos en los cálculos que conducen a u' hagan que el resultado no difiera mucho de u (hablaremos de esto en la última sección).

c) Coste del proceso. ¿Cuántas operaciones deben realizarse? ¿Cuánto tiempo se precisa para realizarlas?

Ejemplo 2.1. Podemos evaluar el polinomio $p(x) = 12x^4 + 5x^3 - 18x^2 + 7x + 11$ de varias formas. También podemos escribirlo como $p(x) = (((12x+5)x-18)x+7)x+11$. El número de operaciones para evaluarlo en el primer caso es de $4 + 3 + 2 + 1 = 10$ multiplicaciones y 4 sumas, 15 en total, mientras que en el segundo se requieren solamente 4 multiplicaciones y 4 sumas.
En el caso general de un polinomio de orden n, el número de multiplicaciones necesario para evaluarlo si está escrito como

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

es $\frac{n(n+1)}{2}$. En cambio, si lo evaluamos usando

$$(\ldots((a_n x + a_{n-1})x + a_{n-2})x + \cdots + a_1)x + a_0$$

sólo necesitamos n multiplicaciones. Es preferible usar el segundo método porque exige menos operaciones y, por tanto, menos posibilidades error. El segundo método de evaluar el polinomio se denomina algoritmo de Horner.

Algoritmo de Horner

2.2 Errores absolutos y relativos

Cuando aproximamos un número real existen dos indicadores de la precisión de dicha aproximación. En concreto:

Definición 2.2. Sea α un valor real y α^* una aproximación de éste. Se define entonces el *error absoluto* como

$$\mathrm{err}_a = |\alpha - \alpha^*|$$

Y si $\alpha \neq 0$, se define el *error relativo* como

$$\mathrm{err}_r = \frac{|\alpha - \alpha^*|}{|\alpha|}$$

Ejemplo 2.3. Con los siguientes ejemplos vamos a constatar que se puede dar el mismo error relativo aunque los errores absolutos sean distintos.

α	α^*	**error absoluto**	**error relativo**
2	2.1	0.1	0.05
2×10^{-4}	2.1×10^{-4}	0.1×10^{-4}	0.05
2×10^{4}	2.1×10^{4}	0.1×10^{4}	0.05

Tabla 2.1 Ejemplos de errores absolutos y relativos

Hay que comentar que el valor del error relativo nos informa de la relevancia del error cometido al hacer la aproximación. Si medimos la distancia de Granada a Barcelona, así como la longitud de una pizarra y en ambos casos cometemos un error (absoluto) de 15cm, está claro que en el primer caso podríamos asegurar que la medición es correcta, cosa que en el segundo caso no sería. El motivo de que una aproximación sea precisa o no estriba en el error relativo. En el primer caso el error relativo es muy pequeño si estamos midiendo kilómetros; mientras que en el caso de la pizarra, sería un error relativo considerable.

En la práctica, como el valor de α no se conoce, en consecuencia tampoco se conocen los errores absoluto y relativo. Pero sí se pueden encontrar acotaciones de dichos errores.

Definición 2.4. Se dice que $M > 0$ es una *cota del error* si se verifica que $\mathrm{err}_a < M$.

Clasificación de los errrores

Hay muchas causas que pueden interferir en la precisión de un cálculo y generar errores. Esos errores se pueden clasificar en:

Errores iniciales: Vienen de los problemas al recoger los datos iniciales y se deben usualmente a medidas con precisión limitada.

Errores de redondeo: Son debidos a redondeos en los cálculos porque están hechos con un número finito de cifras significativas

Errores de truncamiento: Corresponden a truncamientos de procedimientos infinitos como cuando nos quedamos con una cantidad finita de términos en una serie.

Errores de propagación: Son debidos a la propagación de errores previos en el algoritmo.

Ejemplo 2.5. El siguiente código es parte de la implementación de la función exponencial en la librería μ Clibc[1]

```
/*
 * ====================================================
 * Copyright (C) 1993 by Sun Microsystems, Inc. All rights reserved.
 *
 * Developed at SunPro, a Sun Microsystems, Inc. business.
 * Permission to use, copy, modify, and distribute this
 * software is freely granted, provided that this notice
 * is preserved.
 * ====================================================
 */

/* __ieee754_exp(x)
 * Returns the exponential of x.
 *
 * Method
 *   1. Argument reduction:
 *      Reduce x to an r so that |r| <= 0.5*ln2 ~ 0.34658.
 *     Given x, find r and integer k such that
 *
 *               x = k*ln2 + r,  |r| <= 0.5*ln2.
 *
 *      Here r will be represented as r = hi-lo for better
 *     accuracy.
```

[1] μ Clibc es una pequeña biblioteca en C diseñada para sistemas con Linux empotrado.

```
*
*   2. Approximation of exp(r) by a special rational function on
*      the interval [0,0.34658]:
*      Write
*          R(r**2) = r*(exp(r)+1)/(exp(r)-1) = 2 + r*r/6 - r**4/360 + ...
*       We use a special Reme algorithm on [0,0.34658] to generate
*      a polynomial of degree 5 to approximate R. The maximum error
*      of this polynomial approximation is bounded by 2**-59. In
*      other words,
*          R(z) ~ 2.0 + P1*z + P2*z**2 + P3*z**3 + P4*z**4 + P5*z**5
*      (where z=r*r, and the values of P1 to P5 are listed below)
*      and
*          |                  5          |     -59
*          | 2.0+P1*z+...+P5*z   -  R(z) | <= 2
*          |                             |
*      The computation of exp(r) thus becomes
*                              2*r
*              exp(r) = 1 + -------
*                            R - r
*                                 r*R1(r)
*                     = 1 + r + ----------- (for better accuracy)
*                                2 - R1(r)
*      where
*                              2       4             10
*              R1(r) = r - (P1*r  + P2*r  + ... + P5*r   ).
*
*   3. Scale back to obtain exp(x):
*      From step 1, we have
*         exp(x) = 2^k * exp(r)
```

Sin entrar en detalles, el cálculo de la exponencial incluye que

a) Dividimos y cambiamos el punto donde se calcula la exponencial por otro menor o igual que $0.5\log(2) \approx 0.34658$.

b) Aproximamos la función exponencial por un polinomio de grado 5 en dicho intervalo.

c) Reescalamos para obtener el resultado buscado.

Observa que en cada paso, estamos perdemos algo de exactitud. ¿Qué tipo de errores estamos cometiendo?

2.3 Aritmética de ordenador

Cuando hacemos cálculos con un ordenador se suelen cometer errores debido a las aproximaciones que se suelen hacer en dichos cálculos y en cómo el ordenador almacena los números que aparecen. Estos últimos errores se llaman de redondeo.

Veamos a continuación cómo el ordenador almacena los números reales.

2.3.1 Expresión decimal y expresión binaria

El *sistema decimal* es el sistema de representación de números que nos resulta más familiar. Si un número x se puede escribir en base 10 como

$$x = \pm(\alpha_n 10^n + \alpha_{n-1}10^{n-1} + \cdots + \alpha_0 10^0 + \alpha_{-1}10^{-1} + \alpha_{-2}10^{-2} + \cdots)$$

donde $\alpha_i \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$, su expresión decimal es

$$\pm\alpha_n\alpha_{n-1}\ldots\alpha_0.\alpha_{-1}\alpha_{-2}\ldots$$

Por ejemplo, si un número tiene por expresión decimal 74.348 es porque

$$74.348 = 7 \times 10^1 + 4 \times 10^0 + 3 \times 10^{-1} + 4 \times 10^{-2} + 8 \times 10^{-3}$$

Sin embargo, en la mayoría de los ordenadores se utliza la representación en el *sistema binario*; esto es, los dígitos con los que vamos a trabajar ahora van a ser dos:$\{0, 1\}$, ya que trabajamos en base 2:

$$x = \pm(\beta_n 2^n + \beta_{n-1}2^{n-1} + \cdots + \beta_0 2^0 + \beta_{-1}2^{-1} + \beta_{-2}2^{-2} + \cdots)$$

donde $\beta_i \in \{0, 1\}$, entonces la expresión binaria de x es

$$\pm\beta_n\beta_{n-1}\ldots\beta_0.\beta_{-1}\beta_{-2}\ldots$$

Ejemplo 2.6. No es difícil pasar de la representación en sistema decimal a sistema binario y viceversa. Por ejemplo, dado el número 101.011 en sistema binario, su representación en sistema decimal es 5.375 ya que

$$1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 + 0 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-2} + 1 \times 2^{-3} = 5.375$$

Veamos ahora un ejemplo del paso contrario. Por ejemplo, sea 10.75 en sistema decimal. Su representación en sistema binario es 1010.11 ya que

$$10.75 = 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0 + 1 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-2}$$

¿Por qué?

Hay que tener en cuenta que un número en sistema decimal puede tener un número finito de decimales (por ejemplo 0.1) y, sin embargo, puede tener infinitos decimales en sistema binario $(0.1_{2)} = 0.0001100011\ldots)$.

2.3.2 Almacenamiento de números reales

La limitación del espacio en un ordenador obliga a que éste no pueda guardar todos los números reales (infinitos), sino que sólo pueda almacenar un subconjunto finito de números llamados *números máquina*. Además, cuando un ordenador almacena un número real, en realidad lo que almacena es una aproximación suya.

Cuando escribimos el número 12.304 en el sistema decimal también lo podríamos escribir así:

$$\begin{aligned}
12304 \times 10^{-3} \\
1230.4 \times 10^{-2} \\
123.04 \times 10^{-1} \\
12.304 \times 10^{0} \\
1.2304 \times 10^{1} \\
12304 \times 10^{2} \\
0.12304 \times 10^{3}
\end{aligned}$$

Lo que hemos hecho ha sido desplazar el punto decimal. Análogamente se haría en el sistema binario.

El ordenador utiliza una representación estándar para escribir los números reales que se llama *representación de punto flotante*. Esto es, si x es un número real dado, se escribiría como sigue

$$x = \pm a \times 10^b$$

donde a es una expresión decimal finita, llamada *mantisa* y verifica que: $0.1 \le a \le 1$ y b es un número entero, llamado *exponente*. Si trabajamos en el sistema binario, entonces:

$$x = \pm a \times 2^b$$

siendo $0.1 \le a \le 1$ (en base 2) la mantisa, y b un entero, el exponente.

La precisión de un número máquina depende del número de *bits* (espacios) utilizados para ser almacenados. La limitación de espacios (bits) hace que el ordenador tenga una cota por arriba y una cota por abajo, además de que para calcular obligatoriamente se vea obligado a hacer redondeos para manejar números que pueda almacenar.

2.3.3 Propiedades de la aritmética de ordenador

Los errores de redondeo pueden alterar las propiedades elementales de la aritmética, como son la propiedad asociativa o la de elemento neutro.

En prácticas con wxMaxima veremos ejemplos de cómo la aritmética de ordenador altera la aritmética real.

2.3.4 Cancelación de cifras significativas

La aritmética de ordenador requiere que al hacer cálculos organicemos con detalle los mismos para que las aproximaciones que se hagan no afecten en demasía a la precisión del resultado final. Con respecto a esto y, en concreto, cuando restamos dos números similares, se da el fenómeno de la *cancelación de cifras significativas* que, en determinados procesos de cálculo, puede afectar considerable y negativamente a la precisión del resultado final.

Ejemplo 2.7. Consideremos dos números reales "casi" iguales

$$p = 1.23456789 \quad q = 1.23454678$$

y supongamos que estamos trabajando con una precisión de 9 cifras. Si los restamos:

$$p - q = 0.00002111$$

observamos que hemos perdido precisión ya que de 9 cifras significativas, hemos pasado a sólo 4 (el resto son iguales). Puede ocurrir, entonces, que el ordenador sustituya estas cifras por ceros o por valores arbitrarios (depende de la máquina), lo que puede afectar a los cálculos siguientes.

Veamos otro ejemplo donde se constata el efecto que produce el fenómeno de la cancelación de cifras significativas.

Ejemplo 2.8. Por ejemplo, al resolver una ecuación de segundo grado $a x^2+bx+c = 0$ y al calcular las raíces de la forma convencional

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

observamos que, cuando b es positivo y grande, en el numerador de x_1 estamos restando dos números similares ($\sqrt{b^2-4ac} \approx b$), con lo que se producirá el efecto de la cancelación de cifras significativas; mientras que en el cálculo de x_2 este efecto no se producirá puesto que estamos sumando dos cifras similares. Para evitar lo primero podemos radicalizar la fórmula que calcula x_1 de la forma siguiente:

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{(-b+\sqrt{b^2-4ac})}{2a}\,\frac{(-b-\sqrt{b^2-4ac})}{(-b-\sqrt{b^2-4ac})} = \frac{-2c}{b+\sqrt{b^2-4ac}}$$

El fenómeno que acabamos de comentar lo constataremos en prácticas con wxMaxima con un ejemplo concreto.

2.4 Estabilidad

¿Qué pasa cuando acumulamos errores debido a hacer un número elevado de operaciones? A este fenómeno se le conoce como propagación de errores. Y el objetivo es saber reconocer situaciones en los que los errores se magnifiquen. Veremos que muchas veces, sólo cambiando el proceso de cálculo podemos evitar situaciones molestas.

2.4.1 Propagación de errores

Las operaciones de multiplicación, división y radicación no afectan a la magnificación de errores relativos. No ocurre lo mismo con los errores absolutos ya que el dividir por un número pequeño o, lo que es lo mismo, multiplicar por un número grande, se puede magnificar el error absoluto.

Ya que los errores son inevitables en el cálculo numérico, al menos debemos aspirar cuando establezcamos un algoritmo que la propagación de errores no afecte demasiado al resultado final. Cuando esto ocurra diremos que el algoritmo es *estable*. En otro caso, diremos que el algoritmo es *inestable*. A lo largo del curso intentaremos asegurar la estabilidad de los algoritmos propuestos.

En prácticas veremos cómo dos algoritmos matemáticamente equivalentes no tienen por qué tener la misma estabilidad cuando se trabaja con aritmética de ordenador. Concretamente, estableceremos dos algoritmos para calcular la potencia n-sima de $1/3$, es decir, $1/3^n$, ambos equivalentes. Sin embargo, trabajando con una aritmética de 5 dígitos (esto es, aproximando $1/3$ por 0.33333), uno de ellos será estable, mientras que el otro será inestable.

2.5 Ejercicios

Ejercicio 2.1. Comprobar las siguientes propiedades de los sumatorios:

a) $\sum\limits_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k + \sum\limits_{k=1}^{n} b_k$

b) $\sum_{k=1}^{n} (c\, a_k) = c \sum_{k=1}^{n} a_k,$

c) $\sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k-1}) = a_n - a_0,$

Ejercicio 2.2. Estudiar si son ciertas las igualdades:

a) $\sum_{i=1}^{100} (i-1)^2 = \sum_{i=0}^{99} i^2,$

b) $\sum_{k=0}^{100} (2+k) = 202 + \sum_{k=0}^{100} k,$

c) $\sum_{k=1}^{100} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{100} k\right) \left(\sum_{k=1}^{100} k^2\right),$

d) $\sum_{k=1}^{100} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{100} k\right)^3,$

e) $\sum_{k=0}^{100} k^2 = \sum_{k=1}^{100} k^2,$

f) $\sum_{k=0}^{100} k^2 = \sum_{k=1}^{99} k^2 + 2 \sum_{k=1}^{99} k + 100.$

Ejercicio 2.3. Consideremos las funciones:

$$f(x) = x\left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right)\,, \quad g(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$$

Observemos que algebraicamente f es equivalente a g. Deseamos hallar el valor de $f(500)$ y $g(500)$. ¿Qué función proporciona mejores resultados? ¿Por qué?

Ejercicio 2.4. Deseamos calcular $\sqrt{9876} - \sqrt{9875}$ ¿Cuál es el mejor modo de realizarlo?

Ejercicio 2.5. Detectar posibles problemas en la evaluación de las expresiones siguientes y proponer alternativas para evitarlas:

a) $\dfrac{1}{1+2x} - \dfrac{1-x}{1+x}$ para $|x|$ mucho menor que 1.

b) $\sqrt{x + \dfrac{1}{x}} - \sqrt{x - \dfrac{1}{x}}$ para $|\,x\,|$ mucho mayor que 1.

c) $\dfrac{1-\cos(x)}{x}$ para $|\,x\,|$ mucho menor que 1, $x \neq 0$.

Funciones elementales

3

La idea de función aparece por todas partes: cada persona tiene una edad o un número de hijos o una cantidad de dinero en el bolsillo. No necesariamente tenemos que referirnos a números, podemos decir que cada persona tiene, o tuvo, un color de pelo, una marca de coche, etc. El formalismo de las funciones nos permite tratar todas estas situaciones de la misma forma.

3.1 Definiciones

3.1.1 Dominio, rango e imagen

Definición 3.1. Una función $f\colon A \to B$ es una regla que a cada elemento a de A le asocia un único elemento de B. Al conjunto A se la llama *dominio* de la función y a B se le suele llamar *codominio*. No hay que confundir el codominio con la *imagen* de la función que es conjunto

$$f(A) = \{b \in B\colon \exists\, a \in A \text{ tal que } f(a) = b\}.$$

La *preimagen* de un elemento b de B son aquellos elementos de A cuya imagen es B. Utilizaremos la siguiente notación

$$f^{-1}(b) = \{a \in A\colon f(a) = b\}.$$

Por extensión, también se puede hablar de la preimagen de un conjunto. Si $B_0 \subset B$, la preimagen de B_0 es

$$f^{-1}(B_0) = \{a \in A\colon f(a) \in B_0\}.$$

La *gráfica* de la función es el conjunto $\operatorname{Gr}(f) = \{(a,b) \in A \times B\colon f(a) = b\}$.

Observación 3.2. La definición de función incluye tres cosas obligatoriamente: el dominio, el codominio y la regla que a cada elemento del dominio le asocia uno del codominio. En ocasiones abusaremos del lenguaje y hablaremos, por ejemplo, de la función $f(x) = \sqrt{x+1}$. ¿Qué queremos decir? Sólo tenemos la regla que define la función. ¿Cuáles son su dominio y su codominio? Su *dominio natural* es el mayor conjunto donde la definición tiene sentido. En nuestro caso sería $\{x \in \mathbb{R}\colon x \geq -1\}$ y el codominio es simplemente la imagen de la función. En general y salvo que se diga lo contrario, en ausencia de un dominio explícito nos referiremos al conjunto donde tiene sentido la definición de la función.

Ejemplo 3.3. Consideremos la función $f\colon [0, 3\pi] \to \mathbb{R}$ definida como $f(x) = \cos(x)$.

a) Su dominio es el intervalo $[0, 3\pi]$

b) Su codominio es todo el conjunto de los números reales aunque podríamos haber puesto cualquier conjunto más grande que el intervalo $[-1, 1]$ (su imagen).

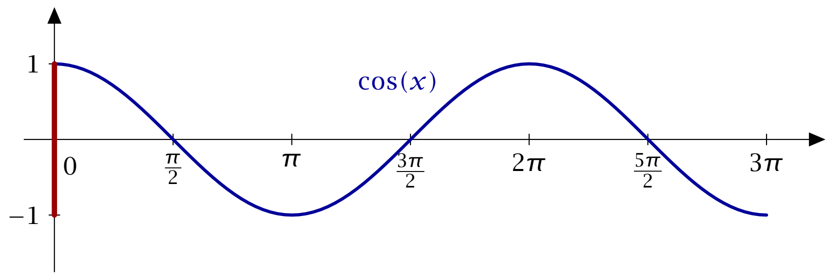


Figura 3.1 Gráfica e imagen de la función coseno

c) En la Figura 3.1 hemos representado en azul la gráfica de la función, esto es, el siguiente subconjunto del plano

$$\{(x, \cos(x)) \colon x \in [0, 3\pi]\}.$$

d) La imagen de la función son los valores que toma. En este caso, la función coseno toma todos los valores entre -1 y 1 (en rojo en la figura anterior).

e) La preimagen de un valor puedes ser única, pueden ser varios elementos o vacía. En nuestro caso, al ser la función periódica, la preimagen nunca es única. Por ejemplo,

$$f^{-1}(1) = \{x \in [0, 3\pi] \colon \cos(x) = 1\} = \{0, 2\pi\},$$

en cambio, $f^{-1}(2) = \emptyset$, ya que la función coseno nunca vale 2.

f) ¿Cuando es la función positiva? Por definición, cuando el valor de la función es mayor estrictamente que cero:

$$f^{-1}(]0, +\infty[) = \{x \in [0, 3\pi] \colon \cos(x) > 0\} = \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right[.$$

Observa que en este caso $f^{-1}(]0, +\infty[) = f^{-1}(]0, 1])$.

Ejemplo 3.4. Uno de los ejemplos más frecuentes de funciones con los que nos encontramos son las *sucesiones*. En el Capítulo 13 hablaremos de ellas con más detalle. Una sucesión es una función cuyo dominio es el conjunto de los números naturales. Si el codominio es el conjunto de los números reales, tenemos una sucesión de números reales; si el codominio es el conjunto de los alumnos de la clase, tendremos una sucesión de estudiantes, etc. Es importante resaltar que el hecho de que el dominio sea $\mathbb{N}$ lo que nos da es una *lista ordenada* de elementos. Por ejemplo, la función

$$\begin{aligned} f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}, \quad & f(n) = 2n \\ 1 &\mapsto 2 \\ 2 &\mapsto 4 \\ & \ldots \end{aligned}$$

nos enumera el conjunto de los pares: el primer número par es el 2, el segundo el 4, etc.

Ejemplo 3.5. Todos los ejemplos hasta ahora han tenido subconjuntos de $\mathbb{R}$ como dominio y codominio. Es por eso que todas las representaciones las hemos hecho en el plano $\mathbb{R}^2$. La representación de funciones con más variables en salida o en llegada requiere más dimensiones para la representación de su gráfica. En la Figura 3.2 tienes la representación de la función definida en el plano como

$$f(x,y) = \frac{\cos\left(x^2+y^2\right)}{1+x^2+y^2}.$$

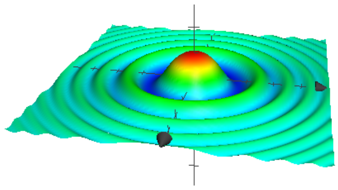


Figura 3.2 Gráfica de una función de dos variables

No es sencillo visualizar en el papel funciones de más variables ya que habría que representar espacios con cuatro dimensiones o más en el plano.

3.1.2 Funciones inyectivas, sobreyectivas y biyectivas

Definición 3.6.

a) Una función $f\colon A \to B$ es *inyectiva* si se cumple que no hay dos elementos distintos con la misma imagen, esto es, si $x \neq y$ entonces $f(x) \neq f(y)$.

b) Una función $f\colon A \to B$ es *sobreyectiva* si todo elemento tiene una preimagen, esto es, dado $b \in B$ existe $a \in A$ tal que $f(a) = b$.

c) Una función $f\colon A \to B$ es *biyectiva* si es inyectiva y sobreyectiva.

Ejemplo 3.7.

a) La función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como $f(x) = x^2$ no es inyectiva ni sobreyectiva. Su imagen es $\mathbb{R}_0^+$. Por tanto, la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$, $f(x) = x^2$ es sobreyectiva. Ninguna de las dos versiones es inyectiva: $f(x) = f(-x)$. Si restringimos a los positivos o a los negativos, sí. Por ejemplo, $f\colon \mathbb{R}^- \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ es inyectiva.

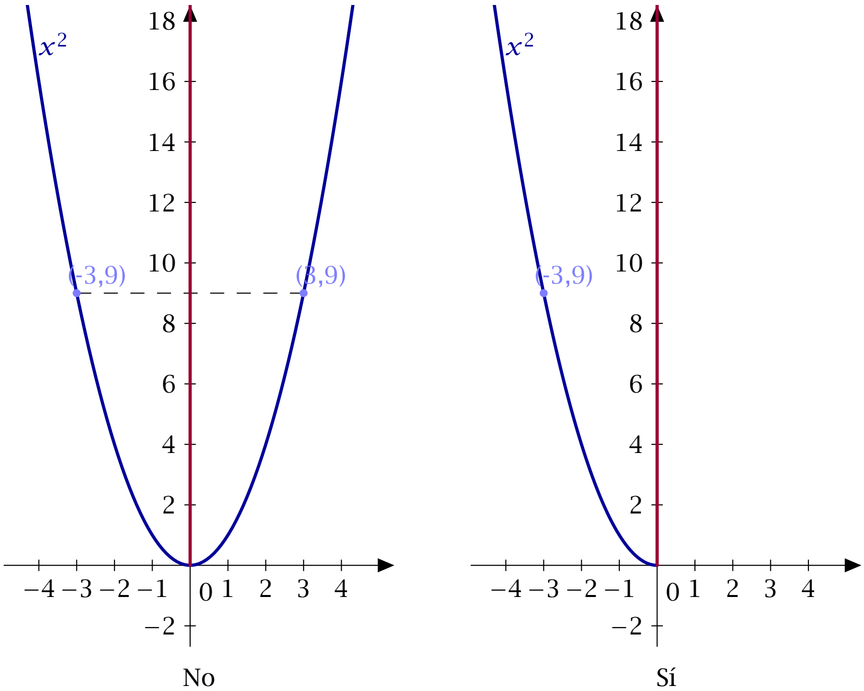


Figura 3.3 ¿La función x^2 es inyectiva?

b) Las funciones periódicas no son inyectivas: el valor de la función se repite cuando avanzamos el periodo, más concretamente, si la función es T-periódica, entonces $f(x) = f(x+T)$.

c) La función exponencial y el logaritmo son inyectivas.

d) La función sen: $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1]$ es biyectiva.

Función inversa

Si $f\colon A \to B$ es una función inyectiva, la función inversa de f, a la que denotaremos f^{-1}, es la función $f^{-1}\colon f(A) \to A$ definida por $f^{-1}(f(a)) = a$. En otras palabras, si la función f envía a en $f(a)$, su inversa deshace el camino y envia a $f(a)$ de nuevo a a.

Conocemos muchas funciones inyectivas y, para algunas de ellas, también conocemos su inversa. Por ejemplo, sabemos que la función exponencial y el logaritmo neperiano son inversas una de la otra. ¿Qué quiere decir esto? Simplemente que se cumplen las dos siguientes igualdades:

$$\log(e^a) = a \ \text{ y } \ e^{\log(b)} = b.$$

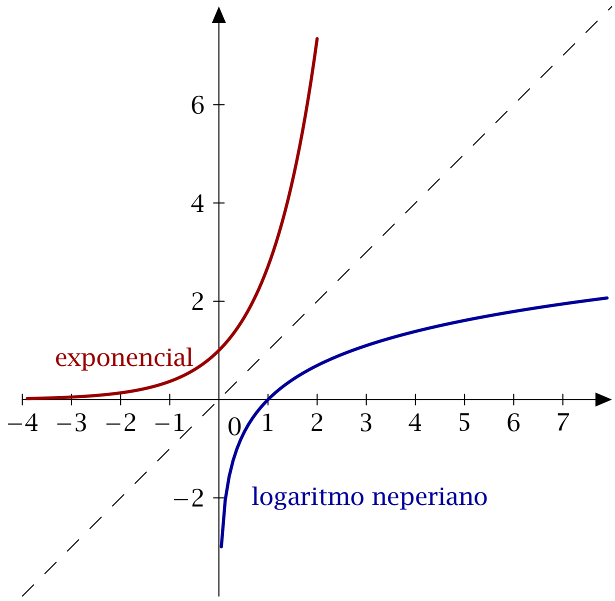


Figura 3.4 La función exponencial y el logaritmo son inversas

Esto tiene una consecuencia en las gráficas de las funciones. Mira la Figura 3.4. Las gráficas de una función y su inversa son simétricas respecto de la bisectriz del primer cuadrante.

¿Cómo calculamos la inversa de una función? En teoría es sencillo: si $y = f(x)$ es la función, sólo tenemos que cambiar los papeles de x e y. Tenemos que despejar x como función de y. Esto es la teoría. Dependiendo de la función podemos estar ante un problema fácil o uno imposible. Veamos un ejemplo.

Ejemplo 3.8. Consideremos la función $f(x) = x^2+x+1$, ¿cuál es su inversa? Como hemos dicho, tenemos que resolver la ecuación

$$y = x^2 + x + 1$$

considerando como incógnita x. Las soluciones del polinomio $x^2 + x + 1 - y = 0$ son

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4(1-y)}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{4y-3}}{2}.$$

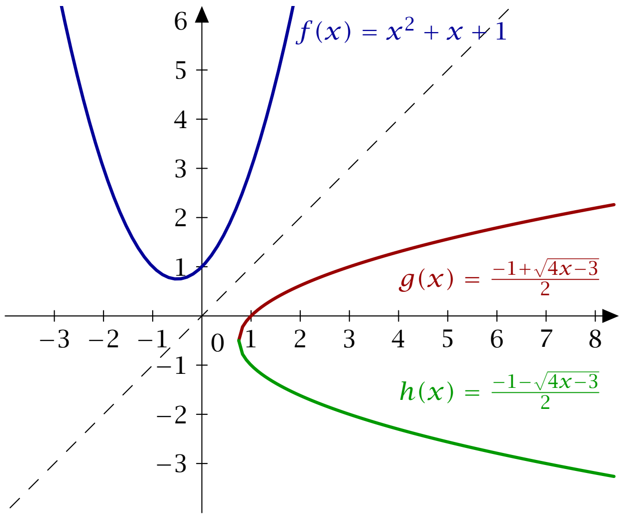


Figura 3.5 La función $x^2 + x + 1$ y sus inversas

Las dos soluciones provienen del hecho de que la función $y = x^2+x+1$ no es inyectiva. Sí es inyectiva en cualquiera de los intervalos $]-\infty, -1/2]$ y $[-1/2, +\infty[$. En la Figura 3.5 tienes las gráficas de la función y su inversa en cada uno de dicho es intervalos.

3.1.3 Funciones pares e impares

Definición 3.9.

a) Una función $f\colon A \to B$ es *par* si $f(a) = f(-a)$ para cualquier a en A.

b) Una función $f\colon A \to B$ es *impar* si $f(a) = -f(-a)$ para cualquier a en A.

Las funciones pares son aquellas cuya gráfica es simétrica respecto del eje OY. En otras palabras, si doblamos la hora por el eje vertical, ambos mitades coinciden. Para conseguir el mismo efecto con una función impar tienes que doblar primero respecto por eje vertical y, en segundo lugar, por el eje horizontal.

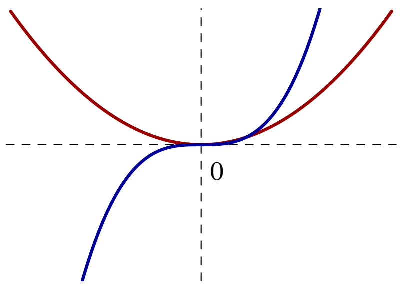


Figura 3.6 Funciones pares e impares

Ejemplo 3.10.

a) Las funciones $f(x) = x^2$ o $\cos(x)$ son pares.

b) La función $f(x) = x^3$ o $\operatorname{sen}(x)$ son impares.

3.1.4 Funciones periódicas

Definición 3.11. Una función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es *periódica* si existe algún número real T tal que $f(x) = f(x+T)$ para cualquier x real. A cualquiera de esos valores se le llama un *periodo* de la función. El *periodo fundamental*, ω, es el menor de todos ellos, o sea,

$$\omega = \inf \{T\colon\ f(x) = f(x+T),\ \forall x \in \mathbb{R}\}$$

Ejemplo 3.12. Las funciones seno y coseno son periódicas con periodo 2π (o cualquier múltiplo entero de 2π). El periodo fundamental de la tangente es π. El caso trivial son las funciones constantes: son periódicas con cualquier periodo. Por tanto, su periodo fundamental es cero.

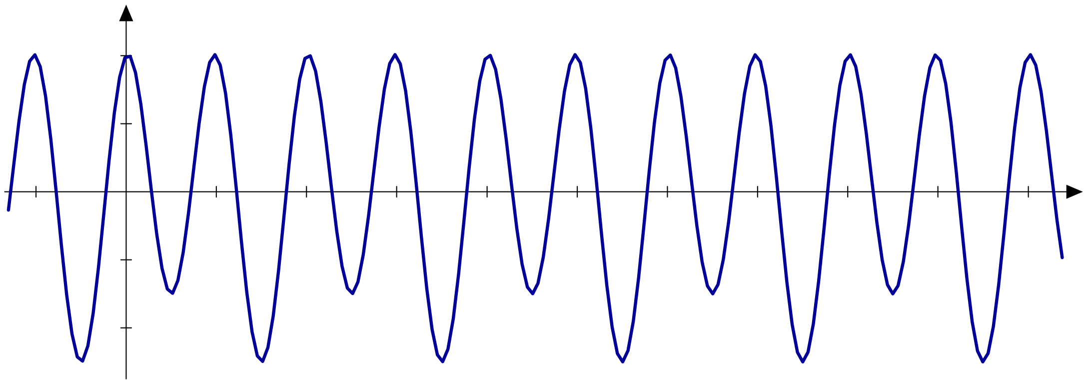


Figura 3.7 Función periódica

3.1.5 Acotación

Dada una función con valores reales, podemos hablar de cuándo los valores que toma dicha función se encuentran en un rango determinado, son mayores o son menores que una cierta cantidad. En otras palabras, podemos aplicar las nociones de acotación de conjuntos a la imagen de la función. Así surgen las nociones de función acotada y funciones acotadas superior o inferiormente.

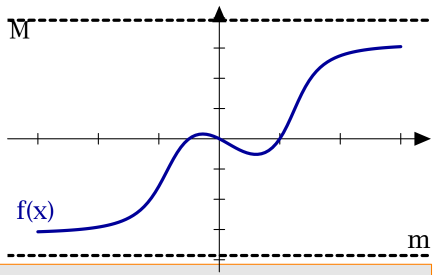


Figura 3.8 Función acotada

> **Definición 3.13.** Sea $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función.
>
> a) Diremos que la función f está *acotada superiormente* si su imagen, $f(A)$, lo está. En otras palabras, f está acotada superiormente si existe un número M tal que $f(a) \leq M$ para cualquier elemento a de A.
>
> b) Diremos que la función f está *acotada inferiormente* si su imagen, $f(A)$, lo está. En otras palabras, f está acotada inferiormente si existe un número m tal que $f(a) \geq m$ para cualquier elemento a de A.
>
> c) Diremos que la función está acotada si lo está superior e inferiormente.

Ejemplo 3.14. Las funciones seno o coseno están acotadas. En cambio ningún polinomio, salvo los constantes, es una función acotada en $\mathbb{R}$.

Una vez que tenemos un conjunto acotado, podemos hablar de máximo y supremo.

> **Definición 3.15.** Sea $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función.
>
> a) Diremos que la función f tiene máximo si su imagen, $f(A)$ lo tiene. Diremos que f alcanza su máximo en $a_0 \in A$ si $f(a) \leq f(a_0)$ para cualquier $a \in A$.
>
> b) Diremos que la función f tiene mínimo si su imagen, $f(A)$ lo tiene. Diremos que f alcanza su mínimo en $a_0 \in A$ si $f(a) \geq f(a_0)$ para cualquier $a \in A$.

Observación 3.16. Ya sabemos que un conjunto acotado superiormente tiene supremo. No podemos decir lo mismo con respecto al máximo. Hay conjuntos que tienen supremo pero este no se alcanza. Piensa, por ejemplo, en los intervalos abiertos. La misma situación se puede dar con funciones. Por ejemplo, la función $f\colon]0,1[\to]0,1[$, $f(x)=x$ está acotada, pero no tiene máximo ni mínimo.

3.1.6 Funciones monótonas

Definición 3.17.

a) Una función $f\colon A\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es *creciente* (resp. *decreciente*) si

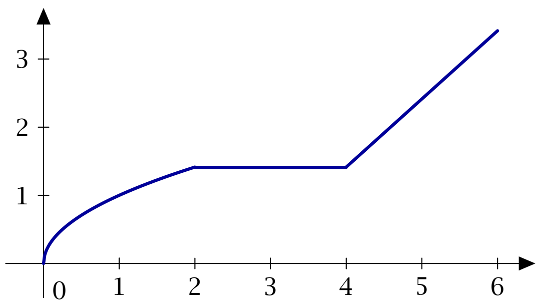
$$x\leq y \implies f(x)\leq f(y)\quad(\text{resp.} f(x)\geq f(y)).$$

b) Una función $f\colon A\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es *estrictamente creciente* (resp. *estrictamente decreciente*) si

$$x<y \implies f(x)<f(y)\quad(\text{resp.} f(x).>f(y))$$

En general, diremos que una función es *monótona* si es creciente o decreciente y diremos que es *estrictamente monótona* si es estrictamente creciente o estrictamente decreciente.

Observación 3.18.
Hay veces que los nombres nos pueden inducir a error y este es uno de esos casos. La idea intuitiva que tenemos todos es que una función creciente es aquella que tiene una gráfica ascendente. En realidad eso es una función estrictamente creciente. Una función constante es creciente (y decreciente). La expresión correcta debería ser que una función creciente es aquella cuya gráfica "no baja".



Monotonía e inyectividad

Se deduce directamente de la definición de función estrictamente monótona que puntos del dominio distintos tienen imágenes distintas. En particular, *las funciones estrictamente monótonas son inyectivas.* ¿Es cierto el recíproco? Es fácil encontrar ejemplos de que no es cierto en general. Por ejemplo, la función $f\colon[0,3]\to\mathbb{R}$ definida como

$$f(x)=\begin{cases} x, & \text{si } 0\leq x<2,\\ 5-x, & \text{si } 2\leq x\leq 3,\end{cases}$$

no es creciente ni decreciente. La función f no es continua y podría pensarse que este fenómeno no se presentaría en funciones continuas, pero no es difícil conseguir un ejemplo con funciones continuas. ¿Dónde presenta problemas de continuidad la función f? Pues eliminemos esos puntos. Considera la función $g\colon[0,1]\cup[2,3]\to\mathbb{R}$ definida como

$$f(x)=\begin{cases} x, & \text{si } 0\leq x<1,\\ 5-x, & \text{si } 2\leq x\leq 3,\end{cases}$$

Como puedes ver, para la inyectividad no es una condición suficiente para probar monotonía si consideramos funciones que no sean continuas o que no estén definidas en intervalos. En otro caso, el resultado es cierto.

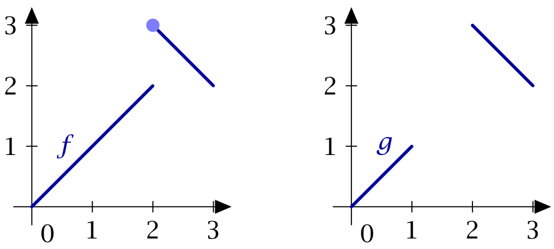


Figura 3.9 Monotonía e inyectividad

3.2 Funciones elementales

3.2.1 Funciones potenciales

La función potencial $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definida como $f(x) = x^b$ tiene sentido para cualquier exponente b real. En el caso particular de potencias naturales, se puede extender la definición a toda la recta real.

a) f es biyectiva de $\mathbb{R}^+$ en $\mathbb{R}^+$, continua y derivable con $f'(x) = bx^{b-1}$.

b) $(xy)^b = x^b y^b$.

c) Si $b > 0$, f es estrictamente creciente y verifica $\lim_{x\to 0} x^b = 0$ y $\lim_{x\to+\infty} x^b = +\infty$.

d) Si $b < 0$, f es estrictamente decreciente y verifica $\lim_{x\to 0} x^b = +\infty$ y $\lim_{x\to+\infty} x^b = 0$.

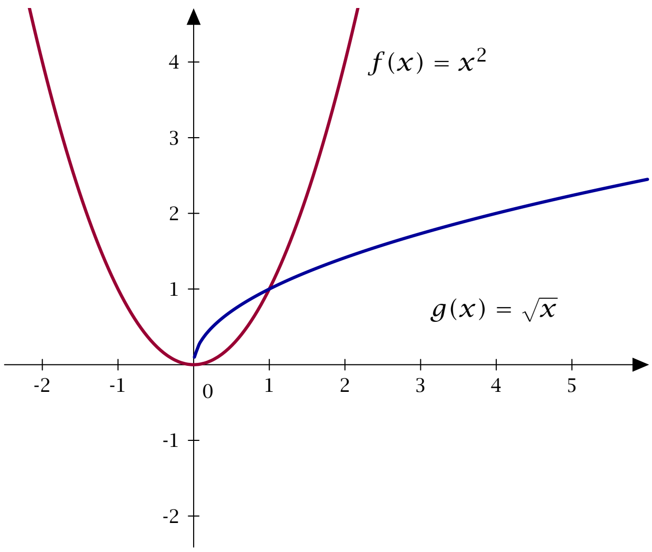


Figura 3.10 Función potencial

Como consecuencia se obtiene que los polinomios, suma de funciones potenciales con exponente natural, son derivables en todo $\mathbb{R}$. Más concretamente, si $p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$, entonces $p'(x) = a_1 + 2a_2 x + \ldots + na_n x^{n-1}$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

3.2.2 Función exponencial

La función exponencial de base e, $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ está definida como $f(x) = e^x$. A veces usaremos la notación $\exp(x)$ para indicar e^x.

a) f es continua y derivable en $\mathbb{R}$ con $f'(x) = e^x$.

b) f es biyectiva de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^+$ y estrictamente creciente.

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$.

d) $e^{x+y} = e^x e^y$.

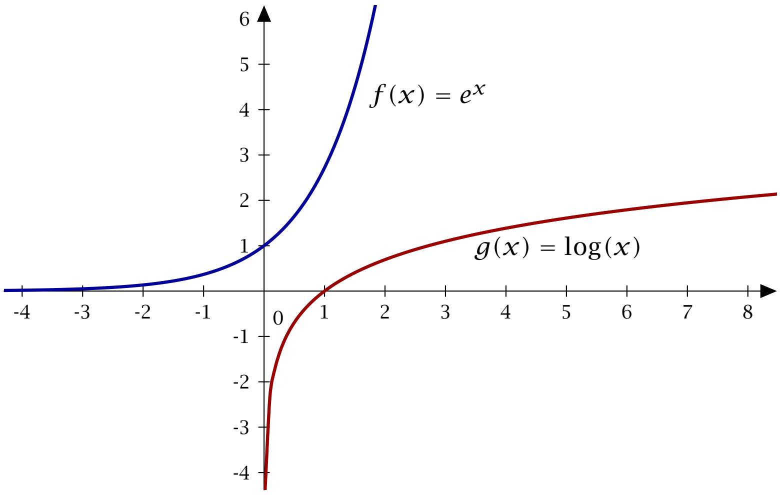


Figura 3.11 Funciones exponencial y logaritmo neperiano

3.2.3 Función logaritmo neperiano

La función logaritmo neperiano[2], $g(x) = \log(x)$ para x positivo, es la inversa de la función exponencial.

a) g es derivable y $g'(x) = \frac{1}{x}$.

b) g es biyectiva de $\mathbb{R}^+$ en $\mathbb{R}$ y estrictamente creciente.

c) $\lim\limits_{x\to 0} \log(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} \log(x) = +\infty$.

d) $\log(xy) = \log(x) + \log(y), \ \forall\, x, y \in \mathbb{R}^+$.

e) $\log\left(\frac{x}{y}\right) = \log(x) - \log(y), \ \forall\, x, y \in \mathbb{R}^+$.

f) $\log(x^y) = y\log(x), \ \forall\, x \in \mathbb{R}^+, y \in \mathbb{R}$.

g) $\log(1) = 0$, $\log(e) = 1$.

Haciendo uso de la siguiente fórmula se deducen las demás funciones elementales, excepto las trigonométricas

2 Usaremos indistintamente la notación $\ln(x)$ y $\log(x)$ para indicar el logaritmo neperiano

$$a^b = e^{\log(a^b)} = e^{b\log(a)}, \quad \forall a \in \mathbb{R}^+,\ b \in \mathbb{R}.$$

3.2.4 Función exponencial de base $a \neq 1$

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = a^x, \ \forall x \in \mathbb{R}$$

a) f es biyectiva de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^+$, continua y verifica $a^{x+y} = a^x a^y$.

b) Si $a > 1$, f es estrictamente creciente y verifica $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = 0$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = +\infty$.

c) Si $a < 1$, f es estrictamente decreciente y verifica $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = +\infty$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = 0$.

d) f es derivable y $f'(x) = a^x \log(a)$.

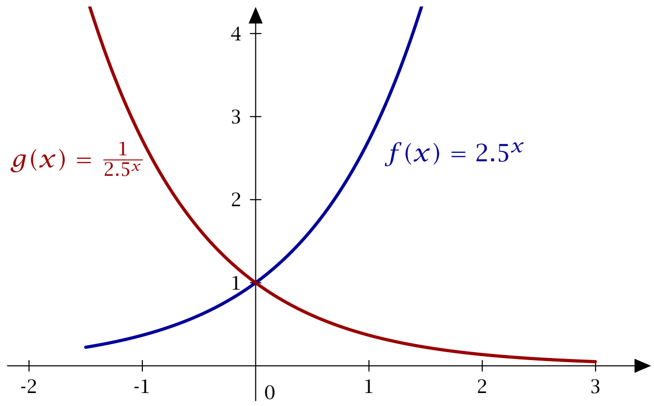


Figura 3.12 Función exponencial

3.2.5 Funciones logarítmicas de base $a \neq 1$

La inversa de la función exponencial es la función logaritmo. Su comportamiento depende de la base de la expoencial que hayamos considerado. Es por esto que en algunos casos tengamos que distinguir entre base mayor o menor que uno.

$$g\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \log_a(x) = \frac{\log(x)}{\log(a)} \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$$

a) g es biyectiva de $\mathbb{R}^+$ en $\mathbb{R}$ y continua. Además g es la inversa de la función exponencial de base a. Verifica también que

$$\begin{aligned}\log_a(xy) &= \log_a(x) + \log_a(y),\\ \log_a\left(\frac{x}{y}\right) &= \log_a(x) - \log_a(y),\\ \log_a(x^z) &= z\log_a(x)\end{aligned}$$

para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}^+$, $z \in \mathbb{R}$.

b) Si $a > 1$, g es estrictamente creciente y

$$\lim_{x\to 0} \log_a(x) = -\infty, \quad \text{y} \quad \lim_{x\to+\infty} \log_a(x) = +\infty.$$

c) Si $a < 1$, g es estrictamente decreciente y

$$\lim_{x\to 0} \log_a(x) = +\infty, \quad \text{y} \quad \lim_{x\to+\infty} \log_a(x) = -\infty.$$

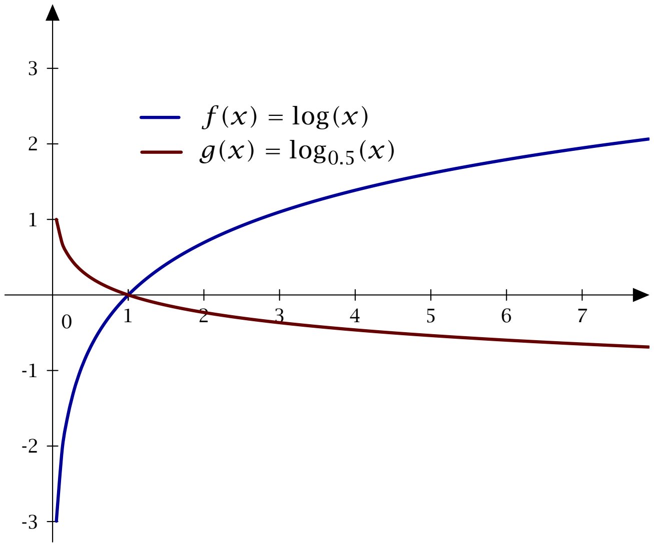


Figura 3.13 Función logaritmo

Funciones trigonométricas

3.2.6 Las funciones seno y coseno

a) Son derivables en todo $\mathbb{R}$ y $\operatorname{sen}'(x) = \cos(x)$, $\cos'(x) = -\operatorname{sen}(x)$.

b) Son funciones periódicas de periodo 2π

$$\operatorname{sen}(x + 2\pi) = \operatorname{sen}(x),\ \cos(x + 2\pi) = \cos(x).$$

c) $\operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$. **Fórmula fundamental de trigonometría**

d) $\cos\colon [0, \pi] \to [-1, 1]$ es una biyección estrictamente decreciente con $\cos(0) = 1$, $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, $\cos(\pi) = -1$.

e) $\operatorname{sen}\colon [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$ es una biyección estrictamente creciente con $\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$, $\operatorname{sen}(0) = 0$, $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

f) La imagen, tanto de la función seno como de la función coseno, es el intervalo $[-1, 1]$.

g) La función coseno es par: $\cos(-x) = \cos(x),\ \forall\, x \in \mathbb{R}$.

h) La función seno es impar: $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen}(x),\ \forall\, x \in \mathbb{R}$.

i) $\cos(x + \pi) = -\cos(x)$, $\operatorname{sen}(x + \pi) = -\operatorname{sen}(x)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

j) Las funciones seno y coseno no tienen límite en $+\infty$ ni en $-\infty$.

