I. ВВЕДЕНИЕ

Потребность в измерениях у человека появилась давно. Еще в глубокой древности, выбирая палку или камень для охоты, человек не осознанно оценивал их размеры и массу, подбирая их в соответствии с объектом охоты и возможностями своей мускульной силы. И уже тогда, при примитивных измерениях, человек использовал метод сравнения, сравнивал между собой камни или палки, подбирая удобное для себя орудие охоты. Позднее, какие-то из сравниваемых однородных предметов (например, длина ступни, длина локтя и т.д.) принимались за единицы измерения – эталоны и тогда величину измеряемого предмета стало возможным выражать числом. Появились единицы измерения физических величин.

Развитие международных связей и науки потребовало унификации единиц измерения. В настоящее время разработана Международная система единиц (СИ) и большинство стран мира уже перешло на использование этой системы. В нашей стране система СИ введена Государственным стандартом и является обязательной при всех измерениях.

Для обеспечения единства измерений в стране создана метрологическая служба, в задачу которой входит хранение эталонов, воспроизведение единиц различных физических величин и передача их размеров другим средствам измерения, а также проведение поверки, ревизии и экспертизы средств измерения.

I.I. Абсолютная и относительная погрешности

Несовершенство средств измерения, неточность передачи им размеров единиц измерения, несовершенство методики измерения, изменение внешних условий (температура и влажность воздуха, электрическое и магнитное поля, вибрации), физиологические возможности экспериментатора – все это приводит к тому, что в процессе измерения мы не получаем точного значения измеряемой величины, что полученное в результате измерения значение обязательно содержит погрешность.

Задача обработки измерений заключается в том, чтобы определить границы интервала, в котором заключено истинное значение измеряемой величины.

Допустим, измеряется некоторая величина, истинное значение которой равно a , и пусть в результате измерения было получено значение a_1. Тогда разность между измеренным и истинным значениями измеряемой величины:

$$\Delta a = a_1 - a \qquad (I)$$

называется **а б с о л ю т н о й п о г р е ш н о с т ь ю** (ошибкой) измерения. Абсолютная погрешность является размерной величиной и измеряется в тех же единицах, что и искомая величина.

С другой стороны, если при измерении некоторой величины a было получено значение a_1 и при этом допущена ошибка Δa, то можно утверждать, что истинное значение измеряемой величины лежит в интервале от $a - \Delta a$ до $a + \Delta a$. Коротко это можно записать так:

$$a = a_1 \pm \Delta a$$

Очевидно, чем уже интервал от $a_1 - \Delta a$ до $a_1 + \Delta a$, тем точнее проведено измерение.

В действительности истинное значение измеряемой величины всегда остается неизвестным, а значит не известна и ошибка измерения. Поэтому ошибки измерений находят приближенно, используя вместо истинного значения измеряемой величины *наиболее вероятное ее значение.*

Чтобы повысить точность, измерения обычно проводят многократно. Пусть, например, величину a измерили N раз и получили значения a_1, a_2, a_3 ... a_N. Из совокупности этих измерений определяется наиболее вероятное значение измеряемой величины, которое, *как это будет показано ниже,* равно среднеарифметическому из всех значений a_i. После этого можно приближенно определить погрешность каждого измерения:

$$\Delta a_i = a_i - \bar{a}$$

Задача обработки измерений заключается в определении интервала от $\bar{a} - \Delta\bar{a}$ до $\bar{a} + \Delta\bar{a}$, в котором с вероятностью [illegible] заключено истинное значение измеряемой величины. Интервал от $\bar{a} - \Delta\bar{a}$ до $\bar{a} + \Delta\bar{a}$ называется **д о в е р и т е л ь н ы м и н т е р в а л о м**, а $\Delta\bar{a}$ – **г р а н и ц е й д о в е р и т е л ь н о г о и н т е р в а л а.**

Величина α называется **д о в е р и т е л ь н о й в е р о я т н о с т ь ю.** Если число измерений [illegible] достаточно велико, то доверительная вероятность выражает долю из общего числа N тех измерений, в которых измеряемая величина оказалась в пределах доверительного интервала. Так, если было сделано 100 измерений, то при доверительной вероятности $\alpha = 0,95$ в 95 измерениях были получены значения, не выходящие за пределы доверительного интервала. По ГОСТ величина доверительной вероятности должна приниматься $\alpha = 0,95$, а при измерениях величин, от которых зависит безопасность и здоровье людей, доверительная вероятность берется 0,99

Пусть в эксперименте измерялись многократно две однородные величины a и $в$ и при обработке измерений получены значения:

$$a = \bar{a} \pm \Delta\bar{a}$$

$$в = \bar{в} \pm \Delta\bar{в}$$

Графически положение доверительных интервалов для величин a и $в$ показаны на рис. I.