Algunos valores destacados de seno y coseno

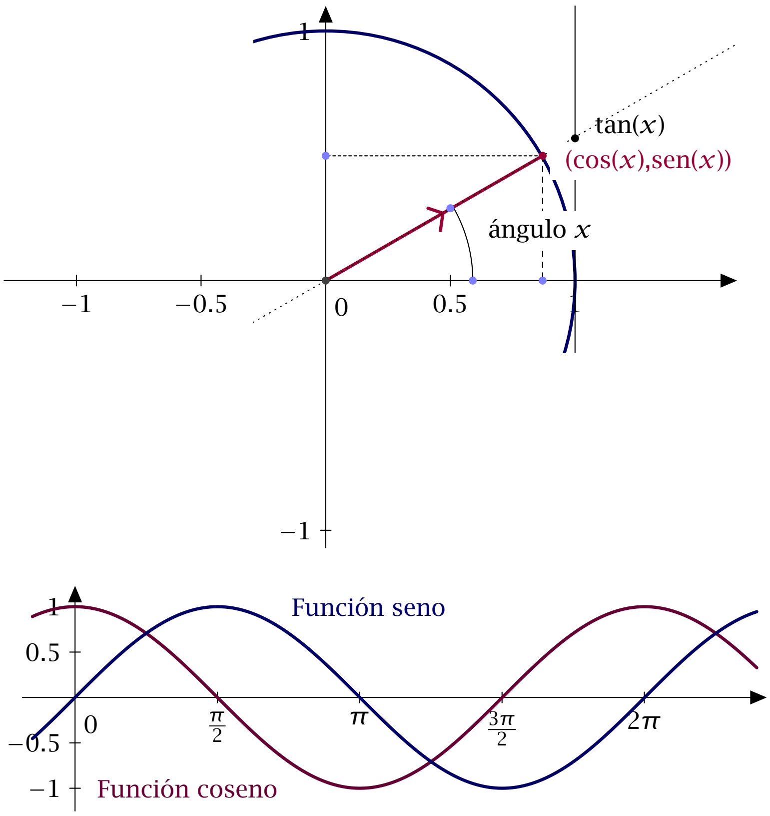


Figura 3.14 Las funciones seno y coseno

Radianes	Coseno	Seno	Tangente
0	1	0	0
$\pi/6$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	$1/\sqrt{3}$
$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1
$\pi/3$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}$
$\pi/2$	0	1	$-$
$2\pi/3$	$-1/2$	$\sqrt{3}2$	$-\sqrt{3}$
$3\pi/4$	$-\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	-1
$5\pi/6$	$-\sqrt{3}/2$	$1/2$	$-1/\sqrt{3}$
π	-1	0	0

Tabla 3.1 Valores de seno, coseno y tangente en los dos primeros cuadrantes

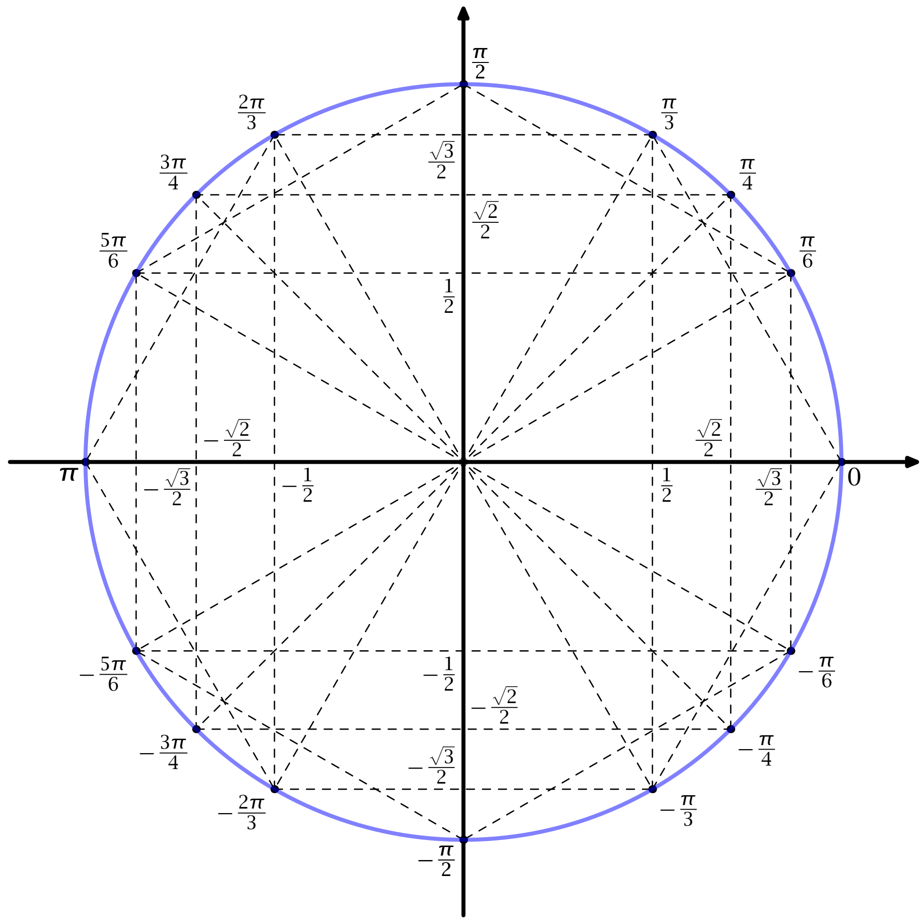
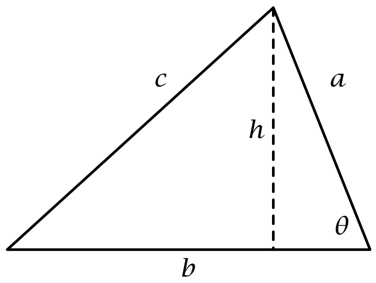


Figura 3.15 Círculo trigonométrico

Teorema del coseno

$$h = a\,\mathrm{sen}(\theta)$$
$$\text{Área}=\tfrac{1}{2}bh$$
$$\text{Teorema del coseno: } c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\theta)$$



3.2.7 La función tangente

Como se verifica que $\cos(x) = 0 \iff x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, podemos definir la función tangente como

$$\tan\colon A \to \mathbb{R}, \quad A = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \colon k \in \mathbb{Z} \right\}, \quad \tan(x) = \frac{\mathrm{sen}(x)}{\cos(x)}$$

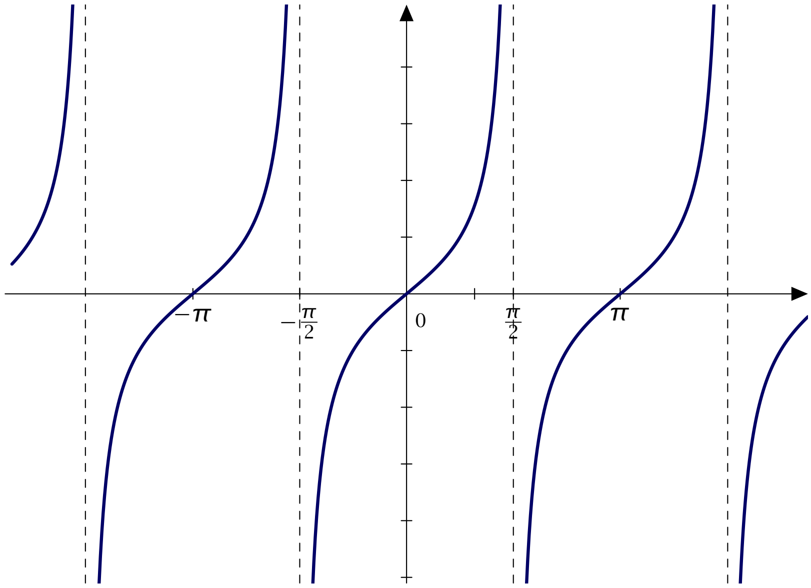


Figura 3.16 Función tangente

a) $\tan(x+\pi) = \tan(x)$, $\forall\, x \in A$.

b) $\tan\colon \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ es una función continua y estrictamente creciente y además verifica que $\lim_{x\to -\frac{\pi}{2}} \tan(x) = -\infty$ y $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \tan(x) = +\infty$.

c) La función tangente es derivable y

$$\tan'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}.$$

3.2.8 Secante, cosecante, cotangente

Siempre que los respectivos denominadores no se anulen, se pueden definir las siguientes funciones

$$\operatorname{cosec}\colon B \to \mathbb{R},\ \operatorname{cosec}(x) = \frac{1}{\operatorname{sen}(x)},\ \forall\, x \in B$$
$$\sec\colon A \to \mathbb{R},\ \sec(x) = \frac{1}{\cos(x)},\ \forall\, x \in A$$
$$\operatorname{cotan}\colon B \to \mathbb{R},\ \operatorname{cotan}(x) = \frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)},\ \forall\, x \in B,$$

donde $A = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \colon k \in \mathbb{Z}\}$ y $B = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \colon k \in \mathbb{Z}\}$.

Dichas funciones son continuas y derivables en su correspondiente dominio y

$$\begin{aligned} \sec'(x) &= \tan(x)\sec(x), \\ \operatorname{cosec}'(x) &= -\operatorname{cotan}(x)\operatorname{cosec}(x), \\ \operatorname{cotan}'(x) &= \frac{-1}{\operatorname{sen}^2(x)} = -\operatorname{cosec}^2(x) = -(1+\operatorname{cotan}^2(x)). \end{aligned}$$

3.2.9 Inversas de funciones trigonométricas

Función arcoseno

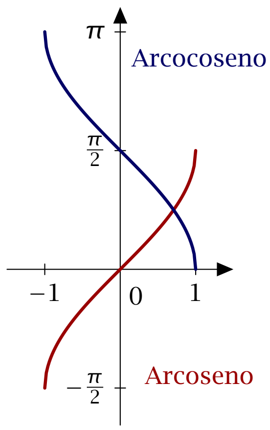


Figura 3.17 Arcoseno y arcocoseno

Esta función es la inversa de la restricción de la función seno al intervalo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, y por tanto $\operatorname{arcsen}\colon [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ verifica que $\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen}(x)) = x$, $\forall x \in [-1,1]$.

Además, es una función biyectiva, continua y estrictamente creciente con

$$\operatorname{arcsen}(-1) = -\frac{\pi}{2}, \quad \operatorname{arcsen}(0) = 0, \quad \operatorname{arcsen}(1) = \frac{\pi}{2}.$$

Por último, es derivable en el intervalo abierto $]-1,1[$ con derivada

$$\operatorname{arcsen}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Función arcocoseno

Es la función inversa de la restricción de la función coseno al intervalo $[0,\pi]$, y por tanto $\cos(\arccos(x)) = x$, $\forall x \in [-1,1]$.

Esta función es biyectiva, continua y estrictamente decreciente con

$$\arccos(-1) = \pi, \quad \arccos(0) = \frac{\pi}{2}, \quad \arccos(1) = 0$$

Es derivable en el intervalo abierto $]-1,1[$ con derivada

$$\arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Función arcotangente

Es la inversa de la restricción de la función tangente al intervalo $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ y, por tanto,

$$\arctan\colon \mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$

verifica que $\tan(\arctan(x)) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

a) Esta función es biyectiva, continua y estrictamente creciente con

$$\lim_{x\to-\infty} \arctan(x) = -\frac{\pi}{2}, \quad \arctan(0) = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}.$$

b) Es derivable en $\mathbb{R}$ y $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

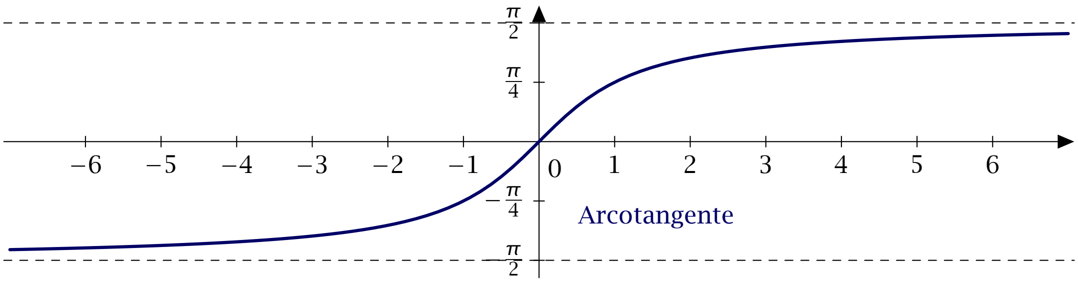


Figura 3.18 Función arcotangente

3.2.10 Identidades trigonométricas

a) Identidades pitagóricas

$$
\begin{aligned}
\operatorname{sen}^2(x)+\cos^2(x) &= 1\\
\tan^2(x)+1 &= \sec^2(x)\\
\operatorname{cotan}^2(x)+1 &= \operatorname{cosec}^2(x)
\end{aligned}
$$

b) Suma y diferencia de ángulos

$$
\begin{aligned}
\operatorname{sen}(x\pm y) &= \operatorname{sen}(x)\cos(y)\pm\cos(x)\operatorname{sen}(y)\\
\cos(x\pm y) &= \cos(x)\cos(y)\mp\operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y)\\
\tan(x\pm y) &= \frac{\tan(x)\pm\tan(y)}{1\mp\tan(x)\tan(y)}
\end{aligned}
$$

c) Angulo doble

$$
\begin{aligned}
\operatorname{sen}(2x) &= 2\operatorname{sen}(x)\cos(x),\\
\cos(2x) &= \cos^2(x)-\operatorname{sen}^2(x) = 2\cos^2(x)-1 = 1-2\operatorname{sen}^2(x)
\end{aligned}
$$

d) Angulo mitad

$$
\begin{aligned}
\operatorname{sen}^2(x) &= \frac{1}{2}(1-\cos(2x))\\
\cos^2(x) &= \frac{1}{2}(1+\cos(2x))\\
\tan\left(\frac{x}{2}\right) &= \frac{1-\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)} = \frac{\operatorname{sen}(x)}{1+\cos(x)}
\end{aligned}
$$

e) Producto

$$
\begin{aligned}
\operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y) &= \frac{1}{2}\left(\cos(x-y)-\cos(x+y)\right)\\
\cos(x)\cos(y) &= \frac{1}{2}\left(\cos(x-y)+\cos(x+y)\right)\\
\operatorname{sen}(x)\cos(y) &= \frac{1}{2}\left(\operatorname{sen}(x+y)+\operatorname{sen}(x-y)\right)
\end{aligned}
$$

3.2.11 Funciones hiperbólicas

De forma análoga a como están definidas las funciones seno y coseno, podemos interpretar geométricamente las funciones hiperbólicas. El papel que juega la circunferencia unidad $x^2+y^2=1$ lo pasa a representar la hipérbola $x^2-y^2=1$. En este caso, relacionamos el punto (x,y) con el área α que aparece sombreada en la figura 3.19.

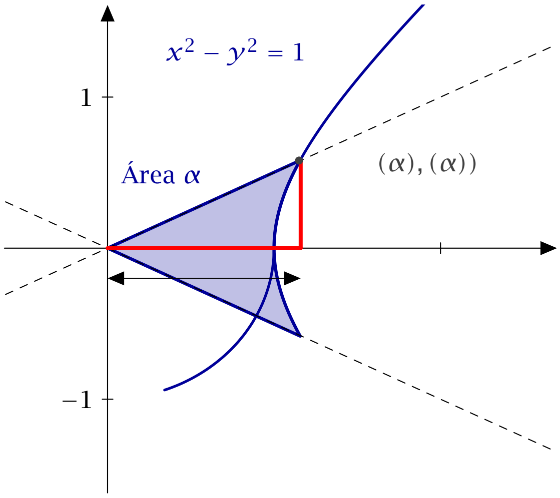


Figura 3.19 Seno y coseno hiperbólicos

Las funciones hiperbólicas están definidas como:

$$\operatorname{senh}(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2},\quad \cosh(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2},\quad \tanh(x)=\frac{\operatorname{senh}(x)}{\cosh(x)}$$

Por analogía con las funciones trigonométricas hablaremos también de tangente, secante y cosecante hiperbólica.

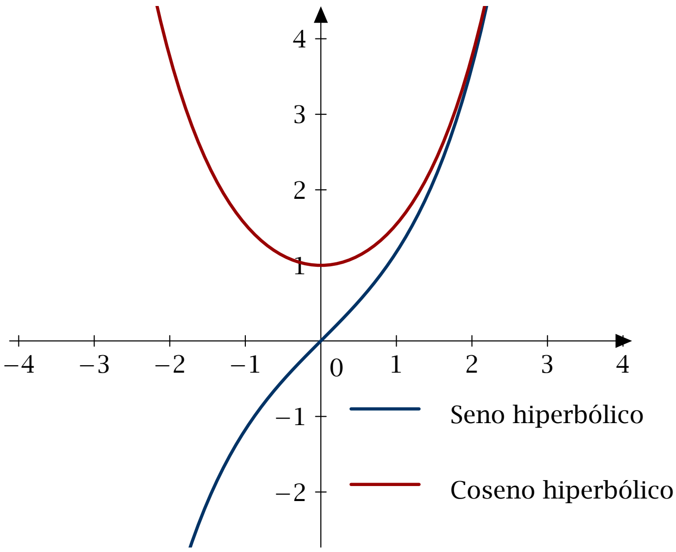


Figura 3.20 Funciones hiperbólicas

3.2.12 Identidades hiperbólicas

a) Identidades "pitagóricas"

$$\cosh^2(x) - \operatorname{senh}^2(x) = 1,$$
$$\tanh^2(x) + \operatorname{sech}^2(x) = 1$$
$$\operatorname{cotanh}^2(x) - \operatorname{cosech}^2(x) = 1$$

b) Sumas y diferencias de ángulos.

$$\begin{aligned}
\operatorname{senh}(x+y) &= \operatorname{senh}(x)\cosh(y) + \cosh(x)\operatorname{senh}(y),\\
\operatorname{senh}(x-y) &= \operatorname{senh}(x)\cosh(y) - \cosh(x)\operatorname{senh}(y),\\
\cosh(x+y) &= \cosh(x)\cosh(y) + \operatorname{senh}(x)\operatorname{senh}(y),\\
\operatorname{senh}(x-y) &= \cosh(x)\cosh(y) - \operatorname{senh}(x)\operatorname{senh}(y).
\end{aligned}$$

c) Ángulo doble

$$\operatorname{senh}^2(x) = \frac{-1+\cosh(2x)}{2}, \qquad \cosh^2(x) = \frac{1+\cosh(2x)}{2}.$$

Funciones hiperbólicas inversas

$$\begin{aligned}
\operatorname{arcsenh}(x) &= \log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\\
\operatorname{arccosh}(x) &= \log\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\\
\operatorname{arctanh}(x) &= \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)
\end{aligned}$$

3.3 Ejercicios

Ejercicio 3.1. Calcula el dominio de las siguientes las funciones:

a) $y = \sqrt{\frac{x-2}{x+2}}$
b) $y = \log\left(\frac{x^2-5x+6}{x^2+4x+6}\right)$
c) $y = \sqrt{\frac{x}{1-|x|}}$
d) $y = \tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$
e) $y = \log(\operatorname{sen}(x))$
f) $y = \sqrt{\log(\operatorname{sen}(x))}$

Ejercicio 3.2. Si $f(x) = 1/x$ y $g(x) = 1/\sqrt{x}$, ¿cuáles son los dominios naturales de f, g, $f+g$, $f\cdot g$ y de las composiciones $f\circ g$ y $g\circ f$?

Ejercicio 3.3. Estudia si son pares o impares las siguientes funciones:

a) $f(x) = |x+1| - |x-1|$
b) $f(x) = \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$
c) $f(x) = e^x + e^{-x}$
d) $f(x) = e^x - e^{-x}$
e) $f(x) = \operatorname{sen}(|x|)$
f) $f(x) = \cos(x^3)$

Ejercicio 3.4. ¿Para qué números reales es cierta la desigualdad $e^{3x+8}(x+7) > 0$?

Ejercicio 3.5. Comprueba que la igualdad $a^{\log(b)} = b^{\log(a)}$ es cierta para cualquier par de números positivos a y b.

Ejercicio 3.6. Resuelve la siguiente ecuación:

$$\frac{1}{\log_x(a)} = \frac{1}{\log_b(a)} + \frac{1}{\log_c(a)} + \frac{1}{\log_d(a)}.$$

Ejercicio 3.7. ¿Para qué valores de x se cumple que $\log(x-1)(x-2) = \log(x-1) + \log(x-2)$?

Ejercicio 3.8. Prueba que $\log\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) + \log\left(\sqrt{1+x^2} - x\right) = 0$.

Ejercicio 3.9. Resuelve la ecuación $x^{\sqrt{x}} = \left(\sqrt{x}\right)^x$.

Ejercicio 3.10. Simplifica las siguientes expresiones:

a) $a^{\log(\log a)/\log a}$,

b) $\log_a\left(\log_a(a^{a^x})\right)$.

Ejercicio 3.11. Comprueba que si $f(x) = \frac{1}{1-x}$, entonces $f \circ f \circ f(x) = x$.

Ejercicio 3.12. Calcula la inversa de las siguientes funciones

a) $f(x) = \sqrt[3]{1-x^3}$
b) $f(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$

Ejercicio 3.13. ¿Hay algún valor de x e y para los que se cumpla que $\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$?

Ejercicio 3.14. ¿Hay algún valor de x e y para los que se cumpla que $\frac{1}{x+y} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$?

Ejercicio 3.15. Estudia si son periódicas y cuál es el periodo de las siguientes funciones:

a) $2\cos(3x)$,
b) $4\,\mathrm{sen}(\pi x)$,
c) $3\,\mathrm{sen}(5x/8)$,
d) $|\,\mathrm{sen}(x)\,| + |\cos(x)\,|$.

Ejercicio 3.16. Calcula el valor de $\mathrm{sen}(7\pi/12)$ y $\cos(\pi/12)$.

Ejercicio 3.17. Discute si son ciertas las siguientes identidades:

a) $\arccos(\cos(\pi/4)) = \pi/4$,
b) $\mathrm{arcsen}(\mathrm{sen}(10)) = 10$,
c) $\arctan(\tan(3\pi/2)) = 3\pi/2$,
d) $\arccos(\cos(x)) = x$.

Ejercicio 3.18. Usa las fórmulas de adición para expresar $\tan(x+y)$ en términos de $\tan(x)$ y $\tan(y)$.

Ejercicio 3.19. Comprueba que

$$(\mathrm{sen}(x) + \cos(x))^4 = 1 + 2\,\mathrm{sen}(2x) + \mathrm{sen}^2(2x).$$

Continuidad y derivabilidad

Límites y continuidad

4

La definición usual de función continua involucra el concepto de límite: cuando x "tiende a" a, $f(x)$ "tiende a" $f(a)$. Esto es una definición perfecta de la continuidad siempre que definamos qué es "tender a".

4.1 Límite funcional

Existen varias formas de definir el límite de una función en un punto. Nosotros vamos a utilizar sucesiones en la definición y así aprovechar todas las propiedades que hemos visto en el tema anterior. La definición de límite de una función con sucesiones va a tener siempre un aspecto similar al siguiente:

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \iff \left[\text{si } \lim_{n\to\infty} x_n = a, \text{ entonces } \lim_{n\to\infty} f(x_n) = b \right].$$

Para que esto valga como definición de límite, sólo tenemos que garantizarnos que existan sucesiones convergentes al punto donde tomamos límite. Recordemos que A' denota al conjunto de puntos de acumulación del conjunto A. Con todos estos ingredientes ya podemos dar la definición de límite de una función en un punto.

Definición 4.1. Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}$ y $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función. Diremos que f tiene *límite* en $x_0 \in A'$ y que vale L si para cualquier sucesión $\{x_n\}$ de elementos de A distintos de x_0 que tienda a x_0 se cumple que $\{f(x_n)\}$ tiende a L.
Caso de ser así, escribiremos $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$.

Observación 4.2. Recuerda que si la función está definida en un intervalo, todos los puntos del correspondiente intervalo cerrado son puntos de acumulación.

En algunas ocasiones puede ser más útil reescribir la definición de la forma siguiente.

Proposición 4.3. *Sea $f\colon A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $x_0 \in A'$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

a) $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$.

b) Para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $0 < |x - x_0| < \delta$ y $x \in A$, entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$.

4.1.1 Álgebra de límites

Dado que la definición de límite se puede ver en términos de sucesiones, podemos aplicar los resultados sobre límites de sucesiones que conocemos. Obtenemos el resultado análogo a la Proposición 13.8 sobre el comportamiento de límite con respecto a sumas, productos y cocientes.

Proposición 4.4. *Sean $f, g\colon A \to \mathbb{R}$ y $x_0 \in A'$. Entonces,*

a) $\lim_{x\to x_0} (f+g)(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x)$,

b) $\lim_{x\to x_0} (fg)(x) = \left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right)\left(\lim_{x\to x_0} g(x)\right)$,

c) si $\lim_{x\to x_0} g(x) \neq 0$, *se cumple que* $\lim_{x\to x_0} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)}$.

De igual manera que ocurre con sucesiones, el límite del producto de una función con límite cero y una función acotada es cero.

Proposición 4.5. *Sean $f, g\colon A \to \mathbb{R}$ y $x_0 \in A'$. Si $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ y g está acotada, entonces* $\lim_{x\to x_0} (fg)(x) = 0$.

4.1.2 Límites laterales

Intuitivamente, para calcular $\lim_{x\to x_0} f(x)$ tomamos valores cercanos a x_0, calculamos su imagen por la aplicación f y vemos si se acercan a algún valor. Si nos acercamos a x_0 por valores mayores que x_0, hablaremos de límite por la derecha. Si nos acercamos por valores menores hablaremos de límite por la izquierda. Formalizemos estos conceptos.

Definición 4.6. Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}$, $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función y $x_0 \in A'$.

a) Si x_0 es un punto de acumulación de $A^- = \{x \in A\colon x < x_0\}$, se define el *límite por la izquierda de f en x_0* como $\lim_{x\to x_0^-} f(x) := \lim_{x\to x_0} f_{|A^-}(x)$.

b) Si x_0 es un punto de acumulación de $A^+ = \{x \in A\colon x > x_0\}$, se define el *límite por la derecha de f en x_0* como $\lim_{x\to x_0^+} f(x) := \lim_{x\to x_0} f_{|A^+}(x)$.

En principio no tienen porqué tener sentido ambos límites laterales. Por ejemplo, si x_0 es el extremo de un intervalo sólo se puede estudiar uno de los dos límites laterales. Lo que sí es cierto es que si se puede estudiar el límite, al menos uno de los límites laterales tiene que tener sentido. Además, una función tiene límite en x_0 si, y sólo si, existen todos los límites laterales que tengan sentido y coinciden.

Proposición 4.7. *Sea $f\colon A \to \mathbb{R}$ y $x_0 \in A'$.*

a) Si $x_0 \in (A^+)'$ y $x_0 \notin (A^-)'$, entonces $\exists \lim_{x\to x_0} f(x) = L \iff \exists \lim_{x\to x_0^+} f(x) = L$.

b) Si $x_0 \in (A^-)'$ y $x_0 \notin (A^+)'$, entonces $\exists \lim_{x\to x_0} f(x) = L \iff \exists \lim_{x\to x_0^-} f(x) = L$.

c) Si $x_0 \in (A^+)' \cap (A^-)'$, entonces $\exists \lim_{x\to x_0} f(x) = L \iff \exists \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = L$.

4.2 Límites infinitos y en el infinito

4.2.1 Asíntotas verticales

Como ya hemos comentado en la sección anterior, la definición de límite de una función con sucesiones siempre tiene el mismo aspecto:

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \iff \left[\lim_{n\to\infty} x_n = a \implies \lim_{n\to\infty} f(x_n) = b\right].$$

Hasta ahora hemos tomado a y b como el punto donde tomamos límite y como el valor del límite. Si admitimos que a y/o b sean $\pm\infty$, obtenemos la definición de límite infinito o en el infinito.

Definición 4.8. Sea $f\colon A \to \mathbb{R}$ y $x_0 \in A'$. Diremos que el límite de f en x_0 vale $+\infty$ si para cualquier sucesión $\{x_n\}$ de elementos de A que tienda a x_0 se cumple que $\{f(x_n)\}$ tiende a $+\infty$, o sea,

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \iff [\forall \{x_n\} \to x_0 \implies \{f(x_n)\} \to +\infty]$$

También podemos reformular de manera equivalente la definición de límite sin utilizar sucesiones.

Proposición 4.9. *Sea $f\colon A \to \mathbb{R}$ y $x_0 \in A'$. Son equivalentes*

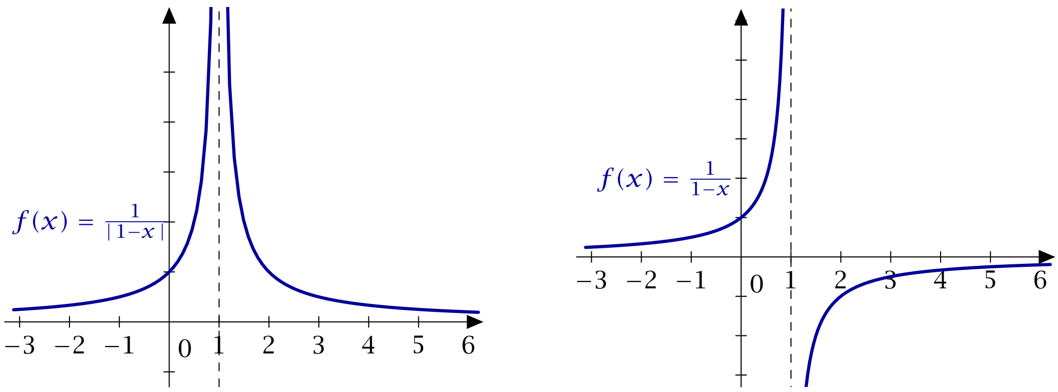
a) $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$.

b) Dado $M \in \mathbb{R}$ existe $\delta > 0$ tal que si $0 < |x - x_0| < \delta$ y $x \in A$, entonces $f(x) > M$.

En otras palabras,

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \iff \left[\forall M \in \mathbb{R},\ \exists \delta > 0 \text{ tal que } \left.\begin{array}{r} |x - x_0| < \delta \\ x \in A \end{array}\right\} \implies f(x) > M\right]$$

Esta situación seguramente ya se te ha presentado y te has referido a ella como que la función tiene una *asíntota vertical en x_0.*



La función $f(x) = \frac{1}{|1-x|}$ tiene una asíntota vertical en $x = 1$

La función $f(x) = \frac{1}{1-x}$ también tiene una asíntota vertical en $x = 1$

Figura 4.1 Asíntotas verticales

Eso sí, tienes que tener cuidado con la afirmación anterior: la función $\frac{1}{1-x}$ también tiene una asíntota vertical en $x = 1$ pero su límite no es $+\infty$ ni $-\infty$. Su valor depende de si calculamos el límite por la izquierda o por la derecha.

4.2.2 Asíntotas horizontales

La última posibilidad que nos queda es definir límites en $+\infty$ o $-\infty$. De nuevo empezamos con sucesiones.

Definición 4.10. Sea $A \subset \mathbb{R}$ un subconjunto no acotado superiormente y sea $f\colon A \to \mathbb{R}$.

a) Diremos que f tiene *límite en* $+\infty$ y que vale L si para cualquier sucesión $\{x_n\}$ de elementos de A que tienda a $+\infty$ se cumple que $\{f(x_n)\}$ tiende a L.

b) De forma similar, diremos que el límite de f en $+\infty$ es $+\infty$ si para cualquier sucesión $\{x_n\}$ de elementos de A que tienda a $+\infty$ se cumple que $\{f(x_n)\}$ tiende a $+\infty$.

Y también tenemos las reformulaciones equivalentes sin usar sucesiones.

Proposición 4.11. *Sea $A \subset \mathbb{R}$ un subconjunto no acotado superiormente y sea $f\colon A \to \mathbb{R}$.*

a) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$ *si, y sólo si, dado* $\varepsilon > 0$ *existe* $M \in \mathbb{R}$ *tal que si* $x > M$ *y* $x \in A$ *entonces* $|f(x) - L| < \varepsilon$.

b) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ *si, y sólo si, dado* $M \in \mathbb{R}$ *existe* N *tal que si* $x > N$, *entonces* $f(x) > M$.

De forma completamente análoga se pueden definir los límites en $-\infty$ o que valgan $-\infty$.

Ejemplo 4.12.
Las funciones periódicas no constantes no tienen límite en infinito.
Para demostrar que una función no tiene límite en $+\infty$ usando la caracterización por sucesiones tenemos que encontrar una sucesión $\{x_n\}$ que tienda a $+\infty$ y tal que $\{f(x_n)\}$ no sea convergente o dos sucesiones de manera que sus imágenes tienden a límites distintos. Veamos que este último método nos viene bien.

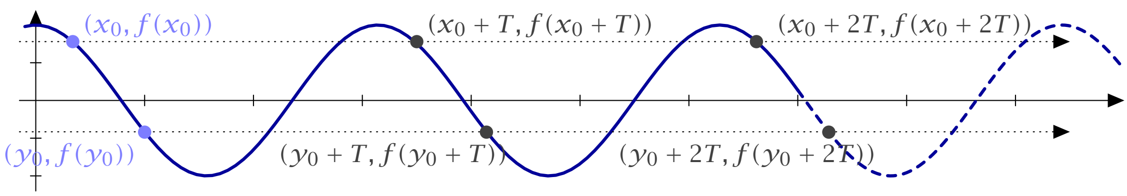


Figura 4.2 Las funciones periódicas no triviales no tienen límite en infinito

La función no es constante: toma al menos dos valores distintos. Sean x_0, y_0 tales que $f(x_0) \neq f(y_0)$. Si T es un periodo de la función f, las sucesiones $\{x_0 + nT\}$ e $\{y_0 + nT\}$ tienden a $+\infty$ y

$$f(x_0) = \lim_{n\to\infty} f(x_0 + nT) \neq \lim_{n\to\infty} f(y_0 + nT) = f(y_0).$$

Cuándo una función tiene límite en $+\infty$ o $-\infty$ solemos decir que la función tiene una *asíntota horizontal*. Por ejemplo, como

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x + 3\operatorname{sen}(x)}{x} = 2,$$

la función $f(x) = \frac{2x+3\operatorname{sen}(x)}{x}$ tiene una asíntota horizontal en 2. Observa que, a diferencia de las asíntotas verticales, la gráfica de la función puede cruzar la recta que define la asíntota ($y = 2$ en este caso).

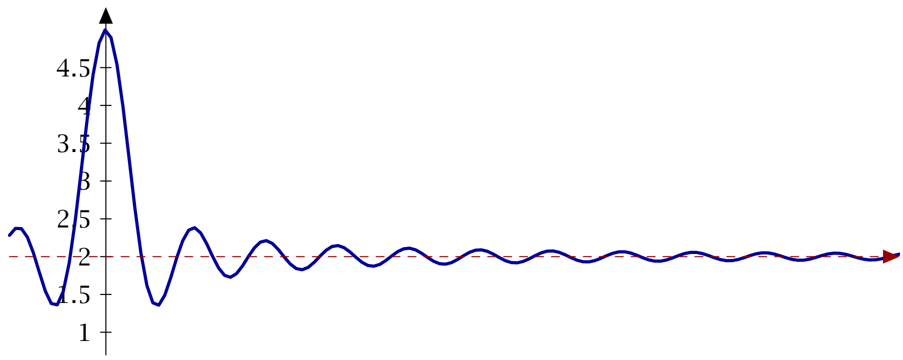


Figura 4.3 Asíntota horizontal

4.2.3 Indeterminaciones

Existen límites que no se pueden resolver utilizando las operaciones elementales, leáse por ejemplo el límite de una suma es la suma de los límites. A estas situaciones las llamamos indeterminaciones y son

$$\infty - \infty,\ \frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ 0 \cdot \infty,\ 0^0,\ \infty^0,\ 1^\infty.$$

Ya conoces algunas formas de eliminar indeterminaciones. Por ejemplo, cuando nos encontramos con un cociente de polinomios con una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$, eso significa que numerador y denominador tienen una solución común. Si simplificamos dicha raíz, eliminamos la indeterminación.

Ejemplo 4.13. Calculemos $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2-1}{x-1}$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x \to 1} x+1 = 2.$$

4.3 Cálculo de límites

Dado que la definición de límite funcional está hecha con sucesiones, podemos trasladar fácilmente las propiedades de éstas a propiedades de límites.

Proposición 4.14. *Sean $f, g \colon A \to \mathbb{R}$ y $x_0 \in A'$*

a) Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ y g está minorada, entonces $\lim\limits_{x \to x_0} (f+g)(x) = +\infty$.

b) Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ y existe $K > 0$ tal $g(x) > K$ para todo x, entonces $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)g(x) = +\infty$.

El siguiente resultado permite resolver algunas indeterminaciones del tipo "1^∞".

Proposición 4.15 (Regla del número e). *Sean $f, g \colon A \to \mathbb{R}$ y $a \in A'$. Supongamos que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 1$. Entonces*

a) $\lim\limits_{x \to a} f(x)^{g(x)} = e^L \iff \lim\limits_{x \to a} g(x)\,(f(x)-1) = L$,

b) $\lim\limits_{x \to a} f(x)^{g(x)} = 0 \iff \lim\limits_{x \to a} g(x)\,(f(x)-1) = -\infty$, y

c) $\lim\limits_{x \to a} f(x)^{g(x)} = +\infty \iff \lim\limits_{x \to a} g(x)\,(f(x)-1) = +\infty$.

Ejemplo 4.16. Calcula $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+2x+1}{x^2-x+3}\right)^{x-3}$.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+2x+1}{x^2-x+3}\right)^{x-1}=e^L \iff \lim_{x\to+\infty}(x-3)\left(\frac{x^2+2x+1}{x^2-x+3}-1\right)=L.$$

Resolvamos este segundo límite:

$$\lim_{x\to+\infty}(x-3)\left(\frac{x^2+2x+1}{x^2-x+3}-1\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x-3)(3x-2)}{x^2-x+3}=3.$$

Por tanto, $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+2x+1}{x^2-x+3}\right)^{x-3}=e^3$.

Proposición 4.17 (Escala de infinitos). *Sea $a\in\mathbb{R}^+$, entonces*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log(x)}{x^a}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^a}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^x}=0.$$

Ejemplo 4.18. Vamos a comprobar que $\lim_{x\to+\infty}x^{1/x}=1$.
Tomando logaritmos,

$$\lim_{x\to+\infty}x^{1/x}=e^L \iff \lim_{x\to+\infty}\frac{\log(x)}{x}=L,$$

y este último límite vale 0 por lo que el límite original es $e^0=1$.

Es posible intercambiar los papeles de $+\infty$ y 0 en un límite.

Proposición 4.19. *Sea f una función definida en un intervalo no acotado superiormente. Entonces*

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=L \iff \lim_{x\to0^+}f\left(\frac{1}{x}\right)=L.$$

Ejemplo 4.20. El cambio de variable anterior nos permite resolver algunos límites de forma sencilla. Por ejemplo, el límite

$$\lim_{x\to0^+}\frac{e^{-1/x^2}}{x^3}$$

involucra exponenciales y polinomios, pero no se encuentra en las condiciones necesarias para poder aplicar la escala de infinitos. Un cambio de variable de la forma $y=\frac{1}{x}$ nos resuelve la situación:

$$\lim_{x\to0^+}\frac{e^{-1/x^2}}{x^3}=\lim_{y\to+\infty}\frac{y^3}{e^{y^2}}=0,$$

usando, ya sí, la escala de infinitos.

4.4 Continuidad

Ya que tenemos la definición de límite, podemos hablar de continuidad.

Definición 4.21. Sea $f\colon A\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. La función f es *continua* en $a\in A$ si $\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$,

Podemos expresar la continuidad utilizando sucesiones de manera similar a lo que hemos hecho con límites o de la forma "$\epsilon-\delta$".

Proposición 4.22. *Sea $f\colon A\to\mathbb{R}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

a) f es continua en $a \in A$.

b) Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $x \in A$ y $|x - a| < \delta$, entonces $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Si te fijas, la definición de función continua se parece mucho a la definición de límite. Comparándolas, la primera diferencia salta a la vista: hemos cambiado el valor del límite por $f(a)$. La segunda es un poco más sutil: en la definición de límite partimos de un punto de acumulación. Como vemos en la siguiente proposición, es importante distinguir entre puntos aislados y puntos de acumulación a la hora de estudiar la continuidad de una función.

Proposición 4.23. *Sea $f: A \to \mathbb{R}$.*

a) Si a es un punto de acumulación de A, f es continua en a si y sólo si existe $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

b) Si a es un punto aislado de A, f es continua en a.

Observación 4.24. La distinción entre puntos aislados y puntos de acumulación carece de importancia en el caso de funciones definidas en intervalos ya que todos los puntos son de acumulación. Por tanto, si I es un intervalo, una función $f: I \to \mathbb{R}$ es continua en $a \in I$ si y sólo si $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

4.4.1 Discontinuidades

¿Qué puede fallar para que que una función no sea continua? Para que sí lo sea, debe existir el límite en dicho punto y coincidir con el valor de función. Por tanto, las discontinuidades se deben a alguno de estas dos causas:

a) El límite $\lim_{x \to a} f(x)$ existe pero no vale $f(a)$. En este caso decimos que la función presenta una *discontinuidad evitable* en a. El motivo es que si cambiamos el valor de la función en a por el del límite obtenemos una función continua.

b) La segunda posibilidad es que no exista el $\lim_{x \to a} f(x)$. Esto puede deberse a varios factores.

   i) Existen los límites laterales pero no coinciden. En este caso diremos que f presenta una *discontinuidad de salto* en a.

   ii) Algún límite lateral no existe: diremos que f tiene una discontinuidad esencial en a.

4.4.2 Álgebra de funciones continuas

Como sabemos el comportamiento de los límites con respecto a sumas, productos o cocientes, es fácil obtener un resultado similar para funciones continuas.

Proposición 4.25. *Sean $f, g: A \to \mathbb{R}$ continuas en $a \in A$. Entonces,*

a) $f + g$ es continua en a,

b) fg es continua en a, y

c) si $g(a) \neq 0$, $\frac{f}{g}$ es continua en a.

Proposición 4.26 (Regla de la cadena). *La composición de funciones continuas es una función continua.*

Ejemplo 4.27. La función valor absoluto es continua. En consecuencia si f es continua $|f|$ también lo es. Es fácil encontrar ejemplos de que el recíproco no es cierto. La función

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \geq 0 \\ -1, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

es discontinua en el origen y $|f|$ es la función constantemente igual a uno que sí es continua.

4.4.3 Carácter local de la continuidad

La continuidad de una función en un punto sólo depende del comportamiento de dicha función "cerca" del punto. Este hecho lo aplicamos sin darnos cuenta cada vez que estudiamos la continuidad de una función definida a trozos. Por ejemplo, cuando decimos que la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{si } x \geq 0, \\ \operatorname{sen}(x), & \text{si } x < 0, \end{cases}$$

es continua en $\mathbb{R}^+$ sólo nos estamos fijando en x^2 que, evidentemente, es una función continua. En otras palabras, la continuidad de f en el punto $x = 0.5$ no depende del comportamiento de dicha función en $\mathbb{R}^-$.

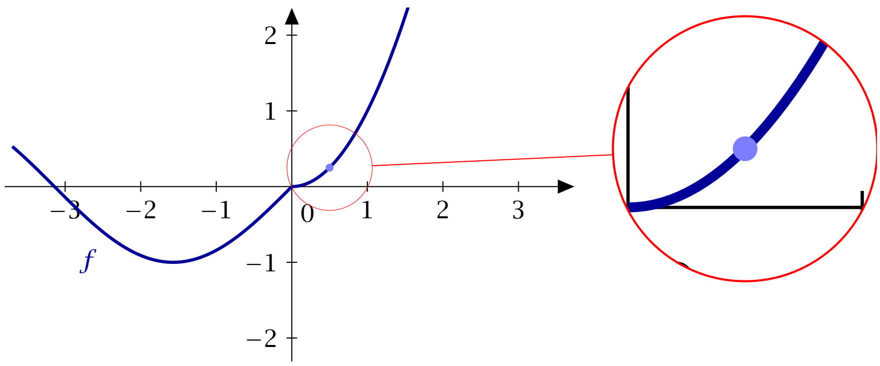


Figura 4.4 Carácter local de la continuidad

El siguiente resultado nos dice que la restricción de una función continua sigue siendo una función continua.

Proposición 4.28. *Sea $f: A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua en $a \in A$ y sea $B \subset A$ con $a \in B$. Entonces $f_{|B}$ es continua en a.*

Si nos quedamos con un dominio más pequeño, la continuidad no se resiente. ¿Qué ocurre con el recíproco? Si una función es continua en un dominio, ¿qué ocurre si la extendemos a un dominio mayor? En general no se mantiene la continuidad: piensa, por ejemplo en una función definida en los $[0, +\infty[$. ¿Se puede extender a $\mathbb{R}$ manteniendo la continuidad en el origen? La respuesta ya la conoces: sólo si el límite por la izquierda coincide con el valor de la función en 0. Ahora bien, en otros puntos la situación es distinta. Por ejemplo, si la función era continua en 1, también lo sigue siendo la extensión.

Proposición 4.29 (Carácter local de la continuidad). *Sea $f: A \to \mathbb{R}$ y $a \in A$. Son equivalentes:*

a) f es continua en a.

b) Para cualquier $r > 0$, $f_{|A\cap]a-r,a+r[}$ es continua en a.

c) Existe $r > 0$ tal que $f_{|A\cap]a-r,a+r[}$ es continua en a.

4.5 Teorema del valor intermedio

El teorema del valor intermedio o su versión equivalente el teorema de los ceros de Bolzano es el resultado más importante de este tema. Su demostración

Lema 4.30 (Lema de conservación del signo). *Sea $f\colon A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua en $a \in A$ con $f(a) \neq 0$. Entonces existe $\delta > 0$ verificando que $f(x)f(a) > 0$, para todo $x \in]a-\delta, a+\delta[\cap A$.*

Demostración. Aplicamos la definición de continuidad tomando $\varepsilon = |f(a)|$ y encontramos $\delta < 0$ tal que

$$\left.\begin{array}{r} |x-a| < \delta \\ x \in A \end{array}\right\} \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Esto es equivalente a que

$$f(a) - |f(a)| < f(x) < f(a) + |f(a)|. \tag{4.1}$$

Discutimos ahora las dos signos posibles:

a) Si $f(a) > 0$, la primera desigualdad de la ecuación (4.1) nos da que $f(x) > 0$.

b) Si $f(a) < 0$, la segunda parte de la ecuación (4.1) nos dice que $f(x)$ también es negativo. □

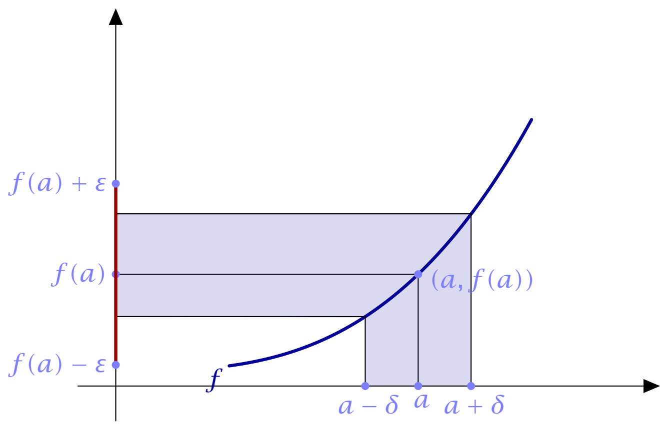


Figura 4.5 Conservación del signo

En la Figura 4.5 se puede ver lo que hemos hecho: en el caso de que $f(a)$ sea positivo, elegimos un $\varepsilon < f(a)$ y aplicamos la definición de continuidad. Así obtenemos un intervalo centrado en a en los que la función f toma valores positivos.

Teorema 4.31 (de los ceros de Bolzano). *Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ continua y verificando $f(a)f(b) < 0$. Entonces existe $c \in]a,b[$ tal que $f(c) = 0$.*

El teorema de los ceros de Bolzano es un resultado de existencia: sólo afirma que hay un punto donde la función vale cero. No dice nada sobre cuántos puntos de este tipo hay ni sobre cómo podemos encontrarlos.

Ejemplo 4.32. Una de las utilidades más importantes del teorema de los ceros de Bolzano es garantizar que una ecuación tiene solución. Por ejemplo, para comprobar que la ecuación $e^x + \log(x) = 0$ tiene solución, estudiamos la función $f(x) = e^x + \log(x)$: es continua en $\mathbb{R}^+$ y se puede

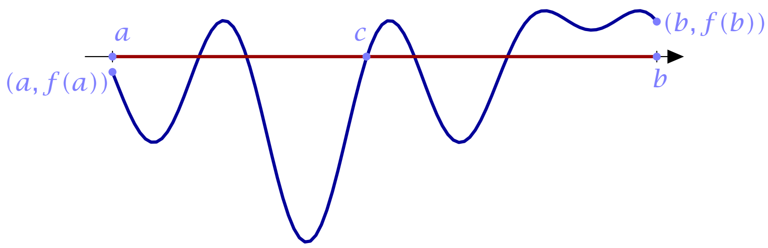


Figura 4.6 Teorema de los ceros de Bolzano

comprobar que $f(e^{-10}) < 0$ y $0 < f(e^{10})$. Por tanto, la ecuación $e^x + \log(x) = 0$ tiene al menos una solución entre e^{-10} y e^{10}. En particular, tiene solución en $\mathbb{R}^+$.

El teorema del valor intermedio es equivalente al teorema de los ceros de Bolzano. Si este último afirma que en cuanto una función continua tome valores positivos y negativos, tiene que anularse, el teorema del valor intermedio traslada esta afirmación a cualquier número real: en cuanto una función continua tome dos valores distintos, también tiene que alcanzar los valores intermedios. Todo esto es cierto únicamente cuando el dominio es un intervalo.

Teorema 4.33 (del valor intermedio). *Sea I un intervalo, $f : I \to \mathbb{R}$ una función continua. Entonces $f(I)$ es un intervalo.*

Demostración. Tenemos que demostrar que si $c, d \in f(I)$, entonces $[c, d] \subset f(I)$. Puesto que c y d pertenecen a la imagen de la función, existen a y b en I tales que $f(a) = c$ y $f(b) = d$. Puesto que I es un intervalo $[a, b] \subset I$. Tengáse en cuenta que no sabemos si a es menor o mayor que b y que cuando escribimos $[a, b]$ nos estamos refiriendo al intervalo $[a, b]$ o al $[b, a]$, depende del orden que corresponda.

Sea $z \in]c, d[$. Consideremos la función $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ definida como $g(x) = f(x) - z$. Es claro que g es una función continua. Además, $g(a) = f(a) - z = c - z < 0 < d - z = f(b) - z = g(b)$ y, por tanto, g verifica las hipótesis del teorema de los ceros de Bolzano. En consecuencia, existe $x_0 \in [a, b]$ tal que $g(x_0) = 0$ o, equivalente, $f(x_0) = z$. □

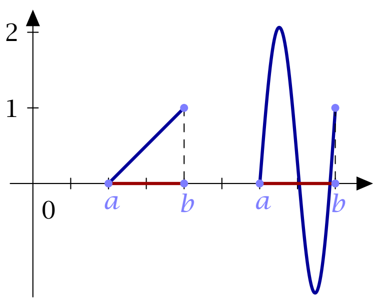


Figura 4.7

Si el teorema de los ceros de Bolzano nos garantiza que una ecuación vale cero o, lo que es lo mismo, que una función se anula, el teorema del valor intermedio nos permite conocer todos los valores de una función: su imagen. Sólo nos queda una dificultad que superar. Imagina por un momento que sabes los valores de una función en dos puntos. Por ejemplo, supongamos que una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua verifica que $f(a) = 0$ y que $f(b) = 1$. ¿Qué podemos decir sobre su imagen? El teorema del valor intermedio nos dice que la función toma todos los valores entre 0 y 1. En otras palabras $[0, 1] \subset f([a, b])$, pero ¿se da la igualdad? En la Figura 4.7 puedes ver que la imagen puede ser un conjunto mayor. El ingrediente que falta para resolver este problema es la monotonía de la función.

Propiedad de compacidad

El siguiente teorema y sus versiones para funciones de varias variables es una herramienta fundamental en el estudio de los extremos absolutos de una función y responde a la pregunta de qué se puede decir sobre cómo son los intervalos en el teorema del valor intermedio. Ningún otro resultado nos va a garantizar a tanta generalidad la existencia de extremos.

Teorema 4.34 (Propiedad de compacidad). *Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Entonces $f([a,b])$ es un intervalo cerrado y acotado. En particular, la función f tiene máximo y mínimo absolutos.*

4.6 Monotonía

¿Cómo podemos calcular los extremos absolutos de una función? ¿Hay algún punto destacado donde buscar? En un intervalo, los únicos puntos destacados son los extremos pero es muy fácil encontrar funciones que *no* alcanzan su máximo o su mínimo en ninguno de los extremos del intervalo. Por ejemplo, consideremos la función $\operatorname{sen}\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}$. Sabemos su valor en los extremos: cero. ¿Nos da eso alguna información sobre el máximo o el mínimo de la función? La verdad es que no demasiada. La información adicional que necesitamos sobre la función es la monotonía.

Definición 4.35.

a) Una función $f\colon A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es *creciente* (resp. *decreciente*) si

$$x \le y \implies f(x) \le f(y) \quad (\text{resp.} f(x) \ge f(y)).$$

b) Una función $f\colon A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es *estrictamente creciente* (resp. *estrictamente decreciente*) si

$$x < y \implies f(x) < f(y) \quad (\text{resp.} f(x). > f(y))$$

En general, diremos que una función es *monótona* si es creciente o decreciente y diremos que es *estrictamente monótona* si es estrictamente creciente o estrictamente decreciente.