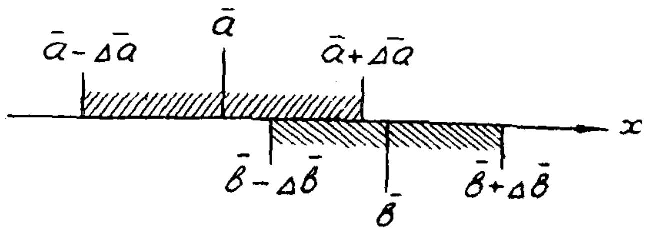


Рис. I.

Если доверительные интервалы для величин [illegible] и $в$ перекрываются, как это имеет место на рис. I, то говорят, что с точностью, полученной в эксперименте, величины a и $в$ равны между собой.

Абсолютная погрешность не характеризует точность проведенных измерений. Так, если при измерении двух отрезков L_1 = 5 мм и L_2 = I,85 м допущена одинаковая абсолютная погрешность ΔL = 0,5 мм, то совершенно очевидно, что точность измерения отрезка L_1 ниже, чем точность измерения отрезка [illegible].

Точность измерения характеризуется величиной **о т н о с и т е л ь н о й п о г р е ш н о с т и** δ, которая равна отношению абсолютной погрешности измерения к измеряемой величине (наиболее вероятному ее значению):

$$\delta(\ ) = \frac{\Delta}{\ } \qquad (2)$$

Относительная погрешность является безразмерной величиной и часто выражается в процентах.

Оценка погрешностей измерений представляет трудоемкую, но очень важную часть эксперимента. Без оценки погрешности часто не представляется возможным правильно интерпретировать результаты проведенного опыта.

Допустим, изучается столкновение шаров с массами [illegible] и m_2.

(рис. 2).

До столкновения　　　　　　　После столкновения

Рис. 2

Пусть шар m_1, имея импульс $\vec{P}_1$, упруго сталкивается с неподвижным шаром m_2. После столкновения шары m_1 и m_2 будут иметь импульсы соответственно $\vec{P}_1'$ и $\vec{P}_2'$. И мы хотим определить, имеет ли место закон сохранения импульса при ударе шаров, т.е. выполняется ли равенство:

$$\vec{P}_1 = \vec{P}_1' + \vec{P}_2'$$

Допустим, что в эксперименте осуществляется прямой удар. Это значит, что векторы $\vec{P}_1$, $\vec{P}_1'$ и $\vec{P}_2'$ будут коллинеарны и вместо векторного получим алгебраическое выражение:

$$P_1 = P_1' + P_2' \tag{3}$$

Чтобы проверить выполнение закона сохранения импульса (3), проводится эксперимент, в котором измеряются значения импульсов до и после удара. Пусть были получены следующие значения:

$$P_1 = (4{,}4 \pm 0{,}1)\ \text{кг}\cdot\text{м}\cdot\text{с}^{-1}$$
$$P_1' = (2{,}1 \pm 0{,}1)\ \text{кг}\cdot\text{м}\cdot\text{с}^{-1}$$
$$P_2' = (2{,}5 \pm 0{,}1)\ \text{кг}\cdot\text{м}\cdot\text{с}^{-1}$$

Если эти значения подставить в выражение (3), получим:
для левой части $4{,}4 \pm 0{,}1$ кг·м·с$^{-1}$;
для правой части $(2{,}1 \pm 0{,}1) + (2{,}5 \pm 0{,}1) = (4{,}6 \pm 0{,}2)$ кг·м·с$^{-1}$.

Как видим, доверительные интервалы правой и левой частей выражения (3) перекрываются, это значит, что с точностью, полученной в эксперименте, правая и левая части выражения (3) равны, следовательно проведенный эксперимент подтверждает справедливость закона сохранения импульса.

Теперь допустим, что погрешность измерения не определялась и при измерении импульсов шаров были получены значения:

$$P_1 = 4{,}4 \text{ кг·м·с}^{-1}$$
$$P_1' = 2{,}1 \text{ кг·м·с}^{-1}$$
$$P_2' = 2{,}5 \text{ кг·м·с}^{-1}$$

Подставляя эти значения в выражение (3), получим:
для левой части 4,4 кг·м·с$^{-1}$;
для правой части 2,I + 2,5 = 4,6 кг·м·с$^{-1}$.
Очевидно, правая часть выражения (3) не равна левой и нужно сделать вывод, что в эксперименте закон сохранения импульса не подтверждается, что совершенно неверно. Это указывает на то, что, не учитывая погрешности измерений, можно неправильно истолковать полученные в эксперименте результаты.

I.2. Случайные погрешности

Погрешности, которые проявляются при измерениях, различаются как по происхождению, так и по своим свойствам. По происхождению ошибки можно разделить на методические, инструментальные и субъективные, обусловленные физиологическими особенностями экспериментатора.

По своим свойствам ошибки можно разделить на систематические, случайные и промахи. Мы рассмотрим погрешности с точки зрения их свойств, т.к. это определяет методику их оценки.

Случайные ошибки обусловлены проявлением большого количества причин, которые в разных измерениях проявляются по-разному и поэтому дают различный случайный результат.

Случайные погрешности могут быть обнаружены только при многократных измерениях. При наличии случайных погрешностей ошибки отдельных измерений принимают различные, как по величине, так и по знаку, значения, причем значения погрешности в каждом последующем измерении не предоказуемо.

Пусть некоторая величина a измерялась N раз, в результате получена совокупность ошибок $\Delta a_1, \Delta a_2 \ldots \Delta a_N$. Если число измерений N достаточно велико, в совокупности ошибок Δa_i прослеживается определенная закономерность, а именно – отдельные значения повторяются в ряде измерений, одни чаще, другие реже. Следовательно, в совокупности случайных погрешностей Δa_i обнаруживается зависимость частоты повторения ΔN ошибки от ее величины Δa. Эта зависимость представляет функцию распределения случайных погрешностей.

Случайные погрешности при большом их количестве подчиняются закону распределения Гаусса для случайных величин. Графически это распределение представлено на рис. 3.

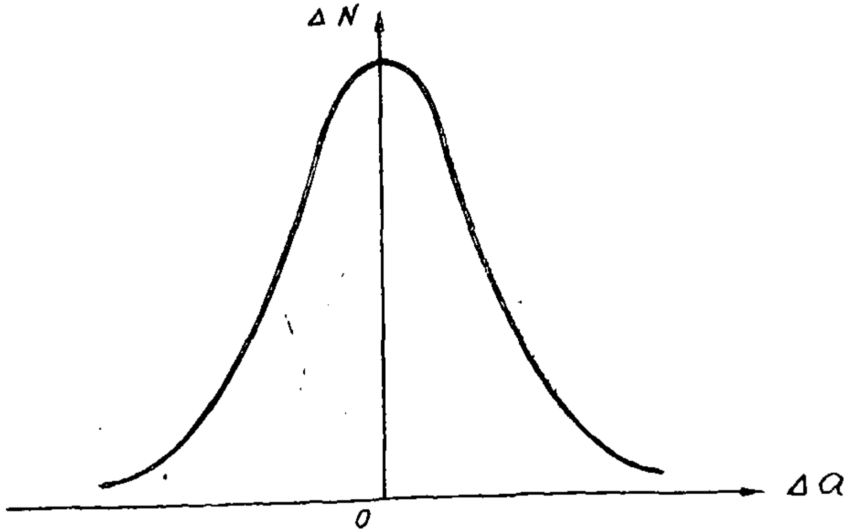


Рис. 3

Из кривой распределения случайных погрешностей, представленной на рис. 3 вытекают их основные свойства:

1. Ошибки, равные по величине, но противоположные по знаку, встречаются одинаково часто.

2. Чем больше ошибка по абсолютной величине, тем реже она встречается.