Observación 4.36. Hay veces que los nombres nos pueden inducir a error y este es uno de esos casos. La idea intuitiva que tenemos todos es que una función creciente es aquella que tiene una gráfica ascendente. En realidad eso es una función estrictamente creciente. Una función constante es creciente (y decreciente). La expresión correcta debería ser que una función creciente es aquella cuya gráfica "no baja".

Imagen de una función

Una vez que tenemos todos los ingredientes: función definida en un intervalo, continua y monótona, ya podemos calcular la imagen de dicha función. Enunciamos el resultado sólo para funciones crecientes. Ya te puedes imaginar cuál es para funciones decrecientes.

Corolario 4.37.

a) Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua y creciente. Entonces la imagen de f es $f([a,b]) = [f(a), f(b)]$.

b) Sea $f\colon]a,b[\to \mathbb{R}$ una función continua y estrictamente creciente. Entonces la imagen de f es $f(]a,b[) = \left]\lim_{x\to a} f(x), \lim_{x\to b} f(x)\right[$.

Ejemplo 4.38. Sea $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \frac{x}{1+x}$, para cualquier $x \in [0,1]$.

a) El dominio de la función es un intervalo.

b) La función es continua por ser cocientes de funciones continuas, polinomios en este caso.

c) Vamos a comprobar que es creciente: si $x, y \in [0,1]$,

$$f(x) \leq f(y) \iff \frac{x}{1+x} \leq \frac{y}{1+y} \iff x(1+y) \leq y(1+x) \iff x + xy \leq y + xy \iff x \leq y.$$

Por tanto, $f([0,1]) = [f(0), f(1)] = [0, 1/2]$.

El estudio de la monotonía de una función puede complicarse. En algunas ocasiones, se puede sustituir por la condición, más débil, de inyectividad aunque tendremos que esperar hasta el siguiente tema, derivabilidad, para encontrar una condición verdaderamente útil: el signo de la derivada. Volveremos a esta cuestión al final del siguiente tema.

4.6.1 Monotonía e inyectividad

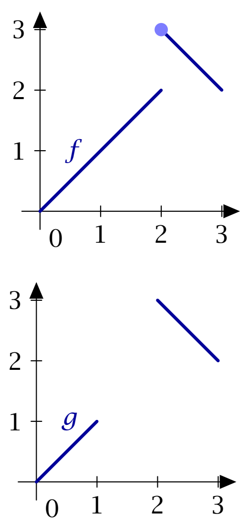


Figura 4.8 Monotonía e inyectividad

La definición de función estrictamente monótona nos dice que puntos del dominio distintos tienen imágenes distintas. En particular, *las funciones estrictamente monótonas son inyectivas.* El recíproco no es cierto en general. Hay funciones inyectivas que no son monótonas. Por ejemplo, la función $f\colon [0,3] \to \mathbb{R}$ definida como

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } 0 \leq x < 2, \\ 5 - x, & \text{si } 2 \leq x \leq 3, \end{cases}$$

no es creciente ni decreciente. Tampoco es difícil conseguir un ejemplo con funciones continuas: eliminemos los puntos de discontinuidad de la función f. Considera la función $g\colon [0,1] \cup [2,3] \to \mathbb{R}$ definida como

$$g(x) = \begin{cases} x, & \text{si } 0 \leq x < 1, \\ 5 - x, & \text{si } 2 \leq x \leq 3, \end{cases}$$

Como puedes ver, para la inyectividad no es una condición suficiente para probar monotonía si consideramos funciones que no sean continuas o que no estén definidas en intervalos. En otro caso, el resultado es cierto.

Proposición 4.39. *Sea I un intervalo y $f\colon I \to \mathbb{R}$ continua. Entonces f es estrictamente monótona si, y sólo si, f es inyectiva.*

4.7 Ejercicios

4.7.1 Límites elementales

Ejercicio 4.1. Calcula los siguientes límites

a) $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{7x+4}$

b) $\lim_{x\to\infty} \frac{5x+3}{2x^2+1}$

c) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2}$

d) $\lim_{x\to 2^+} \frac{x^2+4}{x-2}$

Ejercicio 4.2. Calcula los siguientes límites

a) $\lim_{x\to 4} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{x-4}\right)$,

b) $\lim_{x\to 0} \frac{x^4}{3x^3+2x^2+x}$,

c) $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x-1}}{|x-1|}$,

d) $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{|x-1|}$,

Ejercicio 4.3. Calcula los siguientes límites

a) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$

b) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{1-x}-1}$

c) $\lim_{x\to 0} \frac{2x+3}{\sqrt[3]{26+x}-3}$

d) $\lim_{x\to +\infty} \sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}$

Ejercicio 4.4. Calcula los siguientes límites

a) $\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x^2+x}$

b) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{|x-1|}$

c) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2+x+6}{x^2-4}$

d) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{2-2^{1/x}}$

e) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{e^{1/x}+1}$

4.7.2 Límites y continuidad

Ejercicio 4.5. Sean $f, g. \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ las funciones definidas por

a)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+e^{1/x}}, & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

b)

$$g(x) = \begin{cases} \frac{e^x}{x}, & \text{si } x < 0 \\ x, & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ \sqrt[5]{x}, & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Estudia la continuidad de f y g y la existencia de límites de f y g en $+\infty$ y $-\infty$.

Ejercicio 4.6. Sea $f. \mathbb{R}^+ \setminus \{e\} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x^{\frac{1}{\log(x)-1}}$, para todo $x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{e\}$. Estudia el comportamiento de f en $0, e, +\infty$.

Ejercicio 4.7. Sea $f. \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \left(\frac{1}{\tan(x)}\right)^{\operatorname{sen}(x)}$. Prueba que f tiene límite en los puntos 0 y $\frac{\pi}{2}$ y calcula dichos límites.

Ejercicio 4.8. Sea $f\colon \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = (1 + \operatorname{sen}(x))^{\operatorname{cotan}(x)}$. Estudia la continuidad de f y su comportamiento en 0 y $\pi/2$.

Ejercicio 4.9. Estudia el comportamiento en cero de las funciones $f, g\colon \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ definidas por

$$f(x) = \arctan\left(\frac{7}{x}\right) - \arctan\left(\frac{-5}{x}\right), \quad g(x) = x f(x).$$

Ejercicio 4.10. Prueba que existe un número real positivo x tal que $\log(x) + \sqrt{x} = 0$.

Ejercicio 4.11. Prueba que la ecuación $x + e^x + \arctan(x) = 0$ tiene una sola raíz real. Da un intervalo de longitud uno en el que se encuentre dicha raíz.

Ejercicio 4.12. Determina la imagen de la función $f\colon \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \arctan(\log |x|)$.

Ejercicio 4.13. Sea $f\colon [0,1] \to [0,1]$ una función continua en $[0,1]$. Pruébese que f tiene un punto fijo: existe $c \in [0,1]$ tal que $f(c) = c$.

Derivabilidad

5

5.1 Definición. Recta tangente.

Definición 5.1. Una función $f\colon A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es *derivable* en $a \in A \cap A'$ si existe

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

A dicho límite lo notaremos $f'(a)$. A la función $a \mapsto f'(a)$ la llamaremos *función derivada* de f y la notaremos f'.

Observación 5.2.

a) El cociente incremental $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ y la derivada se pueden ver también como un límite en cero haciendo un cambio de variable:

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

b) La restricción de que a sea un punto de acumulación del dominio de la función ($a \in A \cap A'$) es obligatoria si queremos que el cociente incremental tenga sentido y no estemos dividiendo por cero. Recuerda que en el caso de que el conjunto A sea un intervalo se cumple que $A' = \overline{A}$ con lo que podemos estudiar la derivabilidad en cualquier punto del intervalo.

Ejemplo 5.3. La función $f(x) = x^2$ es derivable. Su derivada en un punto a es, según la definición,

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x\to a} \frac{x^2 - a^2}{x - a} = \lim_{x\to a} \frac{(x+a)(x-a)}{x - a} = 2a.$$

Obtenemos así la fórmula usual de la derivada de $f(x) = x^2$, esto es, que $f'(x) = 2x$.

La condición de ser derivable es más fuerte que la de ser continua.

Proposición 5.4 (Condición necesaria de derivabilidad). *Sea $f\colon A \to \mathbb{R}$ derivable en $a \in A$, entonces f es continua en a.*

El recíproco no es cierto. Hay funciones continuas que no son derivables.

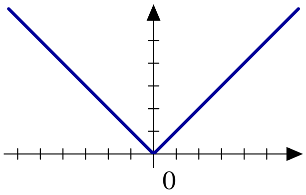


Figura 5.1 La función valor absoluto no es derivable en el origen

Ejemplo 5.5. La función valor absoluto, $f(x) = |x|$, es continua pero no es derivable en el origen: no coinciden los límites laterales en 0.

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = 1, \quad \text{y}$$
$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x}{x} = -1.$$

Por tanto, la función valor absoluto no es derivable en el origen. En el resto de puntos de la recta real, la función es o bien la identidad o bien la identidad cambiada de signo. En ambos casos, la función es derivable. ¿Por qué? Fíjate que la definición de derivabilidad está hecha usando límites y que, en particular, cuestiones como su carácter local siguen siendo válidas.

5.1.1 Interpretación geométrica de la derivada

La recta que une los puntos $(a, f(a))$ y $(x, f(x))$ es una recta secante a la gráfica de la función f. Puedes ver en la Figura 5.2 que el cociente incremental es

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \tan(\theta).$$

Cuando hacemos tender x a a, dicha recta se convierte en tangente a la función f en el punto $(a, f(a))$. Si el valor $\tan(\theta)$ nos indica la pendiente de la recta secante, la derivada, $f'(a)$, nos indica la pendiente de la *recta tangente* que tiene como fórmula

$$y = f(a) + f'(a)(x - a).$$

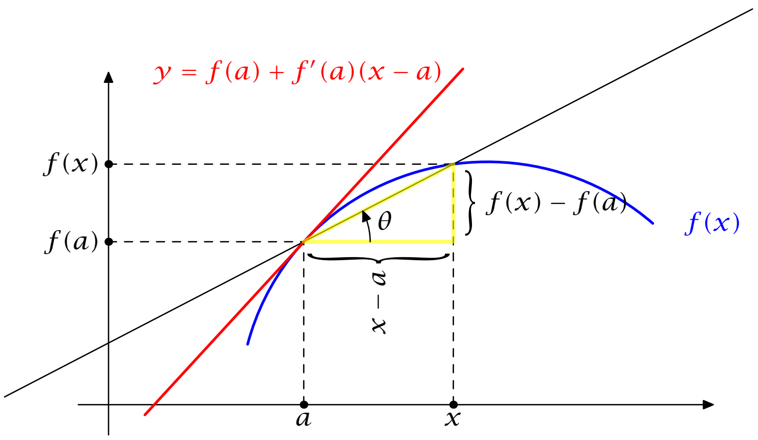


Figura 5.2 Recta tangente

5.1.2 Derivadas laterales

Puesto que la derivada está definida como un límite y sabemos la relación entre límites laterales y límite, podemos hablar de *derivadas laterales*. Aunque tiene sentido para un conjunto cualquiera, vamos a enunciarlo únicamente para funciones definidas en un intervalo I.

Definición 5.6. Sea $f: I \to \mathbb{R}$, $a \in I$, de forma que $\{x \in I : x < a\} \neq \emptyset$. Se dice que f es *derivable por la izquierda* en el punto a si existe

$$\lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a^-)$$

Este límite se llama *derivada lateral izquierda* de f en el punto a.
Si ahora el punto a es tal que $\{x \in I : x > a\} \neq \emptyset$, se dice que f es *derivable por la derecha* en el punto a si existe

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a^+)$$

Este límite se llama *derivada lateral derecha* de f en el punto a.

Observación 5.7. La relación que hay entre la derivabilidad y la derivabilidad lateral para funciones definidas en un intervalo I queda reflejada en las siguientes afirmaciones:

a) Si $a = \min(I)$, entonces f es derivable en a si, y sólo si, f es derivable por la derecha a y además, $f'(a) = f'(a^+)$.

b) Si $a = \max(I)$, entonces f es derivable en a si, y sólo si, f es derivable por la izquierda en a y además, $f'(a) = f'(a^-)$.

c) Si $a \in \mathring{I}$, entonces f es derivable en a si, y sólo si, f es derivable por la izquierda y por la derecha en a y ambas derivadas coinciden. Además, en ese caso, $f'(a) = f'(a^+) = f'(a^-)$.

Resumiendo, para que una función sea derivable deben de existir todas las derivadas laterales que tengan sentido y coincidir.

5.2 Reglas de derivación

Proposición 5.8 (Álgebra de derivadas). *Sean $f, g : A \to \mathbb{R}$ funciones derivables en $a \in A$. Entonces*

a) La suma de funciones derivables es una función derivable y su derivada es la suma de las derivadas:

$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a).$$

b) El producto de funciones derivables es una función derivable y

$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a).$$

c) Si $g(a) \neq 0$, la función $\frac{f}{g}$ es derivable y su derivada es

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2}.$$

Usando el primer apartado podemos calcular la derivada de cualquier polinomio, siempre que sepamos la derivada de x^n. Comencemos por eso.

Ejemplo 5.9 (Derivada de una potencia). Es inmediato comprobar que la función identidad $f(x) = x$ es derivable y que $f'(x) = 1$. Usando la segunda propiedad se demuestra por inducción que cualquier potencia también lo es y que la derivada de la función $g(x) = x^n$ es $g'(x) = nx^{n-1}$, para cualquier natural n, aunque dicha derivada también se puede calcular directamente:

$$\lim_{h \to 0} \frac{(a+h)^n - a^n}{h} = \lim_{h \to 0} \binom{n}{1} a^{n-1} + \binom{n}{2} a^{n-2}h + \cdots = na^{n-1},$$

usando la fórmula del binomio de Newton.

Con esto tenemos resuelta la derivada de una función racional. Veamos otro tipo de funciones. Por ejemplo, ¿cuál es la derivada de la función exponencial?

Ejemplo 5.10 (Derivada de la función exponencial). Calculamos la derivada de la función exponencial. Si $a \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{x\to a} \frac{e^x - e^a}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{e^a\left(e^{x-a}-1\right)}{x-a}.$$

Usando la regla que tenemos para resolver indeterminaciones del tipo "1^∞" (Proposición 4.15),

$$\lim_{x\to a} \frac{1}{x-a}\left(e^{x-a}-1\right) = L \iff \lim_{x\to a}\left(e^{x-a}\right)^{1/(x-a)} = e = e^L.$$

Por tanto $L = 1$ y

$$\lim_{x\to a} \frac{e^x - e^a}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{e^a\left(e^{x-a}-1\right)}{x-a} = e^a$$

o, lo que es lo mismo, la derivada de la función exponencial es ella misma.

No parece fácil calcular la derivada de la función logaritmo únicamente con la definición, pero el siguiente resultado nos dice cómo calcular la derivada de la inversa de cualquier función.

Proposición 5.11 (Regla de la cadena). *Sean $f\colon A \to \mathbb{R}$ con $f(A) \subset B$ y $g\colon B \to \mathbb{R}$. Supongamos que f derivable en $a \in A$ y que g es derivable en $f(a)$. Entonces, la función compuesta $g \circ f$ es también derivable en a con derivada*

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a))\, f'(a).$$

Teorema 5.12 (de derivación de la función inversa). *Sea $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función inyectiva con inversa $f^{-1}\colon f(A) \to \mathbb{R}$. Sea $a \in A$ y supongamos que f es derivable en a. Entonces son equivalentes:*

a) $f'(a) \neq 0$ y f^{-1} es continua en $f(a)$.

b) f^{-1} es derivable en $f(a)$.

En caso de que se cumplan ambas afirmaciones se tiene que $\left(f^{-1}\right)'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}$.

Ejemplo 5.13. Usemos que la derivada de la función exponencial $f(x) = e^x$ es $f'(x) = e^x$ para calcular la derivada de su inversa, f^{-1}, la función logaritmo. Aplicando el teorema de derivación de la función inversa,

$$(f^{-1})'(f(x)) = (f'(x))^{-1} = \frac{1}{f(x)}.$$

Si $y = f(x)$, tenemos que $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{y}$.

5.3 Teorema del valor medio

Definición 5.14. Una función $f\colon A \to \mathbb{R}$ tiene un *máximo relativo* en $a \in A$ si existe un entorno de a, $]a-r, a+r[\subset A$, donde se cumple que

$$f(x) \le f(a), \ \forall x \in]a-r, a+r[.$$

Si se cumple que $f(x) \ge f(a)$, diremos que la función tiene un *mínimo relativo* en a.
En general, nos referiremos a cualquiera de las dos situaciones diciendo que f tiene un *extremo relativo* en a.

Observación 5.15. En el caso particular de funciones definidas en intervalos, los extremos relativos sólo se pueden alcanzar en puntos del interior del intervalo, nunca en los extremos.

Al igual que la monotonía, la noción de extremo relativo no tiene nada que ver la continuidad o derivabilidad de la función en un principio. Sólo depende del valor de la función en un punto y en los puntos cercanos.

Ejemplo 5.16. La *parte entera* de un número real x es el único número entero $E(x)$ que verifica que $E(x) \leq x < E(x)+1$. La gráfica de dicha función la puedes ver en la Figura 5.3. ¿Tiene máximo o mínimos relativos? Si lo piensas un poco, descubrirás que la función alcanza un máximo relativo en *todos* los puntos y un mínimo relativo en cualquier punto que no sea entero.
En efecto, alrededor de un número no entero la función es constante y, por tanto, tiene un máximo y un mínimo relativo. En cambio, si z es un número entero, se tiene que $f(z) \leq f(x)$ para cualquier $x \in \left]z-\frac{1}{2}, z+\frac{1}{2}\right[$.

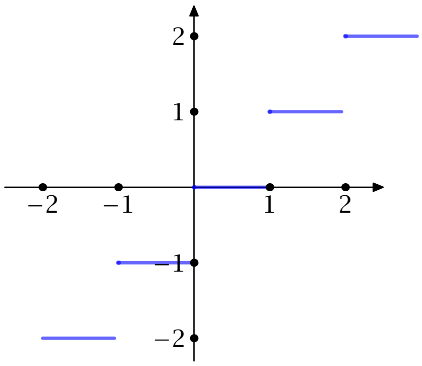


Figura 5.3 Función parte entera

En el caso de funciones derivables la búsqueda de extremos relativos es un poco más sencilla. El siguiente resultado nos dice que sólo tendremos que buscar puntos que anulen la derivada.

Proposición 5.17. *Sea $f\colon A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivable en $a \in A$. Si f tiene un extremo relativo en a, entonces $f'(a) = 0$.*

Usualmente llamaremos *puntos críticos* a aquellos en los que se anula la derivada.

Teorema 5.18 (de Rolle). *Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a,b]$, derivable en $]a,b[$ y verificando que $f(a) = f(b) = 0$. Entonces existe $c \in]a,b[$ tal que $f'(c) = 0$.*

Demostración. Usando la propiedad de compacidad, la función alcanza su máximo y su mínimo absolutos en $[a,b]$. Sean α, $\beta \in [a,b]$ tales que $f(\alpha) = \max(f)$ y $f(\beta) = \min(f)$.

a) Si $\alpha \in]a,b[$, α es un máximo relativo y, por tanto, $f'(\alpha) = 0$.

b) Si $\beta \in]a,b[$, β es un máximo relativo y, por tanto, $f'(\beta) = 0$.

c) Si $\alpha, \beta \in \{a,b\}$, entonces f es constante y, por tanto $f'(x) = 0$ en todo el intervalo. □

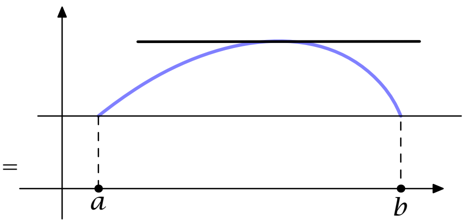


Figura 5.4 Teorema de Rolle

Teorema 5.19 (del valor medio). *Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a,b]$ y derivable en $]a,b[$. Entonces existe $c \in]a,b[$ tal que $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$.*

Demostración. La función $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ definida como $g(x) = (f(b)-f(a))x - (b-a)f(x)$ verifica las hipótesis del teorema de Rolle. Por tanto existe $c \in]a,b[$ tal que $g'(c) = 0$ como queríamos. □

5.4 Consecuencias del teorema del valor medio

5.4.1 Derivadas y monotonía

Proposición 5.20. *Sea I un intervalo, $f: I \to \mathbb{R}$ derivable.*

a) f es creciente si y sólo si $f'(x) \geq 0$ para cualquier $x \in I$.

b) f es decreciente si y sólo si $f'(x) \leq 0$ para cualquier $x \in I$.

c) f es constante si y sólo si $f'(x) = 0$ para cualquier $x \in I$.

d) Si $f'(x) > 0$ para todo $x \in I$, entonces f es estrictamente creciente.

e) Si $f'(x) < 0$ para todo $x \in I$, entonces f es estrictamente decreciente.

Teorema 5.21 (del valor intermedio para la derivada). *Sea I un intervalo y $f: I \to \mathbb{R}$ derivable. Entonces $f'(I)$ es un intervalo.*

Observación 5.22. El teorema del valor intermedio para la derivada no es una consecuencia del teorema del valor intermedio. Sería necesario que la función fuera de clase C^1 para garantizarnos la continuidad de la derivada. Sin embargo, se pueden encontrar funciones derivables cuya derivada no es una función continua (veáse el Ejemplo 5.28).

La primera aplicación del teorema del valor intermedio para la derivada es que el estudio de la monotonía se simplifica sobremanera. Una vez que sabemos que la derivada no se anula (en un intervalo), basta evaluar en un punto arbitrario para saber su signo.

Ejemplo 5.23. Estudiemos la monotonía de la función $f(x) = 1 + \sqrt{x} - \sqrt{1+x}$ para $x > 0$. Para ello, veamos cuándo se anula la derivada:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{1+x}} = 0 \iff \sqrt{x} = \sqrt{1+x} \iff x = 1 + x$$

Por tanto, f' no se anula nunca. El teorema del valor intermedio para las derivadas nos asegura que f es estrictamente monótona en $\mathbb{R}^+$. En efecto, si la derivada cambiase de signo, tendría que anularse, cosa que no ocurre.
Una vez que sabemos que f' tiene el mismo signo en todo $\mathbb{R}^+$, podemos averiguar dicho signo evaluando en cualquier punto. Por ejemplo $f'(1) > 0$, con lo que f es estrictamente creciente.

Lo que hemos visto en el ejemplo anterior, lo podemos repetir con cualquier función cuya derivada no se anule.

Corolario 5.24. *Sea I un intervalo y $f: I \to \mathbb{R}$ una función derivable con $f'(x) \neq 0$, para todo $x \in I$. Entonces f es estrictamente monótona.*

Teorema 5.25 (de la función inversa). *Sea I un intervalo y $f: I \to \mathbb{R}$ derivable en I con $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in I$. Entonces f es estrictamente monótona, f^{-1} es derivable y $\left(f^{-1}\right)'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}$.*

5.4.2 Reglas de L'Hôpital

Proposición 5.26 (1ª regla de L'Hôpital). *Sea I un intervalo, $a \in I$, $f, g: I \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ derivables. Supongamos que $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0$. Entonces, si*

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=L,+\infty,-\infty \implies \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=L,+\infty,-\infty.$$

Podemos aplicar este resultado al estudio de la derivabilidad de una función continua. Aplicando la primera regla de L'Hôpital al límite de la definición de derivada se obtiene el siguiente resultado.

Corolario 5.27 (Condición suficiente de derivabilidad). *Sea I un intervalo, $a\in I$ y $f\colon I\to\mathbb{R}$ una función continua y derivable en $I\setminus\{a\}$.*

a) Si $\lim_{x\to a} f'(x)=L$, entonces f es derivable en a y $f'(a)=L$.

b) Si $\lim_{x\to a} f'(x)=\infty$, entonces f no es derivable en a.

Ejemplo 5.28. Estudiemos la función $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida como

$$f(x)=\begin{cases} x^2\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right), & \text{si } x\neq 0,\\ 0, & \text{si } x=0.\end{cases}$$

Esta función es continua y derivable en $\mathbb{R}^*$. No es difícil comprobar que f es continua en 0. Usando que el producto de una función acotada por otra que tiende a cero es cero, se tiene que

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0} x^2\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)=0=f(0).$$

Sabemos que $f'(x)=2x\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)-\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x\neq 0$. Usando que la función coseno no tiene límite en $+\infty$ (recuerda que sabemos por el Ejemplo 4.12 que ninguna función periódica no trivial tiene límite en infinito), concluimos que no existe $\lim_{x\to 0} f'(x)$.
Para estudiar la derivabilidad en el origen nos queda únicamente la definición

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}{x}=\lim_{x\to 0} x\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)=0.$$

Por tanto, f es derivable en 0 y $f'(0)=0$.
La función f es un ejemplo de una función derivable pero cuya derivada no es una función continua y, al mismo tiempo, un ejemplo de que la regla de L'Hôpital no es una equivalencia.

Proposición 5.29 (2ª regla de L'Hôpital). *Sea I un intervalo, $a\in I$, $f,g\colon I\setminus\{a\}\to\mathbb{R}$ derivables. Supongamos que $\lim_{x\to a}|g(x)|=+\infty$. Entonces, si*

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=L \implies \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=L.$$

5.5 Derivadas de orden superior

Al igual que podemos estudiar la derivabilidad de una función, podemos repetir este proceso y estudiar si la derivada es una función derivable. Si $f\colon A\to\mathbb{R}$ es una función derivable, notaremos f' a la primera derivada, f'' a la segunda derivada y $f^{(n)}$ a la derivada de orden n.

Definición 5.30. Sea $A\subset\mathbb{R}$, diremos que una función $f\colon A\to\mathbb{R}$ es de *clase C^1* si es derivable y f' es una función continua.
Si n es un número natural cualquiera, diremos que f es de *clase C^n* si f es n veces derivable y la derivada n-ésima $f^{(n)}$ es continua.
Por último, si una función admite derivadas de cualquier orden diremos que es de *clase C^∞*.

Usaremos la siguiente notación

$$C^1(A) = \{f\colon A \to \mathbb{R}\colon \text{ existe } f' \text{ y es continua}\},$$
$$C^2(A) = \{f\colon A \to \mathbb{R}\colon \text{ existe } f'' \text{ y es continua}\}\ \ldots$$

En general,

$$C^n(A) = \left\{f\colon A \to \mathbb{R}\colon \text{ existe } f^{(n)} \text{ y es continua}\right\}, \quad \text{y}$$
$$C^\infty(A) = \left\{f\colon A \to \mathbb{R}\colon \text{ existe } f^{(n)} \text{ para todo } n \text{ natural}\right\}.$$

Se tiene la siguiente cadena de inclusiones:

$$C^\infty(A) \subsetneq \ldots C^{n+1}(A) \subsetneq C^n(A) \subsetneq \ldots C^2(A) \subsetneq C^1(A) \subsetneq C(A),$$

donde $C(A)$ denota al conjunto de las funciones continuas en A. Para comprobar que las inclusiones son estrictas, tenemos que encontrar funciones de clase n que no sean de clase $n+1$. ¿Cómo buscamos una función con estas propiedades? La respuesta es sencilla: consideremos la función valor absoluto (o cualquiera otra con un pico) y, aunque todavía no hemos hablado de ello, calculemos una primitiva. Dicha primitiva se puede derivar una vez (obtenemos la función valor absoluto) pero no se puede volver a derivar. Si queremos que se pueda derivar más veces sólo tenemos que integrar más veces. Esto es lo que hacemos en el ejemplo siguiente.

Ejemplo 5.31. La función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como

$$f(x) = \begin{cases} (x-a)^{n+1}, & \text{si } x \geq a, \\ 0, & \text{si } x < a, \end{cases}$$

es de clase C^n pero no de clase C^{n+1}. No es difícil comprobar que la derivada de orden $n+1$ no es continua en a:

$$f'(x) = \begin{cases} (n+1)(x-a)^n, & \text{si } x \geq a, \\ 0, & \text{si } x < a, \end{cases}$$
$$f''(x) = \begin{cases} (n+1)n(x-a)^{n-1}, & \text{si } x \geq a, \\ 0, & \text{si } x < a, \end{cases}$$

y, sucesivamente,

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} (n+1)\omega(x-a), & \text{si } x \geq a, \\ 0, & \text{si } x < a. \end{cases}$$

Esta función *no* es derivable en $x = a$ porque las derivadas laterales existen y no coinciden.

$$f^{(n+1)}(x) = \begin{cases} (n+1)\omega, & \text{si } x > a, \\ 0, & \text{si } x < a. \end{cases}$$

Obsérvese que la función f no es de clase $n+1$ porque no existe la derivada no porque no sea continua. En este sentido, el Ejemplo 5.28 es "mejor": la función era derivable pero la derivada no era continua.

Proposición 5.32. *Sea I un intervalo, $a \in I$ y n, un número natural mayor o igual que 2. Sea $f\colon I \to \mathbb{R}$ una función de clase n verificando*

$$f'(a) = f''(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0,\ f^{(n)}(a) \neq 0.$$

a) Si n es impar, f no tiene un extremo relativo en a.

b) Si n es par:

i) si $f^{(n)}(a) > 0$, f tiene un mínimo relativo en a, *ii) si $f^{(n)}(a) < 0$, f tiene un máximo relativo en a.*

Ejemplo 5.33. La función $f(x) = x^4\left(2 + \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right)$ si $x \neq 0$ y $f(0) = 0$ tiene un mínimo absoluto en el origen pero no se puede encontrar un intervalo centrado en 0 dónde la derivada tenga un único cambio de signo.

5.6 Concavidad y convexidad

Definición 5.34. Sea I un intervalo de $\mathbb{R}$. Diremos que una función $f\colon I \to \mathbb{R}$ es *convexa* si verifica que

$$f\left((1-\lambda)x + \lambda y\right) \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y),$$

para cualesquiera $x, y \in I$.
Diremos que la función es *cóncava* si se verifica la desigualdad opuesta, esto es,

$$f\left((1-\lambda)x + \lambda y\right) \geq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y).$$

Las definiciones de concavidad y convexidad son completamente independientes de que la función sea o no continua, derivable o cualquier otra condición de regularidad. Dicho esto, como ocurre con la monotonía, la derivada es una gran herramienta que nos va a permitir simplificar el estudio de la concavidad y convexidad.

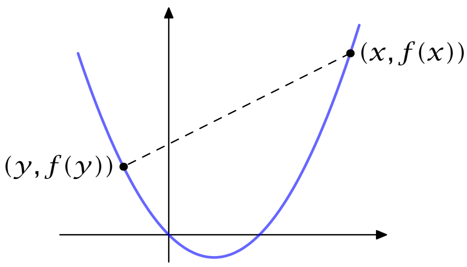


Figura 5.5 Función convexa

Observación 5.35.

a) La convexidad (análogamente la concavidad) tiene una clara interpretación geométrica. Debe verificarse que el segmento que une los puntos $(x, f(x))$, $(y, f(y))$ quede por encima de la gráfica de la función. Recuerda que dados dos puntos $x, y \in \mathbb{R}^n$, el segmento que los une es el conjunto

$$[x, y] = \{(1-\lambda)x + \lambda y \colon \lambda \in [0,1]\}.$$

b) No está de más recalcar que f es convexa si, y sólo si, $-f$ es cóncava.

Proposición 5.36. *Sea I un intervalo y $f\colon I \to \mathbb{R}$ dos veces derivable. Entonces*

a) Si $f''(x) > 0$ para cualquier $x \in I$, entonces f convexa.

b) Si $f''(x) < 0$ para cualquier $x \in I$, entonces f cóncava.

Definición 5.37. Diremos que $f\colon I \to \mathbb{R}$ tiene un *punto de inflexión* en $a \in I$ si en dicho punto la función cambia de cóncava a convexa o viceversa.

5.7 Algunas aplicaciones de la derivada

Ejemplos de máximos, mínimos, número de soluciones, desigualdades, estudio de una función, etc.

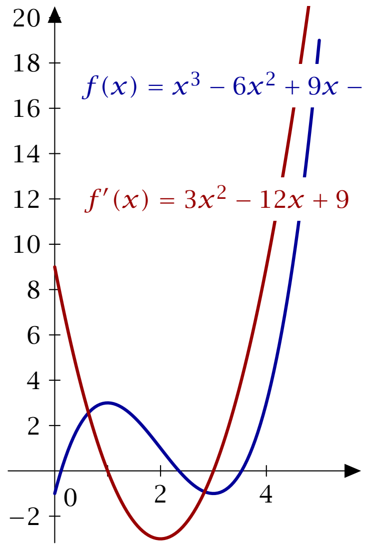
Imagen de una función

El teorema del valor intermedio junto con la monotonía permiten calcular la imagen de una función. Más concretamente, se cumple que

a) si $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ es creciente entonces $f([a,b]) = [f(a), f(b)]$, y

b) si $f\colon]a,b[\to \mathbb{R}$ es estrictamente creciente entonces $f(]a,b[) =]\lim_{x\to a} f(x), \lim_{x\to b} f(x)[$.

Resultados similares se tienen para funciones decrecientes. Observa que necesitamos tres datos de la función para poder aplicarlos: continuidad, monotonía y que el dominio sea un intervalo. Observa que, hasta este momento, no ha aparecido la palabra derivada. Su papel es facilitarnos el estudio de la monotonía. Nada más.



Ejemplo 5.38. Veamos un ejemplo: vamos a calcular la imagen de la función $f\colon [0,5] \to \mathbb{R}$ definida como $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$. En este caso, la función es derivable en todo su dominio, es un polinomio. ¿Cuáles son sus puntos críticos?

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 0 \iff x = 1, 3.$$

Por tanto f es estrictamente monótona en $[0,1]$, en $[1,3]$ y en $[3,5]$. Podemos evaluar la derivada en un punto de cada uno de dichos intervalos para averiguar el carácter de la monotonía:

intervalo	x	signo de $f'(x)$	monotonía de f
$[0,1]$	0	+	est. creciente
$[1,3]$	2	-	est. decreciente
$[3,5]$	4	+	est. creciente

Con estos datos,

$$\begin{aligned} f([0,5]) &= f([0,1]) \cup f([1,3]) \cup f([3,5]) \\ &= [f(0), f(1)] \cup [f(3), f(1)] \cup [f(3), f(5)] \\ &= [-1,3] \cup [-1,3] \cup [-1,19] = [-1,19]. \end{aligned}$$

En particular, la función f tiene máximo y mínimo absolutos y ya sabemos su valor: -1 y 19. También sabemos dónde se alcanzan: el mínimo en 0 y en 3 y y el máximo en 5.
Si en lugar del intervalo $[0,5]$, hubiésemos considerado la función f definida en todo $\mathbb{R}$ no sería necesario estudiar la monotonía. Piénsalo un momento. Se cumple que

$$\lim_{x\to-\infty} x^3 - 6x^2 + 9x - 1 = -\infty \text{ y que } \lim_{x\to+\infty} x^3 - 6x^2 + 9x - 1 = +\infty.$$

Esto quiere decir que $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

Ejemplo 5.39. ¿Cuál es la imagen de la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como

$$f(x) = \arctan\left(x^9 - 2x^4 + \operatorname{sen}^3(2x-3)\right) \star$$

Un vistazo a la derivada y te darás cuenta de que no parece fácil decidir la monotonía de la función. De nuevo, observa que

$$\lim_{x\to-\infty} x^9 - 2x^4 + \operatorname{sen}^3(2x-3) = -\infty \implies \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\frac{\pi}{2}, \text{ y que}$$
$$\lim_{x\to+\infty} x^9 - 2x^4 + \operatorname{sen}^3(2x-3) = +\infty \implies \lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}.$$

Por tanto, $f(\mathbb{R}) \supset \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. ¿Podría ser la imagen un conjunto mayor? En este caso no, ya que la función arcotangente no toma nuca valores fuera de dicho intervalo. En consecuencia $f(\mathbb{R}) = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Extremos absolutos

Acabamos de ver cómo el estudio de la imagen de una función nos da automáticamente, si existen, los extremos absolutos. En el caso de que tengamos garantizado la existencia de dichos extremos *antes* de estudiar monotonía, es posible ahorrar algunos cálculos. Por ejemplo, la función del Ejemplo 5.38 tiene máximo y mínimo por la propiedad de compacidad: es una función continua en un intervalo cerrado y acotado. Eso quiere decir que los extremos absolutos se tienen que alcanzar en uno de los siguientes puntos:

a) puntos críticos,

b) extremos del intervalo, o

c) puntos donde la función no sea continua o no sea derivable.

En este caso, los extremos de la función $f\colon [0,5] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$ tienen que estar entre los siguientes: 0, 1, 3 y 5. Hemos reducido el problema de averiguar el valor máximo o mínimo en todo un intervalo a averiguar el máximo o el mínimo de cuatro números. Sólo hace falta echar un vistazo para encontrarlos:

$$f(0) = -1,\ f(1) = 3,\ f(3) = -1, f(5) = 24.$$

Por tanto, el máximo absoluto se alcanza en 5 y el mínimo en 0 y en 1.

Desigualdades y ecuaciones

La demostración de una desigualdad o el estudio de el número de soluciones de una ecuación son sólo dos ejemplos que podemos resolver estudiando las funciones adecuadas. Por ejemplo, la validez de la desigualdad

$$\operatorname{sen}(x) < x, \quad \forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[,$$

la podemos ver de varias formas: pasamos restando o dividiendo y comprobamos que

a) la imagen de la función $f(x) = x - \operatorname{sen}(x)$ con $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ está contenida en $\mathbb{R}^+$, o bien,

b) la imagen de la función $g(x) = \operatorname{sen}(x)/x$ con $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ está contenida en $]0,1[$.

Dependiendo del tipo de funciones involucradas en la desigualdad, será más conveniente utilizar uno u otro método.

Calculemos cuál es la imagen de $f(x) = x - \operatorname{sen}(x)$ en el intervalo $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. Como $f'(x) = 1 - \cos(x) > 0$ en dicho intervalo, f es estrictamente creciente y, en consecuencia,

$$f\left(\left]0, \frac{\pi}{2}\right[\right) = \left]\lim_{x \to 0} f(x), \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} f(x)\right[= \left]0, \frac{\pi}{2} - 1\right[.$$

También podemos utilizar la monotonía para contar el número de soluciones de una ecuación. Para ello nos aprovecharemos de que una función continua y estrictamente monótona en un intervalo se anula (una única vez) si, y sólo si, cambia de signo en los extremos de dicho intervalo. Más concretamente,

sea $f\colon]a,b[\to \mathbb{R}$ continua y estrictamente creciente. Se cumple que

a) si $\lim_{x \to a} f(x) > 0$ o $\lim_{x \to b} f(x) < 0$, f no se anula en $]a,b[$, y

b) si $\lim_{x \to a} f(x) < 0$ y $\lim_{x \to b} f(x) > 0$, entonces f se anula *una única vez* en $]a,b[$.

5.8 Derivación numérica

A veces ocurre que calcular la derivada de una función f en un punto a del interior de dominio no es fácil, ya sea por la complejidad de la función dada, ya sea porque sólo dispongamos de una tabla de valores de f. En esta sección vamos a establecer métodos para calcular $f'(a)$. No es que vayamos a calcular la función derivada primera de f, sino que vamos a aproximar los valores de ésta en un punto dado a.

Hemos visto en este capítulo que la derivada de una función $f\colon I \to \mathbb{R}$ en un punto $a \in I$ es

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{(a+h) - f(a)}{h}.$$

Si consideramos un valor de h suficientemente pequeño, podemos dar una primera aproximación

$$f'(a) \approx \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

5.8.1 Fórmulas de derivación numérica

En las fórmulas que vamos a estudiar en este apartado aparecen dos valores: el que aproxima $f'(a)$ y el error cometido. Aunque este último no se calcula explícitamente, sí se puede dar una acotación del mismo. Notemos que dicho error se obtiene gracias al desarrollo de Taylor de f centrado en a.

En lo que sigue, el parámetro h se suele tomar positivo y "pequeño".

Fórmula de dos puntos

$$f'(a) = \frac{1}{h}\left(f(a) - f(a-h)\right) + \frac{h}{2} f''(\psi), \quad \psi \in]a-h, a[$$

Esta fórmula se llama *regresiva* porque utiliza información de f en a y en $a-h$.

$$f'(a) = \frac{1}{h}\left(f(a+h) - f(a)\right) - \frac{h}{2} f''(\psi), \quad \psi \in]a, a+h[$$

Esta fórmula se llama *progresiva* porque utiliza información de f en a y en $a+h$.
El primer sumando de ambas fórmulas nos da una aproximación de $f'(a)$, y el segundo nos indica el error cometido.

Fórmula de tres puntos

$$f'(a) = \frac{1}{2h}\left(f(a+h) - f(a-h)\right) - \frac{h^2}{6} f'''(\psi)\,, \quad \psi \in]a-h, a+h[$$

Esta fórmula se llama *central* porque utiliza información de f en $a-h$ y en $a+h$.

$$f'(a) = \frac{1}{2h}\left(-3f(a) + 4f(a+h) - f(a+2h)\right) + \frac{h^2}{3} f'''(\psi)\,, \quad \psi \in]a, a+2h[$$

Esta fórmula es progresiva.

Fómula de cinco puntos

$$f'(a) = \frac{1}{12h}\left(f(a-2h) - 8f(a-h) + 8f(a+h) - f(a+2h)\right) - \frac{h^4}{30} f^{(5)}(\psi)\,, \quad \psi \in]a-2h, a+2h[$$

Ésta es central.

$$f'(a) = \frac{1}{12h}\left(-25f(a) + 48f(a+h) - 36f(a+2h) + 16f(a+3h) - 3f(a+4h)\right) + \frac{h^4}{5} f^{(5)}(\psi),$$

con $\psi \in]a, a+4h[$. Esta es progresiva.

Unas observaciones sobre el término del error:

a) Cuanto mayor es el exponente de h en la fórmula del error, mejor es la aproximación.

b) Cuanto menor es la constante que aparece en la fórmula del error, mejor es la aproximación.

c) Cuidado con los errores de redondeo cuando trabajemos con h excesivamente pequeño. Puede ocurrir que por la aritmética del ordenador, la aproximación numérica sea peor cuanto más pequeño sea h.

Veremos ejemplos más detallados en clase de prácticas.

5.9 Polinomio de Taylor

Si $f. I \to \mathbb{R}$ es una función derivable en $a \in I$, la recta tangente

$$y = f(a) + f'(a)(x-a)$$

tiene cierto parecido con la función original. Más concretamente, ambas pasan por el punto $(a, f(a))$ y tienen la misma pendiente.

Si la función f se puede derivar más veces podemos plantearnos encontrar un polinomio que se ajuste con más exactitud a dicha función. Para ello podemos escoger varios caminos pero, en general, necesitamos imponer condicionales adicionales al polinomio. Por ejemplo: ¿existe un polinomio de grado 2 que coincida con la función, su derivada y la segunda derivada en un punto a? Supongamos que el polinomio es $p(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2$. Si imponemos esas condiciones, obtenemos que:

$$\begin{aligned} a_0 &= f(a), \\ a_1 &= f'(a), \\ 2a_2 &= f''(a), \end{aligned}$$

En general, el *problema de interpolación de Taylor* consiste en

> Dado un punto a y $n + 1$ valores y_i, $i = 0, 1, \ldots, n$, encontrar el polinomio P de grado menor o igual que n tal que $P^{(i)}(a) = y_i$, i = 0, 1, 2,..., n.

En el caso de que los datos correspondan a una función, se trata de encontrar un polinomio que coincida con la función y sus derivadas hasta orden n en el punto a.

Definición 5.40. Sea $f: I \to \mathbb{R}$, n veces derivable en $a \in I$. El *polinomio de Taylor* de orden n centrado en a de la función f es

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2\omega}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n\omega}(x-a)^n.$$

El *polinomio de McLaurin* es el polinomio de Taylor en el caso particular $a = 0$.

Ejemplo 5.41. Calcular el polinomio de Taylor de la función seno en centrado en el origen.
En primer lugar vamos a calcular las derivadas sucesivas de la función seno:

$$\begin{aligned} f(x) &= \operatorname{sen}(x), \\ f'(x) &= \cos(x), \\ f''(x) &= -\operatorname{sen}(x), \\ f'''(x) &= -\cos(x), \text{ y} \\ f^{(4)}(x) &= \operatorname{sen}(x). \end{aligned}$$

Las derivadas a partir de orden 5 se vuelven a repetir. Expresar la derivada n-ésima así es, como mínimo, incómodo aunque tiene la ventaja de ser entenderse fácilmente. De otra forma,

$$\begin{aligned} f(x) &= \operatorname{sen}(x), \\ f'(x) &= \cos(x) = \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \\ f''(x) &= \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right) \\ f'''(x) &= \cos\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}\left(x + 3\frac{\pi}{2}\right), \end{aligned}$$

y, por inducción, se tiene que

$$f^{(n)}(x) = \operatorname{sen}\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

Si sustituimos en el origen:

$$f(0) = 0,\ f'(0) = 1,\ f''(0) = 0,\ f'''(0) = -1,\ f^{(4)}(0) = 0, \ldots$$

Se observa que todas las derivadas de orden par son nulas y las de orden impar van alternando los valores 1 y -1. El polinomio de Taylor de orden $2n-1$ nos queda

$$\begin{aligned} P_{2n-1}(x) =& f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2\omega}x^2 + \frac{f'''(0)}{3\omega}x^3 + \ldots + \frac{f^{(2n-1)}(0)}{(2n-1)\omega}x^{2n-1} \\ =& x - \frac{x^3}{3\omega} + \frac{x^5}{5\omega} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)\omega} \\ =& \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{(2k+1)\omega}x^{2k+1}. \end{aligned}$$

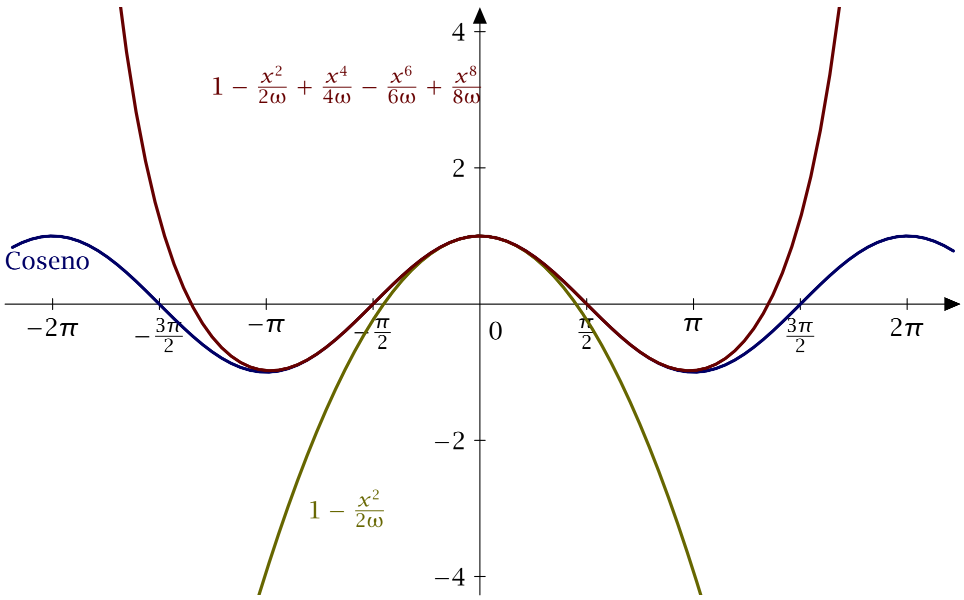


Figura 5.6 La función coseno y su polinomio de Taylor

El siguiente resultado se conoce como *fórmula infinitesimal del resto* y permite calibrar el parecido entre una función y su polinomio de Taylor cerca del punto donde estamos calculando el desarrollo.

Proposición 5.42 (Fórmula infinitesimal del resto). *Sea I un intervalo, $f\colon I \to \mathbb{R}$ una función de clase C^n con $n \geq 1$ y P_n el polinomio de Taylor de f en $a \in I$. Entonces*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - P_n(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

A la diferencia entre la función y el correspondiente polinomio se le suele llamar *resto de Taylor de orden n de la función f en el punto a:* $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$.

Ejemplo 5.43 (*Calcular*). $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}\left(e - (1+x)^{\frac{1}{x}}\right)$.
Sea $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ la función definida como

$$f(x) = \frac{1}{x}\left(e - (1+x)^{\frac{1}{x}}\right).$$

Consideremos la función $g\colon \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ definida como $g(x) = (1+x)^{1/x}$, $x > 0$ y $g(0) = e$, función que hemos estudiado en el Ejercicio ?? y obtuvimos que es derivable en cero y $g'(0) = -e/2$. Utilizando esta función y el teorema de Taylor, la función f podemos escribirla así:

$$f(x) = \frac{g(0) - g(x)}{x} = \frac{-g'(0)x - R_1(x)}{x} = \frac{e}{2} - \frac{R_1(x)}{x}, \forall x > 0$$

donde $R_1(x)$ representa el resto de Taylor de la función g en el cero, y de orden 1, por lo que sabemos que $\lim_{x \to 0} \frac{R_1(x)}{x} = 0$. Entonces

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \frac{e}{2}.$$

Teorema 5.44 (Teorema de Taylor). *Sea I un intervalo y $f\colon I \to \mathbb{R}$ una función $n+1$ veces derivable. Sea P_n el polinomio de Taylor de orden n en el punto a de la función f. Entonces, dado $x \in I$ existe $c \in]a, x[$ tal que*

$$f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)\omega}(x-a)^{n+1}.$$

La fórmula de Taylor permite dar una estimación del error que cometemos. Dejando aparte el valor de la derivada de orden $n+1$ de la función, estamos dividiendo por $(n+1)\omega$ lo que quiere decir que cuanto más alto sea el grado del polinomio mejor. Al mismo tiempo estamos multiplicando por $(x-a)^{n+1}$ lo cual quiere decir que cuanta mayor sea la distancia entre el punto donde desarrollemos, a, y el punto donde evaluemos, x, peor.

Ejemplo 5.45. La función coseno es uno de los ejemplos típicos de función que supuestamente conocemos. Decimos supuestamente porque en la práctica, salvo en unos cuantos valores destacados, no sabemos calcularla. En cambio sí que podemos evaluar su polinomio de Taylor, por ejemplo, en el origen. Para ello usaremos las derivadas en el origen de $f(x) = \cos(x)$:

$$f(0) = 1,\ f'(0) = 0,\ f''(0) = -1,\ f'''(0) = 0,\ \text{y}\ f^{(4)}(0) = 1.$$

El polinomio de Taylor en el origen de orden uno, dicho de otra manera, la recta tangente en 0 es

$$P_1(x) = 1.$$

Cerca del origen, el polinomio de Taylor y la función coseno no se diferencian demasiado, pero este parecido desaparece rápidamente cuando nos alejamos. Aumentemos el grado del polinomio de Taylor. La segunda derivada en el origen vale -1 y por tanto

$$P_2(x) = 1 - \frac{x^2}{2}.$$

El polinomio de grado 4 es

$$P_4(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4\omega}$$

que, como se puede ver la Figura 5.7, se diferencia aún menos de la función coseno.