Далее запишем выражение ошибок отдельных измерений:

$$\begin{aligned} \Delta a_1 &= a_1 - a \\ \Delta a_2 &= a_2 - a \\ \Delta a_N &= a_N - a \end{aligned} \qquad (4)$$

где a - истинное значение измеряемой величины.

Сложив правые и левые части выражений (4), получим:

$$\sum \Delta a_i = \sum a_i - Na$$

На основании первого свойства при $N \to \infty$ $\sum \Delta a_i \to 0$.

Отсюда

$$a = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum a_i$$

Это значит, что , если отсутствуют систематические погрешности, среднее значение из результатов измерений в пределе, когда $N \to \infty$, равно истинному значению измеренной величины.

Реально число измерений N всегда конечно, однако и при конечном числе измерений среднее значение измеряемой величины наиболее близко к истинному значению, поэтому оно принимается за результат измерения, как наиболее вероятное его значение. Следовательно, если какая-то величина a была измерена N раз и были получены значения a_1, $a_2 \dots a_N$, то вероятное значение измерений величины определяется как среднее арифметическое из результатов измерений:

$$a = \frac{1}{N} \sum a_i \qquad (5)$$

Далее предположим, что было проведено две серии, по N измерений одной и той же величины a : в первой серии измерения осуществлялись более точным прибором и были получены ошибки Δa_1, $\Delta a_2 \dots \Delta a_N$, а во второй серии - менее точным прибором, в результате чего были получены ошибки $\Delta a'_1$, $\Delta a'_2 \dots \Delta a'_N$. Обе системы ошибок являются случайными и распределяются по закону Гаусса, но графически эти распределения в двух случаях изображаются разными кривыми (рис.4).

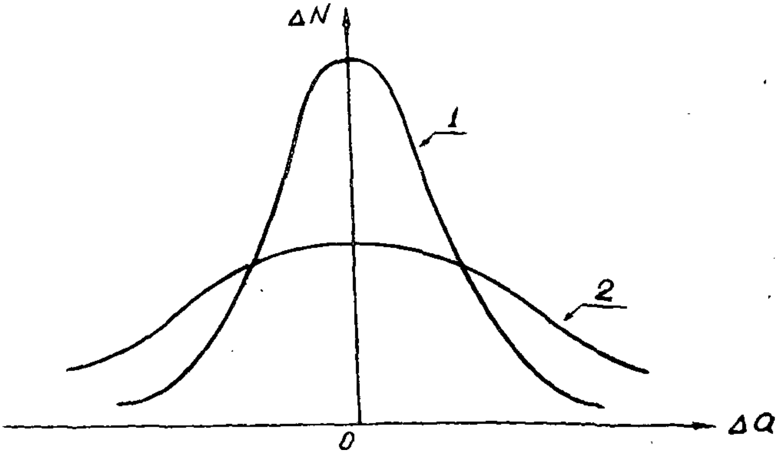


Рис. 4

Кривая (I) соответствует первой серии измерений (более точным прибором), а кривая (2) - второй (менее точным прибором).

Как видно из рис. 4, представленные две серии измерений отличаются различным разбросом погрешностей, причем при более точных измерениях разброс оказывается меньше. Следовательно, разброс погрешностей характеризует точность проведенных измерений и поэтому должен определять величину доверительного интервала.

Разброс в распределении погрешностей характеризуется величиной так называемого среднеквадратичного отклонения о т д е л ь н о г о и з м е р е н и я σ, которое для ограниченного числа измерений, как показывается в теории вероятностей, определяется выражением:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum(a_i - \bar{a})^2} \tag{6}$$

Принимая среднее арифметическое значение $\bar{a}$ за результат измерения, мы допускаем определенную погрешность, которая будет тем больше, чем меньше число измерений N. Среднеквадратичное отклонение с р е д н е г о а р и ф м е т и ч е с к о г о от истинного значения определяется выражением:

$$S_{\bar{a}} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)}\sum(a_i - \bar{a})^2} \tag{7}$$

При большом числе измерений N (если N измеряется сотнями) величина $S_{\bar{a}}$ будет границей доверительного интервала, и тогда результат измерения должен быть записан:

$$a = \bar{a} \pm S_{\bar{a}}$$

В большинстве работ в нашей лаборатории число измерений невелико, и поэтому отсутствуют условия для строгого проявления статистических закономерностей, которые лежат в основе определения случайных погрешностей. Это приводит к тому, что значения среднеквадратичного отклонения σ и среднеквадратичного отклонения среднего $S_{\bar{a}}$, вычисленные по формулам (6 и 7), не точны и определены тем более грубо, чем меньше число измерений N. Следовательно, чтобы гарантировать, что истинное значение измеряемой величины с заданной [illegible]ятностью находится в пределах доверительного интервала, [illegible] приходится увеличивать тем больше, чем меньше число измерений было выполнено.