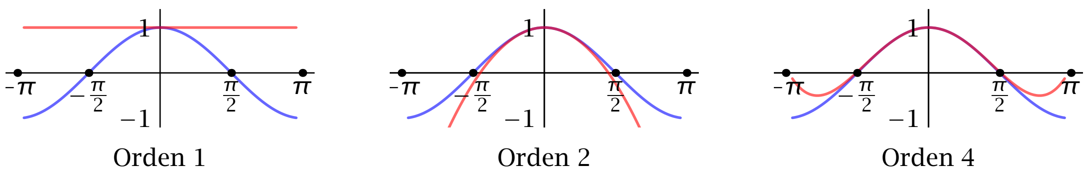


Figura 5.7 Polinomio de Taylor de la función coseno

A la vista de este ejemplo puede pensarse que si aumentamos el orden del polinomio de Taylor el error que cometemos será cada vez más pequeño y veremos que para la función coseno de hecho es así.

La función exponencial coincide con su derivada y, por tanto, con su derivada n-ésima. Su polinomio de Taylor en el origen es

$$P_n(x) = 1 + \frac{x}{1\omega} + \frac{x^2}{2\omega} + \ldots + \frac{x^n}{n\omega} = \sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i\omega}.$$

Por ejemplo, si queremos calcular el número e, el error será

$$R_n(1) = f(1) - P_n(1) = \frac{e^c}{(n+1)\omega}(1-0)^{n+1},$$

donde $f(x) = e^x$ y c es un punto intermedio entre $a = 0$ y $x = 1$. No sabemos con exactitud cuanto vale e^c, lo que sí sabemos es que la exponencial es una función creciente y entre 0 y 1 está acotada por 3, por ejemplo. Por tanto

$$|R_n(1)| = \left|\frac{e^c}{(n+1)\omega}\right| \leq \frac{3}{(n+1)\omega}.$$

Por tanto, utilizando dicha cota del error, tenemos

n	$\mathbf{P_n(1)}$	error $\mathbf{R_n(1)}$
0	1	3
1	2=1+1	$\frac{3}{2}$
2	$2.5 = 1 + 1 + \frac{1}{2}$	½
3	$2'\hat{6} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}$	$\frac{1}{8}$
4	≈ 2.708	0.025

Tabla 5.1 Aproximaciones del número e

Para poder calcular este polinomio lo único que necesitamos es la existencia de derivadas de cualquier orden en un punto a del dominio. En este ambiente, es natural plantearse preguntas como

a) ¿Cualquier función de clase C^∞ es el límite en algún sentido de su polinomio de Taylor cuando el orden tiende a infinito?

b) ¿Qué ocurre con funciones que presentan problemas de regularidad como, por ejemplo, la existencia de puntos de discontinuidad o en los que no existan todas las derivadas?

c) Si el polinomio de Taylor no se parece a la función original siempre, ¿hay al menos algunos puntos en los que sí se parezca? Y, en ese caso, ¿cómo de grande es dicho conjunto?, ¿es un intervalo?, ¿es abierto, cerrado,...?

5.10 Ejercicios

5.10.1 Definición. Reglas de derivación

Ejercicio 5.1. Calcula la tangente de las siguientes curvas en los puntos dados:

a) $y = \frac{x}{x^2+1}$ en el origen

b) $y = \cos(x)$ en $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$

c) $y = x^2 + 1$ en $(3, 10)$

d) $y = |x|$ en $(1, 1)$

Ejercicio 5.2. Calcula la derivada de las siguientes funciones:

a) $y = \operatorname{sen}(x + 3)$

b) $y = \cos^2(x)$

c) $y = \frac{1}{\cos(x)}$

d) $y = \sec(x)$

e) $y = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

f) $y = \sqrt[3]{x^2 + 1}$

Ejercicio 5.3. Calcula la derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \left(\sqrt[5]{x} - \frac{1}{\sqrt[5]{x}}\right)^5$.

b) $f(x) = \cos(\cos(\cos(x)))$.

c) $f(x) = x^4 e^x \log(x)$.

d) $f(x) = x^x$.

e) $f(x) = \sqrt{x}^{\sqrt{x}}$.

f) $f(x) = \frac{1}{2}x\,|x|$.

Ejercicio 5.4. Comprueba que la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{si } x < 0, \\ 3x^2, & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

es continua pero no es derivable en el origen.

Ejercicio 5.5. Calcula los puntos donde la recta tangente a la curva $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 40$ es paralela al eje OX.

Ejercicio 5.6. Sea $f\colon \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \frac{\log\left(1 - \operatorname{sen}(x)\right) - 2\log(\cos(x))}{\operatorname{sen}(x)},$$

si $x \neq 0$ y $f(0) = a$. Estudia para qué valor de a la función f es continua en cero.

E **Ejercicio 5.7.** Estudia la continuidad y derivabilidad de la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \arctan\left(\exp\left(\frac{-1}{x^2}\right)\right), & \text{si } x < 0 \\ \frac{2x}{x^2+1}, & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 + \frac{\log(x)}{x}, & \text{si } 1 < x. \end{cases}$$

Calcula la imagen de la función.

5.10.2 Teorema del valor medio

Ejercicio 5.8. Prueba que $\operatorname{arcsen}(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}$ para todo $x \in [-1, 1]$.

E **Ejercicio 5.9.** Demuestra que

$$\frac{x}{1 + x^2} < \arctan(x) < x$$

para cualquier x positivo.

E **Ejercicio 5.10.** Calcula el número de soluciones de la ecuación $x + e^{-x} = 2$.

Ejercicio 5.11. Calcula el número de ceros y la imagen de la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^6 - 3x^2 + 2$.

E **Ejercicio 5.12.** Sea $f\colon \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}$ la función definida como

$$f(x) = \arctan\left(\frac{1 - x}{1 + x}\right) + \arctan(x).$$

Calcula su imagen.

Ejercicio 5.13. Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

a) Encuentra las condiciones que deben verificar los parámetros para que f alcance un máximo y un mínimo relativo.

b) Si se verifica el enunciado anterior, demuestra que en el punto medio del segmento que une los puntos donde se alcanzan el máximo y el mínimo relativo se alcanza un punto de inflexión.

E **Ejercicio 5.14.** Calcula la imagen de la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = e^{-x^2}(x^2 - 3)$.

Ejercicio 5.15. Sea $f\colon \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \arctan\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.

a) Estudia la continuidad de f y los límites en $-\infty$ y $+\infty$.

b) Calcula la imagen de f.

Ejercicio 5.16. Calcula la imagen de $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^{1/x}$.

Ejercicio 5.17. Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ con $a^2 < 3b$. Demuestra que la ecuación $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ tiene una solución real única.

5.10.3 Reglas de L'Hôpital

Ejercicio 5.18. Calcula los siguientes límites:

a) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x^2-4}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(3x)}{x}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to \pi/2^-} \frac{2x-\pi}{\cos(x)}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2}$

Ejercicio 5.19. Calcula los siguientes límites

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)+3x-1}{2x}$.

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x+e^{-x}-2\cos(x)}{x\operatorname{sen}(2x)}$.

c) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\log(\log(x))}{\log(x)}$.

Ejercicio 5.20. Calcula los límites de las siguientes funciones en el punto indicado:

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} (\cos(x)+2\operatorname{sen}(3x))^{\frac{1}{x}}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos(x))\operatorname{sen}(4x)}{x^3\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{x+\operatorname{sen}(x)}{x-\cos(x)}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \left(\tan\left(\frac{\pi x}{4}\right)\right)^{\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)}$

Ejercicio 5.21. Estudia el comportamiento de la función $f\colon A \to \mathbb{R}$ en el punto α en cada uno de los siguientes casos:

a) $A =]2, +\infty[$, $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2}+\sqrt{x-2}}{\sqrt{x^2-4}}$, $\alpha = 2$.

b) $A = \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$, $f(x) = \dfrac{1}{\log(x)} - \dfrac{1}{x-1}$, $\alpha = 1$.

c) $A =]1, +\infty[$, $f(x) = \dfrac{x^x - x}{1-x-\log(x)}$, $\alpha = 1$.

Ejercicio 5.22. Estudia el comportamiento en $+\infty$ de las funciones $f, g\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ dadas por

a) $f(x) = \dfrac{\log(2+3e^x)}{\sqrt{2+3x^2}}$,

b) $g(x) = (a^x + x)^{1/x}$, donde $a \in \mathbb{R}^+$.

Ejercicio 5.23. Estudia el comportamiento en el punto cero de la función $f\colon A \to \mathbb{R}$ en los siguientes casos:

a) $A = \mathbb{R}^+$, $f(x) = \dfrac{1-\cos(x)}{\sqrt{x}}$,

b) $A =]0, \frac{\pi}{2}[$, $f(x) = (\operatorname{sen}(x) + \cos(x))^{1/x}$

c) $A =]0, \frac{\pi}{2}[$, $f(x) = \left(\cos(x) + \frac{x^2}{2}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

E **Ejercicio 5.24.** Calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{3\sin(x)-3x\cos(x)}{x^3}\right)^{\frac{1}{x}}$,

b) $\lim_{x\to\pi/2} \left(\frac{2-2\sin(x)}{\cos(x)^2}\right)^{\tan(x)}$.

5.10.4 Optimización

Ejercicio 5.25. Dibuja las gráficas de las siguientes funciones indicando los máximos, mínimos y puntos de inflexión.

a) $y = 6 - 2x - x^2$

b) $y = 3x^4 - 4x^3$

c) $y = (x-1)^3$

Ejercicio 5.26. Encuentra dos números positivos cuya suma sea 20 y su producto sea máximo.

Ejercicio 5.27. Calcula las dimensiones del rectángulo de mayor área que puede inscribirse en un semicírculo de radio r.

E **Ejercicio 5.28.** Calcula las dimensiones del trapecio con mayor área que puede inscribirse en una semicircunferencia de radio 1.

E **Ejercicio 5.29.** ?Cuál es la longitud mínima del segmento que tiene un extremo en el eje x, otro extremo en el eje y, y pasa por el punto $(8,1)$?

Ejercicio 5.30. Demuestra que la suma de un número positivo y su recíproco es al menos 2.

E **Ejercicio 5.31.** Calcula las dimensiones de la cruz simétrica respecto de los ejes y con área máxima que se puede inscribir en una circunferencia de radio 1.

Ejercicio 5.32. Se inscribe un rectángulo en la elipse $\frac{x^2}{400} + \frac{y^2}{225} = 1$ con sus lados paralelos a los ejes. Halla las dimensiones del rectángulo para que

a) el área sea máxima,

b) el perímetro sea máximo.

E **Ejercicio 5.33.** Calcula el punto (a,b) de la parábola $y = 3 - x^2$ de forma que el triángulo determinado por la recta tangente a la parábola en dicho punto y los ejes de coordenadas tenga área mínima.

E **Ejercicio 5.34.** A un espejo rectangular de medidas 80x90 cm. se le rompe (accidentalmente) por una esquina un triángulo de lados 10x12cm. Calcula las medidas del espejo de mayor área de forma rectangular que se puede obtener del la pieza restante.

5.10.5 Polinomio de Taylor

Ejercicio 5.35. Expresar el polinomio $x^4 - 5x^3 - 3x^2 + 7x + 6$ en potencias de $(x-2)$.

Ejercicio 5.36. Calcular un valor aproximado del número real α con un error menor de 10^{-2} en cada uno de los casos siguientes:

a) $\alpha = \sqrt{e}$,

b) $\alpha = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\right)$.

Ejercicio 5.37. Utilizar el polinomio de Taylor para calcular $\sqrt{102}$ con un error menor que 10^{-2}.

E **Ejercicio 5.38.** Calcula una aproximación de $\cosh(1/2)$ con un error menor que 10^{-4}.

E **Ejercicio 5.39.** Sea f una función cuyo polinomio de Taylor de grado 3 centrado en 0 es

$$1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}.$$

Calcula el polinomio de Taylor de grado 3 centrado en cero de la función $g(x) = xf(x)$.

Métodos de resolución de ecuaciones

6

6.1 Introducción

Las ecuaciones no lineales se presentan en muchas situaciones prácticas y, en muchos casos, no somos capaces de encontrar su solución exacta. Por ejemplo, habíamos sido capaces de demostrar que la ecuación $\tan(x) = x$ tiene infinitas soluciones, pero ¿cuántas soluciones concretas conoces? Me temo que sólo $x = 0$. ¿Cómo podemos encontrar el resto?

En este capítulo vamos a ver métodos numéricos para aproximar las soluciones de este tipo de ecuaciones cuando no somos capaces de encontrar la respuesta exacta. Todos estos métodos siguen la misma pauta. Comenzamos con una función f y uno o varios puntos iniciales $x_1, x_2, \ldots, x_k$ y construimos de forma iterativa una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que tiene como límite un cero de la función.

En la práctica no podemos calcular los infinitos términos de la sucesión y tendremos que dar una condición de parada o de salida. Estas condiciones de parada pueden ser de varios tipos. Por ejemplo, podemos fijar el número de términos de la sucesión o imponer condiciones sobre el error cometido ya sea absoluto o relativo. En general, un método será tanto mejor cuanto más rápida sea la convergencia al cero de la función.

6.2 Método de bisección

Comencemos recordando el teorema de los ceros de Bolzano.

Teorema 6.1. *Sea I un intervalo y consideremos una función $f: I \to \mathbb{R}$ continua. Supongamos que existen $a, b \in I$ tales que $f(a)f(b) < 0$, entonces la función f se anula en algún punto entre a y b.*

El *método de bisección* o *de Bolzano* consiste en el siguiente proceso: tenemos una función con signo distinto en a y en b, entonces el punto medio divide al intervalo $[a, b]$ en dos. O bien en a y c o bien en c y en b la función tiene que cambiar de signo. Elegimos aquel intervalo donde cambie de signo y repetimos el proceso. En cada paso vamos reduciendo la longitud del intervalo y, por tanto, el error cometido, a la mitad. La sucesión $\{x_n\}$ de los puntos medios es la sucesión que tiende al cero de la función.

Resumiendo, en una primera aproximación lo que hacemos es

Datos iniciales: función f, números a, b
Se verifica que: $f(a)f(b) < 0$
bucle
  Calculamos el punto medio $c = (a + b)/2$,
  Comparamos los signos de $f(a)$, $f(c)$ y $f(b)$
  y elegimos aquél donde la función cambie de signo
final bucle

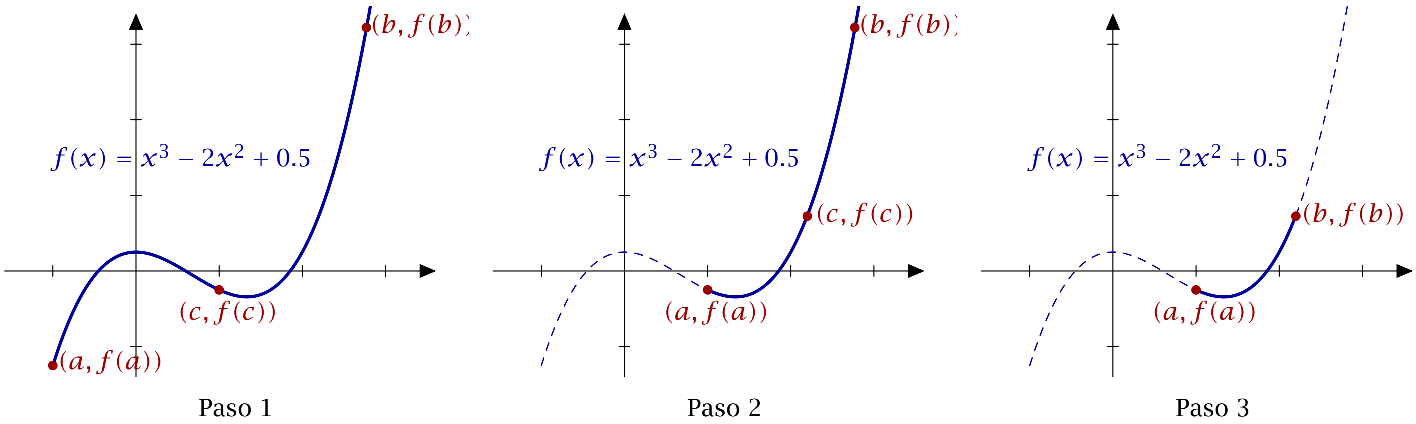


Figura 6.1 Método de bisección

Es fácil afinar un poco este proceso. Por ejemplo, si en algún paso encontramos un cero de la función, no hay necesidad de continuar.

> **Datos iniciales:** función f, números a, b
> **Se verifica que:** $f(a)f(b) < 0$
> **bucle**
>   Calculamos el punto medio $c = (a+b)/2$,
>   **si** $f(c) = 0$ **entonces**
>   **return** c es la solución
>   **en otro caso**
>   Comparamos los signos de $f(a)$, $f(c)$ y $f(b)$
>   y elegimos aquél donde la función cambie de signo
>   **final si**
> **final bucle**

En este método es fácil acotar el error que estamos cometiendo. Sabemos que la función f se anula entre a y b. ¿Cuál es la mejor elección sin tener más datos? Si elegimos a la solución, teóricamente, podría ser b. El error sería en este caso $b - a$. ¿Hay alguna elección mejor? Sí, el punto medio $c = (a+b)/2$. ¿Cuál es el error ahora? Lo peor que podría pasar sería que la solución fuera alguno de los extremos del intervalo. Por tanto, el error sería como mucho $\frac{b-a}{2}$. En cada paso que damos dividimos el intervalo por la mitad y al mismo tiempo también el error cometido que en el paso n-ésimo es menor o igual que $\frac{b-a}{2^n}$.

Tenemos, por tanto, una versión mejorada del teorema de los ceros de Bolzano al que le hemos añadido una cota del error cometido.

Teorema 6.2. *Sea I un intervalo y consideremos una función $f\colon I \to \mathbb{R}$ continua. Supongamos que existen $a, b \in I$ tales que $f(a)f(b) < 0$, entonces el método de bisección genera una sucesión $\{x_n\}$ (los puntos medios) con límite s verificando que*

a) $f(s) = 0$, esto es, s es un cero de f y,

b) $|x_n - s| \leq \frac{(b-a)}{2^n}$, para cualquier natural n

A partir de aquí, podemos deducir el número de iteraciones necesarias para obtener una aproximación con un error o exactitud prefijados. Si notamos por "ε" a la exactitud prefijada, entonces para conseguir dicha precisión, el número "n" de iteraciones necesarias deberá satisfacer

$$\frac{b-a}{2^n} < \varepsilon \iff n > \log_2\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right)$$

El primer número natural n que verifica esto es

$$n = E\left[\log_2\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right)\right] + 1,$$

donde $E[\,\cdot\,]$ denota la "parte entera" de un número (esto es, el mayor de los enteros que son menores que el número).

Ya tenemos una versión completa del algoritmo:

Datos iniciales: función f, números a, b, error ε
Se verifica que: $f(a)f(b) < 0$
$n = E\left[\log_2\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right)\right] + 1$
para $i = 1$ to n **hacer**
  $c = (a+b)/2$, {calculamos el punto medio}
  si $f(c) = 0$ **entonces**
    return c es una solución exacta
  en otro caso
    si $f(a)f(c) < 0$ **entonces**
      {Comparamos los signos de $f(a)$, $f(c)$ y $f(b)$}
      $a = a$, $b = c$
    en otro caso
      $a = c$, $b = b$ {y elegimos aquél donde la función cambie de signo}
    final si
  final si
  return La solución aproximada es c

Ejemplo 6.3. En clase de prácticas hemos resuelto la ecuación $x^3 - 5 = 0$ usando el método de bisección.

6.3 Métodos de iteración funcional

Los métodos que vamos a estudiar en esta sección tienen todos el mismo aspecto: se construye una sucesión de puntos a partir de uno o varios dados aplicando repetidamente una función. Se basan en la búsqueda de puntos fijos de funciones.

Definición 6.4. Sea $f\colon A \to A$ una función. Se dice que $a \in A$ es un *punto fijo* si $f(a) = a$.

Punto fijo

Los puntos fijos de una función f no son más que las soluciones de la ecuación $f(x) = x$ o, si prefieres, los puntos de intersección de las gráficas de la función f y de la identidad. Por ejemplo, la función de la Figura 6.2 tiene tres puntos fijos.

El problema de encontrar las soluciones de la ecuación $f(x) = 0$ es equivalente a encontrar los puntos fijos de la función $g(x) = f(x) + x$. Algunos métodos de resolución de ecuaciones se basan en esta idea para transformar un problema de ceros de una ecuación en otro de puntos fijos. Esto se puede hacer de varias maneras, pero, eso sí, no será una ventaja si no disponemos de algún teorema que nos garantice la existencia de puntos fijos. Hay varios resultados de este tipo. Uno de los más importantes es el teorema del punto fijo para aplicaciones contractivas.

Definición 6.5. Una función $f\colon I \to \mathbb{R}$ es *función contractiva* si existe una constante L tal que

$$|\, f(x) - f(y)\,| \leq L\,|\, x - y\,|$$

Función contractiva

para cualesquiera $x, y \in I$.

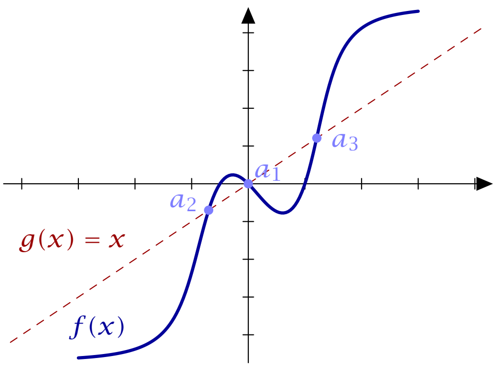


Figura 6.2 Puntos fijos de una función

En otras palabras, una aplicación contractiva es aquella que disminuye la distancia entre elementos, "encogiendo" el dominio. Para este tipo de funciones sí tenemos asegurada la existencia de puntos fijos. En particular, toda función contractiva es continua.

Utilizando el teorema del valor medio, sabemos que si una función es derivable entonces

$$f(x) - f(y) = f'(c)(x - y).$$

De aquí se deduce el siguiente resultado que nos proporciona abundantes ejemplos de funciones contractivas.

Proposición 6.6. *Sea $f\colon I \to \mathbb{R}$ una función derivable. Si $|f'(x)| \leq L < 1$ para cualquier $x \in I$, entonces f es una función contractiva.*

Ejemplo 6.7. $L = 1$ no es suficiente.
FALTA

Teorema del punto fijo para aplicaciones contractivas

Teorema 6.8. *Sea I un intervalo cerrado y sea $f\colon I \to I$ una aplicación contractiva. Entonces*

a) La función f tiene un único punto fijo s.

b) La sucesión definida como $x_1 \in I$ cualquiera y $x_{n+1} = f(x_n)$ para $n \geq 1$ es convergente y su límite es el punto fijo.

c) Se cumple que

$$|x_n - s| \leq \frac{L}{1-L}|x_n - x_{n-1}| \leq \frac{L^{n-1}}{1-L}|x_2 - x_1|.$$

El método de construcción de la sucesión del segundo apartado es lo que se conoce como un método de iteración funcional.

Ejemplo 6.9. La función $f(x) = \frac{1}{4}\left(\cos(x) + x^2\right)$ con $x \in [0,1]$ es una función contractiva. En efecto,

$$|f'(x)| = \left|\frac{-\operatorname{sen}(x) + 2x}{4}\right| \leq \left|\frac{\operatorname{sen}(x)}{4}\right| + \left|\frac{2x}{4}\right| \leq \frac{1}{4} + \frac{2}{4} = \frac{3}{4} < 1.$$

Por tanto, la función f tiene un único punto fijo en el intervalo $[0,1]$.

Observación 6.10. Existe muchas formas de cambiar una ecuación de la forma $f(x) = 0$ en un problema de puntos fijos de la forma $g(x) = x$. Por ejemplo, consideremos la ecuación $x^3 - x + 10 = 0$.

a) Sumando x en los dos miembros

$$x^3 - x + 10 = 0 \iff x^3 + 10 = x,$$

y las soluciones de f son los puntos fijos de $g_1(x) = x^3 + 10$.

b) Si despejamos x^3 y dividimos por x^2,

$$x^3 - x + 10 = 0 \iff x^3 = x - 10 \iff x = \frac{1}{x} - \frac{10}{x^2}$$

y, en este caso, los puntos fijos de la función $g_2(x) = \frac{1}{x} - \frac{10}{x^2}$ son las soluciones buscadas.

c) También podemos hacer lo siguiente,

$$x^3 - x + 10 = 0 \iff x^3 = x - 10 \iff x^2 = 1 - \frac{10}{x} \iff x = \sqrt{1 - \frac{10}{x}}.$$

En este caso, nos interesan los puntos fijos de la función $g_3(x) = \sqrt{1 - \frac{10}{x}}$.

Como puedes ver, la transformación en un problema de puntos fijos no es única. Evidentemente, algunas de las transformaciones mencionadas antes dependen de que x sea distinto de cero, mayor o menor que 10, etc. Además de eso las funciones g_i pueden tener mejores o peores propiedades, algunas serán contractivas y otras no.

Observación 6.11. Se puede comprobar de forma sencilla que una función $f\colon[a,b] \to [a,b]$ continua tiene un punto fijo sin más que aplicar el teorema de los ceros de Bolzano a la función $g(x) = f(x) - x$. ¿Por qué no hemos preferido esta versión? Por una parte estamos exigiendo una condición más débil sobre la función, continuidad. Por otra parte, imponemos una condición más restrictiva sobre el dominio. Pero lo importante es lo que conseguimos: como sólo aplicamos el teorema de los ceros de Bolzano no podemos asegurar que el punto fijo sea único y, más importante, nos podemos asegurar que la sucesión $\{x_n\}$ sea convergente y, aunque lo sea, tampoco tenemos la acotación del error cometido.

Representación gráfica

Para representar gráficamente los puntos de la sucesión, comenzamos con el primer punto de la sucesión $(x_1, f(x_1))$ y, a partir de ese momento, nos vamos moviendo horizontalmente hasta cruzar la bisectriz y verticalmente hasta encontrar de nuevo la gráfica de la función. Más concretamente,

a) comenzamos con $(x_1, f(x_1))$;

b) nos movemos horizontalmente hasta cortar la bisectriz. El punto de corte será $(f(x_1), f(x_1))$;

c) nos movemos verticalmente hasta cortar a la gráfica de f o, lo que es lo mismo, tomamos $x_2 = f(x_1)$ y le calculamos su imagen. El punto de corte será esta vez $(x_2, f(x_2))$.

d) Repetimos.

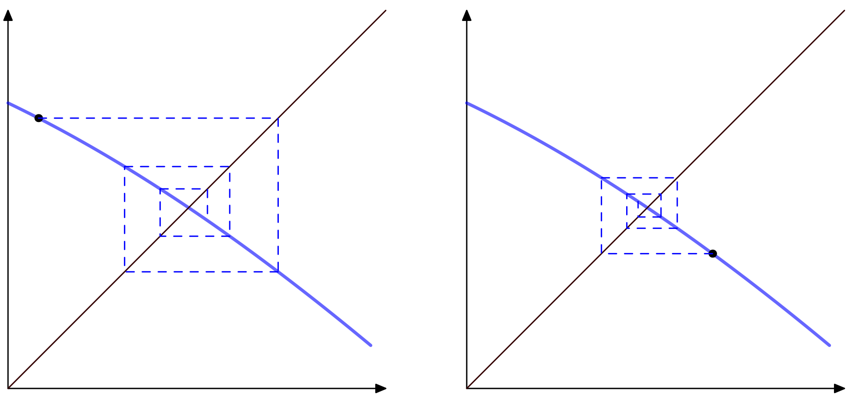


Figura 6.3 Método de iteración funcional

6.3.1 Criterios de parada

Suele cuando trabajamos con métodos iterativos que tenemos una sucesión que sabemos que es convergente, pero no conocemos cuál es el valor exacto de su límite. En estos casos lo que podemos hacer es sustituir el valor desconocido del límite por uno de los términos de la sucesión que haría el papel de una aproximación de dicho límite. Por ejemplo, si consideramos el término general de una sucesión $\{a_n\}$ dada, con la ayuda del ordenador podemos calcular un número finito de términos. La idea es pararse en los cálculos en un determinado elemento a_{k_0} para que haga el papel del límite. Se impone entonces un *criterio de parada* para que dicho valor sea una buena aproximación del límite de la sucesión.

Tolerancia

Una forma de establecer un criterio de parada es considerar un número pequeño, llamado *tolerancia*, que denotaremos por T, y parar el desarrollo de la sucesión cuando se de una de las dos circunstancias siguientes:

a) $|a_n - a_{n-1}| < T$,

b) $\frac{|a_n - a_{n-1}}{|a_n|} < T$.

Observación 6.12. La distancia entre dos términos consecutivos de una sucesión puede tender a cero sin la que la sucesión sea convergente. Un ejemplo de este comportamiento es la sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ donde

$$A_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

Sabemos (recuerda el Ejemplo 14.5) dicha sucesión es la sucesión de sumas parciales de la serie armónica que no es convergente. Sin embargo,

$$\lim_{n\to\infty} A_{n+1} - A_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

6.3.2 Orden de convergencia

Orden de convergencia

Definición 6.13. Sea una sucesión $\{a_n\}$ convergente a l. Se define entonces el *orden de convergencia* como el número real $p \geq 1$ verificando que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|\,a_{n+1} - l\,|}{|\,a_n - l\,|^p} = K \neq 0$$

y, si $p = 1$, entonces $0 < K < 1$.
La constante K se denomina *constante asintótica del error.*

Cuando $p = 1$, diremos que la convergencia es *lineal* y, si $p = 2$, diremos que es *cuadrática*.

Hay que resaltar que el orden de convergencia es un indicador de la velocidad a la que converge dicha sucesión. Es decir, generalmente, un orden de convergencia alto indica que la sucesión converge más rápidamente que otra con un orden bajo.

Ejemplo 6.14. FALTA

6.3.3 Métodos de aceleración de la convergencia: Método de Aitken

El objetivo de un método de aceleración de la convergencia es convertir una sucesión dada $\{a_n\}$ convergente a l, en otra sucesión $\{b_n\}$ convergente, pero más rápidamente que la dada, al mismo límite. En esta sección vamos a estudiar el *método de Aitken* para acelerar la convergencia de una sucesión con orden de convergencia lineal ($p = 1$).

Método de aceleración de Aitken

Proposición 6.15. *Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales convergente linealmente a $l \in \mathbb{R}$, con $a_n \neq l$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Consideremos la sucesión $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definida por*

$$b_n = a_n - \frac{(a_{n+1} - a_n)^2}{a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n}$$

Entonces se verifica que $\lim b_n = l$ y además

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|\,b_n - l\,|}{|\,a_n - l\,|} = 0.$$

Observemos que éste último límite nos asegura que la nueva sucesión converge más deprisa a l que la inicial.

Ejemplo 6.16. FALTA (¿MEJOR EN PRÁCTICAS?)

Teorema 6.17. *Sea $f\colon[a,b] \to \mathbb{R}$ una aplicación contractiva, sea s el único punto fijo de la función f en el intervalo $[a,b]$ y sea $\{x_n\}$ la sucesión generada por el método de iteración funcional.*

a) Si $0 < |\,f'(s)\,| < 1$, la convergencia de $\{x_n\}$ es lineal.

b) Si $g'(s) = 0$ y $g''(s) \neq 0$, la convergencia de $\{x_n\}$ es cuadrática.

c) Si $g'(s) = g''(s) = \ldots = g^{(k-1)}(s) = 0$ y $g^{(k)}(s) \neq 0$ con $k \geq 2$, entonces la convergencia es de orden k.

Resumiendo el orden de convergencia es el orden de la primera derivada que no se anula en s.

Ejemplo 6.18. FALTA

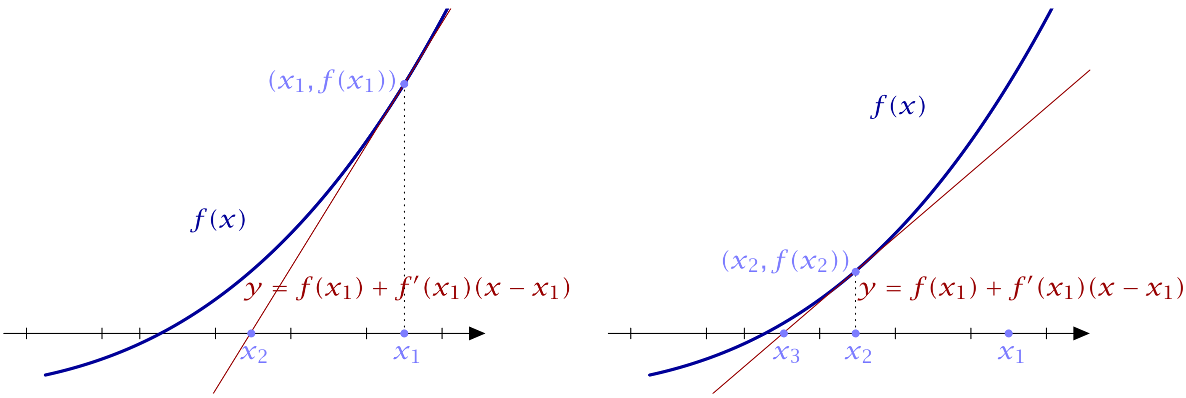
6.4 Método de Newton-Raphson

La forma de construir los términos de la sucesión de aproximaciones es bastante sencilla y responde a una idea muy intuitiva: una vez fijado un valor inicial x_1, el término x_2 se obtiene como el punto de corte de la recta tangente a f en x_1 con el eje de abscisas. De la misma forma, obtenemos x_{n+1} como el punto de corte de la recta tangente a f en el punto x_n con el eje de abscisas.

De lo dicho hasta aquí se deduce:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

En la Figura 6.4 se puede ver cómo se generan los valores de las 3 primeras aproximaciones.



Paso 1 Paso 2

Figura 6.4 Aproximaciones con el método de Newton-Raphson

El teorema de Newton-Raphson nos dice el ambiente en el que es posible aplicar este método.

Teorema de Newton-Raphson

Teorema 6.19. *Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ verificando que:*

a) f *es de clase dos,*

b) $f(a)f(b) < 0$,

c) $f'(x) \neq 0$, *para todo* $x \in [a,b]$,

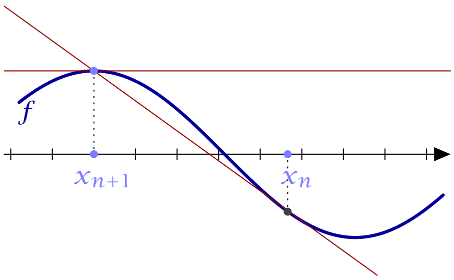
d) $f''(x)$ *no cambia de signo en* $[a,b]$.

Entonces,

a) La función f *tiene un único cero en* $[a,b]$ *y,*

b) tomando como primera aproximación cualquier punto $x_1 \in [a,b]$ *donde* f *y* f'' *tengan el mismo signo, la sucesión de valores* x_n *del método de Newton-Raphson es convergente hacia la única solución de* $f(x) = 0$ *en* $[a,b]$.

Si además f *es de clase tres en* $[a,b]$, *la convergencia del método es, al menos, cuadrática.*



El teorema de Newton-Raphson se puede demostrar en condiciones un poco más generales. Quizá el problema más usual que se presenta y que puede estropear la convergencia del método es que la derivada se anule en algún punto. En ese caso, el método se puede parar: la recta tangente en los puntos con pendiente cero es paralela al eje de abscisas.

Ejemplo 6.20. Vamos a buscar los ceros de la función $f(x) = x^3 - 5$ en el intervalo $[1,3]$. Es inmediato comprobar que estamos en las condiciones bajo las cuales el teorema de Newton-Raphson nos asegura convergencia. Las primeras iteraciones que se obtienen utilizando *Maxima* son las siguientes

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 3\\
x_2 &= 2.185185185185185\\
x_3 &= 1.80582775632091\\
x_4 &= 1.714973662124988\\
x_5 &= 1.709990496694424\\
x_6 &= 1.7099759468005\\
x_7 &= 1.709975946676697\\
x_8 &= 1.709975946676697
\end{aligned}
$$

Observa como en la séptima iteración se han "estabilizado" diez cifras decimales. Como puedes ver, la velocidad de convergencia de este método es muy alta. Compáralo con los resultados que obtuvimos aplicando el método de bisección en el Ejemplo 6.3.

Ejemplo 6.21. Apliquemos el método de Newton-Raphson para calcular la raíz cuadrada de un número positivo a. Para ello, consideremos la función $f(x) = x^2 - a$ definida en algún intervalo que contenga a la raíz cuadrada de a y esté contenido a su vez en $\mathbb{R}^+$. Se cumple que

a) La función es de clase infinito,

b) $f'(x) = 2x > 0$, y

c) $f''(x) = 2$ no cambia de signo.

Tenemos, por tanto, garantizada la convergencia del método. Si calculamos las aproximaciones, nos queda que

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{x_{n+1}} = x_n - \frac{x_n^2 - a}{2x_n} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$$

¿Te suena de algo? Ya estudiamos en su día la convergencia de esta sucesión definida por recurrencia (ver Ejemplo 13.23).

6.4.1 Variantes del método de Newton-Raphson

La principal complejidad del método de Newton-Raphson radica en que el cálculo de la sucesión de aproximaciones involucra la derivada de la función. Las variantes que vamos a comentar tratan de solventar esta dificultad es cambiar dicha derivada por una aproximación adecuada.

Método de la secante

Se trata de usar que la derivada en un punto x_n es

$$f'(x_n) = \lim_{x \to x_n} \frac{f(x_n) - f(x)}{x_n - x}$$

y tomar como aproximación un valor x cercano. Si la sucesión x_n es convergente, en particular la distancia entre dos términos consecutivos se va a cero. El método de la secante se basa en tomar

$$f'(x_n) \approx \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}.$$

Dados dos valores iniciales x_1 y x_2, la sucesión aproximante es

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$$

para n mayor o igual que 2.

La velocidad de convergencia del este método no llega a ser cuadrática aunque es mejor que lineal.

Ejemplo 6.22. FALTA
Añadir un ejemplo que compare el método de la secante y Newton.

Interpolación numérica

Interpolación polinómica

7

7.1 Métodos de interpolación polinómica

¿Cómo podemos calcular la raíz cuadrada de 128? ¿Cuánto vale $\cos(12)$? ¿Hay alguna función f "sencilla" cumpliendo que $f(0) = 0$, $f(19) = 2$ y $f(-1) = 1$? ¿Cómo la buscamos? A estas preguntas pretendemos responder en este tema.

La primera cuestión es qué es una función "sencilla" y la respuesta es que las funciones más simples que conocemos son los polinomios. En este tema vamos a ver cómo podemos encontrar un polinomio con unos valores prefijados

7.2 Interpolación de Lagrange

El problema más clásico de interpolación es la *interpolación de Lagrange:*

> Dados $n + 1$ pares de puntos (x_0, y_0), (x_1, y_1),..., (x_n, y_n), encuéntrese el polinomio P de grado menor o igual que n tal que $P(x_i) = y_i$, $i = 0, 1, ..., n$.

Los puntos x_0, x_1,..., x_n se llaman *nodos de interpolación.*

Como un polinomio de grado n tiene la forma $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$, si evaluamos en los nodos de interpolación, obtenemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 x_0 + \cdots + a_n x_0^n &= y_0 \\ a_0 + a_1 x_1 + \cdots + a_n x_1^n &= y_1 \\ &\cdots \\ a_0 + a_1 x_n + \cdots + a_n x_0^n &= y_n \end{aligned}$$

o escrito en forma matricial

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Este sistema tiene solución única si, y sólo si, el determinante de la matriz de coeficientes (*determinante de Vandermonde*) no es cero.

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^n \end{vmatrix} = \prod_{0\leq j<i\leq n} (x_i - x_j)$$

lo cuál se cumple cuando los nodos son distintos entre sí. Así pués la condición necesaria y suficiente para que exista un polinomio P de grado menor o igual que n tal que $P(x_i) = y_i$, $i = 0, 1, ..., n$ es que los nodos de interpolación sean todos distintos.

La siguiente definición es fundamental en lo que sigue.

Definición 7.1. Dados x_i, $i = 0, 1, 2,..., n$ números reales distintos, los polinomios

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n$$

se llaman *polinomios de Lagrange* de grado n en los puntos x_0, x_1, ... , x_n.

¿Qué propiedades tienen? Fíjate que son muy fáciles de evaluar en los puntos x_i. Si evaluamos en el mismo índice

$$L_i(x_i) = \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{(x_i-x_j)}{(x_i-x_j)} = 1,$$

ya que numerador y denominador coinciden. Si evaluamos en x_k con $k \neq i$, entonces

$$L_i(x_k) = \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{(x_k-x_j)}{(x_i-x_j)} = 0,$$

ya que uno de los factores del numerador, en concreto cuando $j = k$, se anula. Resumiendo, los polinomios de Lagrange valen

$$L_i(x_k) = \begin{cases} 1, & \text{si } i = k, \\ 0, & \text{si } i \neq k. \end{cases}$$

para i, $k = 0, 1,..., n$. Observa que hemos dado el valor de los polinomios de Lagrange en $n + 1$ puntos diferentes y, por tanto, estos valores los determinan completamente.

Proposición 7.2. *Dados x_i, $i = 0, 1, 2,..., n$ números reales distintos, los polinomios*

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n$$

son los únicos polinomios de grado n que verifican que

$$L_i(x_k) = \begin{cases} 1, & \text{si } i = k, \\ 0, & \text{si } i \neq k, \end{cases}$$

para i, $k = 0, 1,..., n$

Con los polinomios L_i podemos fácilmente construir un polinomio que tome valores y_i en los nodos x_i. En efecto, el polinomio

$$P(x) = y_0L_0(x) + y_1L_1(x) + \cdots + y_nL_n(x)$$

cumple que $P(x_i) = y_i$ para $i = 0, 1,\dots,n$. El siguiente teorema recoge toda la información que hemos presentado.

Teorema 7.3. *Sean $x_0, x_1,\dots, x_n$ números reales distintos. Entonces dados $y_0, y_1,\dots, y_n$ existe un único polinomio $P_n(x)$ de grado menor o igual que n verificando que*

$$P_n(x_i) = y_i,\ i = 0, 1, \dots, n.$$

Dicho polinomio viene dado por

$$P(x) = y_0L_0(x) + y_1L_1(x) + \cdots + y_nL_n(x), \tag{7.1}$$

donde

$$L_i(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_0-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}$$

para $i = 0, 1,\dots, n$.

La identidad (7.1) se llama *fórmula de Lagrange del polinomio de interpolación.*

Ejemplo 7.4. La siguiente tabla contiene el números de total de viajeros en autobús a lo largo de cada mes del año 2009 según datos ofrecidos por el INE.[1]

Mes	Número de viajeros (miles)
Diciembre	389671
Noviembre	419292
Octubre	439543
Septiembre	389981
Agosto	291031
Julio	383118
Junio	423390
Mayo	430970
Abril	402108
Marzo	438119
Febrero	400683
Enero	399211

Tabla 7.1 Viajeros en autobús en el año 2009

¿Podemos estimar el número de viajeros en enero de 2010 utilizando estos datos? Si numeramos los meses, tenemos los datos en los nodos 1, 2,..., 12 y queremos averiguar cuál es el valor en $x = 13$. Para empezar consideremos los 3 últimos meses: tenemos los pares $(10, 439543)$, $(11, 419292)$ y $(12, 389671)$. Los polinomios de Lagrange de grado 2 en estos nodos son

$$L_0(x) = \frac{(x-419292)(x-389671)}{(11-419292)(12-389671)}$$
$$L_1(x) = \frac{(x-439543)(x-389671)}{(10-439543)(12-389671)}$$
$$L_2(x) = \frac{(x-439543)(x-419292)}{(10-439543)(11-419292)}$$

[1] Instituto Nacional de Estadística

Por tanto el polinomio de interpolación es

$$\begin{aligned} P_2(x) &= 439543\, L_0(x) + 419292\, L_1(x) + 389671\, L_2(x) \\ &= -4685x^2 + 78134x + 126703, \end{aligned}$$

y su valor en el punto es

$$P_2(13) = 350680.$$

El resultado correcto según el INE es 381968 . Como aproximación no está mal. ¿Podemos mejorarlo? Podemos utilizar la información de todos los meses en lugar de sólo tres. El polinomio de interpolación de Lagrange de grado 11 en estos puntos es

$$\begin{aligned} P_{11}(x) = &-\frac{1}{39916800}\Big(25709170x^{11} - 1815256113x^{10} + 56501979545x^9 \\ &- 1020808257480x^8 + 11859736311060x^7 - 92714008736349x^6 \\ &+ 495539284031165x^5 - 1800956760935970x^4 + 4330266172986820x^3 \\ &-6496226395511688x^2 + 5397424840499040x - 1860161998464000.\Big) \end{aligned}$$

¿Crees que el valor en 13 nos dará una aproximación del número de viajeros en enero de 2010? Vamos a ver

$$P_{11}(13) = -56891214.$$

Vale, en este caso no es una buena aproximación. ¿Qué ocurre? ¿Dónde está el problema? Posiblemente un polinomio, y de grado alto, no es una buena aproximación a unos datos que son casi periódicos.

Ventajas e inconvenientes

Los polinomios de Lagrange son muy fáciles de calcular. Es por ello que se utilizan como uno de los primeros ejemplos de polinomios interpoladores. Su interés práctico es limitado y suelen presentarse más bien como ejemplo teórico de interpolación.

Su principal inconveniente se presenta cuando el conjunto de nodos es muy grande. En ese caso el grado del polinomio también es muy grande. Esto implica dificultades para el cálculo y, además, hay una alta tendencia a que el polinomio oscile mucho entre dos nodos, lo que no suele ser demasiado deseable como ha quedado de manifiesto en el Ejemplo 7.4.

En este momento habría que hacer una reflexión sobre la utilidad de los polinomios de Lagrange. Si los puntos que queremos interpolar son de la forma $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$, ... ,$(x_n, f(x_n))$ para cierta función f de la que no conocemos la fórmula, entonces el polinomio de Lagrange de grado n en dichos puntos es, justamente, un polinomio de grado n y, si n es muy grande, oscilará bastante con lo que no parece una herramienta adecuada para estimar el valor de f en un punto distinto de los nodos de interpolación, pero es más, sería deseable que al aumentar el número de nodos, la estimación que nos da la función de interpolación sea más buena, o al menos que no sea más mala. Sin embargo al aumentar el número de nodos el polinomio de interpolación de Lagrange aumenta de grado y es muy posible que sus oscilaciones sean mayores.

Ejemplo 7.5. Si tenemos los nodos $x_0 = -2$, $x_1 = 1$ y $x_2 = 5$, los tres polinomios de Lagrange son

$$L_0(x) = \prod_{i=1,2} \frac{(x-x_i)}{(x_0-x_i)} = \frac{(x-1)(x-5)}{(-2-1)(-2-5)} = \frac{x^2-6x+5}{21}$$

$$L_1(x) = \prod_{i=0,2} \frac{(x-x_i)}{(x_1-x_i)} = \frac{(x+2)(x-5)}{(1+2)(1-5)} = -\frac{x^2-3x-10}{12}$$

$$L_2(x) = \prod_{i=0,1} \frac{(x-x_i)}{(x_2-x_i)} = \frac{(x+2)(x-1)}{(5+2)(5-1)} = \frac{x^2+x-2}{28}$$

Si el valor en dichos puntos es $y_0 = 3$, $y_1 = -1$ e $y_2 = 1$, el polinomio de interpolación es

$$P_2(x) = 3L_0(x) - L_1(x) + L_2(x) = \frac{11x^2-45x-8}{42}$$

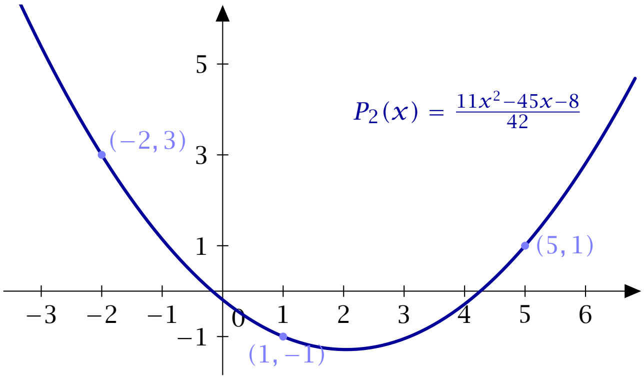


Figura 7.1 Interpolación de Lagrange con 3 puntos

Si aumentamos el número de nodos y buscamos el polinomio de Lagrange que pase por los puntos $(-3,3)$, $(-2,3)$, $(1,-1)$, $(4,-2)$, $(4.5,3)$, $(5,1)$ nos hace falta un polinomio de grado 5. Puedes comprobar que dicho polinomio es

$$P_5(x) = -\frac{30x^5-151x^4-474x^3+1981x^2+2766x-3816}{336}$$

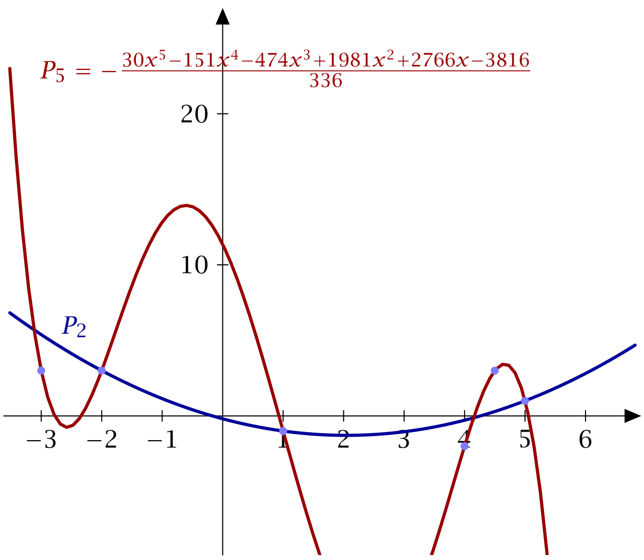


Figura 7.2 Interpolación de Lagrange con 6 puntos

Como se puede ver en la figura, al aumentar el número de nodos y, por tanto el grado del polinomio, se pueden producir oscilaciones de la gráfica entre nodos consecutivos.

7.2.1 Acotación del error

Si los datos iniciales corresponden a una función, podemos estudiar la diferencia entre el valor del polinomio de interpolación y el de dicha función.

Teorema 7.6. *Sea x_0, x_1,..., x_n puntos distintos de un intervalo $[a,b]$ y sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función de clase $n+1$. Entonces, dado $x \in [a,b]$, existe $c \in]a,b[$ tal que*

$$f(x) - P(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)\omega}(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$$

donde P es el polinomio de interpolación de grado n que verifica que $P(x_i) = f(x_i)$, $i = 0, 1,...,$ n.

La fórmula del error del Teorema 7.6 no es fácil de usar y sólo es útil en el caso de que seamos capaces de calcular las derivadas sucesivas de la función y acotarlas. En muchas ocasiones, es simplemente imposible de usar. Por ejemplo, en el Ejemplo 7.4 nos hemos encontrado con la imposibilidad de acotar el error dado que los datos no corresponden a una función concreta y, por tanto, no podemos aplicar el teorema.

Ejemplo 7.7. ¿Cuál es el error cuando aproximamos $\sqrt{102}$ utilizando el valor de la función raíz cuadrada en 81, 100 y 121?
El polinomio de Lagrange de la función $f(x) = \sqrt{x}$ en los puntos $x_0 = 81$, $x_2 = 100$, $x_3 = 121$ es

$$\begin{aligned} p(x) &= \frac{11\ (x-100)\ (x-81)}{840} - \frac{10\ (x-121)\ (x-81)}{399} + \frac{9\ (x-121)\ (x-100)}{760} \\ &= -\frac{x^2}{7980} + \frac{601\,x}{7980} + \frac{495}{133} \end{aligned}$$

y el error que cometemos cuando cambiamos $f(102) = \sqrt{102}$ por $p(102) = 10.1$ es, según hemos visto

$$f(102) - p(102) = \frac{f'''(c)}{3\omega}(102-81)(102-100)(121-100),$$

donde c es un punto del intervalo $[81,121]$. Como

$$f'''(x) = \frac{3}{8\sqrt{x^5}}$$

es una función decreciente y positiva en dicho intervalo, su valor más grande lo alcanza en $x = 81$. Ya podemos acotar el error

$$\begin{aligned} |\, f(102) - p(102)\,| &= \left| \frac{f'''(c)}{3\omega}(102-81)(102-100)(121-100) \right| \\ &= \frac{21 \cdot 19}{8\sqrt{81^5}} = \frac{133}{157464}. \end{aligned}$$

Resumiendo, la raíz cuadrada de 102 vale 10.1 con un error menor que $\frac{133}{157464}$.

7.2.2 Fórmula de Newton

Aunque el cálculo de polinomios de Lagrange de grado más alto no siempre mejora el resultado, se suelen calcular polinomios de interpolación de varios grados y elegir la mejor aproximación con alguna condición que dependerá del problema concreto.

El método de cálculo de los polinomios de Lagrange que hemos presentado es muy útil para calcular el polinomio de interpolación de un grado determinado, pero no aprovecha los cálculos de un grado en el siguiente paso. El método que presentamos ahora permite calcular recursivamente el polinomio de interpolación.

Definición 7.8. Sea (x_0, y_0), (x_1, y_1),..., (x_n, y_n) parejas de puntos con los x_i, i = 0, 1,..., n distintos.

a) Se llama *diferencia dividida de orden 0* con respecto a x_i es

$$f[x_i] = y_i, \ i = 0, 1, \ldots, n.$$

b) La *diferencia dividida de orden 1* con respecto a x_i y x_{i+1} es

$$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f[x_{i+1}] - f[x_i]}{x_{i+1} - x_i} \ i = 0, 1, \ldots, n-1.$$

c) Se define por recurrencia, la *diferencia dividida de orden k* con respecto a x_i,x_{i+1},..., x_{i+k} como

$$f[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}] = \frac{f[x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}] - f[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i}$$

En el caso particular de que los valores $y_i = f(x_i), \ i = 0, 1, \ldots, n$, para cierta función f entonces $f[x_i] = f(x_i), \ i = 0, 1, \ldots, n$.

¿Cuál es el interés de las diferencias divididas? Nos dan los coeficientes de los polinomios de interpolación y, más importante, una forma de calcularlos de forma recursiva. En otras palabras, para calcular el polinomio de un grado determinado aprovechamos los cálculos de los polinomios de grado menor.

Proposición 7.9. *El polinomio de interpolación de orden n de la función $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ en los puntos x_0, x_1,..., x_n es*

$$\begin{aligned} P_n(x) = {} & f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \cdots \\ & + f[x_0, x_1, \ldots, x_n](x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1}). \end{aligned} \tag{7.2}$$

También puede escribirse el polinomio tomando la sucesión en orden invertido o, lo que es lo mismo, utilizando la otra diagonal de la tabla de diferencias divididas de la forma

$$\begin{aligned} P_n(x) = {} & f[x_n] + f[x_{n-1}, x_n](x - x_n) + f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n](x - x_n)(x - x_{n-1}) + \cdots \\ & + f[x_0, x_1, \ldots, x_n](x - x_n)(x - x_{n-1}) \cdots (x - x_1). \end{aligned} \tag{7.3}$$

Estas dos ecuaciones, (7.2) y (7.3), se llaman *fórmula de Newton del polinomio de interpolación.* Como hemos dicho, ambas dan exactamente el mismo polinomio, pero a la hora de evaluar en un punto x es mejor utilizar una u otra dependiendo de la distancia de x a x_0 y x_n (menos es mejor).

Ejemplo 7.10. Vamos a calcular el polinomio de interpolación con los siguientes datos.
La tabla de diferencias divididas es la siguiente:

x_i	$f[x_i]$	Orden 1	Orden 2	Orden 3	Orden 4
x_0	$f[x_0]$				
		$f[x_0,x_1] = \frac{f[x_1]-f[x_0]}{x_1-x_0}$			
x_1	$f[x_1]$		$f[x_0,x_1,x_2] = \frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}$	$f[x_0,x_1,x_2,x_3] = \frac{f[x_1,x_2,x_3]-f[x_0,x_1,x_2]}{x_3-x_0}$	
		$f[x_1,x_2] = \frac{f[x_2]-f[x_1]}{x_2-x_1}$			
x_2	$f[x_2]$		$f[x_1,x_2,x_3] = \frac{f[x_2,x_3]-f[x_1,x_2]}{x_3-x_1}$		$f[x_0,x_1,x_2,x_3,x_4] = \frac{f[x_1,x_2,x_3,x_4]-f[x_0,x_1,x_2,x_3]}{x_4-x_0}$
		$f[x_2,x_3] = \frac{f[x_3]-f[x_2]}{x_3-x_2}$		$f[x_1,x_2,x_3,x_4] = \frac{f[x_2,x_3,x_4]-f[x_1,x_2,x_3]}{x_4-x_1}$	
x_3	$f[x_3]$		$f[x_2,x_3,x_4] = \frac{f[x_3,x_4]-f[x_2,x_3]}{x_4-x_2}$		
		$f[x_3,x_4] = \frac{f[x_4]-f[x_3]}{x_4-x_3}$			
x_4	$f[x_4]$				

Tabla 7.2 Diferencias divididas en cuatro puntos

x_i	-2	-1	1	2
$f[x_i]$	2	0	1	-1

x_i	$f[x_i]$	$f[x_i,x_{i+1}]$	$f[x_i,x_{i+1},x_{i+2}]$	$f[x_i,x_{i+1},x_{i+2},x_{i+3}]$
-2	2			
		-2		
-1	0		$\frac{5}{6}$	
		$\frac{1}{2}$		$-\frac{10}{24}$
1	1		$-\frac{5}{6}$	
		-2		
2	-1			

Por tanto el polinomio de interpolación es

$$2-2(x+2)+\frac{5}{6}(x+2)(x+1)-\frac{5}{12}(x+2)(x+1)(x-1)=-\frac{5}{12}x^3+\frac{11}{12}x+\frac{1}{2}.$$

También se puede calcular utilizando la diagonal inferior

$$-1-2(x-2)-\frac{5}{6}(x-2)(x-1)-\frac{10}{24}(x-2)(x-1)(x+1)=-\frac{5}{12}x^3+\frac{11}{12}x+\frac{1}{2}.$$

Los cálculos anteriores son aprovechables. Por ejemplo, si sólo tenemos en cuenta los tres primeros nodos el correspondiente polinomio de Lagrange de orden 2 es

$$2-2(x+2)+\frac{5}{6}(x+2)(x+1)=\frac{5}{6}x^2+\frac{x}{2}-\frac{1}{3}.$$

7.3 Interpolación de Hermite

En el problema de interpolación se conoce el valor de una función en n puntos, si además añadimos como información inicial el valor de la derivada en dichos puntos estamos ante el *problema de interpolación de Hermite:*

Dados $n+1$ puntos distintos x_0, x_1,..., x_n encontrar el polinomio H de grado menor o igual que $2n+1$ tal que

$$\begin{aligned} H(x_i) &= y_i, \\ H'(x_i) &= y_i',\ i=0,1,\ldots,n. \end{aligned}$$

La solución próximamente...

7.4 Ejercicios

Integrabilidad

Integración

8

El área de un recinto, la longitud de un cable que cuelga entre dos postes, el volumen o la superficie de una esfera...Estos son el tipo de problemas que vamos a resolver en este capítulo. Para ello presentamos el concepto de integral de una función.

8.1 Funciones integrables

Definición 8.1. Una *partición* P de un intervalo $[a,b]$ es un conjunto finito del tipo $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ donde

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Ejemplo 8.2. Los conjuntos $\{0,1\}$, $\left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$ o $\left\{0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1\right\}$ son particiones del intervalo $[0,1]$. No lo son, en cambio, conjuntos como $\left\{0, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 1\right\}$, $\left\{0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right\}$.

Definición 8.3. Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función acotada y P una partición del intervalo. La *suma superior* $S(f,P)$ de la función f relativa a la partición P es

$$\begin{aligned} S(f,P) = {} & \sup f([x_0,x_1])(x_1 - x_0) + \sup f([x_1,x_2])(x_2 - x_1) + \ldots \\ & + \sup f([x_{n-1},x_n])(x_n - x_{n-1}). \end{aligned}$$

Análogamente se define la *suma inferior* $I(f,P)$ como

$$\begin{aligned} I(f,P) = {} & \inf f\,([x_0,x_1])\,(x_1 - x_0) + \sup f([x_1,x_2])(x_2 - x_1) + \ldots \\ & + \sup f([x_{n-1},x_n])(x_n - x_{n-1}). \end{aligned}$$

Las sumas inferiores y superiores que vemos en la siguiente figura son una aproximación del área que queremos calcular. Ahora bien, el valor de la suma inferior siempre será menor que el de la integral y a la suma superior le ocurre lo contrario.

Definición 8.4. La *integral superior* de f se define como

$$\overline{\int}_{[a,b]} f = \inf\left\{S(f,P)\colon P \text{ partición de } [a,b]\right\}.$$

La *integral inferior* de f se define como

$$\underline{\int}_{[a,b]} f = \sup\left\{I(f,P)\colon P \text{ partición de } [a,b]\right\}.$$

Las integrales superior e inferior son aproximaciones a la integral de la función. En un caso por exceso y en otro por defecto. Cuando ambas aproximaciones coinciden, tenemos una función integrable.

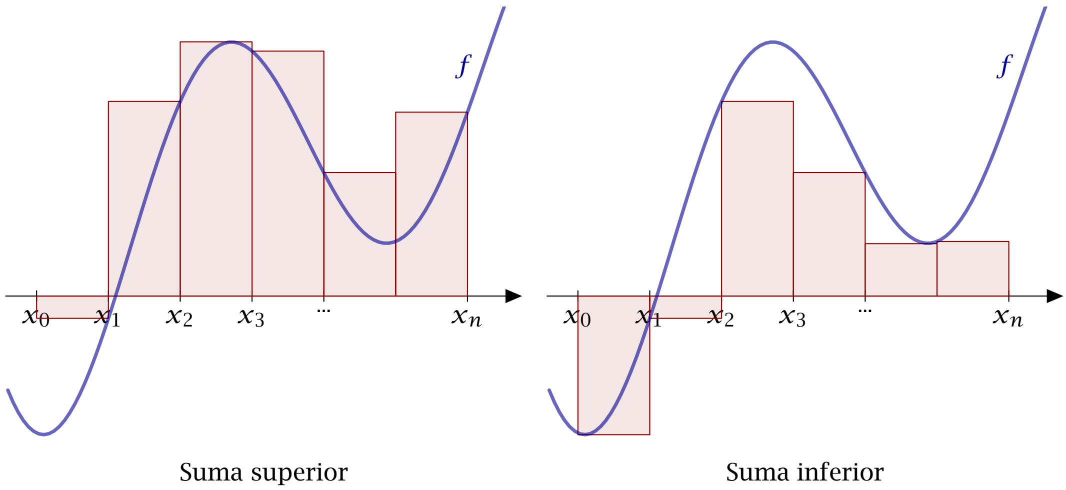


Figura 8.1 Sumas superiores e inferiores

Definición 8.5. Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función acotada. Diremos que f es *integrable* si coinciden la integral superior e inferior. En ese caso, denotaremos $\int_{[a,b]} f$ a dicha integral.

También usaremos con frecuencia las notaciones $\int_a^b f$ o $\int_a^b f(x)\,dx$ si queremos hacer hincapié en la variable de integración.

Ejemplo 8.6. Calcular la integral de $f(x) = x$ en el intervalo $[0,1]$ Consideremos la partición P_n del intervalo $[0,1]$ que consiste en dividirlo en n trozos iguales:

$$P_n = \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1\right\}.$$

Como la función f es creciente, su valor máximo se alcanzará en el extremo de la derecha y el mínimo en el extremos de la izquierda. Con esto es fácil calcular el valor de las sumas superiores e inferiores.

$$S(f,P_n) = \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)\frac{1}{n} = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2n^2}, \quad \text{y}$$
$$I(f,P_n) = \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i-1}{n}\right)\frac{1}{n} = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i-1 = \frac{(n-1)n}{2n^2}.$$

Si hacemos tender n a infinito, $\lim_{n\to\infty} S(f,P_n) = \lim_{n\to\infty} S(f,P_n) = \frac{1}{2}$. Por tanto $\int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}$.

No es fácil calcular la integral de una función con la definición. En el ejemplo anterior hemos tenido que usar la suma de una progresión aritmética y usar particiones de una forma particular. En el resto del tema veremos qué funciones son integrables, qué propiedades tienen y, por último, el teorema fundamental del cálculo y la regla de Barrow nos permitirán calcular integrales de una forma más cómoda.

8.1.1 Propiedades

Comenzamos recogiendo información sobre la integrabilidad de funciones relacionada con las operaciones usuales.

Linealidad de la integral

Con respecto a la suma, el conjunto de las funciones integrables es un espacio vectorial y la integral es una aplicación lineal.

Proposición 8.7. *Sean $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ integrables. Entonces*

a) La suma $f+g$ es integrable y $\int(f+g) = \int f + \int g$.

b) Si $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces $\int(\lambda f) = \lambda \int f$.

Producto de funciones

La integral que acabamos de introducir también se comporta bien con respecto al producto aunque en este caso *no* hay una identidad que relaciones la integral de un producto de funciones con el producto de las integrales.

Proposición 8.8. *Sean $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ integrables.*

a) El producto de ambas funciones, fg, es una función integrable.

b) (Desigualdad de Schwarz) $\left(\int(fg)\right)^2 \leq \int f^2 \int g^2$.

c) (Desigualdad de Minkowski) $\left(\int(f+g)^2\right)^{1/2} \leq \left(\int f^2\right)^{1/2} + \left(\int g^2\right)^{1/2}$.

Orden

En cuanto al orden, el siguiente resultado nos dice que la integral lo conserva.

Proposición 8.9. *Sean $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ integrables. Si $f(x) \leq g(x)$ para cualquier $x \in [a,b]$, entonces*

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx.$$

En particular, si $f(x) \geq 0$ para cualquier x se tiene que $0 \leq \int_a^b f(x)\,dx$.

No es evidente de la definición, pero se puede comprobar que si una función es integrable, su valor absoluto también lo es.

Proposición 8.10. *Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ integrable. Entonces la función $|f|(x) = |f(x)|$ es integrable y*

$$\left| \int_{[a,b]} f(x)\,dx \right| \leq \int_{[a,b]} |f|(x)\,dx.$$

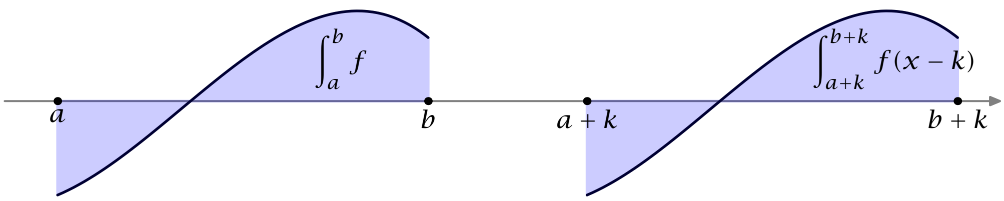
Dominio

Se puede demostrar que si una función es integrable en un intervalo, también lo es en cualquier intervalo contenido en él. Teniendo en cuenta esto, podemos calcular la integral de una función en un intervalo dividiendo este en varios trozos y sumar los resultados. Esto se conoce como aditividad de de la integral respecto de su dominio.

Proposición 8.11 (Aditividad respecto del dominio). *Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función acotada y $c \in]a,b[$. Entonces f es integrable en $[a,b]$ si, y sólo si, es integrable en los intervalos $[a,c]$ y $[c,b]$. En ese caso,*

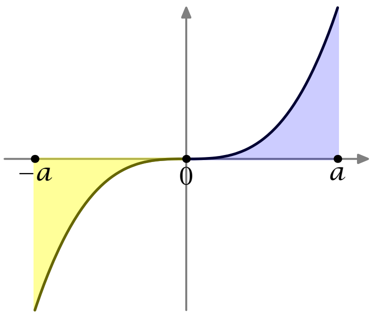
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Observación 8.12. La integral de una función f en un intervalo $[a,b]$ no cambia si "trasladamos" dicha función.



Podemos utilizar esto para simplificar el cálculo de algunas integrales. Por ejemplo, si f es una función impar, entonces

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0.$$



¿Por qué? Sólo tenemos que mirar la gráfica de la función. El área entre 0 y a es igual que el área entre $-a$ y 0 pero con signos opuestos y ambas se cancelan. Por ejemplo

$$\int_{-a}^{a} x^3\,dx = 0.$$

Si por el contrario f es una función par entonces $\int_{-a}^{a} f = 2\int_0^a f$.

8.1.2 Condiciones suficientes de integrabilidad

Ya hemos visto que las funciones integrables tienen muchas propiedades interesantes. La siguiente cuestión es ¿hay muchas? ¿Qué funciones son integrables? ¿Tenemos suficientes ejemplos de funciones integrables?

El primer resultado que presentamos nos dice que el conjunto de las funciones integrables incluye a la mayoría de las funciones con las que hemos estado trabajando hasta ahora.

Proposición 8.13 (Condiciones suficientes de integrabilidad). *Sea $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ una función.*

a) Si f es continua, entonces es integrable.

b) Si f es monótona, entonces es integrable.

Observa que no hemos mencionado que la función tenga que ser acotada. En ninguno de los casos es necesario: para funciones monótonas es inmediato y para funciones continuas es consecuencia de la propiedad de compacidad.

Podemos ir un poco más lejos, si "estropeamos" una función integrable en unos pocos puntos, ni la integrabilidad ni el valor de la integral se alteran.

Proposición 8.14. *Sea $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ integrable. Sea $g\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ verificando que el conjunto $\{x\in[a,b]\colon f(x)\neq g(x)\}$ es finito. Entonces g es integrable y*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx.$$

Esta resultado afirma que si se cambia el valor de una función en una cantidad finita de puntos se obtiene una función que sigue siendo integrable y, de hecho, el valor de la integral no cambia.

Observación 8.15. *Existen funciones integrables que no son continuas.* Este hecho debería estar claro después de haber afirmado que las funciones monótonas son integrables y recordando que ya conocemos funciones monótonas que no son continuas (como por ejemplo la parte entera). De todas formas la última proposición nos da una manera muy fácil de fabricar funciones integrables que no son continuas: tómese una función continua y cámbiesele el valor en un punto. De este modo se obtiene una función que deja de ser continua en dicho punto pero que tiene la misma integral.

Cambiando el valor de una función en un punto sólo obtenemos discontinuidades evitables. Aunque las discontinuidades no sean evitables, si no son demasiadas, la función es integrable.

Proposición 8.16. *Sea $f\colon[a,b] \to \mathbb{R}$ acotada. Si f tiene una cantidad finita de discontinuidades, entonces es integrable.*

Existe una caracterización completa de las funciones integrables. Para darla, se necesita hablar de conjuntos "pequeños": los llamados conjuntos de medida nula. Si la medida, la longitud en esta caso de un intervalo acotado es $\ell(I) = \sup(I) - \inf(I)$. Un conjunto de medida nula es un conjunto que tiene longitud cero. Veamos la definición con más detalle.

Definición 8.17. Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}$. Diremos que A es un *conjunto de medida nula* si dado $\varepsilon > 0$ existe una sucesión de intervalos acotados $\{I_n\}$ verificando que

a) $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} I_n$, y

b) $\ell(I_1) + \ell(I_2) + \cdots + \ell(I_n) \leq \varepsilon$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Ejemplo 8.18. Cualquier conjunto finito es de medida nula.

Teorema 8.19 (de Lebesgue). *Sea $f\colon[a,b] \to \mathbb{R}$ una función acotada. Son equivalentes:*

a) f es integrable.

b) El conjunto de puntos de discontinuidad de f es un conjunto de medida nula.

8.1.3 Sumas de Riemann

Una de las dificultades de la definición de integral que hemos dado radica en el hecho de que involucra *todas* las posibles particiones del intervalo $[a,b]$. La segunda dificultad es averiguar cuál es el supremo o el ínfimo de la función en cada uno de los intervalos asociados a una partición. Vamos a dar respuesta a ambas cuestiones:

a) En cuanto a las particiones, veremos que es necesario considerar todas sino sólo algunas elegidas adecuadamente. Así nos encontraremos el concepto de norma de una partición.

b) En cuanto al segundo punto, el teorema de Darboux nos dirá que no hace falta calcular el supremo ni el ínfimo y que cualquier punto del intervalo puede jugar el mismo papel.

Comencemos con las particiones. El ejemplo típico de partición que hemos usado consiste en dividir el intervalo $[a,b]$ en trozos iguales. Aumentando el número de trozos, nos aproximamos al valor de la integral. En este caso, la longitud de cada uno de los trozos es $\frac{b-a}{n}$, la longitud del intervalo dividido por el número de trozos, n. La norma de una partición nos mide el tamaño de los trozos o, más concretamente, el tamaño del trozo más grande.

Definición 8.20. Sea $P = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b\}$ una partición del intervalo $[a,b]$. La *norma* de la partición P es

$$\|P\| = \max\{x_i - x_{i-1} \colon\ i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Si en las sumas inferiores y superiores aproximábamos por rectángulos cuya altura era el supremo o el ínfimo de la función, ahora vamos a elegir como altura el valor de la función en un punto arbitrario en cada uno de los intervalos relativos la partición. Para cada partición, tenemos muchas posibles elecciones de puntos. A cualquiera de éstas, las vamos a llamar sumas integrales o sumas de Riemann.

Definición 8.21. Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función y sea $P = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b\}$ una partición del intervalo $[a,b]$. Una *suma integral* o *suma de Riemann* es una suma de la forma

$$f(y_1)(x_1 - x_0) + f(y_2)(x_2 - x_1) + \cdots + f(y_n)(x_n - x_{n-1})$$

donde $y_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots n$.

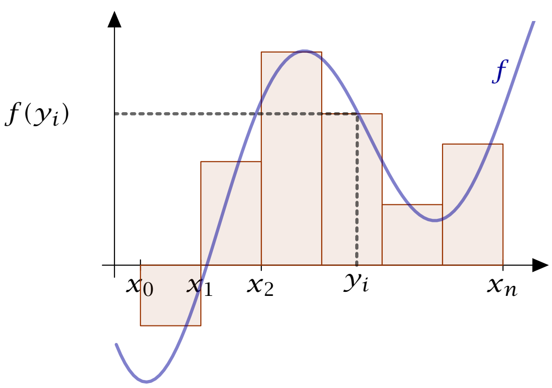


Figura 8.2 Suma integral o de Riemann

Ya podemos dar la respuesta a la pregunta que planteamos al principio de la sección: para aproximarnos al valor de la integral de la función sólo tenemos que asegurarnos de que la norma de las particiones tiendan a cero independientemente de cuáles sean los puntos elegidos en el intervalo. Una de las formas más fáciles de conseguirlo es dividiendo el intervalo en n trozos iguales y hacer n tender a infinito.

Esta es una versión “light” del teorema de Darboux que, de hecho, permite caracterizar las funciones integrables utilizando sumas integrales en lugar de sumas superiores e inferiores.

Teorema 8.22 (de Darboux). *Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función acotada y sea $\{P_n\}$ una sucesión de particiones del intervalo $[a,b]$ con $\lim_{n\to\infty} \|P_n\| = 0$. Entonces, si S_n son sumas de Riemann asociadas a P_n se cumple $\lim_{n\to\infty} S_n = \int f$.*

8.2 Teorema fundamental del Cálculo

Si f es una función definida y a es un elemento de su dominio, diremos que f es integrable en $[a,a]$ y que $\int_a^a f(x)\,dx = 0$. También convendremos que $\int_a^b f = -\int_b^a f$.

Definición 8.23. Sea I un intervalo. Diremos que $f\colon I \to \mathbb{R}$ es *localmente integrable* si es integrable en cualquier intervalo cerrado y acotado contenido en I.

Ejemplo 8.24.

a) Las funciones continuas y las funciones monótonas son localmente integrables.

b) Si f es integrable en $[a,b]$, es localmente integrable en dicho intervalo.

Lema 8.25. *Sea f una función localmente integrable en un intervalo I y sean $a, b, c \in I$. Entonces*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Obsérvese que la comodidad del lema anterior radica en que no sabemos como están ordenados a, b y c.

Definición 8.26. Si f es una función localmente integrable en I y $a \in I$ podemos definir una nueva función que mide como cambia la integral de la función de la forma

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$$

A las funciones F definidas de esta forma las llamaremos *integrales indefinidas* de f.

La integral indefinida es la función que nos da el área sombreada de la Figura 8.3.

Definición 8.27. Sea I un intervalo de $\mathbb{R}$. Una *primitiva* de una función $f\colon I \to \mathbb{R}$ es una función $G\colon I \to \mathbb{R}$ continua y derivable en el interior del intervalo que cumple que $G'(x) = f(x)$ para cualquier x en el interior de I.

Observación 8.28. Dos integrales indefinidas se diferencian en una constante. Ocurre lo mismo para dos primitivas de una misma función. En efecto, la diferencia entre dos funciones con la misma derivada tiene derivada cero y por tanto es constante (en un intervalo). En cuanto a integrales indefinidas, si

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt, \quad \text{y} \quad G(x) = \int_b^x f(t)\,dt$$

son integrales indefinidas, entonces

$$\begin{aligned} F(x) - G(x) &= \int_a^x f(t)\,dt - \int_b^x f(t)\,dt \\ &= \int_a^x f(t)\,dt + \int_x^b f(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt. \end{aligned}$$

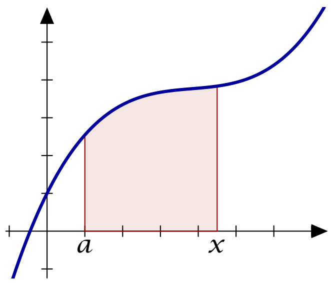


Figura 8.3 Integral indefinida

Existe una gran tendencia a confundir integral y primitiva. Es usual que hablemos de "vamos a calcular la integral" cuando nos estamos refiriendo a "encontremos una función cuya derivada sea...". Los conceptos de integral definida y primitiva son, en principio, independientes. El objetivo de los dos siguientes resultados es poner de manifiesto que existe una clara relación entre ellos y, de paso, obtener una forma práctica de calcular integrales.

Teorema 8.29 (fundamental del Cálculo). *Sea I un intervalo, $f\colon I \to \mathbb{R}$ una función localmente integrable y F una integral indefinida de f. Entonces*

a) F es una función continua.

b) Si f es continua en $a \in I$, entonces F es derivable en a con $F'(a) = f(a)$.

En particular, si f es una función continua, F es una función derivable y $F'(x) = f(x)$ para todo x en I.

Ejemplo 8.30.

a) La función parte entera, $E(x)$, es monótona y por tanto integrable en cualquier intervalo. Dicho de otra manera, la función parte entera es localmente integrable en $\mathbb{R}$. Cualquier integral indefinida será una función continua en todo $\mathbb{R}$ y derivable en $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Sin embargo, la función parte entera no tiene primitiva. El teorema del valor intermedio para las derivadas (Teorema 5.21) nos dice que la función parte entera no es la derivada de nadie porque su imagen no es un intervalo.

b) La función $f\colon[-1,1]\to\mathbb{R}$ definida como

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{si } x=\pm 1,\\ \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, & \text{si } -1<x<1,\end{cases}$$

no es integrable por no ser acotada. En cambio, sí admite una primitiva: la función arcoseno.

Una de las primeras utilidades del Teorema fundamental del Cálculo es poder definir funciones de una manera rigurosa usando la integral. Por ejemplo, se puede definir la función logaritmo como

$$\log(x)=\int_1^x \frac{1}{t}\,dt.$$

La función $G(x)=\int_{g(x)}^{h(x)} f(t)\,dt$ es continua si lo son f y g. Si, además, g y h son derivables, y f es continua, entonces G es derivable con

$$\left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(t)\,dt\right)'(x)=f(h(x))h'(x)-f(g(x))g'(x).$$

Ejemplo 8.31. La función $f(x)=\int_1^{x^2+1}\frac{\operatorname{sen}(t)}{t}\,dt$ es derivable y su derivada es

$$f'(x)=\frac{\operatorname{sen}\left(x^2+1\right)}{x^2+1}\,2x.$$

8.2.1 Regla de Barrow

El siguiente resultado, la regla de Barrow, nos permite resolver de modo práctico el cálculo de integrales y sustituirlo por el cálculo de primitivas.

Teorema 8.32 (Regla de Barrow). *Sea $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ integrable y G una primitiva de f. Entonces*

$$\int_a^b f(x)\,dx=G(b)-G(a).$$

Ejemplo 8.33. La primera integral que calculamos fue la de la identidad en el intervalo $[0,1]$ (ver Ejemplo 8.6). Ahora podemos calcularla mucho más fácilmente.

$$\int_0^1 x\,dx=\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1=\frac{1}{2}.$$

Ejemplo 8.34. Las propiedades de la integral nos pueden servir para darnos cuenta de que estamos haciendo algo mal. Por ejemplo:

$$\int_{-1}^1\sqrt{x^2+x^4}\,dx=\int_{-1}^1 x\sqrt{1+x^2}\,dx=\left[\frac{2}{3}\,\frac{1}{2}(1+x^2)^{3/2}\right]_{-1}^1=0.$$

A primera vista puede parecer correcto, pero la integral de una función continua y positiva no puede valer cero, tiene que ser positiva también. ¿Qué hemos hecho mal? La respuesta es que $\sqrt{x^2}$ es $|x|$ y no x como hemos dicho. Hagámosla correctamente:

$$\int_{-1}^1\sqrt{x^2+x^4}\,dx=\int_{-1}^1 |x|\sqrt{1+x^2}\,dx$$

usemos que el integrando es una función par,

$$= 2\int_0^1 x\sqrt{1+x^2}\,dx = \left[\frac{2}{3}\,(1+x^2)^{3/2}\right]_0^1 = \frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{2}{3}.$$

Corolario 8.35 (Teorema de cambio de variable). *Sea $\phi\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ una función derivable y con derivada ϕ' integrable. Sea I un intervalo tal que $\phi([a,b])\subset I$ y $f\colon I\to\mathbb{R}$ una función continua con primitiva G. Entonces*

$$\int_a^b (f\circ\phi)\phi' = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f = G(\phi(b)) - G(\phi(a)).$$

8.3 Ejercicios

Ejercicio 8.1. Halla las derivadas de cada una de las funciones siguientes:

a) $F(x) = \int_a^x \operatorname{sen}^3(t)\,dt$,

b) $F(x) = \int_x^b \frac{1}{1+t^2+\operatorname{sen}^2(t)}\,dt$,

c) $F(x) = \int_a^b \frac{x}{1+t^2+\operatorname{sen}^2(t)}\,dt$.

Ejercicio 8.2. Halla las derivadas de cada una de las funciones siguientes:

a) $F(x) = \int_0^{x^2} \operatorname{sen}(\log(1+t))\,dt$,

b) $F(x) = \int_{x^2}^1 \operatorname{sen}^3(t)\,dt$,

c) $F(x) = \int_{x^2}^{x^3} \cos^3(t)\,dt$.

E **Ejercicio 8.3.** Estudia el crecimiento y decrecimiento de la función $f\colon\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ definida como

$$f(x) = \int_0^{x^3-x^2} e^{-t^2}\,dt.$$

Como consecuencia, estudiar los extremos relativos de dicha función.

E **Ejercicio 8.4.** Calcula el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\displaystyle\int_{x^2+x}^{\operatorname{sen}(x)} e^{-t^2}\,dt}{\operatorname{sen}^2(x)}.$$

E **Ejercicio 8.5.** Calcula el máximo absoluto de la función $f\colon[1,+\infty[\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \int_0^{x-1} (e^{-t^2} - e^{-2t})\,dt.$$

Sabiendo que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{1}{2}(\sqrt{\pi}-1)$, calcula el mínimo absoluto de f.

Ejercicio 8.6. Calcula el siguiente límite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_x^{2x} \operatorname{sen}(\operatorname{sen}(t))\,dt}{x^2}.$$

E **Ejercicio 8.7.** Se considera la función $f(x) = \int_0^{x^3-x^2} e^{-t^2}\,dt$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

a) Encuentra los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función f en $\mathbb{R}$.

b) Calcula los extremos relativos de f.

c) Calcula $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{\operatorname{sen}(x^3-x^2)}$.

Cálculo de primitivas

9

9.1 Cálculo de primitivas

Utilizaremos la notación $\int f(x)\,dx$ para denotar una primitiva de la función f. Además, abusando del lenguaje, a menudo hablaremos de “integral de la función” cuando deberíamos decir “primitiva de la función”.

Los métodos que vamos a comentar son sólo unos pocos y cubren la mayoría de los casos usuales, pero no debes olvidar que hay muchos más. En cualquier caso, lo primero y más importante es manejar con soltura las derivadas de las funciones elementales. En el Apéndice B puedes encontrar un par de tablas con algunas de las derivadas y primitivas.

Inmediatas	Versión general
$\int x^m\,dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C \ (m \neq -1)$	$\int g(x)^m g'(x)\,dx = \frac{g(x)^{m+1}}{m+1} + C \quad (m \neq -1)$
$\int \frac{dx}{x} = \log\lvert x\rvert + C$	$\int \frac{g'(x)}{g(x)}\,dx = \log\lvert g(x)\rvert + C$
$\int e^x\,dx = e^x + C$	$\int e^{g(x)} g'(x)\,dx = e^{g(x)} + C$
$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\log(a)} + C \quad (a > 0, a \neq 1)$	$\int a^{g(x)} g'(x)\,dx = \frac{a^{g(x)}}{\log(a)} + C \quad (a > 0, a \neq 1)$
$\int \operatorname{sen}(x)\,dx = -\cos(x) + C$	$\int \operatorname{sen}(g(x))\,g'(x)\,dx = -\cos(g(x)) + C$
$\int \cos(x)\,dx = \operatorname{sen}(x) + C$	$\int \cos(g(x))\,g'(x) = \operatorname{sen}(g(x)) + C$
$\int \tan x\,dx = -\log\lvert\cos(x)\rvert + C$	$\int \tan(g(x))\,g'(x)\,dx = -\log\lvert\cos(g(x))\rvert + C$
$\int \operatorname{cotan}(x)\,dx = \log\lvert\operatorname{sen}(x)\rvert + C$	$\int \operatorname{cotan}(g(x))\,g'(x)\,dx = \log\lvert\operatorname{sen}(g(x))\rvert + C$
$\int \sec^2(x)\,dx = \tan(x) + C$	$\int \sec^2(g(x))\,g'(x)\,dx = \tan(g(x)) + C$
$\int \operatorname{cosec}^2(x)\,dx = -\operatorname{cotan}(x) + C$	$\int \operatorname{cosec}^2(g(x))\,g'(x)\,dx = -\operatorname{cotan}(g(x)) + C$
$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arcsen}(x) + C$	$\int \frac{g'(x)}{\sqrt{1-g(x)^2}} = \operatorname{arcsen}(g(x)) + C$
$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan(x) + C$	$\int \frac{g'(x)}{1+g(x)^2} = \arctan(g(x)) + C$

Inmediatas	Versión general
$\int x^m\,dx = \dfrac{x^{m+1}}{m+1} + C\ (m \neq -1)$	$\int g(x)^m g'(x)\,dx = \dfrac{g(x)^{m+1}}{m+1} + C \quad (m \neq -1)$
$\int \operatorname{senh}(x)\,dx = \cosh(x) + C$	$\int \operatorname{senh}(g(x))\,g'(x)\,dx = \cosh(g(x)) + C$
$\int \cosh(x)\,dx = \operatorname{senh}(x) + C$	$\int \cosh(g(x))\,g'(x)\,dx = \operatorname{senh}(g(x)) + C$

9.1.1 Cambio de variable

Mediante un cambio de variable es posible transformar la integral en otra más sencilla. Si hacemos $y = \phi(x)$, $dy = \phi'(x)\,dx$, se tiene

$$\int f(\phi(x))\phi'(x)\,dx = \int f(y)\,dy.$$

Para terminar sólo tenemos que deshacer el cambio.

Ejemplo 9.1. Calcular $\int \frac{e^x+3e^{2x}}{2+e^x}\,dx$.

$$\begin{aligned}\int \frac{e^x+3e^{2x}}{2+e^x}\,dx &= \begin{bmatrix} y = e^x \\ dy = e^x\,dx \end{bmatrix} = \int \frac{y+3y^2}{2+y}\cdot\frac{1}{y}\,dy = \int \frac{1+3y}{2+y}\,dy \\ &= \int \left(3 - \frac{5}{2+y}\right) dy \\ &= 3y - 5\log|\,y+2\,| = 3e^x - 5\log\left(e^x+2\right).\end{aligned}$$

9.1.2 Integración por partes

Si u y v son dos funciones, teniendo en cuenta que $(u\cdot v)' = u\cdot v' + v\cdot u'$, obtenemos que

$$\int u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)\,dx.$$

Esta fórmula aparece escrita en muchas ocasiones de la forma

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

El teorema especifica con un poco más de rigurosidad las condiciones necesarias.

Teorema 9.2 (Integración por partes). *Sean $u, v\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ funciones derivables con derivada continua. Entonces uv' y vu' son integrables en $[a,b]$ y*

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b v(x)u'(x)\,dx.$$

Ejemplo 9.3. Calcular $\int x\,e^x\,dx$.

$$\int x\,e^x\,dx = \begin{bmatrix} u = x, & du = dx \\ dv = e^x\,dx, & v = e^x \end{bmatrix} = x\,e^x - \int e^x\,dx = x\,e^x - e^x = e^x(x-1).$$

Ejemplo 9.4. Calcular $\int \operatorname{sen}(x)\,e^x\,dx$.

$$
\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}(x)e^x\,dx &= \left[\begin{matrix} u=\operatorname{sen}(x), & du=\cos(x)dx \\ dv=e^x\,dx, & v=e^x \end{matrix}\right] = \operatorname{sen}(x)e^x - \int \cos(x)e^x\,dx \\
&= \left[\begin{matrix} u=\cos(x), & du=-\operatorname{sen}(x)dx \\ dv=e^x\,dx, & v=e^x \end{matrix}\right] \\
&= \operatorname{sen}(x)e^x - \cos(x)e^x - \int \operatorname{sen}(x)e^x\,dx,
\end{aligned}
$$

con lo que despejando tenemos $\int \operatorname{sen}(x)e^x\,dx = \frac{1}{2}\left(\operatorname{sen}(x)e^x - \cos(x)e^x\right)$.

9.1.3 Integración de funciones racionales

Sean $P(x)$ y $Q(x)$ dos polinomios, y queremos calcular $\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$. Si el grado de P es mayor o igual que el de Q, podemos dividir los dos polinomios obteniendo

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = H(x) + \frac{G(x)}{Q(x)},$$

donde $H(x)$ y $G(x)$ son polinomios y el grado de G es menor que el grado de Q. Por tanto, supondremos siempre que el grado de P es menor que el grado de Q.

Integrales del tipo $\int \frac{P(x)}{(ax+b)^n}$

El cambio de variable $y = ax+b$ la transforma en una integral inmediata de la forma $\int \frac{P(y)}{y^n}\,dy$.

Ejemplo 9.5.

$$
\begin{aligned}
\int \frac{3x^2+5x+2}{(x-1)^3}\,dx = [y=x-1, dy=dx] &= \int \frac{3(y+1)^2+5(y+1)+2}{y^3}\,dy \\
&= \int \frac{3y^2+11y+10}{y^3}\,dy \\
&= 3\int \frac{dy}{y} + 11\int \frac{dy}{y^2} + 10\int \frac{dy}{y^3} \\
&= 3\log|\,y\,| - \frac{11}{y} - 10\frac{1}{2}\frac{1}{y^2} \\
&= 3\log|x-1| - \frac{11}{x-1} - \frac{5}{(x-1)^2}\,.
\end{aligned}
$$

Integrales del tipo $\int \frac{Mx+N}{x^2+bx+c}$, donde el denominador no tiene raíces reales

Siempre se puede escribir $x^2+bx+c = (x-d)^2+k^2$, con lo que descomponemos nuestra integral en dos:

$$
\begin{aligned}
\int \frac{Mx+N}{x^2+bx+c}\,dx &= \int \frac{Mx+N}{(x-d)^2+k^2}\,dx = \int \frac{M(x-d)+N+Md}{(x-d)^2+k^2}\,dx \\
&= \int \frac{M(x-d)}{(x-d)^2+k^2}\,dx + \int \frac{N+Md}{(x-d)^2+k^2}\,dx \\
&= \frac{M}{2}\log\left|(x-d)^2+k^2\right| + (N+Md)\int \frac{dx}{(x-d)^2+k^2}
\end{aligned}
$$

y la última integral es inmediata (del tipo arcotangente) si hacemos el cambio de variable $y = \frac{x-d}{k}$.

Ejemplo 9.6. Calcular $\int \frac{2x+3}{x^2+2x+2}\,dx$.
Como $x^2+2x+2 = (x+1)^2+1$, hacemos el cambio $y = x+1$

$$\int \frac{2x+3}{x^2+2x+2}\,dx = \int \frac{2(y-1)+3}{y^2+1}\,dy = \int \frac{2y}{y^2+1}\,dy + \int \frac{dy}{y^2+1}$$
$$= \log(y^2+1) + \arctan(y) = \log(x^2+2x+2) + \arctan(x+1).$$

Raíces reales y/o complejas simples

En este caso

$$Q(x) = (x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)(x^2+b_1x+c_1)(x^2+b_2x+c_2)\ldots(x^2+b_mx+c_m).$$

Lo que vamos a hacer es descomponer de nuevo en fracciones más sencillas de la siguiente manera:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-a_1} + \frac{A_2}{x-a_2} + \cdots + \frac{A_n}{x-a_n}$$
$$+ \frac{B_1x+C_1}{x^2+b_1x+c_1} + \frac{B_2x+C_2}{x^2+b_2x+c_2} + \cdots \frac{B_mx+C_m}{x^2+b_mx+c_m},$$

donde $A_1, A_2, \ldots, A_n, B_1, B_2, \ldots, C_m$ son constantes a determinar. Para calcularlas desarrollamos e igualamos los coeficientes del mismo grado.

Observación 9.7. Si el polinomio $Q(x)$ sólo tiene raíces reales se pueden calcular las constantes A_1,...,A_n dando a la variable x los valores a_1,..., a_n.

Ejemplo 9.8. Cálculo de $\int \frac{1}{x^4-1}\,dx$:
Como $x^4-1 = (x-1)(x+1)(x^2+1)$, la descomposición nos quedaría:

$$\frac{1}{x^4-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$$

Si desarrollamos e igualamos coeficientes:

$$\frac{1}{x^4-1} = \frac{A(x+1)(x^2+1)+B(x-1)(x^2+1)+(Cx+D)(x^2-1)}{x^4-1}$$

$$1 = (A+B+C)x^3 + (A-B+D)x^2 + (A+B-C)x + (A-B-D)$$

$$\left.\begin{aligned} A+B+C&=0\\ A-B+D&=0\\ A+B-C&=0\\ A-B-D&=1 \end{aligned}\right\} \implies \left\{\begin{aligned} A&=1/4\\ B&=-1/4\\ C&=0\\ D&=-1/2 \end{aligned}\right.$$

Por tanto,

$$\int \frac{dx}{x^4-1} = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x+1} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+1}$$
$$= \frac{1}{4}\log|x-1| - \frac{1}{4}\log|x+1| - \frac{1}{2}\arctan(x).$$

Raíces reales múltiples

En este caso el denominador tiene la forma $Q(x) = (x-a_1)^{r_1}(x-a_2)^{r_2}\ldots(x-a_n)^{r_n}$, y podemos descomponer la fracción $\frac{P(x)}{Q(x)}$ en fracciones simples

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-a_1} + \frac{A_2}{(x-a_1)^2} + \cdots + \frac{A_{r_1}}{(x-a_1)^{r_1}} + \frac{B_1}{x-a_2} + \frac{B_2}{(x-a_2)^2} + \cdots \frac{C_{r_n}}{(x-a_n)^{r_n}}$$

Cada una de estas fracciones pertenecen a alguno de los casos ya estudiados.

Ejemplo 9.9. Calcular $\int \frac{1}{(x-1)(x+1)^3}\,dx$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{(x-1)(x+1)^3} &= \frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x+1)^2}+\frac{D}{(x+1)^3}\\
&= \frac{A(x+1)^3+B(x-1)(x+1)^2+C(x-1)(x+1)+D(x-1)}{(x-1)(x+1)^3}\\
&= \frac{(A+B)x^3+(3A+B+C)x^2+(3A-B+D)x+A-B-C-D}{(x-1)(x+1)^3}\\
&= \frac{1}{(x-1)(x+1)^3}
\end{aligned}
$$

Igualando coeficientes:

$$
\left.\begin{aligned}
A+B&=0\\
3A+B+C&=0\\
3A-B+D&=0\\
A-B-C-D&=1
\end{aligned}\right\}
\iff
\left\{\begin{aligned}
A&=\tfrac{1}{8}\\
B&=-\tfrac{1}{8}\\
C&=-\tfrac{1}{4}\\
D&=-\tfrac{1}{2}.
\end{aligned}\right.
$$

La integral nos queda

$$
\begin{aligned}
\int \frac{dx}{(x-1)(x+1)^3} &= \frac{1}{8}\int\frac{dx}{x-1}-\frac{1}{8}\int\frac{dx}{x+1}-\frac{1}{4}\int\frac{dx}{(x+1)^2}-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x+1)^3}\\
&= \frac{1}{8}\log|x-1|-\frac{1}{8}\log|x+1|+\frac{1}{4(x+1)}+\frac{1}{4(x+1)^2}.
\end{aligned}
$$

Raíces reales y complejas múltiples. Método de Hermite

El método que vamos a estudiar, conocido como Método de Hermite, consiste en descomponer $\frac{P(x)}{Q(x)}$ como suma de fracciones más simples de una forma muy particular. Pasos a seguir:

Paso 1

Descomponemos el denominador, $Q(x)$, como producto de factores de grado 1 y factores de grado 2 irreducibles:

$$Q(x) = (x-a_1)^{\alpha_1}\cdots(x-a_n)^{\alpha_n}(x^2+b_1x+c_1)^{\beta_1}\cdots(x^2+b_mx+c_m)^{\beta_m}.$$

Paso 2

Escribimos el cociente $\frac{P(x)}{Q(x)}$ de la siguiente forma:

$$
\begin{aligned}
\frac{P(x)}{Q(x)} =& \frac{A_1}{x-a_1}+\cdots+\frac{A_n}{x-a_n}+\frac{M_1x+N_1}{x^2+b_1x+c_1}+\cdots+\frac{M_mx+N_m}{x^2+b_mx+c_m}+\\
&+\frac{d}{dx}\left(\frac{F(x)}{(x-a_1)^{\alpha_1-1}\cdots(x-a_n)^{\alpha_n-1}(x^2+b_1x+c_1)^{\beta_1-1}\cdots(x^2+b_mx+c_m)^{\beta_m-1}}\right)
\end{aligned}
$$

donde $A_1,\ldots,A_n,M_1,\ldots,M_m,N_1,\ldots,N_m$ son coeficientes que tenemos que determinar, y en la fracción que aparece con una derivada $F(x)$ es un polinomio genérico de grado uno menos que su denominador. En resumen, se trata de escribir $\frac{P(x)}{Q(x)}$ como suma de fracciones simples, una por cada factor, más la derivada de un cociente que tiene por denominador lo que queda de $Q(x)$.
¿Cómo determinamos todos los coeficientes? Basta efectuar la derivada, reducir todas las fracciones a común denominador (que será $Q(x)$), e igualar $P(x)$ al numerador resultante. Esto nos producirá un sistema de ecuaciones cuya resolución nos dará el valor de todos los coeficientes.

Paso 3

Una vez escrita la función racional $\frac{P(x)}{Q(x)}$ de la forma anterior, es fácil calcular su integral:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \int \frac{A_1}{x-a_1}\,dx + \cdots + \int \frac{M_1x+N1}{x^2+b_1x+c_1}\,dx + \cdots$$
$$+\frac{F(x)}{(x-a_1)^{\alpha_1-1}\cdots(x-a_n)^{\alpha_n-1}(x^2+b_1x+c_1)^{\beta_1-1}\cdots(x^2+b_mx+c_m)^{\beta_m-1}}$$

Ejemplo 9.10. Cálculo de $\int \frac{x^2}{(x^2+9)^2}\,dx$.

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{(x^2+9)^2} &= \frac{Mx+N}{x^2+9} + \frac{d}{dx}\left(\frac{ax+b}{x^2+9}\right)\\ &= \frac{(Mx+N)(x^2+9)}{(x^2+9)^2} + \frac{a(x^2+9)-2x(ax+b)}{(x^2+9)^2}\\ &= \frac{Mx^3+(N-a)x^2+(9M-2b)x+(9a+9N)}{(x^2+9)^2}\end{aligned}$$

Igualando los numeradores coeficiente a coeficiente, obtenemos el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} M &= 0\\ -a+N &= 1\\ -2b+9M &= 0\\ 9a+9N &= 0\end{aligned}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{ll} M=0 & b=0\\ N=1/2 & a=-1/2\end{array}\right.$$

De esta forma se tiene

$$\int \frac{x^2}{(x^2+9)^2}\,dx = \frac{-\frac{1}{2}x}{x^2+9} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+9},$$

y la última integral vale

$$\int \frac{dx}{x^2+9} = \int \frac{1/9}{\left(\frac{x}{3}\right)^2+1}\,dx = \frac{1}{3}\arctan\left(\frac{x}{3}\right).$$

En resumen,

$$\int \frac{x^2}{(x^2+9)^2}\,dx = \frac{-x}{2(x^2+9)} + \frac{1}{6}\arctan\left(\frac{x}{3}\right).$$

Ejemplo 9.11. Calcular $\int \frac{x^2-2}{x^3(x^2+1)^2}\,dx$.

$$\frac{x^2-2}{x^3(x^2+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Mx+N}{x^2+1} + \frac{d}{dx}\left(\frac{ax^3+bx^2+cx+d}{x^2(x^2+1)}\right).$$

Realizando la derivada y reduciendo a común denominador, obtenemos un sistema de ecuaciones cuya solución es $a=0$, $b=5/2$, $c=0$, $d=1$, $A=5$, $M=-5$ y $N=0$; por lo tanto

$$\int \frac{x^2-2}{x^3(x^2+1)^2}\,dx = \frac{(5/2)x^2+1}{x^2(x^2+1)} + 5\log(x) - \frac{5}{2}\log(x^2+1).$$

9.1.4 Integración de funciones trigonométricas

Integrales de la forma $\int \operatorname{sen}(ax)\cos(bx)$, $\int \operatorname{sen}(ax)\operatorname{sen}(bx)$, $\int \cos(ax)\cos(bx)$

Se resuelven usando las identidades

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y) &= \frac{1}{2}[\cos(x-y)-\cos(x+y)],\\ \cos(x)\cos(y) &= \frac{1}{2}[\cos(x-y)+\cos(x+y)],\\ \operatorname{sen}(x)\cos(y) &= \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(x+y)+\operatorname{sen}(x-y)].\end{aligned}$$

Ejemplo 9.12.

$$\int \operatorname{sen}(3x)\cos(2x)\,dx = \frac{1}{2}\int \operatorname{sen}(5x)\,dx + \frac{1}{2}\int \operatorname{sen}(x)\,dx = -\frac{1}{10}\cos(5x) - \frac{1}{2}\cos(x).$$

Integrales de la forma $\int \tan^n(x)$, $\int \operatorname{cotan}^n(x)$

Se reducen a una con grado inferior separando $\tan^2(x)$ o $\operatorname{cotan}^2(x)$ y sustituyéndolo por $\sec^2(x) - 1$ y $\operatorname{cosec}^2(x) - 1$.