Поэтому при ограниченном числе измерений за границу доверительного интервала принимается не $S_{\bar{a}}$, а:

$$\Delta \bar{a} = S_{\bar{a}} t_{\alpha}(N)$$

Численное значение $t_\alpha(N)$ зависит от величины доверительной вероятности α и числа измерений N и называется коэффициентом Стъюдента. Значения коэффициентов Стъюдента для различных α и N приведены в табл. I.

Таблица I

Коэффициенты Стъюдента

α	$t_\alpha(N)$													
	N													
	2	3	4	5	6	7	8	9	I0	I2	I4	I6	I8	20
0,9	6,3	2,9	2,4	2,I	2,0	I,9	I,9	I,9	I,8	I,8	I,8	I,8	I,7	I,7
0,95	I2,7	4,3	3,2	2,8	2,6	2,4	2,4	2,3	2,3	2,2	2,2	2,I	2,I	2,I
0,99	63,7	9,9	5,8	4,6	4,0	3,7	3,5	3,4	3,3	3,I	3,0	2,9	2,9	2,9

I.3. Систематические погрешности

Систематическими погрешностями называются ошибки, которые при многократных измерениях остаются постоянными или изменяются по определенному закону.

Систематические ошибки по происхождению можно разделить на методические, инструментальные (приборные) и ошибки, связанные с особенностями объекта измерения.

А. Методические погрешности

Методические погрешности могут быть обусловлены, например, следующими причинами:

I. Несовершенством используемой методики измерения. Так, например, для определения сопротивления R проводника используется метод вольтметра и амперметра. Для этого собирается одна из схем, представленных на рис. 5. Измеряется напряжение U и сила тока J в цепи, а сопротивление проводника определяется из закона Ома:

$$R = \frac{U}{J} \tag{8}$$

По закону Ома, если по проводнику протекает ток J и при этом разность потенциалов на концах его равна U, то его сопротивление определяется выражением (8).

В рассматриваемом случае результат определения сопротивления содержит методическую погрешность. В самом деле, в первой схеме (рис. 5) амперметр показывает не ток, который течет по сопротивлению

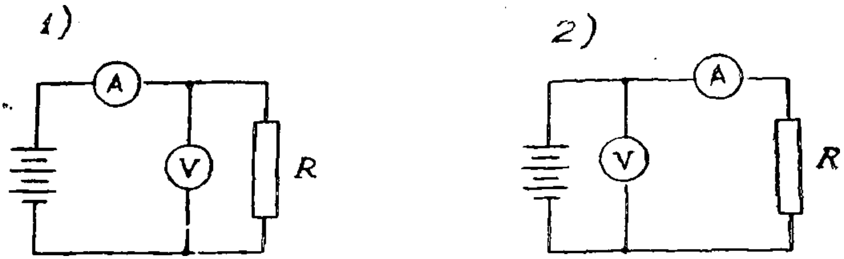


Рис. 5

R, а суммарный ток, текущий по сопротивлению и вольтметру. Во второй схеме вольтметр показывает напряжение, которое является суммой падений потенциалов на сопротивлении и амперметре. Однако, если измерить сопротивления вольтметра и амперметра, можно определить ток, протекающий через вольтметр или падение потенциала на амперметре, внести необходимые поправки в показания приборов и тем самым исключить систематическую погрешность.

2. Несовершенством используемой теории или использованием приближенных формул.

Для примера рассмотрим определение массы тела на рычажных весах. Процесс взвешивания заключается в уравновешивании массы тела массой гирь, и, когда уравновешивание достигнуто, масса тела принимается равной массе гирь. При этом допускается ошибка, для определения которой нужно уточнить теорию равновесия весов. Суть уточнения заключается в том, что равновесие весов определяется не только значениями сил тяжести тела и гирь, но также архимедовыми силами, действующими на тело и гири. Если учесть величину архимедовых сил, можно определить поправку к значению полученной массы и таким образом исключить систематическую погрешность.