Ejemplo 9.13. Calcular $\int \tan^5(x)\,dx$.

$$\begin{aligned}\int \tan^5(x)\,dx &= \int \tan^3(x)\tan^2(x)\,dx = \int \tan^3(x)\left(\sec^2(x) - 1\right)\,dx \\ &= \int \tan^3(x)\sec^2(x)\,dx - \int \tan^3(x)\,dx.\end{aligned}$$

Acabamos por separado cada integral:

$$\int \tan^3(x)\sec^2(x)\,dx = \frac{1}{4}\tan^4(x)\,dx \quad \text{(utilizando el cambio } y = \tan(x)\text{)}$$

$$\begin{aligned}\int \tan^3(x)\,dx &= \int \tan(x)\tan^2(x)\,dx = \int \tan(x)(\sec^2(x) - 1)\,dx \\ &= \int \tan(x)\sec^2(x)\,dx - \int \tan(x)\,dx = \frac{1}{2}\tan^2(x) + \log|\cos(x)|.\end{aligned}$$

Integrales de la forma $\int \operatorname{sen}^m(x)\cos^n(x)$, con n o m enteros impares

Se transforman en una integral racional con el cambio $y = \cos(x)$ (si m es impar) o $y = \operatorname{sen}(x)$ (si n es impar).

Ejemplo 9.14. Calcular $\int \frac{\cos^3(x)}{\operatorname{sen}^2(x)}\,dx$.

$$\begin{aligned}\int \frac{\cos^3(x)}{\operatorname{sen}^2(x)}\,dx &= \int \frac{(1 - \operatorname{sen}^2(x))\cos(x)\,dx}{\operatorname{sen}^2(x)} = \left[\begin{matrix} y = \operatorname{sen}(x) \\ dy = \cos(x)\,dx \end{matrix}\right] = \int \frac{1 - y^2}{y^2}\,dy \\ &= -\frac{1}{y} - y = \frac{-1}{\operatorname{sen}(x)} - \operatorname{sen}(x).\end{aligned}$$

Integrales de la forma $\int \operatorname{sen}^m(x)\cos^n(x)$, con n y m enteros pares

Se resuelven usando las identidades $\cos^2(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$, y $\operatorname{sen}^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$.

Ejemplo 9.15. Calcular $\int \cos^2(x)\,dx$.

$$\int \cos^2(x)\,dx = \int \frac{1 + \cos(2x)}{2}\,dx = \int \frac{dx}{2} + \int \frac{\cos(2x)}{2}\,dx = \frac{x}{2} + \frac{\operatorname{sen}(2x)}{4}.$$

Integrales de la forma $\int R\,(\operatorname{sen}(x), \cos(x))$, R una función racional par.

Diremos que R es una función racional par si $R(\operatorname{sen}(x), \cos(x)) = R(-\operatorname{sen}(x), -\cos(x))$. Se resuelven utilizando el cambio $y = \tan(x)$

Ejemplo 9.16. Calcular $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^3(x)\cos^5(x)}$

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^3(x)\cos^5(x)} &= \left[\begin{matrix} y = \tan(x) \\ dy = \sec^2 x\,dx \end{matrix}\right] = \int \frac{(1 + y^2)^3}{y^3}\,dy \\ &= -\frac{1}{2}\operatorname{cotan}^2(x) + 3\log|\tan(x)| + \frac{3}{2}\tan^2(x) + \frac{1}{4}\tan^4(x).\end{aligned}$$

Integrales de la forma $\int R\left(\operatorname{sen}(x), \cos(x)\right)$, R una función racional

Se trata de calcular primitivas de funciones racionales en $\operatorname{sen}(x)$ y $\cos(x)$, es decir, funciones que sean cociente de dos polinomios en $\operatorname{sen}(x)$ y $\cos(x)$. En general, se hace el cambio de variable $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$, con lo que $\operatorname{sen}(x) = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, y $dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}$. Con este cambio convertimos la integral en la integral de una función racional, que ya hemos estudiado.

Ejemplo 9.17. Calcular $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}(x)-\tan(x)}$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen}(x)-\tan(x)} = \int \frac{\cos(x)\,dx}{\operatorname{sen}(x)\cos(x)-\operatorname{sen}(x)} = \left[\tan\left(\frac{x}{2}\right) = t\right] = \cdots = \int \frac{t^2-1}{2t^3}\,dt$$
$$= \frac{1}{4t^2} + \frac{\log|t|}{2} = \frac{1}{4\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} + \frac{1}{2}\log\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right|.$$

9.1.5 Integración de funciones hiperbólicas

Integrales de la forma $\int R\left(\operatorname{senh}(x), \cosh(x)\right)$, R una función racional

Se trata de calcular primitivas de funciones racionales en $\operatorname{senh}(x)$ y $\cosh(x)$, es decir, funciones que sean cociente de dos polinomios en $\operatorname{senh}(x)$ y $\cosh(x)$. En general, se hace el cambio de variable $e^x = t$, con lo que la integral en una racional, que ya hemos estudiado.

Ejemplo 9.18. Calcular $\int \frac{dx}{1+2\operatorname{senh}(x)+3\cosh(x)}$

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{1+2\operatorname{senh}(x)+3\cosh(x)} &= \int \frac{dx}{1+\frac{5}{2}e^x+\frac{1}{2}e^{-x}} = \begin{bmatrix} e^x = t \\ dx = dt/t \end{bmatrix}\\
&=2\int \frac{dt}{5t^2+2t+1}\\
&=\arctan\left(\frac{5\,t+1}{2}\right)\\
&=\arctan\left(\frac{5\,e^x+1}{2}\right).\end{aligned}$$

En algunos casos, utilizar un método similar al que usamos para calcular primitivas de funciones trigonométricas puede simplificar los cálculos. El siguiente método es un ejemplo de ello.

Integrales de la forma $\int \operatorname{senh}(ax)\cosh(bx)$, $\int \operatorname{senh}(ax)\operatorname{senh}(bx)$ o $\int \cosh(ax)\cosh(bx)$

Se resuelven usando las identidades

$$\begin{aligned}\operatorname{senh}(x)\operatorname{senh}(y) &= \frac{1}{2}\left(\cosh(x+y) - \operatorname{senh}(x-y)\right)\\
\cosh(x)\cosh(y) &= \frac{1}{2}\left(\cosh(x+y) + \operatorname{senh}(x-y)\right)\\
\operatorname{senh}(x)\cosh(y) &= \frac{1}{2}\left(\operatorname{senh}(x+y) + \operatorname{senh}(x-y)\right).\end{aligned}$$

Ejemplo 9.19.

$$\int \operatorname{senh}(3x)\cosh(x)\,dx = \frac{1}{2}\int \operatorname{senh}(4x)\,dx + \frac{1}{2}\int \operatorname{senh}(2x)\,dx = -\frac{1}{8}\cosh(4x) - \frac{1}{4}\cosh(2x).$$

9.1.6 Integración de funciones irracionales

Integrales de la forma $\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_1}{q_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_2}{q_2}}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_n}{q_n}}\right)$

Se resuelven utilizando el cambio de variable $y^q = \frac{ax+b}{cx+d}$, donde q es el mínimo común múltiplo de $q_1, q_2, \ldots, q_n$.

Ejemplo 9.20. Calcular $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$

Haciendo el cambio $x = y^6$,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} = \int \frac{6y^5}{y^3+y^2}\,dy = 6\int \frac{y^3}{y+1}\,dy$$
$$=2y^3 - 3y^2 + 6y - 6\log|y+1| = 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6\log\left|\sqrt[6]{x}+1\right|.$$

Integrales de la forma $\int R\left(x, \sqrt{a^2-x^2}\right)$

Se transforman en una integral trigonométrica con el cambio $x = a\,\mathrm{sen}(t)$ o $x = a\cos(t)$. También se puede realizar el cambio $x = a\tanh(t)$ y se transforma en una integral hiperbólica.

Ejemplo 9.21. Cálculo de $\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}\,dx$:

Hacemos el cambio $x = 2\,\mathrm{sen}(t)$, con lo que $dx = 2\cos(t)dt$ y $\sqrt{4-x^2} = \sqrt{4-4\,\mathrm{sen}^2(t)} = 2\cos(t)$. Sustituyendo:

$$\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}\,dx = \int \frac{(2\cos(t))(2\cos(t))}{4\,\mathrm{sen}^2(t)}\,dt = \int \mathrm{cotan}^2(t)\,dt$$
$$= \int (\mathrm{cosec}^2(t) - 1)\,dt = -\mathrm{cotan}(t) - t$$

usando que $\mathrm{cotan}(t) = \frac{\cos(t)}{\mathrm{sen}(t)} = \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}$, se tiene que

$$= -\frac{\sqrt{4-x^2}}{x} - \mathrm{arcsen}\left(\frac{x}{2}\right).$$

Integrales de la forma $\int R\left(x, \sqrt{a^2+x^2}\right)$

Se transforman en una integral trigonométrica usando el cambio $x = a\tan(t)$. También se pueden resolver utilizando el cambio $x = a\ \mathrm{senh}(t)$.

Ejemplo 9.22. Calcular $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$.

Hacemos el cambio $x = \tan(t)$, $dx = \sec^2(t)dt$,

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}} = \int \frac{\sec^2(t)}{\tan(t)\sec(t)}\,dt = \int \frac{dt}{\mathrm{sen}(t)} = -\log\left|\cos\left(\frac{t}{2}\right)\right| + \log\left|\mathrm{sen}\left(\frac{t}{2}\right)\right|.$$

Ejemplo 9.23. Calcular $\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$.

Hacemos el cambio $x = \mathrm{senh}(t)$,

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \int \mathrm{senh}^2(t)\,dt = \frac{1}{2}\int (\cosh(2t)-1)\ dt = \frac{1}{4}\mathrm{senh}(2t) - \frac{t}{2}.$$

Integrales de la forma $\int R\left(x, \sqrt{x^2-a^2}\right)$

Se resuelven utilizando los cambios $x = a\sec(t)$ o $x = a\cosh(t)$.

Ejemplo 9.24. Calcular $\int \sqrt{x^2-1}\,dx$.

$$\int \sqrt{x^2-1}\,dx = \int \tan(t)\frac{\operatorname{sen}(t)}{\cos^2(t)}\,dt = \int \frac{\operatorname{sen}^2(t)}{\cos^3(t)}\,dt,$$

que se resuelve aplicando los métodos ya vistos. También podríamos haber utilizado el cambio $x = \cosh(t)$ y, en ese caso, se tiene que

$$\begin{aligned}\int \sqrt{x^2-1}\,dx &= \int \operatorname{senh}^2(t)\,dt = \int \frac{\cosh(2t)-1}{2}\,dt \\ &= -\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\operatorname{senh}(2t)\end{aligned}$$

usando que $\operatorname{senh}(2t) = 2\operatorname{senh}(t)\cosh(t) = 2\sqrt{\cosh^2(t)-1}\cosh(t)$,

$$= \frac{x\sqrt{x^2-1}}{2} - \frac{\operatorname{arccosh}(x)}{2}.$$

Integrales de la forma $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)$

Se reducen a uno de los casos anteriores completando cuadrados, esto es, escribiendo $ax^2 + bx + c$ de la forma $a(x+\alpha)^2 + \beta$.

Ejemplo 9.25. Calcular $\int \frac{dx}{\sqrt{8x-x^2}}$.
Transformamos el integrando:

$$8x - x^2 = -(x^2-8x+16)+16 = -(x-4)^2+16 = 16\left(1-\left(\frac{x-4}{4}\right)^2\right)$$

y hacemos el cambio de variable $y = (x-4)/4$:

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{8x-x^2}} &= \int \frac{dx}{\sqrt{16\left(1-\left(\frac{x-4}{4}\right)^2\right)}} = \begin{bmatrix} y = (x-4)/4 \\ dy = dx/4 \end{bmatrix} = \\ &= \int \frac{4dy}{4\sqrt{1-y^2}} = \int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \operatorname{arcsen}(y) = \operatorname{arcsen}\left(\frac{x-4}{4}\right).\end{aligned}$$

9.2 Ejercicios

9.2.1 Integrales inmediatas y cambio de variable

Ejercicio 9.1. Calcula las siguientes primitivas

a) $\int 5x^6 dx$
b) $\int x(x+1)(x-2)dx$
c) $\int (2+3x^3)^2 dx$
d) $\int \frac{dx}{\sqrt[n]{x}}$
e) $\int (a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^3 dx$
f) $\int \frac{x^2+1}{x-1}dx$

Ejercicio 9.2. Calcula las siguientes primitivas

a) $\int \frac{\sqrt[3]{1+\log(x)}}{x}dx$
b) $\int \frac{dx}{e^x+1}$
c) $\int x(2x+5)^{10}dx$

9.2.2 Integración por partes

Ejercicio 9.3. Calcula las siguientes primitivas

a) $\int \log(x)dx$
b) $\int \arctan(x)dx$
c) $\int \operatorname{arcsen}(x)dx$
d) $\int x\operatorname{sen}(x)dx$
e) $\int xe^{-x}dx$
f) $\int x^2e^{3x}dx$
g) $\int x\operatorname{sen}(x)\cos(x)dx$

9.2.3 Integración de funciones racionales

Ejercicio 9.4. Calcula las siguientes primitivas

a) $\int \frac{x^2-5x+9}{x^2-5x+6}dx$
b) $\int \frac{5x^3+2}{x^3-5x^2+4x}dx$
c) $\int \frac{dx}{x(x+1)^2}$
d) $\int \frac{dx}{(x^2-4x+3)(x^2+4x+5)}$
e) $\int \frac{dx}{(x+a)(x+b)}$

Ejercicio 9.5. Calcula las siguientes primitivas

a) $\int \frac{dx}{x^3+1}$
b) $\int \frac{dx}{(x+1)^2(x^2+1)^2}$
c) $\int \frac{dx}{(x^4-1)^2}$

9.2.4 Integración de funciones trigonométricas

Ejercicio 9.6. Calcula las siguientes primitivas

a) $\int \cos^3(x)dx$
b) $\int \operatorname{sen}^5(x)dx$
c) $\int \operatorname{sen}^2(x)\cos^3(x)dx$
d) $\int \operatorname{sen}^2(x)\cos^2(x)dx$
e) $\int \cos^6(3x)dx$
f) $\int \frac{\cos^5(x)}{\operatorname{sen}^3(x)}dx$

Ejercicio 9.7. Calcula las siguientes primitivas

a) $\int \frac{\cos(x)}{1+\cos(x)}dx$
b) $\int \frac{1+\tan(x)}{1-\tan(x)}dx$
c) $\int \frac{dx}{1+\cos^2(3x)}$
d) $\int \frac{dx}{3\operatorname{sen}^2(x)+5\cos^2(x)}$
e) $\int \frac{\operatorname{sen}(2x)}{1+\operatorname{sen}^2(x)}dx$

Integrales impropias

10

10.1 Integrales impropias en intervalos acotados

Hasta ahora hemos visto cómo calcular integrales de funciones acotadas en intervalos cerrados y acotados. En esta sección vamos a extender la noción de integral a intervalos de cualquier tipo y a funciones no acotadas. Pensemos por un momento en un caso concreto: la función $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ en $]-1,1[$. Sabemos calcular su integral en cualquier intervalo de la forma $[a,b] \subset]-1,1[$:

$$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arcsen}(b) - \operatorname{arcsen}(a).$$

Si queremos definir la integral en $]-1,1[$, la idea más natural parece tomar límites. Movamos b hacia 1 y a hacia -1. La forma más cómoda de formalizar estos límites es utilizar sucesiones.

Definición 10.1. Sea $f\colon]a,b[\to \mathbb{R}$ una función localmente integrable. Diremos que f es *impropiamente integrable* si para cualesquiera sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ de elementos de $]a,b[$ con $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ y $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ se cumple que existe el límite[1]

$$\lim_{n\to\infty} \int_{a_n}^{b_n} f(x)\, dx.$$

En ese caso, usaremos la notación

$$\lim_{n\to\infty} \int_{a_n}^{b_n} f(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx.$$

La integral impropia satisface propiedades similares a la de la integral ya vista. Sirvan los siguientes resultados como muestra.

Proposición 10.2 (Aditividad respecto del dominio). *Sea f una función localmente integrable en el intervalo $]a,b[$ y sea $c \in]a,b[$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes.*
a) f es impropiamente integrable en $]a,b[$.
b) f es impropiamente integrable en $]a,c[$ y en $]c,b[$.
Además, caso de ser ciertas, se cumple que

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx$$

Proposición 10.3. *Sean f y g funciones impropiamente integrables en $]a,b[$ y sean λ, μ números reales.*

a) La función $\lambda f + \mu g$ es impropiamente integrable y

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g)(x)\, dx = \lambda \int_a^b f(x)\, dx + \mu \int_a^b g(x)\, dx.$$

[1] En esta definición no hemos asumido que el límite es único. Esto se obtiene como consecuencia de que el límite exista para cualesquier pareja de sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$.

b) Si $f(x) \leq g(x)$ para todo x en $]a,b[$, entonces $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.

Sí hay una diferencia en cuanto a la integrabilidad impropia de la función $|f|$. Hay funciones impropiamente integrables cuyo valor absoluto no lo es. El recíproco sí es cierto.

Teorema 10.4 (Test de comparación). *Sea f una función localmente integrable en $]a,b[$ y supongamos que g es una función impropiamente integrable en $]a,b[$ con $|f(x)| \leq g(x)$, para todo $x \in]a,b[$. Entonces f es impropiamente integrable y se cumple que*

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx \right| \leq \int_a^b g(x)\ dx.$$

En particular si f es localmente integrable y $|f|$ es impropiamente integrable, f también es impropiamente integrable.

Ejemplo 10.5. La función $f(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}$ si $x > 0$ y $f(0) = 1$ es impropiamente integrable en $]0,+\infty[$ pero $|f|$ no lo es.

En el caso de funciones continuas la situación es un poco más sencilla. El teorema fundamental del Cálculo nos garantiza que la integral indefinida es una primitiva. Vamos a ver tres casos posibles.

10.2 Integración en intervalos no acotados

Supongamos que tenemos una función definida en un intervalo no acotado, $f\colon [a,+\infty[\to \mathbb{R}$, que es continua en todo $[a,+\infty[$. Podemos buscar una primitiva de f, llamémosla F, y estudiar su comportamiento en $+\infty$: si la función F tiene límite en $+\infty$, diremos que existe la integral impropia de f en $[a,+\infty[$, y dicha integral valdrá:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\, dx = \left(\lim_{x\to+\infty} F(x) \right) - F(a),$$

es decir, la integral vale "$F(+\infty) - F(a)$", considerando $F(+\infty) = \lim_{x\to+\infty} F(x)$. Si el límite de la primitiva es $+\infty$ o $-\infty$, diremos que la integral vale $+\infty$ o $-\infty$.

Una vez que hemos definido una integral para este tipo de funciones, podemos generalizar el área bajo una curva, la longitud de un arco de curva, la superficie y el volumen de un sólido de revolución,etc. siendo todas fórmulas perfectamente válidas.

El caso de una función definida en un intervalo de la forma $]-\infty, b]$ es completamente análogo. Además, si tenemos una función definida en todo $\mathbb{R}$, podemos dividir la integral como:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\, dx + \int_c^{+\infty} f(x)\, dx$$

para cualquier $c \in \mathbb{R}$. Si la suma vale "$\infty - \infty$", *no podemos calcular la integral.*

Ejemplo 10.6. Calcular el área comprendida bajo la curva $y = 1/x^2$ en el intervalo $[1,+\infty[$. Viendo el área bajo la curva como una integral se tiene que

$$A = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \left[\frac{-1}{x} \right]_1^{+\infty} = \left(\lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{x} \right) - (-1) = 1.$$

10.3 Algunos casos particulares

10.3.1 Integración de funciones continuas en intervalos abiertos

Se trata de calcular integrales de funciones definidas en un intervalo abierto en uno de sus extremos, y que tienen una asíntota vertical en dicho extremo. Supongamos que el intervalo es de la forma $]a,b]$; el caso de un intervalo $[a,b[$ es completamente análogo.

Sea pues $f\colon]a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua a la que queremos calcular su integral, y sea F una primitiva suya. Estudiamos entonces el límite por la derecha de la primitiva en a, y si existe podemos calcular la integral de f:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - \left(\lim_{x\to a^+} F(x)\right)$$

Nota: Si el límite de la primitiva es $+\infty$ o $-\infty$, diremos que la integral vale $+\infty$ o $-\infty$. Si tenemos una función continua en un intervalo abierto $f\colon]a,b[\to \mathbb{R}$, su integral valdrá

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left(\lim_{x\to b^-} F(x)\right) - \left(\lim_{x\to a^+} F(x)\right)$$

Otra vez, si la suma vale "$\infty - \infty$"', *no podemos calcular la integral.*

Al igual que antes, podemos aplicar estos resultados al cálculo de longitudes, áreas y volúmenes.

Ejemplo 10.7. Calcular el área bajo la curva $y = 1/\sqrt{x}$ en $]0,1]$.
Aplicamos la fórmula dada, y tenemos

$$A = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \left[2\sqrt{x}\right]_0^1 = 2 - \left(\lim_{x\to 0^+} 2\sqrt{x}\right) = 2.$$

10.3.2 Integración de funciones continuas en un intervalo salvo un punto interior

Supongamos que tenemos una función $f\colon [a,b]\setminus\{c\} \to \mathbb{R}$ que es continua en $[a,b]\setminus\{c\}$ y que tiene una asíntota vertical en $x = c$. Entonces, si queremos calcular la integral de f entre a y b, tenemos que dividir dicha integral en dos trozos: la integral en $[a,c[$ y la integral en $]c,b]$. Como estos dos casos quedan contemplados en los supuestos anteriores, podemos calcular la integral de f entre a y b como

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

El único problema que se puede presentar es, de nuevo, que la suma valga "$\infty - \infty$", en cuyo caso *no podemos calcular la integral.*

Ejemplo 10.8. Calcular $\int_{-1}^1 \log\left(x^2\right)\,dx$.
La función que nos dan es $f\colon [-1,1]\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \log(x^2)$. Esta función tiene una asíntota vertical en $x = 0$, por lo que para calcular su integral dividimos el intervalo en dos partes, $[-1,0[$ y $]0,1]$. Cada una de las dos integrales vale:

$$\int_{-1}^0 \log\left(x^2\right)\,dx = \left[x\log\left(x^2\right) - 2x\right]_{-1}^0 = -2$$
$$\int_0^1 \log\left(x^2\right)\,dx = \left[x\log\left(x^2\right) - 2x\right]_0^1 = -2,$$

con lo que se tiene que $\int_{-1}^1 \log\left(x^2\right)\,dx = -2-2 = -4$.

Ejemplo 10.9. Calcular $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2}\,dx$.

Si hacemos

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\, dx = \left[\frac{-1}{x}\right]_{-1}^{1} = -1 - (+1) = -2\omega\omega\omega\omega\omega$$

Pero la función que estamos integrando es positiva, ¡no tiene sentido que tenga integral negativa! ¿Qué ha pasado? Como la función $1/x^2$ tiene una asíntota vertical en $x = 0$, tenemos que descomponer la integral como

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\, dx = \int_{-1}^{0} \frac{1}{x^2}\, dx + \int_{0}^{1} \frac{1}{x^2}\, dx,$$

pero

$$\int_{-1}^{0} \frac{1}{x^2}\, dx = \left[\frac{-1}{x}\right]_{-1}^{0} = \lim_{x\to 0^-} (-1/x) - (+1) = +\infty$$

$$\int_{0}^{1} \frac{1}{x^2}\, dx = \left[\frac{-1}{x}\right]_{0}^{1} = -1 - \lim_{x\to 0^+} (-1/x) = +\infty,$$

y por tanto $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\, dx = +\infty$.

10.4 Ejercicios

Ejercicio 10.1. Prueba que existen las siguientes integrales y que tienen el valor que se indica en cada caso:

a) $\int_0^1 \frac{dx}{1+e^x} = 1 + \log\left(\frac{2}{1+e}\right)$

b) $\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{20+8x-x^2}} = \operatorname{arcsen}\left(\frac{2}{3}\right) - \operatorname{arcsen}\left(\frac{7}{12}\right)$

c) $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} = \frac{\pi}{2}$

d) $\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^6}} dx = \frac{\pi}{6}$

e) $\int_1^{+\infty} \frac{x-1}{x^3-3x^2+x+5} dx = \frac{3\pi+\log(2)}{10}$

f) $\int_0^{+\infty} \frac{x}{3+x^4} dx = \frac{\sqrt{3}\pi}{12}$

g) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{e^x+e^{-x}} = \frac{\pi}{2}$

Ejercicio 10.2. Prueba que existen las siguientes integrales y que tienen el valor que se indica en cada caso:

a) $\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}dx = \frac{\pi}{2}$

b) $\int_{-\pi}^{\pi} (1+\cos(x))^2\, dx = 3\pi$

c) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} |\operatorname{sen}(x)|^3 dx = \frac{4}{3}$

d) $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2(y)\cos^2(y)\, dy = \frac{\pi}{16}$

Aplicaciones de la integral

11

11.1 Cálculo de áreas

El área entre dos funciones $f, g \colon [a,b] \to \mathbb{R}$ se define como

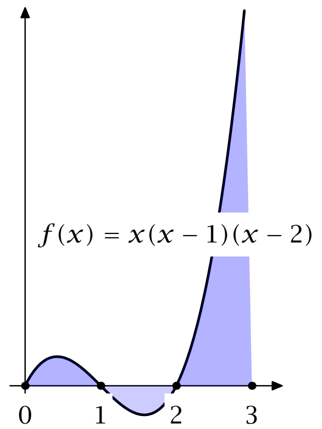
$$\text{Área} = \int_a^b |\, f(x) - g(x) \,|\, dx.$$

Hasta ahora no hemos visto ningún metodo que nos permita calcular primitivas en las que aparecen valores absolutos. Por eso, antes de comenzar a integrar, es necesario estudiar cuánto vale $|\, f - g \,|$ o, dicho de otra forma, averiguar cuál de las dos funciones es la mayor.

Ejemplo 11.1. Calcular el área entre la función $f(x) = x(x-1)(x-2)$ y el eje OX en el intervalo $[0,3]$.

Dividimos en intervalos donde sepamos el signo de la función e integramos:

$$\begin{aligned}\int_0^3 |\, f(x) \,|\, dx &= \int_0^1 |\, f(x) \,|\, dx + \int_1^2 |\, f(x) \,|\, dx + \int_2^3 |\, f(x) \,|\, dx \\ &= \int_0^1 x(x-1)(x-2)\, dx - \int_1^2 x(x-1)(x-2)\, dx \\ &\quad + \int_2^3 x(x-1)(x-2)\, dx \\ &= \frac{1}{4} - \frac{2}{15} + \frac{19}{30} = \frac{3}{4}. \triangleleft\end{aligned}$$



11.2 Longitudes de curvas

Sea f una función derivable con derivada continua en el intervalo $[a,b]$. La longitud del arco de la curva $y = f(x)$ entre $x = a$ y $x = b$ es

$$\text{longitud} = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx.$$

Ejemplo 11.2. Calcular la longitud de una circunferencia de radio 1.

La ecuación de una circunferencia de radio 1 es $x^2 + y^2 = 1$. Podemos despejar y en la parte positiva: $y = f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ con $x \in [-1,1]$. Así, la longitud de *media* circunferencia será:

$$l = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx = \cdots = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \Big[\operatorname{arcsen}(x)\Big]_{-1}^{1} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi. \triangleleft$$

11.3 Área de sólidos de revolución

Sea $f \colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función derivable con derivada continua en $[a,b]$. Entonces el área de la superficie generada haciendo girar alrededor del eje OX el arco de curva $y = f(x)$ en $[a,b]$ es

$$\text{Superficie} = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx.$$

Ejemplo 11.3. Calcular la superficie de una esfera de radio 1.
Podemos generar una esfera girando respecto del eje OX la curva del ejemplo anterior

$$y = f(x) = \sqrt{1-x^2} \qquad x \in [-1,1]$$

De esta forma, la superficie será:

$$S = 2\pi \int_{-1}^{1} f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx = \cdots = 2\pi \int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = 2\pi \int_{-1}^{1} dx = 2\pi \cdot 2 = 4\pi. \triangleleft$$

11.4 Volúmenes de sólidos de revolución

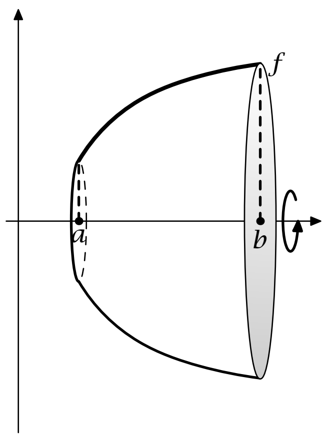


Figura 11.1 Volumen al girar respecto al eje OX

Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua. El volumen del sólido generado al girar el área bajo la curva $y = f(x)$ respecto del eje OX es

$$V_{OX} = \pi \int_a^b f(x)^2\,dx$$

y el volumen del sólido generado al girar dicha área respecto al eje OY es

$$V_{OY} = 2\pi \int_a^b x f(x)\,dx.$$

En este segundo caso, la función f tiene que ser positiva.

Ejemplo 11.4. Calcular el volumen de una esfera de radio 1.
Podemos generar una esfera rotando respecto del eje OX el área bajo la curva $y = f(x) = \sqrt{1-x^2} \quad x \in [-1,1]$ Con ello, el volumen será

$$\begin{aligned} V =& \pi \int_{-1}^{1} f(x)^2\,dx = \pi \int_{-1}^{1} (1-x^2)\,dx = \pi \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^{1} \\ =& \pi \left((1-\frac{1}{3}) - (-1+\frac{1}{3}) \right) = \frac{4\pi}{3}. \triangleleft \end{aligned}$$

11.5 Algunas funciones definidas mediante integrales

11.5.1 La función gamma

La función gamma $\Gamma\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ está definida como

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt.$$

Esta función, debida a Euler, tiene interés como posible generalización del factorial para números reales cualesquiera. Se puede demostrar que

a) $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, para cualquier $x \in \mathbb{R}^+$.
b) $\Gamma(x+n) = (x+n-1)(x+n-2)\ldots(x+1)\Gamma(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
c) $\Gamma(n) = (n-1)\omega$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

11.5.2 La función beta

La función $\beta\colon \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ está definida como $\beta(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$. Está relacionada con la función gamma mediante la igualdad $\beta(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$.

11.6 Ejercicios

Ejercicio 11.1. Prueba que existen las siguientes integrales y que tienen el valor que se indica en cada caso:

a) $\int_0^1 \frac{dx}{1+e^x} = 1 + \log\left(\frac{2}{1+e}\right)$

b) $\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{20+8x-x^2}} = \operatorname{arcsen}\left(\frac{2}{3}\right) - \operatorname{arcsen}\left(\frac{7}{12}\right)$

c) $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} = \frac{\pi}{2}$

d) $\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^6}}dx = \frac{\pi}{6}$

e) $\int_1^{+\infty} \frac{x-1}{x^3-3x^2+x+5}dx = \frac{3\pi+\log(2)}{10}$

f) $\int_0^{+\infty} \frac{x}{3+x^4}dx = \frac{\sqrt{3}\pi}{12}$

g) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{e^x+e^{-x}} = \frac{\pi}{2}$

Ejercicio 11.2. Prueba que existen las siguientes integrales y que tienen el valor que se indica en cada caso:

a) $\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}dx = \frac{\pi}{2}$

b) $\int_{-\pi}^{\pi} (1+\cos(x))^2\,dx = 3\pi$

c) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} |\operatorname{sen}(x)|^3 dx = \frac{4}{3}$

d) $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2(y)\cos^2(y)\,dy = \frac{\pi}{16}$

Métodos de aproximación numérica de integrales

12

12.1 Introducción

El cálculo de la integral de una función en un intervalo $[a,b]$ a través de la regla de Barrow puede ser en algunos casos no sólo complicado, sino prácticamente imposible por varias razones, principalmente dos.

La primera razón es que nos sea imposible calcular una primitiva elemental de la función a integrar, este caso es muy usual. Por ejemplo la función$f(x) = (1+x^2)^{1/3}$ no somos capaces de calcularle una primitiva que se pueda expresar con funciones elementales. Otro ejemplo, muy usual éste, es la función de densidad $f(x) = e^{-x^2}$ que tantas veces aparece.

La segunda razón para no poder aplicar la regla de Barrow es que no conozcamos la expresión de la función que queremos integrar o simplemente que no conozcamos el valor de la función en todos los puntos del intervalo donde está definida (le llamaremos $[a,b]$) sino solamente en algunos puntos de dicho intervalo

Por todo lo anterior, a veces hay que recurrir a métodos de aproximación para calcular el valor de la integral de una función en un intervalo. Ya que la propia definición de la integral viene dada por un límite (de sumas superiores y sumas inferiores), una aproximación a dicho límite podría considerarse un primer método de aproximación numérica de la integral.

Los métodos de aproximación del cálculo de la integral que veremos se llaman *métodos o reglas de integración numérica* y consisten, básicamente, en dada $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ continua, aproximamos dicha función por un polinomio adecuado. Así, la integral de dicho polinomio será una aproximación de la integral de f. Estos métodos son los llamados *métodos simples*, que, si bien son muy sencillos de enunciar, la aproximación que dan deja mucho que desear en muchos casos. Un análisis posterior nos dará los *métodos compuestos* que producen una aproximación más buena. Primero veremos los simples.

12.2 Métodos simples

12.2.1 Método del trapecio simple

El método del trapecio simple consiste en considerar como polinomio de aproximación de la función f en el intervalo $[a,b]$ el polinomio de interpolación de Lagrange de la función f en $x_0 = a$ y $x_1 = b$ y se toma $\int_a^b P_1(x)dx$ como aproximación de $\int_a^b f(x)dx$. El polinomio de interpolación de Lagrange es

$$P_1(x) = f(a)\frac{x-b}{a-b} + f(b)\frac{x-a}{b-a},$$

lo que nos proporciona

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b P_1(x)dx = \frac{b-a}{2}(f(a)+f(b)).$$

El nombre de método o regla del trapecio está claro si observamos en el siguiente dibujo que aproximación estamos dando de la integral: Si tenemos una función $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ y suponemos que es positiva, la aproximación dada por el método del trapecio es el área del trapecio formado por los puntos $(a,0)$, $(b,0)$, $(b,f(b))$ y $(a,f(a))$.

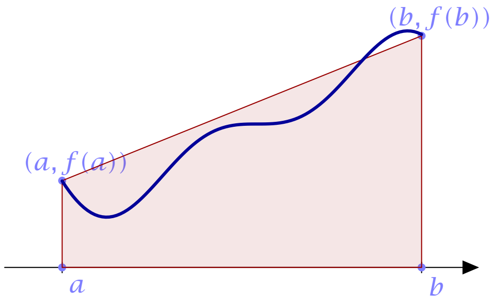


Figura 12.1 Método del trapecio simple

Esta aproximación solo es exacta cuando la función f es un polinomio de grado 1. En cualquier caso tenemos que el error que se comete al aplicar esta regla viene dado por

$$\int_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{2}(f(a)+f(b)) = -\frac{1}{12}(b-a)^3 f''(\xi)$$

para conveniente $\xi \in]a,b[$.

12.2.2 Regla del punto medio simple

Para construir esta aproximación de la integral de la función f en el intervalo $[a,b]$ se considera P_0 el polinomio de aproximación de Lagrange de la función en el punto $x_0 = \frac{a+b}{2}$ y se toma $\int_a^b P_0(x)dx$ como aproximación de $\int_a^b f(x)dx$. Como $P_0(x) = f(\frac{a+b}{2})$, entonces la aproximación queda

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b P_0(x)dx = (b-a)f(\frac{a+b}{2})$$

que, si f es positiva en el intervalo $[a,b]$, nos da como aproximación del área que queda entre el eje de abscisas y la gráfica de f entre a y b, el área del rectángulo de base $b-a$ (la longitud de intervalo $[a,b]$) y altura $f(\frac{a+b}{2})$.

Claramente esta fórmula es exacta cuando la función f es constante en el intervalo $[a,b]$, y, en general, el error cometido al tomar esta aproximación es

$$\int_a^b f(x)dx - (b-a)f(\frac{a+b}{2}) = \frac{1}{24}(b-a)^3 f''(\xi),$$

para algún $\xi \in]a,b[$.

12.2.3 Regla de Simpson simple

En este caso se toma como aproximación de la función P_2, el polinomio de interpolación de Lagrange de la función f en los puntos $x_0 = a$, $x_1 = \frac{a+b}{2}$ y $x_2 = b$. Como aproximación de $\int_a^b f(x)dx$ se toma $\int_a^b P_2(x)dx$. Así el método de Simpson simple nos da

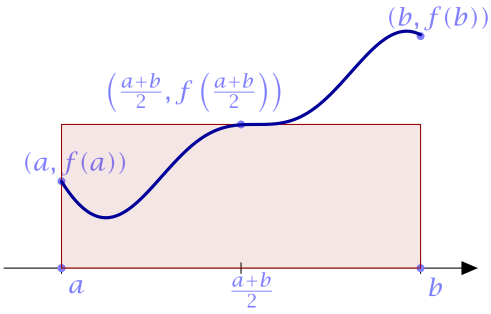


Figura 12.2 Método del punto medio simple

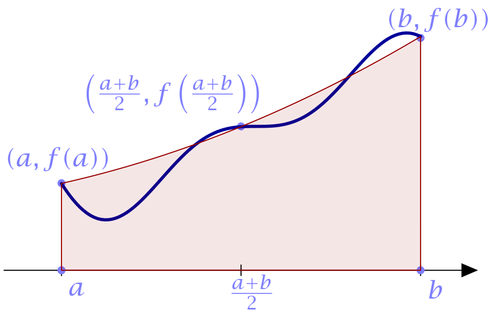


Figura 12.3 Regla de Simpson simple

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{(b-a)}{6}\left(f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right).$$

Esté método es exacto cuando la función f es un polinomio de grado menor o igual que 3. El error cometido al sustituir el valor exacto de la integral por la aproximación que nos da la regla de Simpson vale

$$\int_a^b f(x)dx - \frac{(b-a)}{6}\left(f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right) = -\frac{1}{90\cdot 2^6}(b-a)^5 f^{4)}(\xi),$$

para algún $\xi \in]a,b[$.

Está claro que, al ser P_2 una mejor aproximación, en general, que P_0 y P_1, la regla de Simpson es mejor aproximación a la integral que la regla del trapecio y la del punto medio. La siguiente tabla muestra las aproximaciones dadas por las tres reglas que hemos presentado.

ahora viene una tabla que tengo que hacer.

En vista de las fórmulas de los errores cometidos al tomar como aproximación cualquiera de las fórmulas anteriores, estos errores dependen mucho de la longitud del intervalo $[a,b]$. En todos las fórmulas de los errores aparece un término $(b-a)$ elevado a una potencia. Está claro que si $(b-a)$ es muy grande la aproximación no es muy buena. Este hecho además responde a la intuición: no podemos pretender que si el intervalo de definición de la función es muy grande al tomarnos como aproximación de la función un polinomio de grado 0 (e incluso 1 o 2) obtengamos una muy buena aproximación.

Si en el ejemplo de la tabla anterior aumentamos la longitud del intervalo veamos qué ocurre:

Otra tabla con el mismo ejemplo con un intervalo más grande y comentar los errores que se cometen ahora.

12.3 Métodos de aproximación compuestos

Una forma de resolver este problema consiste en dividir el intervalo $[a,b]$ en n subintervalos de idéntica longitud y aplicar un método de aproximación simple en cada uno de los subintervalos obtenidos y después sumar las aproximaciones obtenidas. La aditividad de la integral respecto al intervalo nos garantiza que la suma obtenida es una aproximación de la integral de la función en el intervalo $[a,b]$. Estos métodos de aproximación se llaman métodos de aproximación compuesta y vamos a comentar brevemente los tres correspondientes a los métodos de aproximación simple que acabamos de estudiar.

Lo primero que tenemos que hacer, en los tres métodos, es dividir el intervalo en n subintervalos de igual longitud. Para tal fin consideramos los puntos

$$x_k = a + k\frac{b-a}{n}, \quad k = 0, 1, \ldots n, \tag{12.1}$$

donde n es un número natural. Estos puntos x_k, para $k = 0, 1, \ldots, n$ reciben el nombre de nodos. Si ahora aplicamos cada uno de los métodos de aproximación simples a la función en cada uno de los intervalos $[x_k, x_{k+1}]$ obtenemos en cada caso las siguientes fórmulas:

Método del trapecio compuesto

Sean $x_0, x_1, \ldots, x_n$ los nodos dados por (12.1). La aproximación de la integral $\int_a^b f(x)dx$ utilizando el método del trapecio compuesto con los subintervalos dados por los anteriores nodos nos proporciona

$$T_n = \frac{(b-a)}{2n}\left(f(a) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(b)\right),$$

y el error cometido queda estimado por la fórmula

$$\int_a^b f(x)dx - T_n = -\frac{1}{12}\frac{(b-a)^3}{n^2} f''(\xi)$$

donde ξ es un número del intervalo $]a,b[$.

Método del punto medio compuesto

Considerando los mismos nodos que en el apartado anterior la regla del punto medio compuesto nos da una aproximación

$$M_n = \frac{(b-a)}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + \frac{(2i+1)}{2}\frac{(b-a)}{n}\right).$$

En este caso la expresión del error nos queda

$$\int_a^b f(x)dx - M_n = \frac{(b-a)^3}{24n^2} f''(\xi)$$

para $\xi \in]a,b[$.

Método de Simpson compuesto

En este caso necesitamos que el número n sea par. Usando el método de Simpson en cada intervalo $[x_k, x_{k+1}]$ obtenemos la aproximación

$$S_n = \frac{(b-a)}{3n}\left[(f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)) + (f(x_2)+4f(x_3)+f(x_4)) + \cdots \right.$$
$$\left. \cdots + (f(x_{n-2})+4f(x_{n-1})+f(x_n))\right].$$

Haciendo un fácil cambio de variable obtenemos que la anterior expresión coincide con

$$S_n = \frac{(b-a)}{3n}\sum_{i=1}^{n/2}\left[f(x_{2i-2})+4f(x_{2i-1})+f(x_{2i})\right]$$

y el error que se comete viene dado por

$$\int_a^b f(x)dx - S_n = -\frac{1}{180}\frac{(b-a)^5}{n^4}f^{4)}(\xi)$$

para un $\xi \in]a,b[$.

El error en los tres métodos depende inversamente del número de nodos n. Pero mientras que en el método del trapecio y en del punto medio el error es inversamente proporcional a n^2 en el método de Simpson es inversamente proporcional a n^4. Está claro por tanto que el método de Simpson es más exacto que los otros dos cuando aumentamos el número de nodos.

Ejemplo 12.1. Consideremos la integral de la función $f(x) = e^x \operatorname{sen}(x)$ en el intervalo $[0,1]$. A esta función se le puede calcular una primitiva fácilmente integrando por partes (¡hágase!) y evaluando en 0 y en 1 queda

$$\int_0^1 e^x \operatorname{sen}(x)dx = 0.90933067363148.$$

Trapecio	Aproximación	Error
n=20	0.9670887643	5.78×10^{-2}
n=40	0.9380661609	2.87×10^{-2}
n=100	0.9207904171	1.15×10^{-2}
Punto medio	Aproximación	Error
n=20	0.9090435575	2.87×10^{-4}
n=40	0.9092588997	7.18×10^{-5}
n=100	0.9093191900	1.15×10^{-5}
Simpson	Aproximación	Error
n=20	0.9093305474	1.26×10^{-7}
n=40	0.9093306657	7.89×10^{-9}
n=100	0.9093306734	2.02×10^{-10}

Tabla 12.1 Fórmulas de integración compuesta

Sucesiones y series

Sucesiones de números reales

13

El concepto de límite es básico en Cálculo y, de entre las diversas posibilidades, hemos elegido que haga su aparición asociado a sucesiones de números reales. La idea intuitiva de sucesión es sencilla: una sucesión es una lista ordenada.

13.1 Definición y propiedades

Definición 13.1. Una *sucesión* de números reales es una aplicación del conjunto de los números naturales en el conjunto de los números reales, esto es,

$$\begin{aligned} \mathbb{N} &\to \mathbb{R}, \\ n &\mapsto x_n. \end{aligned}$$

Llamamos *término general* a x_n y, usualmente, no mencionaremos la función sino sólo la imagen de la función. Dicho de otra manera, hablaremos de sucesión con término general x_n y la notaremos $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ o $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Ejemplo 13.2. Hay dos formas usuales de definir una sucesión: mediante una fórmula general que nos permita obtener todos los términos de la sucesión o, por recurrencia, o sea obtenemos cada término en función de los anteriores. Por ejemplo, la sucesión $\left\{\frac{1}{2n-1}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ es la sucesión 1, 3, 5, 7,... Como puedes ver, sabemos todos los términos de la sucesión. El que ocupa el lugar 53 es $\frac{1}{105}$. En cambio, la sucesión definida como $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ y $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$ conocida como sucesión de Fibonacci está definida por recurrencia. Para calcular un término tenemos que conocer previamente el valor de los dos anteriores. No importa. Puesto que sabemos los dos primeros, podemos calcular el tercero y así sucesivamente: $0, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$

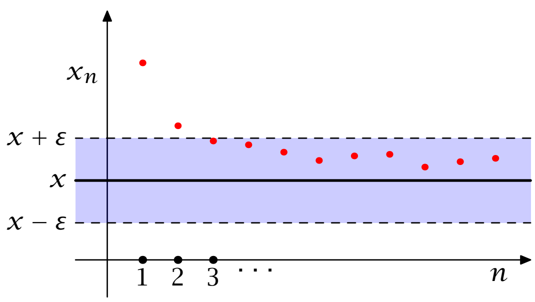


Figura 13.1 Límite de una sucesión

Definición 13.3. Diremos que la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es *convergente* si existe $x \in \mathbb{R}$ verificando que para cada $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - x| < \varepsilon$, para cualquier $n \geq n_0$. En ese caso escribiremos que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ o $\{x_n\} \to x$.

Se puede comprobar fácilmente que

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \text{ si, y sólo si, } \lim_{n\to\infty} |x_n - x| = 0.$$

Ejemplo 13.4.

a) La sucesión constantes son convergentes y su límite es dicha constante.

b) La sucesión $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente a cero.

c) La sucesión $\{n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no es convergente.

d) La sucesión $\{(-1)^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no es convergente.

13.1.1 Sucesiones y acotación

Definición 13.5.

a) La sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ está *acotada superiormente* (respectivamente inferiormente) si existe $M\in\mathbb{R}$ verificando que $x_n \le M$ para todo $n\in\mathbb{N}$ (respectivamente $x_n \ge M$).

b) La sucesión está *acotada* si lo está superior e inferiormente o, lo que es lo mismo, si existe $M\in\mathbb{R}$ tal que $|x_n| \le M$, para cualquier natural n.

Proposición 13.6. *Toda sucesión convergente está acotada.*

Demostración. Aplicamos la definición de convergencia para $\varepsilon = 1$. Entonces existe un natural n_0 tal que $|x_n - x| < 1$ para $n \ge n_0$. En particular, el conjunto $\{x_n \colon n \ge n_0\}$ está acotado superiormente por $x+1$ e inferiormente por $x-1$. El resto de los términos de la sucesión también está acotado por ser un conjunto finito. Por tanto, la unión de ambos está acotado. □

Observación 13.7. El recíproco no es cierto. La sucesión $\{(-1)^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada pero no es convergente.

13.1.2 Álgebra de límites

Después de definir el límite de una sucesión, los siguientes resultados relacionan su comportamiento y las operaciones usuales de números reales. En primer lugar, comenzamos con la suma y el producto.

Proposición 13.8. *Sean $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ dos sucesiones convergentes. Entonces*

a) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n + \lim\limits_{n\to\infty} y_n$,

b) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \left(\lim\limits_{n\to\infty} x_n\right)\cdot\left(\lim\limits_{n\to\infty} y_n\right)$,

c) si $\lim\limits_{n\to\infty} y_n \neq 0$, *se tiene que* $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{\lim_{n\to\infty} x_n}{\lim_{n\to\infty} y_n}$.

Proposición 13.9. *Sea $\{x_n\}$ una sucesión convergente a cero e $\{y_n\}$ una sucesión acotada. Entonces $\{x_n y_n\}$ es convergente a cero.*

Ejemplo 13.10. Vamos a calcular $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\log\left(3n^4-2n+7\right)}{\log\left(2n^2+2n-1\right)}$.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{\log(3n^4-2n+7)}{\log(2n^2+2n-1)} &= \lim_{n\to\infty}\frac{\log\left(n^4(3-\frac{2}{n^3}+\frac{7}{n^4})\right)}{\log\left(n^2(2+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2})\right)}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{\log(n^4)+\log\left(3-\frac{2}{n^3}+\frac{7}{n^4}\right)}{\log(n^2)+\log\left(2+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}\right)}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{4\log(n)+\log\left(3-\frac{2}{n^3}+\frac{7}{n^4}\right)}{2\log(n)+\log\left(2+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}\right)}
\end{aligned}$$

dividimos por $\log(n)$ numerador y denominador

$$= \frac{4}{2} = 2.$$

13.1.3 Convergencia y orden

En esta sección vamos a hacer relacionar convergencia y orden. El primer resultado nos dice que las desigualdades entre los términos de dos sucesiones se trasladan a sus respectivos límites. De hecho, no hace falta que todos los términos verifican la desigualdad. Es suficiente con que, por ejemplo, para los términos pares o los impares tengamos la desigualdad.

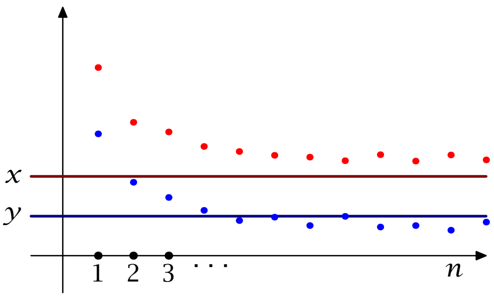


Figura 13.2 El orden se conserva al tomar límites

Proposición 13.11. *Sean $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ dos sucesiones convergentes. Supongamos que el conjunto $\{n \in \mathbb{N}\colon x_n \le y_n\}$ es infinito. Entonces $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \le \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.*

Proposición 13.12 (Regla del sandwich). *Sean $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ y $\{z_n\}$ sucesiones de números reales verificando que*

a) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n$ *y que*

b) $x_n \le y_n \le z_n$, *para cualquier n natural.*

Entonces $\{y_n\}$ es convergente y $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n$.

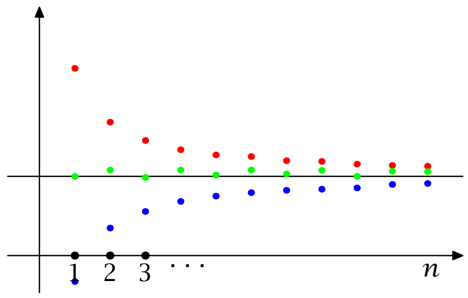


Figura 13.3 Límites y sucesiones encajadas

Ejemplo 13.13. Vamos a calcular el límite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2\sqrt{n}} + \frac{2}{n^2\sqrt{n}} + \cdots + \frac{n}{n^2\sqrt{n}}.$$

Usando que

$$\frac{1}{n^2\sqrt{n}} \le \frac{m}{n^2\sqrt{n}} \le \frac{n}{n^2\sqrt{n}}$$

para cualquier natural m entre 1 y n, podemos acotar superior e inferiormente la sucesión:

$$n\frac{1}{n^2\sqrt{n}} \le \frac{1}{n^2\sqrt{n}} + \frac{2}{n^2\sqrt{n}} + \cdots + \frac{n}{n^2\sqrt{n}} \le n\frac{n}{n^2\sqrt{n}}, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Como nuestra sucesión está encajada entre dos sucesiones que tienden a cero, se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2\sqrt{n}} + \frac{2}{n^2\sqrt{n}} + \cdots + \frac{n}{n^2\sqrt{n}} = 0.$$

13.2 Sucesiones parciales

Si una sucesión es una “lista” de números, podemos construir una lista nueva escogiendo algunos de estos, por ejemplo los que ocupan un lugar par o impar. A este tipo de sucesiones las llamaremos parciales de la sucesión original.

Definición 13.14. Sea $\{x_n\}$ una sucesión de números reales. Diremos que $\{y_n\}$ es una *sucesión parcial* de $\{x_n\}$ si existe una aplicación estrictamente creciente $\sigma\colon\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $y_n = x_{\sigma(n)}$ para cualquier natural n.

Ejemplo 13.15.

a) El primer ejemplo de sucesión parcial de una sucesión dada es simple: eliminemos una cantidad finita de términos al inicio de la sucesión. Por ejemplo, eliminar los tres primeros términos se consigue con la aplicación $\sigma(n) = n + 3$. La sucesión $\{x_{n+3}\}_{n\in\mathbb{N}}$ es lo que se llama una *cola* de la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.
En general, si p es un número natural, las sucesión parcial $\{x_{n+p}\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una *cola* de la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. La convergencia de una sucesión y de sus colas es equivalente: la sucesión converge si, y sólo si, lo hacen todas o alguna de sus colas.

b) Quedarnos sólo con los términos que ocupan una posición par o impar consiste en considerar las parciales $\{x_{2n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ o $\{x_{2n-1}\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Proposición 13.16. *Sea $\{x_n\}$ una sucesión de números reales convergente. Entonces cualquier parcial es convergente y con el mismo límite.*

Este resultado se suele usar para demostrar que una sucesión *no* es convergente: si existe alguna parcial no convergente o existen parciales distintas convergentes a límites distintos, la sucesión original no es convergente.

Ejemplo 13.17. La sucesión $\{(-1)^n\}$ no es convergente puesto que la parcial de los pares converge a 1 mientras que la de los impares lo hace a -1.

13.3 Monotonía

La definición de monotonía para funciones cualesquiera se puede enunciar para sucesiones.

Definición 13.18. Una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es *creciente* si cumple que $x_n \le x_{n+1}$ para todo natural n. Dicho de otra forma, cuando avanzamos en la lista los términos son mayores:

$$n \le m \implies x_n \le x_m.$$

Análogamente, diremos que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es *decreciente* si cumple que $x_n \ge x_{n+1}$ para todo natural n o, lo que es lo mismo, $n \le m \implies x_n \ge x_m$.

Evidentemente no todas las sucesiones son monótonas al igual que no todas las funciones son monótonas. Por ejemplo, la sucesión $\{\cos(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ no es monótona ni tampoco lo es la sucesión $\{(-1)^n\}$.

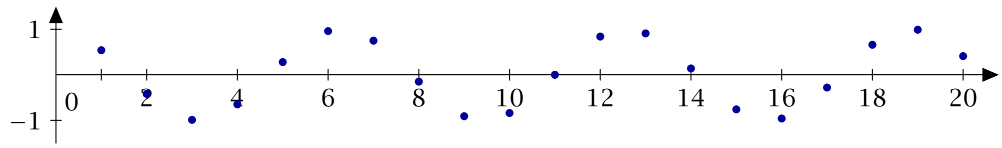


Figura 13.4 La sucesión $\{\cos(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ no es monótona

Eso sí, de cualquier sucesión siempre podemos elegir términos cada vez mayores o cada vez menores. En otras palabras, siempre podemos elegir una sucesión parcial monótona.

Proposición 13.19. *Toda sucesión tiene una parcial monótona.*

¿Cuál es el interés de las sucesiones monótonas? Son más fáciles de estudiar. Por ejemplo, la convergencia de las sucesiones monótonas se reduce al estudio de su acotación.

Proposición 13.20. *Una sucesión monótona es convergente si, y sólo si, está acotada. De hecho, si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión creciente y acotada se tiene que*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sup\{x_n \colon n \in \mathbb{N}\}.$$

El hecho de que las sucesiones monótonas y acotadas sean convergentes nos permite demostrar que una sucesión es convergente sin, teóricamente, conocer su límite.

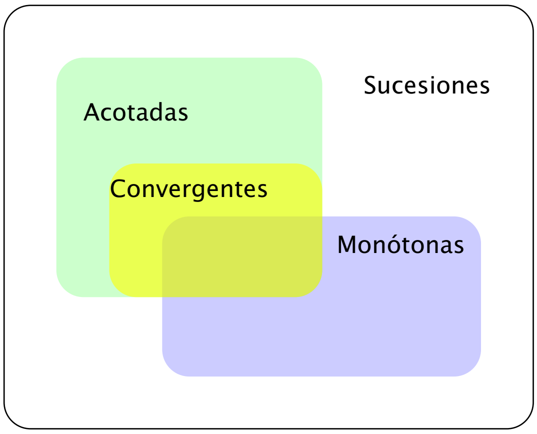


Figura 13.5 Distintos tipos de sucesiones

Ejemplo 13.21. Vamos a estudiar la convergencia de la sucesión

$$x_1 = 1,\ x_{n+1} = \sqrt{x_n + 1},\ \forall n \geq 1.$$

Para demostrar que esta sucesión es convergente vamos a comprobar que es una sucesión monótona y acotada.

a) Observa que $x_2 = \sqrt{2} > x_1 = 1$. Vamos a demostrar por inducción que la sucesión es creciente.

i) El primer paso ya lo tenemos dado: $x_2 = \sqrt{2} > x_1 = 1$.

ii) Si ahora suponemos que $x_n < x_{n+1}$, veamos que $x_{n+2} > x_{n+1}$:

$$x_{n+2} = \sqrt{x_{n+1} + 1} > \sqrt{x_n + 1} = x_{n+1}.$$

Luego la sucesión es monótona creciente.

b) Veamos que también está mayorada, concretamente que $x_n \leq 2\ ,\ \forall n \in \mathbb{N}$. De nuevo lo comprobamos por inducción.

i) Es inmediato para $n = 1$.

ii) Si $x_n \leq 2$, veamos que para x_{n+1} también se verifica:

$$x_{n+1} = \sqrt{x_n + 1} \leq \sqrt{2+1} = \sqrt{3} \leq 2.$$

Por tanto, existe $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ y lo calculamos haciendo uso de la fórmula de recurrencia. Tomando límites

$$x_{n+1}^2 = x_n + 1 \implies x^2 - x - 1 = 0 \implies x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Como $\{x_n\}$ es creciente y el primer término es 1, la única posibilidad que cabe es que $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

E **Ejemplo 13.22.** Consideremos la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definida por recurrencia como $x_1 = -\frac{3}{2}$ y $3x_{n+1} = 2 + x_n^3$ para cualquier natural n. Estudia si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente y, caso de que lo sea, calcula su límite.

a) Si calculas algunos términos de la sucesión, parece que la sucesión es creciente. Vamos a comprobarlo por inducción.

i) $x_1 = -\frac{3}{2} \leq x_2 = -\frac{11}{24}$.

ii) Supongamos que $x_n \leq x_{n+1}$ para un natural n, entonces

$$x_{n+1} = \frac{2 + x_n^3}{3} \leq \frac{2 + x_{n+1}^3}{3} = x_{n+2}$$

ya que la función $f(x) = x^3$ es creciente.

Acabamos de demostrar que el conjunto $\{n \in \mathbb{N}\colon x_n \leq x_{n+1}\}$ es inductivo y que, por tanto, la sucesión es creciente.

b) ¿Está acotada la sucesión? Por ser una sucesión creciente, está acotada inferiormente. Sólo nos falta encontrar una cota superior. De hecho, la sucesión será convergente si, y sólo si, está acotada superiormente. Si la sucesión fuera convergente a un número L, como $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = L$, se tiene que cumplir que $3L = 2 + L^3$. Las soluciones de este polinomio son 1 y -2 (compruébalo por ejemplo por el método de Ruffini). Dado que la sucesión es creciente y su primer término es $-\frac{3}{2}$, queda descartado que el límite sea -2. Vamos a comprobar por inducción que 1 es una cota superior.

i) Es evidente que $x_1 = -\frac{3}{2} \leq 1$.

ii) Supongamos que $x_n \leq 1$ para un natural n, entonces

$$x_{n+1} = \frac{2 + x_n^3}{3} \leq \frac{2 + 1}{3} \leq 1.$$

En resumen, la sucesión es creciente y mayorada y, por lo visto anteriormente, su límite es 1.

Ejemplo 13.23. Sea $a \in \mathbb{R}^+$ y consideremos la siguiente sucesión: $x_1 = a$, $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$, para cualquier $n \in \mathbb{N}$. Vamos a ver que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente y que su límite, x, verifica $x^2 = a$. Estudiamos en primer lugar si la sucesión es monótona:

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2}\left(\frac{x_n^2 + a}{x_n}\right) - x_n = \frac{a - x_n^2}{2x_n}.$$

La sucesión será decreciente si $x_{n+1} - x_n \leq 0$ o, equivalentemente, si $a - x_n^2 \leq 0$. Si se da la desigualdad opuesta, la sucesión será creciente. En cualquier caso, tenemos que estudiar la relación entre x_n^2 y a. Como no tenemos una fórmula para x_n, vamos a trabajar con x_{n+1}.

$$\begin{aligned} x_{n+1} \geq x_{n+2} &\iff a - x_{n+1}^2 \leq 0 \iff a \leq \left(\frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)\right)^2 \\ &\iff 4a \leq x_n^2 + \frac{a^2}{x_n^2} + 2a \iff 0 \leq x_n^2 + \frac{a^2}{x_n^2} - 2a \\ &\iff 0 \leq \left(x_n - \frac{a}{x_n}\right)^2. \end{aligned}$$

Esta última afirmación es claramente cierta. Por tanto la sucesión $\{x_{n+1}\}$ es decreciente. Al mismo tiempo hemos demostrado que está acotada inferiormente: $\sqrt{a} \leq x_n$, para cualquier n natural. Por tanto, la sucesión $\{x_{n+1}\}$ (que no es más que la sucesión $\{x_n\}$ comenzando en el segundo término) es convergente. Llamemos L a su límite. Debe verificar que

$$L = \frac{1}{2}\left(L + \frac{a}{L}\right) \iff L = \sqrt{a}.$$

Volveremos a este ejemplo más adelante.

Si unimos los dos resultados anteriores: toda sucesión acotada tiene una parcial monótona que, por ser parcial, sigue siendo acotada y, por tanto, convergente.

Teorema 13.24 (de Bolzano-Weierstrass). *Toda sucesión acotada tiene una parcial convergente.*

Aunque lo usaremos poco en los ejemplos prácticos, este teorema es la clave que permite probar la existencia de máximo y mínimo de funciones continuas en intervalos cerrados y acotados.

13.4 Sucesiones divergentes

La sucesión $\{n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no es convergente, pero tiene un comportamiento muy particular. Los términos de esta sucesión toman valores tan grandes como se desee siempre que dicho términos sean lo suficientemente avazandos. A esto nos solemos referir como que la sucesión $\{n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tiende a $+\infty$.

Definición 13.25.

a) Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales. Diremos que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *diverge positivamente* o *tiende a* $+\infty$ si para cualquier $M \in \mathbb{R}$ existe un natural n_0 tal que $x_n \geq M$ para cualquier $n \geq n_0$. En ese caso escribiremos $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

b) De manera similar, diremos que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *diverge negativamente* o que *tiende a* $-\infty$ si para cualquier $K \in \mathbb{R}$ existe un natural n_0 tal que $x_n \leq K$ para cualquier $n \geq n_0$. En ese caso escribiremos $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$.

c) En general, diremos que una sucesión es *divergente* si diverge positiva o negativamente.

De la definición se deduce directamente que las sucesiones divergentes no están acotadas: las sucesiones divergentes positivamente no están acotadas superiormente y las que divergen negativamente no están acotadas inferiormente.

Observación 13.26. Un error muy común es decir que una sucesión tiende a $+\infty$ si "sus términos son cada vez más grandes" o "si hay términos tan grandes como se quiera". Compruébalo en los siguientes ejemplos:

a) La sucesión 1, 1, 2, 4, 3, 9,...,n, n^2,... no es creciente pero es divergente.

b) La sucesión 1, 1, 2, 1, 3, 1,...,n, 1,... tiene términos tan grandes como se quiera pero no es divergente.

Proposición 13.27. *Sean $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones de números reales.*

a) Si $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ y $\{y_n\}$ está acotada inferiormente, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} x_n + y_n = +\infty$.

b) $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = +\infty$ si, y sólo si, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{x_n} = 0$.

c) Si $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ y existe un natural n_0 y un número positivo k tal que $y_n \geq k$ para $n \geq n_0$, entonces $\lim_{n\to\infty} x_n y_n = +\infty$.

Ejemplo 13.28. Vamos a probar que

$$\lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} +\infty, & \text{si } x > 1, \\ 0, & \text{si } |x| < 1. \end{cases}$$

Comencemos con el caso $x > 1$. Vamos a demostrar que la sucesión $\{x^n\}$, que claramente es creciente, no está acotada. Por reducción al absurdo, supongamos que sí está acotada. En ese caso, la sucesión es convergente al supremo de sus elementos por ser creciente. Notemos L a dicho supremo. Se tiene que $x^n \leq L$, $\forall n \in \mathbb{N}$. En particular,

$$x^{n+1} \leq L,\ \forall n \in \mathbb{N} \implies x^n \leq \frac{L}{x} < L,$$

lo que contradice que L sea el supremo.
Si $x < 1$, entonces $\frac{1}{x} > 1$ y podemos aplicar el apartado anterior para obtener que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x^n} = +\infty$ y, por tanto, $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$.

13.5 Criterios de convergencia

El primer criterio que vamos a ver, el criterio de Stolz, permite resolver indeterminaciones de la forma "$\frac{0}{0}$" o "$\frac{\infty}{\infty}$". En cierta manera juega un papel similar a la regla de L'Hôpital para cocientes de funciones.

Proposición 13.29 (Criterio de Stolz). *Sean $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dos sucesiones de números reales. Supongamos que se verifica alguna de las siguientes condiciones:*

a) $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente y diverge positivamente, o bien

b) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$ e $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es monótona.

Entonces se verifica que:

a) Si $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} = L \in \mathbb{R}$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = L$.

b) Si $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} = +\infty$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = +\infty$.

c) Si $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} = -\infty$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = -\infty$.

Veamos un ejemplo de su uso.

Ejemplo 13.30. Vamos a calcular

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2}{n^3}.$$

Aplicando el criterio de Stolz, tenemos que estudiar

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2) - (1^2 + 2^2 + \cdots + n^2)}{(n+1)^3 - n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{3n^2 + 3n + 1} = \frac{1}{3}.$$

Por tanto, $\lim_{n\to\infty} \frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n^3} = \frac{1}{3}$.

Proposición 13.31 (Criterio de la raíz). *Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales positivos. Se verifica que:*

a) Si $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n} = L \in \mathbb{R}$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = L$.

b) Si $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n} = +\infty$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = +\infty$.

Ejemplo 13.32. Aplicando el criterio de la raíz, $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ ya que $\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$.

Proposición 13.33 (Regla del número e). *Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales convergente a uno, y sea $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión cualquiera. Entonces se verifica que:*

a) $\lim_{n\to\infty} y_n(x_n - 1) = L \in \mathbb{R} \iff \lim_{n\to\infty} x_n^{y_n} = e^L$.

b) $\lim_{n\to\infty} y_n(x_n - 1) = +\infty \iff \lim_{n\to\infty} x_n^{y_n} = +\infty$.

c) $\lim_{n\to\infty} y_n(x_n - 1) = -\infty \iff \lim_{n\to\infty} x_n^{y_n} = 0$.

Ejemplo 13.34. Calcular $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-n+3}{n^2+2n-2}\right)^{n+3}$.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-n+3}{n^2+2n-2}\right)^{n+3} = e^L \iff \lim_{n\to\infty}(n+3)\left(\frac{n^2-n+3}{n^2+2n-2} - 1\right) = L.$$

Para terminar, resolvemos el segundo límite

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(n+3)\left(\frac{n^2-n+3}{n^2+2n-2} - 1\right) &= \lim_{n\to\infty}(n+3)\left(\frac{n^2-n+3}{n^2+2n-2} - \frac{n^2+2n-2}{n^2+2n-2}\right)\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{(n+3)(-3n+5)}{n^2+2n-2} = -3.\end{aligned}$$

Ejemplo 13.35. La sucesión $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente y tiene límite e.
Para comprobar que, en efecto, es creciente vamos a escribir el término n-ésimo utilizando el binomio de Newton

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^{n-k}\frac{1}{n^k}\\ &= 1 + n\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2\omega}\cdot\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3\omega}\cdot\frac{1}{n^3} + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots 2\cdot 1}{n\omega}\cdot\frac{1}{n^n}\\ &= 1 + 1 + \left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{1}{2\omega} + \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n}\right)\frac{1}{3\omega} + \cdots\\ &\qquad \cdots + \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)\frac{1}{n\omega}.\end{aligned}$$

Es fácil imaginar cuál es el término siguiente:

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} &= 1 + 1 + \left(1-\frac{1}{n+1}\right)\frac{1}{2\omega} + \left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\left(1-\frac{3}{n+1}\right)\frac{1}{3\omega} + \cdots\\ &\qquad \cdots + \left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\left(1-\frac{3}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right)\frac{1}{n\omega}\\ &\qquad \cdots + \left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right)\left(1-\frac{n}{n+1}\right)\frac{1}{(n+1)\omega}.\end{aligned}$$

Observa los dos términos que acabamos de escribir. Hay dos diferencias:

a) Este último tiene un sumando más que el término n-ésimo. Dicho término de más, el último, es positivo. En realidad, todos los sumandos son positivos.

b) Si nos fijamos en el resto de sumandos y vamos comparando uno a uno

$$1 \leq 1,$$
$$1 - \frac{1}{n} \leq 1 - \frac{1}{n+1},$$
$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) \leq \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right),$$

y así sucesivamente.

Uniendo estos dos apartados, obtenemos la desigualdad que estábamos buscando, esto es, que $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$.
El cálculo del límite es fácil utilizando la Proposición 13.33 (la regla del número e):

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e^L \iff \lim_{n\to\infty} n\left(1 + \frac{1}{n} - 1\right) = L,$$

y este segundo límite es inmediato comprobar que vale uno.

13.6 Velocidad de convergencia

Las sucesiones $\{\frac{1}{n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{\frac{1}{n^2}\}_{n\in\mathbb{N}}$ tienen límite cero, pero un rápido vistazo a sus términos en la Tabla 13.1 nos convence de que los términos de la segunda se acercan más rápidamente al límite.

Otra forma de ver esto es la siguiente. El cociente entre los términos generales de las dos sucesiones es

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0,$$

lo que indica que la sucesión del denominador, $\frac{1}{n}$, es mucho mayor que la del numerador, $1/n^2$.

Definición 13.36. Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión convergente con límite l y sea $\{b_n\}$ otra sucesión convergente a otro número m.

a) Diremos que la velocidad o el orden de convergencia de la sucesión $\{a_n\}$ es $O(b_n)$ si existe una constante K tal que

$$\frac{|a_n - l|}{|b_n - m|} \leq K, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

b) Diremos que la velocidad o el orden de convergencia de la sucesión es $o(b_n)$ si

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n - l|}{|b_n - m|} = 0.$$

La notación “O grande” y “o pequeña” es bastante común a la hora de describir la convergencia de un algoritmo. Obsérvese que $\{b_n\} - m$ es una sucesión que converge a 0. Lo que se hace, en esencia, es comparar la velocidad de convergencia de $\{a_n\}$ a su límite con la velocidad de la convergencia de otra sucesión que converge a 0. Normalmente como sucesión $\{b_n\}$ se toma la sucesión $\{\frac{1}{n^p}\}$ para un natural p.

La definición anterior también tiene también una versión para sucesiones divergentes:

Definición 13.37. Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión divergente y sea $\{b_n\}$ otra sucesión divergente.

a) Diremos que la velocidad o el orden de divergencia de la sucesión $\{a_n\}$ es $O(b_n)$ si existe una constante K tal que

n	$1/n$	$1/n^2$
1	1.0	1.0
2	0.5	0.25
3	0.3333333333333333	0.1111111111111111
4	0.25	0.0625
5	0.2	0.04
6	0.1666666666666667	0.02777777777777778
7	0.1428571428571428	0.02040816326530612
8	0.125	0.015625
9	0.1111111111111111	0.01234567901234568
10	0.1	0.01

Tabla 13.1 Primeros términos de las sucesiones $1/n$ y $1/n^2$

$$\frac{|a_n|}{|b_n|} \le K, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

b) Diremos que la velocidad o el orden de divergencia de la sucesión $\{a_n\}$ es $o(b_n)$ si

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|b_n|} = 0.$$

Análogamente a lo que es usual en sucesiones convergentes, para comparar con sucesiones divergentes suelen utilizarse las sucesiones $\{n^p\}$ con p natural.

Ejemplo 13.38. Con la nomenclatura anterior la sucesión $\left\{\frac{n^2+2n+1}{n^3-2n^2+3n+1}\right\}$ tiende a cero con velocidad $O(1/n)$. En el caso de divergencia se tiene que $\log(n)$ diverge con velocidad $o(n)$.

13.7 Ejercicios

13.7.1 Sucesiones

Ejercicio 13.1. Prueba que si $|x| < 1$, entonces $\lim_{n\to\infty} 1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \frac{1}{1-x}$.

Ejercicio 13.2. Sea a un número real positivo y definamos $x_1 = a$, $x_{n+1} = \frac{x_n}{1+x_n}$ para $n \in \mathbb{N}$. Probar que la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a cero.

Ejercicio 13.3. Demuestra que la sucesión $x_1 = 1$, $x_{n+1} = \sqrt{3x_n}$, $\forall n \ge 1$ es convergente y calcular su límite.

E **Ejercicio 13.4.** Se considera la sucesión definida por recurrencia por $a_1 = 1$ y $a_{n+1} = \sqrt{2a_n + 3}$ para $n \in \mathbb{N}$. Estudia si es convergente y, en caso de que lo sea, calcula el límite.

E **Ejercicio 13.5.** Se define la sucesión $\{x_n\}$ por recurrencia como $x_1 = 1$, $x_{n+1} = \sqrt{1+2x_n} - 1$. Calcula $\lim_{n\to\infty} x_n$ y $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{x_{n+1}}$.

E **Ejercicio 13.6.** Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión definida por recurrencia como $x_1 = \frac{1}{2}$ y $x_{n+1} = x_n^2 + \frac{4}{25}$.

a) Demuestra que $\frac{1}{5} < x_n < \frac{4}{5}$ para cualquier natural n.

b) Demuestra que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es decreciente.

c) Calcula su límite.

Ejercicio 13.7. Sea $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$. Estudiar el comportamiento de la sucesión $x_1 = a$, $x_{n+1} = \sqrt{\frac{x_n^2+a}{2}}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

13.7.2 Criterios de convergencia

Ejercicio 13.8. Estudia la convergencia de las siguientes sucesiones y calcular su límite cuando exista.

a) $\left\{\dfrac{1+2^4+3^4+\cdots+n^4}{n^5}\right\}$

b) $\left\{\dfrac{1\omega+2\omega+3\omega+\cdots+n\omega}{n\omega}\right\}$

c) $\left\{\dfrac{1+1/2+1/3+\cdots+1/n}{n}\right\}$

d) $\left\{\dfrac{1+3+5+\cdots+(2n-1)}{n+1}-\dfrac{2n+1}{2}\right\}$

Ejercicio 13.9. Calcula el límite de las siguientes sucesiones

a) $\left\{\dfrac{\log(1\cdot 2\cdots n)}{n\log(n)}\right\}$,

b) $\left\{\dfrac{n^2\sqrt{n}}{1+2\sqrt{2}+3\sqrt{3}+\ldots+n\sqrt{n}}\right\}$

c) $\left\{\dfrac{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\ldots\sqrt[n]{n}}{n^2}\right\}$

Ejercicio 13.10. Estudia la convergencia de las siguientes sucesiones:

a) $\left\{\dfrac{1}{\sqrt[n]{n\omega}}\right\}$

b) $\left\{\dfrac{1}{n}\sqrt[n]{(3n+1)(3n+2)\cdots(3n+n)}\right\}$

c) $\left\{\dfrac{1}{n}\sqrt[n]{\dfrac{(2n)\omega}{n\omega}}\right\}$

d) $\left\{\dfrac{\sqrt[n]{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}}{n+1}\right\}$

Ejercicio 13.11. Calcula el límite de las siguientes sucesiones.

a) $\left\{\left(1+\dfrac{1}{n^2+1}\right)^{n^2+56n+5}\right\}$

b) $\left\{\left(\dfrac{n^2-5n+6}{n^2+2n+1}\right)^{\frac{n^2+5}{n+2}}\right\}$

c) $\{(1+\log(n+1)-\log(n))^n\}$

Ejercicio 13.12. Calcula el límite de las siguientes sucesiones.

a) $\left\{\dfrac{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}}{\log(n)}\right\}$

b) $\left\{\dfrac{\log(n+1)\omega}{\log(n+1)^n}\right\}$

Ejercicio 13.13. Calcula el límite de las siguientes sucesiones.

a) $\left\{\left(\dfrac{n+1}{n^2+n+5}\right)^{\frac{1}{1+\log(n)}}\right\}$

b) $\left\{\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{n}\right)\right\}$

c) $\left\{\dfrac{\cos(\sqrt{n^2+1})\log(n)}{n}\right\}$

Ejercicio 13.14. Calcula el límite de las siguientes sucesiones.

a) $\left\{ \sqrt[n]{\dfrac{n\omega}{(2n)^{n+1}}} \right\}$

b) $\left\{ \dfrac{\log(n\omega)}{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{n}} \right\}$

Ⓔ **Ejercicio 13.15.** Calcula el límite de la sucesión

$$\left\{ \frac{\frac{2}{1}+\frac{3^2}{2}+\frac{4^3}{3^2}+\cdots+\frac{(n+1)^n}{n^{n-1}}}{n^2} \right\}.$$

Ⓔ **Ejercicio 13.16.** Calcula el siguiente límite

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\log\left(\frac{3n^2+2n+1}{3n^2+5n}\right)\right)^{4n+1}.$$

Series

14

En el siglo XVIII muchos matemáticos buscaban, sin demasiado éxito, el valor de la expresión

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots$$

La primera aportación relevante fue hecha por Jacobo Bernoulli en 1689 cuando demostró la convergencia de dicha serie. Más tarde, en 1728–1729, D. Bernoulli calculó su valor con una precisión de una centésima. Stirling aumentó la precisión hasta los ocho primeros decimales al año siguiente. Cuatro años después, Euler calculó el valor con dieciocho cifras decimales y se dio cuenta de que coincidían con la expresión de $\pi^2/6$. En años posteriores, Euler no sólo demostró que, efectivamente, ese era el valor de dicha suma sino que calculó $1 + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} + \frac{1}{4^k} + \ldots$ para k par.

En este tema vamos a estudiar sucesiones de esta forma. Veremos que, en algunos casos concretos, seremos capaces de calcular su límite. En el resto de ocasiones intentaremos, al menos, decidir sobre la convergencia o no de dichas sucesiones.

14.1 Definición y propiedades

Las series de números reales son un caso particular de sucesiones. Comencemos con una sucesión $\{a_n\}$ y construimos la sucesión

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1, \\ s_2 &= a_1 + a_2, \\ s_3 &= a_1 + a_2 + a_3, \\ s_2 &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \end{aligned}$$

y así sucesivamente. A las sucesiones de la forma $\{s_n\}$ las llamaremos series y hablaremos de la suma de la serie para referirnos a su límite.

Definición 14.1. Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales. Consideremos la sucesión $\{s_n\}$ definida como

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

A esta sucesión $\{s_n\}$ la llamaremos *serie de término general* a_n y la notaremos $\sum_{n\geq 1} a_n$. A los términos s_n se les suele llamar *sumas parciales* de la serie. Si $\{s_n\}$ tiene límite, lo notaremos

$$\lim_{n\to\infty} a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k .$$

La principal dificultad para estudiar la convergencia de una serie es que normalmente no disponemos de una fórmula para las sumas parciales. En aquellos casos en que sí, la convergencia de una serie se reduce al cálculo de un límite. Vamos a empezar por un ejemplo sencillo.

Ejemplo 14.2. Vamos a estudiar si la serie $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{2^n}$ es convergente o, lo que es lo mismo, vamos a calcular

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n}.$$

Los términos de la sucesión de sumas parciales son

n	**sumas parciales**	s_n
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$
3	$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$	$\frac{7}{8}$
4	$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}$	$\frac{14}{16}$
	...	
n	$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots\frac{1}{2^n}$	$1-\frac{1}{2^n}$

Por tanto, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n} = \lim_{n\to\infty} 1 - \frac{1}{2^n} = 1.$

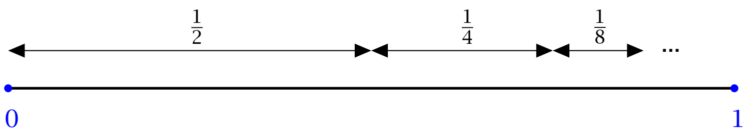


Figura 14.1 La suma de una progresión geométrica de razón ½

Vale, pero ¿de dónde ha salido la fórmula de la suma de los n términos? Gráficamente es muy fácil de ver. El segmento $[0,1]$ se obtiene uniendo el $[0,\frac{1}{2}]$, y luego vamos añadiendo la mitad de la mitad que nos falta.

Este ejemplo se basa en la suma de los términos de una progresión geométrica. Recordemos cuál es la fórmula para calcular su suma.

Progresiones geométricas

Ejemplo 14.3. Una *progresión geométrica de razón r* es una sucesión de la forma

$$a, ar, ar^2, \ldots, ar^n,$$

donde cada término se obtiene del anterior multiplicándolo por una cantidad fija r, la razón. Esta forma particular hace que se puede calcular su suma de manera explícita. Fijémonos que

$$(1-r)\sum_{k=0}^{n} r^k = \sum_{k=0}^{n} r^k - r\sum_{k=0}^{n} r^k = 1 - r^{n+1}$$

de donde se deduce que

$$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^n = a\sum_{k=0}^{n} r^k = a\frac{1-r^{n+1}}{1-r}. \tag{14.1}$$

Por ejemplo, $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^n}=\frac{\frac{1}{2^{n+1}}-1}{\frac{1}{2}-1}=\frac{2^{n+1}-1}{2^n}=2-\frac{1}{2^n}$.
El hecho de que tengamos la fórmula (14.1) nos pone en bandeja el cálculo del límite cuando n tiende a $+\infty$. Es fácil comprobar que

$$\lim_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} 0, & \text{si } r\in]-1,1[,\\ 1, & \text{si } r=1,\\ \text{no existe}, & \text{en otro caso.}\end{cases}$$

Por tanto,

$$\sum_{k=0}^{\infty} ar^k = \lim_{n\to\infty} a\frac{1-r^{n+1}}{1-r} = \frac{a}{1-r}$$

si, y sólo si, $|r|<1$.

Estamos dando una definición de suma de infinitos números. La primera condición parece inmediata: los números que sumemos tienen que ser pequeños (cercanos a cero) si no queremos que el resultado final se dispare.

Condición necesaria de convergencia

Proposición 14.4. *Si la serie $\sum_{n\geq 1} a_n$ es convergente, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.*

Demostración. Si $\{A_n\}$ es la sucesión de sumas parciales,

$$A_{n+1} = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1} \xrightarrow{n\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

$$A_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \xrightarrow{n\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Restamos y obtenemos que $A_{n+1}-A_n = a_{n+1} \to 0$. $\square$

La serie armónica no es convergente

Ejemplo 14.5. Este resultado nos da una condición necesaria para la convergencia de la serie. Sin embargo, esta condición no es suficiente. El término general de la serie $\sum \frac{1}{n}$, usualmente llamada *serie armónica* converge a cero, pero la serie no es convergente.

a) Vamos a comprobarlo estudiando las sumas parciales hasta un índice que sea potencia de 2.

$$\begin{aligned} 1 &+ \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}\\ &=1+\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2^{n-1}+1}+\ldots+\frac{1}{2^n}\right)\\ &\geq 1+\frac{1}{2}+\overbrace{\cdots}^{n}+\frac{1}{2}=1+\frac{n}{2}.\end{aligned}$$

Como consecuencia $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}=+\infty$.

b) También podemos usar el Ejercicio 13.11. Recordemos que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}{\log(n)}=1$$

y que, por tanto, $\lim_{n\to\infty} 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}=+\infty$.

c) También podemos utilizar integrales para calcular la suma. Fijado un natural n, consideremos la función $f(x)=1/x$ en el intervalo $[1,n]$ y consideremos la partición $P=\{1,2,3,\ldots,n-1,n\}$ de dicho intervalo. ¿Cuánto valen las sumas superiores e inferiores?

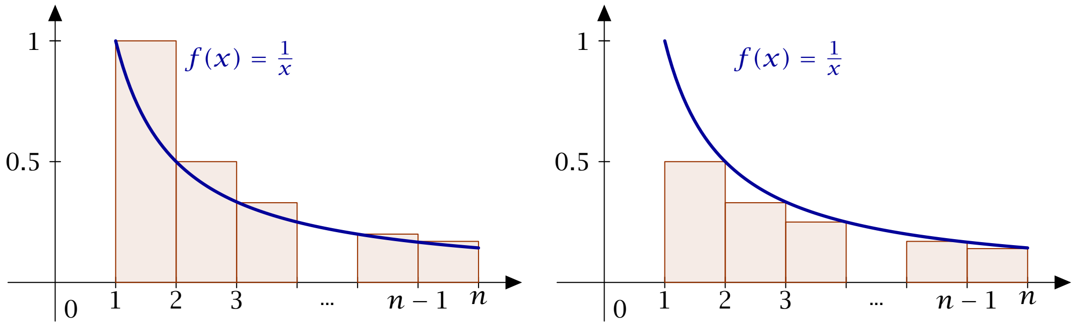


Figura 14.2 Sumas superiores e inferiores de la función $1/x$ en el intervalo $[1, n]$

Sumando las área de los rectángulos de la Figura 14.2, podemos acotar la integral superiormente por

$$\log(n) = \int_1^n \frac{dx}{x} \le 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-2} + \frac{1}{n-1} \tag{14.2}$$

e inferiormente

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} \le \int_1^n \frac{dx}{x} = \log(n). \tag{14.3}$$

De la desigualdad (14.2), obtenemos que

$$\log(n+1) \le 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}$$

y desigualdad (14.3) se deduce que

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} \le 1 + \log(n).$$

En resumen,

$$\log(n+1) \le 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} \le 1 + \log(n).$$

Como la función logaritmo diverge positivamente en $+\infty$, obtenemos que la serie no es convergente, aunque la anterior desigualdad nos da más información sobre el valor de las sumas parciales del que hemos conseguido en los dos apartados anteriores.

Dado que una serie de números reales no es más que una sucesión, las propiedades que ya conocemos de límites de sucesiones siguen siendo ciertas en este ambiente. La siguiente proposición nos dice que el límite de una serie es lineal: parte sumas y saca fuera escalares.

Linealidad

Proposición 14.6. *Sean $\sum_{n\ge1} a_n$ y $\sum_{n\ge1} b_n$ dos series convergentes. Sean λ y μ números reales. Entonces la serie $\sum_{n\ge1} (\lambda a_n + \mu b_n)$ es convergente y*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda a_n + \mu b_n) = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \mu \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Trabajando con sucesiones es inmediato comprobar (de hecho, ya lo hemos usado en varias ocasiones) que una sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente si, y sólo si, lo son sus colas $\{a_{n+k}\}_{n\in\mathbb{N}}$. Además, ambas tienen el mismo límite. Si consideramos la serie asociada a cada de una ellas, la convergencia de ambas está también muy relacionada.

Proposición 14.7. *Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números reales y k un número natural fijo. Entonces la serie $\sum_{n\geq 1} a_n$ es convergente si, y sólo si, lo es la serie $\sum_{n\geq 1} a_{n+k}$. Además, caso de que sean convergentes, se cumple que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{k-1} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+k},$$

o lo que es lo mismo,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{k-1} a_n + \sum_{n=k}^{\infty} a_n.$$

De nuevo obtenemos que la convergencia de una serie depende de las colas de dicha serie aunque la suma total sí depende de que añadamos o no los primeros términos.

14.2 Convergencia absoluta e incondicional

Definición 14.8.

a) Diremos que la serie $\sum a_n$ es *absolutamente convergente* si la serie $\sum |a_n|$ es convergente.

b) La serie $\sum a_n$ es *incondicionalmente convergente* si para cualquier aplicación biyectiva $\sigma\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, la serie $\sum a_{\sigma(n)}$ es convergente y

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}.$$

Observación 14.9. La convergencia incondicional de una serie es el análogo a la propiedad conmutativa para una suma infinita. Una serie es incondicionalmente convergente si se puede sumar en cualquier orden y el resultado siempre es el mismo. Este es el motivo de que en algunos textos se hable de series conmutativamente convergentes.

La convergencia absoluta y la convergencia incondicional son condiciones más fuertes que la convergencia de una serie. El siguiente resultado nos dice que están relacionadas.

Teorema 14.10 (de Riemann). *Sea $\sum a_n$ una serie de números reales. La serie converge incondicionalmente si, y sólo si, converge absolutamente.*

En la práctica, es sumamente difícil comprobar la convergencia incondicional de una serie directamente. No es sencillo trabajar con todas las reordenaciones posibles de una sucesión de números reales. Lo que sí haremos es estudiar la convergencia absoluta.

El primer criterio y, posiblemente, el más importante que vamos a utilizar en el estudio de la convergencia de series de números reales es el criterio de comparación. Esencialmente nos dice que si una serie se puede sumar también se puede sumar otra más pequeña y, recíprocamente, si una serie no se puede sumar, otra mayor tampoco se puede.

Teorema 14.11 (Criterio de comparación). *Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ dos sucesiones de números reales verificando que $|a_n| \leq b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

a) Si $\sum b_n$ es convergente, entonces $\sum a_n$ es convergente.

b) Si $\sum a_n$ es divergente, entonces $\sum b_n$ es divergente.

Si aplicamos el criterio de comparación tomando $b_n = |a_n|$, se obtiene que las series absolutamente convergentes son convergentes, esto es, una de las implicaciones del teorema de Riemann. El recíproco del criterio de comparación no es cierto.

Ejemplo 14.12. La serie $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ es convergente pero no absolutamente convergente.

Dado que la serie $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ no es incondicionalmente convergente, si la sumamos en distinto orden nos puede dar un resultado diferente pero ¿cuántos?. La respuesta es que muchos. Más concretamente, la serie se puede reordenar de forma que su suma sea el número real que queramos.

Teorema 14.13 (Teorema de Riemann). *Sea $\sum a_n$ una serie convergente pero no absolutamente convergente. Dado un número real x cualquiera, existe una biyección $\sigma\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = x$.*

14.3 Criterios de convergencia para series de términos no negativos

El primer criterio es una versión del criterio de comparación usando límites.

Proposición 14.14 (Criterio de comparación por paso al límite). *Sean $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ sucesiones de números reales verificando $a_n \geq 0$, y $b_n > 0$. Entonces se verifican las siguientes afirmaciones:*

a) Si $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L \neq 0$ entonces, $\sum a_n$ converge $\iff \sum b_n$ converge.

b) Si $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ entonces, $\sum b_n$ converge $\implies \sum a_n$ converge.

c) Si $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty$ entonces, $\sum a_n$ converge $\implies \sum b_n$ converge.

Ejemplo 14.15. Las series $\sum \frac{1}{n^2}$ y $\sum \frac{1}{3n^2-n+7}$ tienen el mismo carácter de convergencia. La ventaja del criterio de comparación por paso al límite es que no hace falta saber que una de ellas es mayor que la otra. Es suficiente con que sean "aproximadamente" iguales:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{3n^2-n+7}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2-n+7}{n^2} = 3.$$

Por ahora no sabemos si ambas series son convergentes o no (dentro de poco veremos que sí lo son) pero sí podemos aplicarlo a otras series. Por ejemplo, $\sum \frac{1}{2^n-n}$ y $\sum \frac{1}{2^n}$ tiene el mismo carácter. Como sabemos que $\sum \frac{1}{2^n}$ es convergente, también lo es $\sum \frac{1}{2^n-n}$. Observa que el criterio de comparación *no* nos resuelve este mismo problema: $\frac{1}{2^n-n}$ es mayor que $\frac{1}{2^n}$ y, por tanto, el criterio de comparación no da información.

Proposición 14.16 (Criterio de la raíz o de Cauchy). *Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números positivos.*

a) Si $\sqrt[n]{a_n} \leq L < 1$, entonces $\sum a_n$ es convergente.

b) Si $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$, entonces $\sum a_n$ no es convergente.

Corolario 14.17. *Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números positivos.*

a) Si $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L < 1$, entonces $\sum a_n$ es convergente.

b) Si $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$, entonces $\sum a_n$ no es convergente.

Ejemplo 14.18. Vamos a estudiar la convergencia de la serie $\sum \left(\frac{n}{7n+3}\right)^{2n+1}$ utilizando el criterio de la raíz. Para ello calculamos el límite

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{7n+3}\right)^{2n+1}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{7n+3}\right)^{\frac{2n+1}{n}} = \frac{1}{7^2}.$$

Como dicho límite es menor que uno, la serie es convergente.

Para calcular el límite de una raíz n-ésima podemos aplicar el criterio de la raíz (véase Proposición 13.31).

Proposición 14.19 (Criterio del cociente o de D'Alembert). *Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números positivos.*

a) Si $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq L < 1$, entonces $\sum a_n$ es convergente.

b) Si $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$, entonces $\sum a_n$ no es convergente.

Corolario 14.20. *Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números positivos.*

a) Si $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, entonces $\sum a_n$ es convergente.

b) Si $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, entonces $\sum a_n$ no es convergente.

Ejemplo 14.21. Vamos a estudiar la convergencia de la serie $\sum \frac{2n^2}{2^n+3}$ utilizando el criterio del cociente.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2(n+1)^2}{2^{n+1}+3}}{\frac{2n^2}{2^n+3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2(n+1)^2}{2n^2} \, \frac{2^n+3}{2^{n+1}+3} = \frac{1}{2}.$$

Como el límite es menor que uno la serie es convergente.

Proposición 14.22 (Criterio de Raabe). *Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números positivos.*

a) Si $n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) \geq L > 1$, entonces la serie $\sum a_n$ es convergente.

b) Si $n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) \leq 1$, entonces la serie $\sum a_n$ no es convergente.

Corolario 14.23. *Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números positivos.*

a) Si $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) > 1$, entonces la serie $\sum a_n$ es convergente.

b) Si $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) < 1$, entonces la serie $\sum a_n$ no es convergente.

Ejemplo 14.24. Vamos a estudiar la convergencia de la series cuyo término general es

$$a_n = \frac{(2n)\omega}{n\omega\; n\omega} \, \frac{1}{(2n+1)\; 2^{2n}}.$$

Aplicamos, en primer lugar, el criterio del cociente.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(2n+2)\omega}{((n+1)\omega)^2}\ \frac{1}{(2n+3)\ 2^{2n+2}}}{\frac{(2n)\omega}{(n\omega)^2}\ \frac{1}{(2n+1)\ 2^{2n}}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+2)(2n+1)(2n+1)}{4(n+1)(n+1)(2n+3)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)^2}{2(n+1)(2n+3)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{4n^2+4n+1}{4n^2+10n+6} = 1.
\end{aligned}$$

Como

$$\frac{4n^2+4n+1}{4n^2+10n+6} \le 1$$

el criterio del cociente no da información útil. Aplicamos ahora el criterio de Raabe:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) &= \lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{4n^2+4n+1}{4n^2+10n+6}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{6n^2+5n}{4n^2+10n+6} = \frac{6}{4} > 1,
\end{aligned}$$

y, por tanto, el criterio de Raabe nos dice que la serie es convergente.

Proposición 14.25 (Criterio de condensación). *Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números no negativos tal que $\{a_n\}$ es una sucesión decreciente a cero. Entonces se verifica que*

$$\sum a_n \ \text{ es convergente } \iff \sum 2^n\, a_{2^n} \ \text{ es convergente }.$$

Serie armónica generalizada

Ejemplo 14.26. Vamos a estudiar la convergencia de la serie $\sum_{n\ge1} \frac{1}{n^a}$, con $a \in \mathbb{R}$.

a) Si $a \le 0$, el término general $\frac{1}{n^a}$ no tiende a cero y, por tanto, la serie no es convergente.

b) Si $a > 0$, el término general es decreciente y converge a cero. Podemos aplicar el criterio de condensación: las series $\sum \frac{1}{n^a}$ y $\sum \frac{2^n}{(2^n)^a}$ tienen el mismo comportamiento. Como

$$\sum \frac{2^n}{(2^n)^a} = \sum \frac{1}{2^{(a-1)n}},$$

aplicamos el criterio de la raíz:

$$\sqrt[n]{\frac{1}{2^{(a-1)n}}} = \frac{1}{2^{a-1}} < 1 \iff a > 1.$$

Resumiendo, si $a > 1$ la serie es convergente. Si $a < 1$, la serie no es convergente y si $a = 1$ ya sabíamos que no era convergente.

A esta serie se la suele llamar *serie armónica generalizada de exponente a*.

El ejemplo anterior será clave en muchos ejercicios para poder aplicar el criterio de comparación. Es por esto que lo resaltamos:

Proposición 14.27. $\sum \frac{1}{n^a}$ *es convergente si, y sólo si, $a > 1$.*

Por ejemplo, si comparamos $\frac{1}{n^a}$ con a_n tenemos que estudiar el cociente

$$\frac{a_n}{\frac{1}{n^a}} = n^a a_n .$$

El siguiente resultado recoge las diferentes posibilidades que se pueden presentar.

Proposición 14.28 (Criterio de Pringsheim). *Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números no negativos.*

a) Si existe $a > 1$ tal que la sucesión $\{n^a a_n\}$ está acotada entonces $\sum a_n$ es convergente.

b) Si existe $a \leq 1$ tal que $\{n^a a_n\}$ converge a $L \neq 0$ o es divergente entonces $\sum a_n$ no es convergente.

14.4 Otros criterios

La principal herramienta para estudiar la convergencia de series de términos cualesquiera serán los criterios de Dirichlet y Abel.

Teorema 14.29. *Sea $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ dos sucesiones de números reales.*

a) Si $\{a_n\}$ es monótona, converge a cero y la serie $\sum b_n$ tiene sumas parciales acotadas, entonces $\sum a_n b_n$ converge. **Criterio de Dirichlet**

b) Si $\{a_n\}$ es monótona, acotada y la serie $\sum b_n$ converge, entonces $\sum a_n b_n$ es convergente. **Criterio de Abel**

La sucesión $\{(-1)^n\}$ no es convergente pero sus sumas parciales siempre valen -1 o 0 y, en particular, están acotadas. Tomando $b_n = (-1)^n$ en el criterio de Dirichlet obtenemos lo siguiente.

Proposición 14.30 (Criterio de Leibniz). *Sea $\{x_n\}$ una sucesión de números reales no negativos. Si la sucesión $\{x_n\}$ es decreciente a cero, entonces la serie alternada $\sum(-1)^n x_n$ es convergente.*

Ejemplo 14.31. La serie alternada $\sum(-1)^n \frac{1}{n}$, que ya comentamos en el Ejemplo 14.12, es convergente porque $\frac{1}{n}$ es decreciente y convergente a cero.

14.5 Suma de series

Sólo en contadas ocasiones es factible calcular de manera explícita la suma de una serie. La mayoría de las veces serán necesarios medios indirectos como veremos, por ejemplo, en la siguiente sección. La dificultad radica en el cálculo explícito del valor de las sumas parciales. Si sabemos cuánto valen, el problema de estudiar la convergencia de la serie se reduce a un problema de cálculo de límites, cosa normalmente mucho más sencilla.

Observación 14.32. Hasta ahora sólo hemos estudiado la convergencia y no el valor de la suma de la serie. No es lo mismo $\sum_{n\geq 1} a_n$ que $\sum_{n\geq 0} a_n$. ¡Hay un sumando de diferencia!

14.5.1 Series telescópicas

Las series telescópicas son aquellas series $\sum a_n$ cuyo término general se puede escribir de la forma $a_n = b_n - b_{n+1}$ para alguna sucesión $\{b_n\}$. El cálculo de su suma equivale al cálculo del límite de la sucesión $\{b_n\}$. Para verlo sólo tienes que calcular las sumas parciales:

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = (b_1 - \cancel{b_2}) + (\cancel{b_2} - \cancel{b_3}) + \cdots + (\cancel{b_n} - b_{n+1}) = b_1 - b_{n+1}.$$

Resumiendo,

Proposición 14.33. *Sea $\{b_n\}$ una sucesión de números reales. Entonces la serie que tiene como término general $a_n = b_n - b_{n+1}$ es convergente si, y sólo si, $\{b_n\}$ es convergente. En ese caso*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = b_1 - \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Ejemplo 14.34. Vamos a calcular el valor de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

Como $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, las sucesión de sumas parciales es

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} - \frac{1}{i+1} = \left(\frac{1}{1} - \cancel{\frac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \ldots + \left(\cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1},$$

con lo que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{n\to\infty} 1 - \frac{1}{n+1} = 1.$

14.5.2 Series geométricas

La serie $\sum r^n$ se puede sumar utilizando que conocemos sus sumas parciales, como ya hicimos en el Ejemplo 14.3. Sabemos que

$$\sum_{k=0}^{n} r^k = \frac{r^{n+1}-1}{r-1}$$

y tomando límites cuando n tiende a infinito obtenemos el siguiente resultado.

Proposición 14.35. *La serie $\sum r^n$ es convergente si, y sólo si, $|r| < 1$. En ese caso* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$.

Demostración. Sólo hay que usar la fórmula de la suma de una progresión geométrica que vimos en el Ejemplo 14.3:

$$\sum_{k=0}^{\infty} r^n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} r^k = \lim_{n\to\infty} \frac{r^{n+1}-1}{r-1} = \frac{1}{1-r},$$

ya que $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$ si $|r| < 1$. En cualquier otro caso el término general de la serie no converge a cero y, por tanto, la serie no es convergente. □

Veamos un ejemplo

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{5^n} = 4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{5^n} = \frac{4}{1-\frac{1}{5}} = 5.$$

Si la serie no comienza en $n = 0$,

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^n} = [m = n-2] = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2^{m+2}} = \frac{1}{4} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2^m} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}.$$

14.5.3 Series aritmético-geométricas

Las series aritmético-geométricas son series de la forma $\sum p(n) r^n$, donde p es un polinomio. Para calcular su suma, transformamos la serie en otra en la que el grado del polinomio es menor hasta obtener una serie geométrica. Si $\sum_{n=0}^{\infty} p(n) r^n = S$, entonces

$$\begin{aligned}(1-r)S &= \sum_{n=0}^{\infty} p(n) r^n - \sum_{n=0}^{\infty} p(n) r^{n+1} \\ &= p(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(p(n) - p(n-1)\right) r^n.\end{aligned}$$

Observa que $p(n) - p(n-1)$ sigue siendo un polinomio, pero con grado estrictamente menor que el grado de $p(n)$. Repitiendo este proceso las veces necesarias, acabamos obteniendo una serie geométrica. Veamos un ejemplo.

Ejemplo 14.36. Vamos a calcular la suma de la serie $\sum_{n\geq 0}(n^2-n)r^n$. Si su suma es S, entonces

$$(1-r)S = \sum_{n=1}^{\infty}\left[(n^2-n)-((n-1)^2-(n-1))\right]r^n = \sum_{n=1}^{\infty} 2nr^n,$$

o, lo que es lo mismo,

$$S = \frac{2}{1-r}\sum_{n=1}^{\infty} nr^n.$$

Repetimos el proceso anterior, si $S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} nr^n$, entonces

$$(1-r)S_1 = r + \sum_{n=2}^{\infty}[n-(n-1)]r^n = r + \frac{1}{1-r} - 1 - r = \frac{r}{1-r}.$$

Por tanto,

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n^2-n)r^n = \frac{2}{1-r}\cdot\frac{r}{1-r} = \frac{2r}{(1-r)^2}.$$

14.5.4 Cocientes de polinomios

En algunos casos se pueden sumar descomponiendo el término general en fracciones simples. También pueden ser de utilidad algunas identidades como, por ejemplo, la que define la constante de Euler.

La constante de Euler-Mascheroni

En el Ejercicio ?? vimos que

$$\frac{x}{1+x} < \log(1+x) < x$$

se cumple para cualquier x positivo. En particular, para $x = \frac{1}{n} \in \mathbb{N}$ obtenemos que

$$\log(1+n) - \log(n) = \log\left(\frac{1+n}{n}\right) = \log\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$$

y que

$$\frac{1}{n+1} = \frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}} < \log\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

.

Si definimos $a_{2n-1} = \frac{1}{n}$ y $a_{2n} = \log(n+1) - \log(n)$, las desigualdades anteriores se escriben como

$$a_{2n+1} < a_{2n} < a_{2n-1}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

o, lo que es lo mismo, la sucesión $\{a_n\}$ es decreciente. El criterio de Leibniz nos da que la serie $\sum(-1)^{n+1}a_n$ es convergente, o sea que existe el límite

$$\lim_{n\to\infty} -a_1 + a_2 + \cdots + (-1)^n a_n = \lim_{n\to\infty} 1 - (\cancel{\log(2)} - \log(1)) + \frac{1}{2} - (\cancel{\log(3)} - \cancel{\log(2)}) + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - (\log(n+1) - \cancel{\log(n)})$$
$$= \lim_{n\to\infty} 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \log(n+1).$$

Constante de Euler-Mascheroni Este límite recibe el nombre de *constante de Euler-Mascheroni* y se denota por γ:

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \log(n).$$

14.6 Ejercicios

14.6.1 Convergencia de series numéricas

Ejercicio 14.1. Aplicar el criterio de la raíz para estudiar la posible convergencia de las siguientes series:

a) $\sum \left(\frac{n+1}{3n-1}\right)^n$
b) $\sum \left(\frac{n}{3n-2}\right)^{2n-1}$
c) $\sum \frac{n^n}{(2n+1)^n}$
d) $\sum \frac{n^n}{e^{(n^2+1)}}$
e) $\sum \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2}$

Ejercicio 14.2. Aplicar el criterio del cociente para estudiar la posible convergencia de las siguientes series:

a) $\sum \frac{1}{n2^n}$
b) $\sum \frac{1}{n}\left(\frac{2}{5}\right)^n$
c) $\sum \frac{(n+1)^n}{3^n n\omega}$
d) $\sum \frac{2\cdot 5\cdot 8\cdots(3n-1)}{1\cdot 5\cdot 9\cdots(4n-3)}$
e) $\sum \frac{2^n n\omega}{n^n}$

Ejercicio 14.3. Aplicar el criterio de comparación para estudiar la posible convergencia de las siguientes series:

a) $\sum \frac{\log(n)}{n}$
b) $\sum \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$
c) $\sum \frac{1}{2n-1}$
d) $\sum \frac{1}{2^n-n}$
e) $\sum \frac{1}{(2n-1)2n}$
f) $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$
g) $\sum \frac{\sqrt[3]{n}}{(n+1)\sqrt{n}}$

Ejercicio 14.4. Aplicar el criterio de condensación para estudiar la posible convergencia de las siguientes series:

a) $\sum \frac{1}{n\log(n)}$

b) $\sum \frac{1}{n(\log(n))^2}$

c) $\sum \frac{1}{n(\log(n))\log(\log(n))}$

Ejercicio 14.5. Discutir la convergencia de las siguientes series de números reales:

a) $\sum \frac{2^n}{n}$
b) $\sum \frac{n+1}{2n+1}$
c) $\sum \frac{1}{n^2\log(n)}$
d) $\sum \frac{n^2}{(3n-1)^2}$
e) $\sum \frac{3n-1}{(\sqrt{2})^n}$

Ejercicio 14.6. Discutir la convergencia de las siguientes series de números reales:

a) $\sum \frac{1}{n\omega}$
b) $\sum \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$
c) $\sum \frac{2n+1}{(n+1)^2(n+2)^2}$
d) $\sum \left(\frac{3n}{3n+1}\right)^n$
e) $\sum \frac{n^2}{4^{(n-1)}}$

Ejercicio 14.7. Estudiar la convergencia de las series

a) $\sum \frac{n^3}{e^n}$
b) $\sum \left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^{\frac{n}{2}}$
c) $\sum \frac{(n\omega)^2}{(2n)\omega}$
d) $\sum \frac{2^n}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)}$
e) $\sum \left(\frac{n+1}{n^2}\right)^n$
f) $\sum \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n+2)}$
g) $\sum \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}{5\cdot 7\cdot 9\cdots(2n+3)}$

Ejercicio 14.8. Discutir la convergencia de las siguientes series de números reales:

a) $\sum(-1)^n \frac{20^n}{n+1}$
b) $\sum \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}\right)^2$
c) $\sum \log\left(1+\frac{1}{n}\right)$
d) $\sum \log\left(\frac{n^2+3}{n^2+2}\right)$
e) $\sum \frac{\sqrt[3]{n}\log(n)}{n^2+1}$
f) $\sum(-1)^n e^{-n}$

E **Ejercicio 14.9.** Estudia el carácter de las siguientes series:

a) $\sum \left(\frac{2n+1}{2n+5}\right)^{n^2}$.

b) $\sum \frac{1+\log(n)}{n^n}$.

E **Ejercicio 14.10.** Estudiar, según los valores de $a > 0$ la convergencia de las siguientes series:

a) $\sum \frac{a^n}{n^a}$

b) $\sum a^n n^a$

14.6.2 Suma de series

Ejercicio 14.11. Suma, si es posible, las siguientes series

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{15}{10^n}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n(n+1)}$

c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n}$

Ejercicio 14.12. Suma, si es posible, las siguientes series

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+3)(n+4)}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+3}}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+3^n}{5^n}$

Ejercicio 14.13. Suma la serie de números reales $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+n+1}{n\omega}$

Series de potencias

15

El polinomio de Taylor nos mostró cómo es posible aproximar una función por un polinomio y, al mismo tiempo, mantener un cierto control sobre el error que estamos cometiendo. Por ejemplo, podemos escribir la función exponencial como su polinomio más el error cometido, $R_n(x)$,

$$e^x = 1 + \frac{x}{1\omega} + \frac{x^2}{2\omega} + \cdots \frac{x^n}{n\omega} + R_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i\omega} + R_n(x).$$

También sabemos que cuanto más alto sea el grado del polinomio, es más fácil que el error sea menor. De hecho, en el caso de la función exponencial se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0,$$

para cualquier número real x. Dicho de otra forma,

$$e^x = \lim_{n\to\infty} 1 + \frac{x}{1\omega} + \frac{x^2}{2\omega} + \cdots \frac{x^n}{n\omega} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n\omega}.$$

¿Qué ocurre con otras funciones? Sabemos, por ejemplo, que

$$\cos(x) = \lim_{n\to\infty} 1 - \frac{x^2}{2\omega} + \frac{x^4}{4\omega} + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)\omega} x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)\omega}$$

para cualquier x. Puedes encontrar los desarrollos de algunas funciones más en el Apéndice B.2.

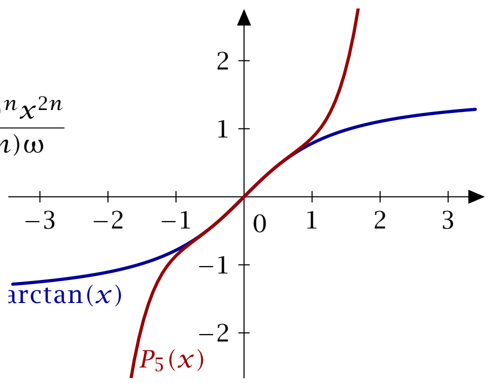


Figura 15.1 La función arcotangente y su polinomio de Taylor de orden 5

En este capítulo vamos a ver qué obtenemos si unimos los conocimientos de series numéricas que tenemos a los resultados que vimos sobre polinomios de Taylor. Más concretamente, tenemos tres problemas:

a) dada una función, asociarle un "polinomio de grado infinito",

b) estudiar la convergencia de dicho desarrollo y, por último,

c) decidir si el límite de dicho desarrollo es la función original.

En cuanto al primer punto, ya hemos definido el polinomio de Taylor. Para el segundo punto nos hará falta utilizar los conocimientos de series del tema anterior. Piensa que un "polinomio de grado infinito" no es más que una serie. Con respecto al último punto, aunque no daremos una respuesta completamente satisfactoria, sí daremos condiciones suficientes aplicables en muchos de los casos usuales.

15.1 Definición

Serie de potencias

Definición 15.1. Sea a un número real. Una *serie de potencias* centrada en a es una serie de funciones de la forma $\sum_{n\geq 0} a_n(x-a)^n$, donde $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de números reales.

El conjunto de valores para los que una serie es convergente no puede ser cualquiera. Tiene un comportamiento muy concreto que depende del llamado radio de convergencia.

Definición 15.2. Sea $\sum_{n\geq 0} a_n(x-a)^n$ una serie de potencias. Consideremos el conjunto

$$A = \{r \in \mathbb{R}^+ \colon \text{la sucesión } \{a_n r^n\} \text{ está acotada}\}.$$

Radio de convergencia

Se define el *radio de convergencia*, R, de la serie como:
a) si $A = \emptyset$, $R = 0$,
b) si A es no vacío y no mayorado, $R = \infty$, y
c) si A es no vacío y mayorado, $R = \sup(A)$.

En función de este radio es posible describir explícitamente dónde es convergente la serie de potencias.

Teorema 15.3. *Sea $\sum_{n\geq 0} a_n(x-a)^n$ una serie de potencias con radio de convergencia R. Entonces*
a) si $R = 0$, la serie sólo converge en $x = a$,
b) si $R = \infty$, la serie converge absolutamente en todo $\mathbb{R}$, y
c) si $R \in \mathbb{R}^+$, la serie converge absolutamente en $]a-R, a+R[$. Además la serie no converge en ningún punto de $\mathbb{R} \setminus [a-R, a+R]$.

Este teorema nos deja prácticamente resuelto el estudio de la convergencia de la serie a falta de saber qué ocurre en $x = a + R$ y $x = a - R$. Bueno, no está mal. De $\mathbb{R}$ hemos pasado a sólo dos puntos. Estos dos puntos tendremos que estudiarlos aplicando los criterios que hemos visto.

El siguiente paso parece claro: ¿cómo calculamos el radio de convergencia?

15.2 Criterios de convergencia

Teorema de Cauchy-Hadamard

Teorema 15.4. *Sea $\sum_{n\geq 0} a_n(x-a)^n$ una serie de potencias con radio de convergencia R.*
a) Si $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$, entonces $R = \infty$.
b) Si $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L \in \mathbb{R}^+$, entonces $R = \frac{1}{L}$.
c) Si $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$, entonces $R = 0$.

Aplicando el criterio de la raíz (Proposición 13.31) se obtiene el siguiente corolario.

Corolario 15.5. *Sea $\sum_{n\geq 0} a_n(x-a)^n$ una serie de potencias con radio de convergencia R. Supongamos que $a_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

a) Si $\lim_{n\to\infty} \left| \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 0$, *entonces* $R = \infty$.
b) Si $\lim_{n\to\infty} \left| \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L \in \mathbb{R}^+$, *entonces* $R = \frac{1}{L}$.
c) Si $\lim_{n\to\infty} \left| \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \infty$, *entonces* $R = 0$.

Observación 15.6. Como se puede ver en cualquiera de los criterios anteriores, el cálculo del radio de convergencia sólo tiene en cuenta a a_n. No importa dónde esté centrada la serie de potencias. Las series $\sum a_n x^n$ y $\sum a_n (x-a)^n$ tienen el mismo radio de convergencia. Sí importa para saber dónde es convergente dicha serie. Por ejemplo, la serie es convergente, al menos, en $]-R, R[$ y la serie $\sum a_n (x-a)^n$ lo es en $]a-R, a+R[$.

Ejemplo 15.7.
Vamos a estudiar la convergencia de la serie de potencias $\sum \frac{n\omega}{(n+1)^n} x^n$
Calculemos en primer lugar el radio de convergencia.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)\omega}{(n+2)^{n+1}}}{\frac{n\omega}{(n+1)^n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n+2} \right)^{n+1} = \frac{1}{e},$$

y, por tanto, el radio de convergencia es $R = e$.
En segundo lugar, estudiemos la convergencia en $x = R$. Tenemos que estudiar la convergencia de la serie $\sum \frac{n\omega}{(n+1)^n} e^n$. Para ello aplicamos el criterio del cociente:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+1)\omega e^{n+1}}{(n+2)^{n+1}}}{\frac{n\omega e^n}{(n+1)^n}} = \left(\frac{n+1}{n+2} \right)^{n+1} e$$

Por el Ejemplo 13.35, sabemos que $\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+1}$ es decreciente y con límite $\frac{1}{e}$. Por tanto $\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+1} e \geq 1$ y, en particular, la serie no es convergente. Obsérvese que hemos comprobado que el término general de la serie no converge a cero.
Por último, en $x = -R$, tenemos que estudiar la convergencia de la serie $\sum (-1)^n \frac{n\omega}{(n+1)^n} e^n$. En este caso, salvo el signo, acabamos de ver que el término general no converge a cero y, por tanto, la serie tampoco es convergente.

15.3 Funciones definidas mediante series de potencias

Si la serie de potencias $\sum_{n\geq 0} a_n (x-a)^n$ tiene radio de convergencia R, tiene sentido considerar la función

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n, \quad \forall x \in]a-R, a+R[.$$

¿Qué propiedades tiene está función? ¿Es derivable y, caso de serlo, cuánto vale su derivada? A preguntas como esta responde el siguiente resultado.

Teorema 15.8. *Sea* $\sum_{n\geq 0} a_n (x-a)^n$ *una serie de potencias con radio de convergencia* $R > 0$. *Entonces la función* $f\colon]a-R, a+R[\to \mathbb{R}$ *definida como*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n, \quad \forall x \in]a-R, a+R[,$$

es derivable y su derivada vale

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n (x-a)^{n-1}, \quad \forall x \in]a-R, a+R[,$$

Si $R = \infty$, el resultado es cierto en todo $\mathbb{R}$.

Como consecuencia, también podemos calcular una primitiva de una serie de potencias.

Corolario 15.9. *Sea $\sum_{n\geq 0} a_n(x-a)^n$ una serie de potencias con radio de convergencia $R > 0$. Entonces la función $f\colon]a-R, a+R[\to \mathbb{R}$ definida como*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n, \quad \forall x \in]a-R, a+R[,$$

tiene como primitiva a

$$\int f(x)\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-a)^{n+1}, \quad \forall x \in]a-R, a+R[,$$

Si $R = \infty$, el resultado es cierto en todo $\mathbb{R}$.

Estos dos resultados indican que las funciones definidas mediante serie de potencias se comportan de forma similar a los polinomios y, de hecho, su derivada o su integral se puede calcular término a término. Más aún, la derivada y la integral de una serie de potencias vuelve a ser una serie de potencias con el mismo radio de convergencia. Podemos iterar el proceso y obtenemos que las funciones definidas mediante series de potencias no son sólo derivables sino de clase C^∞ y que

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n\omega}{(n-k)\omega} a_n (x-a)^{n-k}.$$

Ejemplo 15.10. El desarrollo de Taylor de la función $f(x) = \ln(1+x)$ centrado en $a = 0$ lo podemos hacer calculando todas las derivadas de la función o, mucho más fácilmente, usando que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-x)^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n \\
&= 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots
\end{aligned}$$

para cualquier $x \in]-1, 1[$. Si ahora integramos,

$$\begin{aligned}
\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} + \ldots \\
&= K + \sum_{n=1} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}
\end{aligned}$$

para adecuada constante K (recuerda que dos primitivas se diferencian en una constante) y para cualquier $x \in]-1, 1[$. ¿Cuál es el valor de la constante K? Evaluemos en un punto donde sea fácil realizar los cálculos. Por ejemplo, para $x = 0$ se obtiene que $K = 0$. Resumiendo

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}.$$

15.4 Desarrollo de Taylor

Hemos introducido las series de potencias como una versión más refinada del polinomio de Taylor y, de hecho, la primera forma de calcular el desarrollo de Taylor, la serie de potencias asociada a una función, es calcular el polinomio de Taylor de orden arbitrario. Para ello nos hace falta encontrar una fórmula para las derivadas de cualquier orden de dicha función y eso sabemos que puede ser difícil. Ahora bien, supuesto que seamos capaces de hacerlo, ¿qué relación hay entre la serie de potencias y la función?

Teorema 15.11. *Sea I un intervalo y $f\colon I \to \mathbb{R}$ una función de clase C^∞. Supongamos que existe M tal que*

$$\left| f^{(n)}(x) \right| \leq M, \quad \forall x \in I, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Entonces, para cualesquiera $a, x \in I$ se cumple que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n\omega}(x-a)^n.$$

En otras palabras, si las derivadas de la función están uniformemente acotadas, entonces la suma del desarrollo de Taylor coincide con la función. Si la función y sus derivadas no están uniformemente acotadas es posible que la función no coincida con su desarrollo de Taylor como se puede ver en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 15.12. La función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como $f(x) = e^{-1/x^2}$ si $x \neq 0$ y $f(0) = 0$ es de clase C^∞ y $f^{(n)}(0) = 0$ para cualquier natural n. Por tanto, su desarrollo de Taylor es 0 que, evidentemente, no coincide con la función salvo en el origen.

15.5 Cálculo del desarrollo en serie de potencias

Existen dos posibilidades a la hora de calcular el desarrollo de Taylor de una función: encontrar una fórmula para la derivada n-ésima o calcular el desarrollo a partir de otro ya conocido.

Podemos calcular el desarrollo de una función utilizando desarrollos conocidos, derivadas e integrales. La idea es sencilla: si conocemos el desarrollo de la derivada función, integremos dicho desarrollo y obtendremos el que buscamos salvo una constante. También tenemos la posibilidad de utilizar un cambio de variable. Por ejemplo, sabemos que la suma de una progresión geométrica nos da el desarrollo de la función

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n, \quad \text{con } |x| < 1.$$

Por tanto,

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(-x^2\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n},$$

que es la derivada de la función arcotangente. En consecuencia, el desarrollo de la arcotangente es, salvo una constante,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

¿Cuál es esa constante? La anterior serie y la función arcotangente valen lo mismo en el origen y, por tanto, dicha constante es cero, esto es

$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad \text{si } |x| < 1.$$

Desarrollo de algunas funciones racionales

Las progresiones geométricas han demostrado su utilidad para calcular el desarrollo de Taylor del logaritmo o la función arcotangente. Otro tipo común de funciones son las racionales. ¿Cómo calculamos su desarrollo? Comencemos por un ejemplo sencillo:

$$\frac{1}{a-x} = \frac{1}{a}\frac{1}{1-\frac{x}{a}} = \frac{1}{a}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{a^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{a^{n+1}}.$$

Derivando obtenemos el desarrollo de $\frac{1}{(x-a)^2}$,

$$\left(\frac{1}{a-x}\right)' = \frac{1}{(a-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^{n-1}}{a^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)x^n}{a^{n+2}}.$$

Desarollo de la binomial

Sea a un número real no nulo y consideremos la función $f\colon]-1,+\infty[\to\mathbb{R}$ definida como

$$f(x) = (1+x)^a.$$

¿Cuál es su desarrollo de Taylor? Calculemos su derivada n–ésima.

$$\begin{aligned} f(x) &= (1+x)^a &&\Longrightarrow f(0) = 1 \\ f'(x) &= a(1+x)^{a-1} &&\Longrightarrow f'(0) = a \\ f''(x) &= a(a-1)(1+x)^a &&\Longrightarrow f''(0) = a(a-1) \end{aligned}$$

y, en general,

$$f^{(n)}(x) = a(a-1)\cdots(a-n+1)(1+x)^{a-n} \Longrightarrow f^{(n)}(0) = a(a-1)\cdots(a-n+1).$$

Por tanto, el desarrollo centrado en el origen es

$$(1+x)^a = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a(a-1)\ldots(a-n+1)}{n\omega}x^n, \quad \text{para } |x| < 1. \tag{15.1}$$

Observación 15.13. En el caso particular de que a sea un número natural, $(1+x)^a$ es un polinomio de grado a cuyo desarrollo sabemos calcular utilizando el binomio de Newton. ¿Hay alguna diferencia con lo que acabamos de hacer? Ninguna. Fíjate que si $n \geq a$, aparece el factor $a-n$ que vale cero y, por tanto, hace que el desarrollo (15.1) sea finito. Para acentuar aún más la similitud, observa que

$$\binom{a}{n} = \frac{a(a-1)\ldots(a-n+1)}{n\omega},$$

para cualquier a natural mayor que n. Seguiremos utilizando esta notación y, en general,

$$\binom{a}{n} = \frac{a\omega}{n\omega\,(a-n)\omega} = \frac{a(a-1)\ldots(a-n+1)}{n\omega}$$

para cualquier $a\in\mathbb{R}$ y cualquier $n\in\mathbb{N}$.

Ejemplo 15.14. Vamos a calcular el desarrollo de Taylor de la función arcoseno en el origen. Para ello vamos a desarrollar su derivada utilizando el desarrollo de la binomial. Como

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \left(1-x^2\right)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} (-1)^n x^{2n}.$$

Por tanto,

$$\int f'(x)\,dx = \int \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} (-1)^n x^{2n}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Se puede desarrollar algo más esta expresión teniendo en cuenta la definición del binomio:

$$\binom{-\frac{1}{2}}{n} = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n\omega} = \frac{(-1)^n 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)}{2^n n\omega},$$

con lo que

$$\int f'(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)}{2^n n\omega} x^{2n} = f(x) + K$$

para alguna constante K. Como $\operatorname{arcsen}(0) = 0$, se cumple que $K = 0$ y, por tanto,

$$\operatorname{arcsen}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)}{2^n n\omega} x^{2n}$$

si $|x| < 1$.

15.6 Algunas aplicaciones de las series de potencias

15.6.1 La función exponencial compleja

La definición de la función compleja

$$\exp(z) = e^{\operatorname{Re}(z)}\left(\cos(\operatorname{Re}(z)) + i\operatorname{sen}(\operatorname{Im}(z))\right)$$

extiende de forma natural la función exponencial real. Ya hemos tratado de justificar el porqué de está definición en temas anteriores (véase la Sección ??). La razón de esta definición viene de intentar aplicar las fórmulas conocidas a números complejos. Vamos a verlo con un poco más de detalle. Sabemos que

$$\begin{aligned}
\exp(x) &= 1 + x + \frac{x^2}{2\omega} + \frac{x^3}{3\omega} + \cdots \\
\cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2\omega} + \frac{x^4}{4\omega} + \cdots \\
\operatorname{sen}(x) &= x - \frac{x^3}{3\omega} + \frac{x^5}{5\omega} + \cdots
\end{aligned}$$

para cualquier x real. Si queremos dar una definición de e^{it} con $t \in reals$, sustituyamos en el desarrollo anterior:

$$\begin{aligned}
\exp(it) &= 1 + (it) + \frac{(it)^2}{2\omega} + \frac{(it)^3}{3\omega} + \frac{(it)^4}{4\omega} + \frac{(it)^5}{5\omega} \cdots \\
&= 1 + it - \frac{t^2}{2\omega} - i\frac{t^3}{3\omega} + \frac{t^4}{4\omega} + i\frac{t^5}{5\omega} + \cdots
\end{aligned}$$

agrupamos parte real con parte real y parte imaginaria con parte imaginaria

$$
\begin{aligned}
&= \left(1 - \frac{t^2}{2\omega} + \frac{t^4}{4\omega} + \cdots\right) + i\left(t - \frac{t^3}{3\omega} + \frac{t^5}{5\omega} + \cdots\right) \\
&= \cos(t) + i\operatorname{sen}(t)
\end{aligned}
$$

que es la definición que habíamos dado en su momento.

15.6.2 El problema de Basilea

El llamado problema de Basilea fue propuesto por el matemático italiano Pietro Mengoli y consistía en calcular la suma de los recíprocos de los cuadrados de los naturales o, después de lo que hemos aprendido, en calcular la suma de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots$$

Leonard Euler fue el primero en darse cuenta de que dicha suma valía $\frac{\pi^2}{6}$. Su demostración no es demasiado rigurosa pero es muy ingeniosa y, con lo que ya sabemos, fácil de contar. Vamos a ello.

El desarrollo de Taylor de la función seno es

$$\operatorname{sen}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)\omega}.$$

Dividiendo por x,

$$\frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)\omega} = 1 - \frac{x^2}{3\omega} + \frac{x^4}{5\omega} + \cdots$$

De este polinomio (de grado infinito) conocemos sus ceros: $\pm n\pi$ con n natural. Escribimos dicho polinomio como producto de factores:

$$
\begin{aligned}
\frac{\operatorname{sen}(x)}{x} &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)\omega} \\
&= \left(1 - \frac{x}{\pi}\right)\left(1 + \frac{x}{\pi}\right)\left(1 - \frac{x}{2\pi}\right)\left(1 + \frac{x}{2\pi}\right)\cdots\left(1 - \frac{x}{n\pi}\right)\left(1 + \frac{x}{n\pi}\right) \\
&= \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{2^2\pi^2}\right)\cdots\left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)
\end{aligned}
$$

Si desarrollamos el producto de la derecha, el coeficiente de x^2 es

$$-\left(\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{2^2\pi^2} + \frac{1}{3^2\pi^2} + \cdots\right) = -\frac{1}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

que podemos igualar con el correspondiente coeficiente del desarrollo de Taylor de $\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}$ y obtenemos que

$$-\frac{1}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = -\frac{1}{6},$$

de donde se obtiene que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

De la misma forma se puede calcular la suma de los recíprocos de cualquier potencia par. Por ejemplo, ¿cuánto vale la suma $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$? Calcúlalo.

15.7 Ejercicios

Ejercicio 15.1. Calcular el radio de convergencia de las siguientes series de potencias

a) $\sum (-1)^n x^n$
b) $\sum \frac{1}{n} x^n$
c) $\sum \frac{1}{n^2} x^n$
d) $\sum n^2 x^n$
e) $\sum n\omega x^n$

Ejercicio 15.2. Determinar el campo de convergencia de las siguientes series de potencias.

a) $\sum n^n x^n$
b) $\sum n(x+2)^n$
c) $\sum \frac{2^n}{3n+1}\left(x+\frac{1}{2}\right)^n$
d) $\sum \ln(n)(x-1)^n$

Ejercicio 15.3. Determinar el campo de convergencia de las siguientes series de potencias.

a) $\sum \frac{(-1)^n}{3^n} x^n$

b) $\sum \frac{1}{(\ln(n))^n} x^n$

c) $\sum \frac{(-1)^n}{n+1} x^n$

d) $\sum \frac{(-1)^n \ln(n)}{n} x^n$

Ejercicio 15.4. Calcula el radio de convergencia de las siguientes series de potencias y estudia el comportamiento en los extremos.

a) $\sum \frac{1}{2^n(2n+1)} x^n$
b) $\sum \frac{n\omega}{(n+1)^n} x^n$
c) $\sum \frac{1}{\ln(n+2)} x^n$

Ejercicio 15.5. Calcula el radio de convergencia de las siguientes seres de potencias y estudia el comportamiento en los extremos.

a) $\sum \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n+2)} x^n$
b) $\sum \frac{n-\sqrt{n}}{n^2+n+1} x^n$

Ejercicio 15.6. Calcular el desarrollo en serie de potencias centrado en el origen de la función $f(x) = \ln(1+x)$.

Ejercicio 15.7. Calcular el desarrollo en serie de potencias de las funciones

a) $\frac{1}{1+x^3}$

b) $\operatorname{sen}(x)$

c) $\ln(1+x^2)$

d) e^{-x^2}

E **Ejercicio 15.8.** Calcula el desarrollo en serie de potencias centrado en cero de la función $f(x) = x^2 \operatorname{sen}(x) + \frac{1}{x-1}$ y estudia dónde es convergente dicho desarrollo.

Ejercicio 15.9. Calcular la serie de potencias centrada en cero de la función $f(x) = \frac{1}{x^2+5x+6}$.

Ejercicio 15.10. Calcular el desarrollo en serie de potencias centrado en el origen de la función $f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ definida en el intervalo $]-1,1[$. Utilizar dicho desarrollo para calcular $\ln(2)$ con ocho cifras decimales exactas.

Apéndices

Geometría

A

A.1 Parábolas, elipses e hipérbolas

Además de las curvas asociadas a lineas rectas, funciones trigonométricas o a cualquier otra función elemental, hay tres curvas que tienen una destacada importancia: las *secciones cónicas*. Los griegos ya conocían que el corte de un cono por un plano producía sólo tres tipos de curvas: parábolas, elipses e hipérbolas. Vamos a comentarlas con más detalle.

A.1.1 Parábola

$$\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon\ y = ax^2+bx+c\right\}$$

Una parábola es el conjunto de puntos que equidistan de un punto dado, llamado *foco*, y de una recta llamada *directriz*. La recta perpendicular a la directriz y que pasa por el foco se llama *eje* de la parábola. La intersección del eje y de la directriz se llama *vértice*.

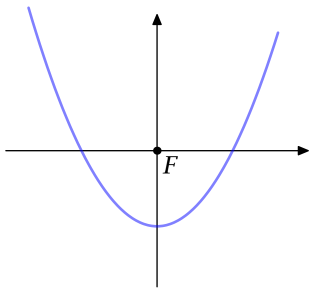


Figura A.1 Parábola

A.1.2 Elipse

$$\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\right\}$$

$$\text{Área} = \pi ab$$

Una elipse es el conjunto de puntos verificando que la suma de las distancias a dos puntos fijos (F y F'), llamados *focos*, es una constante mayor que la distancia entre los focos. El punto medio del segmento que une los focos se llama *centro*. El segmento que pasa por los dos focos y acaba en la elipse se llama *eje mayor*. El segmento perpendicular al eje mayor y que acaba en la elipse es el *eje menor*. Las intersecciones de los ejes con la elipse se llaman *vértices* de la elipse. Los focos son los puntos $(c,0)$ y $(-c,0)$ que verifican $a^2 = b^2 + c^2$. El caso particular $a = b$ es conocido: la *circunferencia*.

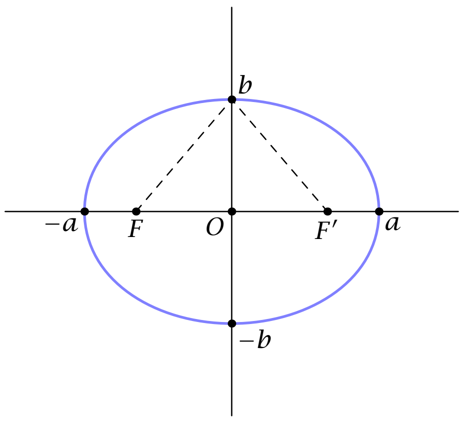


Figura A.2 Elipse

Las ecuaciones que hemos escrito describen elipses o, en el caso particular de que los semiejes coincidan, circuferencias centradas en el origen de coordenadas. Si el centro está en el punto (h,k) la ecuación es

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1.$$

Es inmediato comprobar que la circunferencia de radio r centrado en el punto (h,k) es

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

y su longitud es

Longitud de una circunferencia de radio $r = 2\pi r$

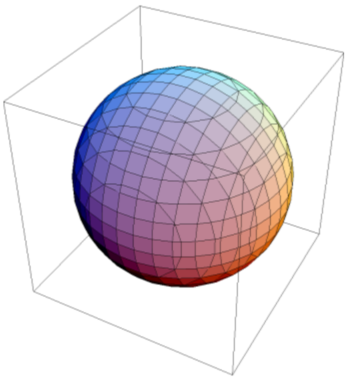
A.1.3 Hipérbola

$$\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon\ \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\right\}$$

Una hipérbola es el conjunto de puntos que verifican que la diferencia de las distancias a dos puntos fijos, llamados *focos*, es una constante positiva menor que la distancia entre los focos (F y F').

A.2 Superficies cuadráticas

a) **Esfera:** $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$



Secciones paralelas al plano xy: circunferencias.

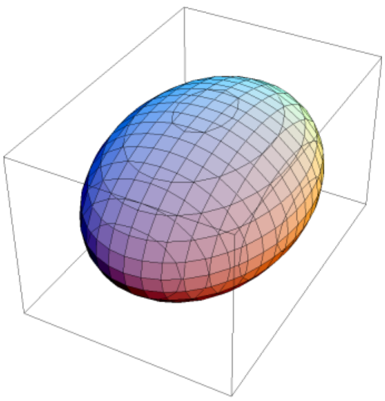
Secciones paralelas al plano xz: circunferencias.

Secciones paralelas al plano yz: circunferencias.

Volumen = $\frac{4}{3}\pi R^3$

Área = $4\pi R^2$

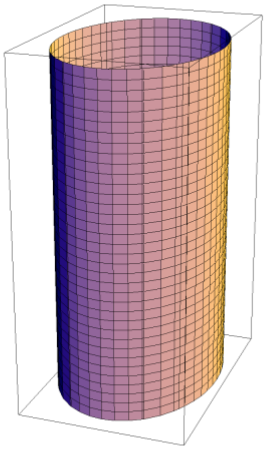
b) **Elipsoide:** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$



Secciones paralelas al plano xy: Elipses.

Secciones paralelas al plano xz: Elipses.

Secciones paralelas al plano yz: Elipses.



c) **Cilindro elíptico:** $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

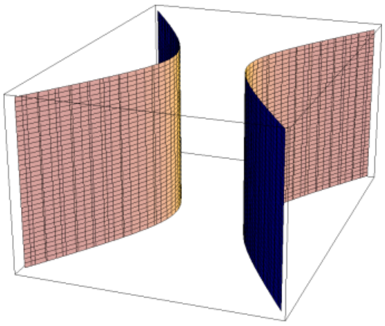
Secciones paralelas al plano xy: elipses.

Secciones paralelas al plano xz: rectas.

Secciones paralelas al plano yz: rectas.

Volumen = $\pi ab \times$altura

d) **Cilindro hiperbólico:** $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

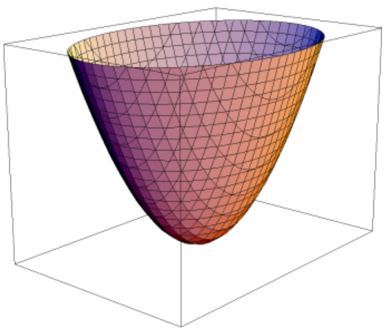


Secciones paralelas al plano xy: hipérbolas.

Secciones paralelas al plano xz: rectas.

Secciones paralelas al plano yz: rectas.

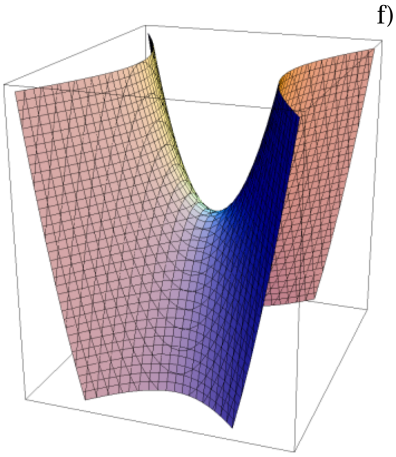
e) **Paraboloide elíptico:** $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z$



Secciones paralelas al plano xy: Elipses.

Secciones paralelas al plano xz: Parábolas.

Secciones paralelas al plano yz: Parábolas.

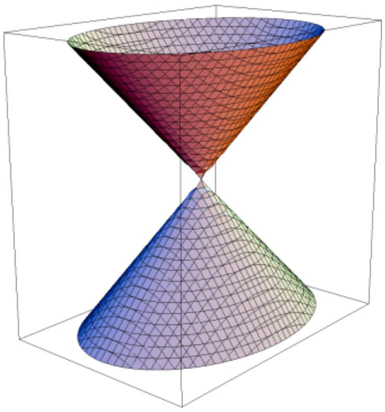


f) **Paraboloide hiperbólico:** $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z$

Secciones paralelas al plano xy: Hipérbolas.

Secciones paralelas al plano xz: Parábolas.

Secciones paralelas al plano yz: Parábolas.

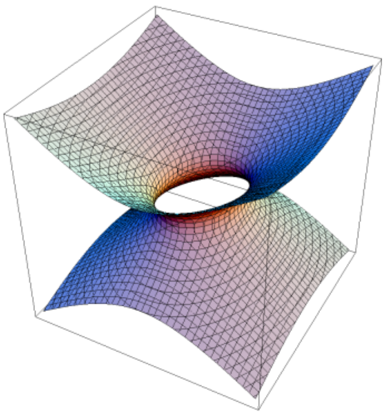


g) **Cono elíptico:** $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$

Secciones paralelas al plano xy: Elipses.

Secciones paralelas al plano xz: Hipérbolas.

Secciones paralelas al plano yz: Hipérbolas.

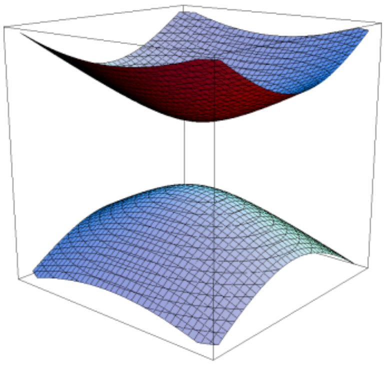


h) **Hiperboloide elíptico de una hoja:** $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

Secciones paralelas al plano xy: Elipses.

Secciones paralelas al plano xz: Hipérbolas.

Secciones paralelas al plano yz: Hipérbolas.



i) **Hiperboloide elíptico de dos hojas:** $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$

Secciones paralelas al plano xy: Elipses.

Secciones paralelas al plano xz: Hipérbolas.

Secciones paralelas al plano yz: Hipérbolas.

Algunas tablas

B

B.1 Derivadas

A la lista de derivadas de funciones habrá que añadir las reglas que permiten derivar funciones compuestas a partir de éstas como la regla de la cadena.

Función	Derivada
$f(x) = x^n$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = \log(x)$, $x \in \mathbb{R}^+$	$f'(x) = 1/x$
$f(x) = \log_a(x)$, $x \in \mathbb{R}^+$, $a > 0$, $a \neq 1$	$f'(x) = \log_a(e)/x$
$f(x) = a^x$, $x \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$	$f'(x) = a^x \log(a)$
$f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$,	$f'(x) = e^x$
$f(x) = x^\alpha$, $x > 0$, $\alpha \neq 0$	$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$
$f(x) = \operatorname{sen}(x)$	$f'(x) = \cos(x)$
$f(x) = \cos(x)$	$f'(x) = -\operatorname{sen}(x)$
$f(x) = \tan(x)$, $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\colon k \in \mathbb{Z}\right\}$	$f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$
$f(x) = \operatorname{cotan}(x)$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi\colon k \in \mathbb{Z}\}$	$f'(x) = \dfrac{-1}{\operatorname{sen}^2(x)}$
$f(x) = \sec(x)$	$f'(x) = \sec(x)\tan(x)$
$f(x) = \operatorname{cosec}(x)$	$f'(x) = -\operatorname{cosec}(x)\operatorname{cotan}(x)$
$f(x) = \operatorname{arcsen}(x)$, $x \in]-1,1[$	$f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$f(x) = \arccos(x)$, $x \in]-1,1[$	$f'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$f(x) = \arctan(x)$	$f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$
$f(x) = \operatorname{arccotan}(x)$	$f'(x) = \dfrac{-1}{1+x^2}$
$f(x) = \operatorname{arcosec}(x)$	$f'(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$
$f(x) = \operatorname{arcocosec}(x)$	$f'(x) = -\dfrac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$
$f(x) = \operatorname{senh}(x)$	$f'(x) = \cosh(x)$
$f(x) = \cosh(x)$	$f'(x) = \operatorname{senh}(x)$
$f(x) = \tanh(x)$	$f'(x) = \dfrac{1}{\cosh^2(x)}$

Función	Derivada
$f(x) = \operatorname{cotanh}(x),\ x \neq 0$	$f'(x) = \dfrac{-1}{\operatorname{senh}^2(x)}$
$f(x) = \operatorname{arcsenh}(x)$	$f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$f(x) = \operatorname{arccosh}(x)$	$f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$f(x) = \operatorname{arctanh}(x)$	$f'(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$
$f(x) = \operatorname{arccotanh}(x)$	$f'(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$
$f(x) = \operatorname{arcsech}(x)$	$f'(x) = \dfrac{-1}{x\sqrt{1-x^2}}$
$f(x) = \operatorname{arccosech}(x)$	$f'(x) = \dfrac{-1}{\lvert x \rvert \sqrt{1+x^2}}$

B.2 Desarrollo de Taylor

Los desarrollos de Taylor que recogemos a continuación han aparecido con anterioridad o se pueden calcular por métodos similares.

Función	Desarrollo de Taylor
$\dfrac{1}{1-x}$	$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$
e^x	$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n\omega} = 1 + x + \frac{x^2}{2\omega} + \frac{x^3}{3\omega} + \cdots$
$\log(1+x)$	$\displaystyle x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}$
$\log\left(\dfrac{1}{1+x}\right)$	$\displaystyle x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$
$\operatorname{sen}(x)$	$\displaystyle x - \frac{x^3}{3\omega} + \frac{x^5}{5\omega} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)\omega}$
$\cos(x)$	$\displaystyle 1 - \frac{x^2}{2\omega} + \frac{x^4}{4\omega} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)\omega}$
$\arctan(x)$	$\displaystyle x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$
$(1+x)^k$	$\displaystyle 1 + kx + \frac{k(k-1)x^2}{2} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{k}{n} x^n$
$\operatorname{senh}(x)$	$\displaystyle x + \frac{x^3}{3\omega} + \frac{x^5}{5\omega} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)\omega}$
$\cosh(x)$	$\displaystyle 1 + \frac{x^2}{2\omega} + \frac{x^4}{4\omega} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)\omega}$

B.3 Primitivas

La lista de primitivas de las funciones elementales no es la más completa que se puede encontrar. Hay textos con listas mucho más amplias. Sin ir más lejos, la lista de derivadas que acabamos de leer es mucho más extensa. En este caso no se trata de que la lista sea exhaustiva sino de tener una base sobre la que comenzar a calcular una primitiva de funciones más generales.

$\int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} \quad (a \neq -1)$	$\int \frac{1}{x}\,dx = \log\lvert x\rvert$
$\int a^x\,dx = \frac{1}{\log(a)}a^x$	$\int e^x\,dx = e^x$
$\int \operatorname{sen}(x)\,dx = -\cos(x)$	$\int \cos(x)\,dx = \operatorname{sen}(x)$
$\int \tan(x) = -\log\lvert\cos(x)\rvert$	$\int \operatorname{cotan}(x) = \log\lvert\operatorname{sen}(x)\rvert$
$\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2(x)}\,dx = -\operatorname{cotan}(x)$	$\int \frac{1}{\cos^2(x)}\,dx = \tan(x)$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \operatorname{arcsen}(x)$	$\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arccos(x)$
$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan(x)$	$\int \frac{-1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arccotan}(x)$
$\int \operatorname{senh}(x)\,dx = \cosh(x)$	$\int \cosh(x)\,dx = \operatorname{senh}(x)$
$\int \tanh(x)\,dx = \log\lvert\cosh(x)\rvert$	$\int \operatorname{cotanh}(x)\,dx = \log\lvert\operatorname{senh}(x)\rvert$
$\int \frac{1}{\cosh^2(x)}\,dx = \tanh(x)$	$\int \frac{1}{\operatorname{senh}^2(x)}\,dx = -\operatorname{cotanh}(x)$

Progresiones aritméticas y geométricas

C

C.1 Progresiones aritméticas

Cuando una sucesión de números verifica que la diferencia entre dos términos consecutivos es constante decimos que la dicha sucesión es una *progresión aritmética*. Por ejemplo

a) 0, 5, 10, 15,... es una progresión aritmética donde la diferencia entre términos consecutivos es 5,

b) a, $a+d$, $a+2d$, $a+3d$,... es una progresión aritmética cuya diferencia es d.

Es fácil calcular cualquier término de una progresión aritmética conociendo el primer término y *diferencia* común. El término n-ésimo de una progresión aritmética cuyo primer término es a y la diferencia es d es

$$\boxed{\text{término } n\text{-ésimo} = \boldsymbol{a + (n-1)d}}$$

Suma de una progresión aritmética

¿Cuánto vale la suma de los términos de una progresión aritmética? Parece natural que la suma de los n primeros términos de una progresión aritmética con término inicial a y diferencia d sólo dependa de estos dos parámetros, pero ¿tenemos una fórmula? Para sumar

$$a + (a+d) + (a+2d) + \cdots (a+(n-1)d)$$

fijemonos en que si sumamos el primer término y el último, el segundo y el penúltimo y así sucesivamente siempre obtenemos el mismo resultado. Quizá es más fácil verlo de la siguiente forma, sumemos los términos de la progresión con los mismos términos, pero escritos en orden inverso:

$$\begin{array}{ccccc}
a & + & a+(n-1)d & = & 2a+(n-1)d \\
a+d & + & a+(n-2)d & = & 2a+(n-1)d \\
a+2d & + & a+(n-3)d & = & 2a+(n-1)d \\
\cdots & + & \cdots & = & 2a+(n-1)d \\
a+(n-3)d & + & a+2d & = & 2a+(n-1)d \\
a+(n-2)d & + & a+d & = & 2a+(n-1)d \\
a+(n-1)d & + & a & = & 2a+(n-1)d \\
\hline
 & & & & n(2a+(n-1)d)
\end{array}$$

Así obtenemos que

$$2\left[a + (a+d) + (a+2d) + \cdots (a+(n-1)d)\right] = n(2a+(n-1)d),$$

y por tanto

$$\boxed{\boldsymbol{a + (a+d) + (a+2d) + \cdots (a+(n-1)d) = \frac{n(2a+(n-1)d)}{2}}.}$$

La fórmula anterior permite calcular la suma de los términos de una progresión geométrica en función del primer término, la diferencia y el número de términos. También se puede escribir la suma en función de la diferencia, el primer término y el último. Si notamos

$$a_1 = a,\ a_2 = a + d,\ a_3 = a + 2d, \ldots,\ a_n = a + (n-1)d,$$

entonces

$$\boxed{\boldsymbol{a_1 + a_2 + \cdots a_n = \frac{n\,(a_1 + a_n)}{2}}.}$$

C.2 Progresiones geométricas

Cuando una sucesión de números verifica que la razón entre dos términos consecutivos es constante decimos que la dicha sucesión es una *progresión geométrica*. Por ejemplo

a) 2, 4, 8, 16,... es una progresión geométrica donde la razón entre términos consecutivos es 2,

b) a, $a \cdot r$, $a \cdot r^2$, $a \cdot r^3$,... es una progresión geométrica de razón r.

Como en las progresiones aritméticas, es fácil calcular el término n-ésimo de la progresión cuyo término inicial es a y la razón es r. Dicho término es

$$\boxed{\text{término } n\text{-ésimo} = \boldsymbol{a \cdot r^{n-1}}}$$

Suma de una progresión geométrica

En el Ejemplo 14.3 ya vimos cómo calcular su suma. Para calcular la suma de los n primeros términos,

$$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1},$$

fijémonos que

$$(1-r)\left(a + ar + ar^2 + ar^{n-1}\right) = a - ar^n$$

de donde se deduce que

$$\boxed{\boldsymbol{a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} = \frac{a - ar^n}{1-r}}.}$$

Utilizando la notación

$$a_1 = a,\ a_2 = ar,\ a_3 = ar^2, \ldots,\ a_n = ar^{n-1},$$

podemos expresar la suma en función del primer término, el último y la razón:

$$\boxed{\boldsymbol{a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \frac{a_1 - a_n r}{1-r}}.}$$

Algunos ejemplos y contraejemplos

D

a) Una función continua en un único punto

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ -x, & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

b) Una función continua pero no derivable
La función valor absoluto es continua en toda la recta real pero no es derivable en el origen.

c) Una función derivable pero no de clase C^1
La función $f\colon \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ definida como

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right), & \text{si } x > 0, \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

vale como ejemplo. Es derivable pero la derivada no es continua en el origen.

d) Una función de clase C^n pero no de clase C^{n+1}
Véase el Ejemplo 5.31

e) Una función integrable que no admite primitiva
La función $f\colon [0,3] \to \mathbb{R}$ definida como $f(x) = 0$ para $x \neq 0, 1, 2, 3$ y $f(0) = f(1) = f(2) = f(3) = 1$.

f) Una función con primitiva pero que no es integrable (Riemann)
La función $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, & \text{si } |x| < 1, \\ 0, & \text{si } x = \pm 1 \end{cases}$$

no está acotada y, por tanto, no es integrable Riemann. Su primitiva ya la conoces.

g) Una serie convergente pero no absolutamente convergente
Cualquier sucesión decreciente (pero no demasiado rápidamente) y unos cambios de signo son suficientes para construir un ejemplo: $\sum (-1)^n \frac{1}{n}$ nos vale.

h) Una serie con sumas parciales acotadas pero que no es convergente
Las sumas parciales de la serie $\sum (-1)^n$ están acotadas pero la serie no es convergente (su término general no tiende a cero).

i) Una sucesión que no es convergente ni divergente
Por ejemplo $\{(-1)^n\}$

j) Una sucesión que diverge positivamente pero no es creciente
La sucesión $\{x_n\}$, donde $x_n = n$ si n es par y $x_n = n^2$ si n es impar.

k) Un conjunto que no es abierto ni cerrado
Cualquier intervalo semiabierto (o semicerrado, según se mire): $[0, 1[$, por ejemplo.

Índice alfabético