5. Инструментальные погрешности

Инструментальные погрешности обусловлены несовершенством средств измерения и по своему характеру могут быть как систематическими так и случайными. Однако в хорошо сконструированном и выполненном приборе случайные погрешности незначительны. Большинство приборов современного массового производства обладают этим свойством.

Для каждого прибора устанавливаются н о р м а л ь н ы е условия эксплуатации. К числу этих условий могут относиться: диапазоны рабочих температур, давления, влажности окружающей среды; частота переменного тока; погрешности внешних магнитного и электрического полей; вибрации; рабочее положение (горизонтальное, вертикальное, безразличное) и т.д. Комплекс нормальных условий для каждого прибора указывается в его паспорте.

При эксплуатации прибора в нормальных условиях показания прибора содержат определенную погрешность. Эта ошибка называется о с н о в н о й   п о г р е ш н о с т ь ю прибора. Если какой-либо параметр внешних условий выходит за пределы нормальных условий, в показаниях прибора появляется д о п о л н и т е л ь н а я погрешность. В паспорте прибора указывается значение дополнительных погрешностей, в зависимости от отклонения от нормальных условий для всех значимых параметров окружающей среды.

Для каждого прибора устанавливаются предельные основные погрешности, то есть максимально возможные погрешности прибора при эксплуатации его в нормальных условиях. Согласно ГОСТ 8.401-80, введенному в действие с 1.07.81 г., основная предельная погрешность устанавливается либо в виде абсолютной погрешности Δ, либо в виде приведенной погрешности γ, либо в виде относительной погрешности δ и условно, как это показано в табл. [illegible], указывается в паспорте и на шкале прибора.

Если прибор характеризуется [illegible], то она может быть или постоянной для [illegible]

$$\Delta = \pm a [illegible]$$

или линейно зависеть от показаний прибора

$$\Delta = \pm (a + bx) ,$$

где a и b – постоянные, которые указываются в паспорте прибора; x – значение измеряемой величины.

В тех случаях, когда основная погрешность прибора выражается приведенной погрешностью [illegible] следующим образом:

$$\gamma = [illegible]$$

где X_N – [illegible] нормирующее значение [illegible]

p – [illegible]

[illegible] $1{,}5 \cdot 10^{n}$, $2 \cdot 10^{n}$, $2{,}5 \cdot 10^{n}$, $4 \cdot 10^{n}$, [illegible] и т.д.

Если p выражено в процентах, оно называется к л а с с о м   т о ч - н о с т и   п р и б о р а.

В качестве нормирующего значения X_N принимается:

а) для приборов с равномерной или практически равномерной шкалой – больший из пределов измерений или больший из модулей пределов измерений шкалы прибора, если нулевое деление находится внутри шкалы измерений.

б) Для средств измерения физических величин, для которых принята шкала с условным нулем, например $0^{o}C$, нормирующее значение равно разности пределов измерений шкалы.

в) для приборов с существенно неравномерной шкалой нормирующее значение равно всей длине шкалы. В этом случае предельную абсолютную погрешность и длину шкалы выражают в единицах длины.

Если основная предельная погрешность является приведенной погрешностью γ, то относительная погрешность измерения вычисляется из выражения:

$$\delta = \gamma \frac{X_N}{x}$$

и как видим, она резко возрастает при $x \to 0$.

В тех приборах, в которых основная предельная погрешность выражена относительной ошибкой, относительная погрешность измерения вычисляется по одной из формул:

$$\delta = \frac{\Delta}{x} = \pm q \qquad (12)$$

или

$$\delta = \frac{\Delta}{x} = \pm\left[c + d\left(\left|\frac{X_k}{x}\right| - 1\right)\right], \qquad (13)$$

где X_k – наибольший по модулю предел измерения;

c и d – постоянные.

В первом случае (формула 12), относительная ошибка измерения постоянная, не зависит от величины измеряемого параметра. Величина q, выраженная в процентах, называется к л а с с о м т о ч н о с т и п р и б о р а. В этом случае q может иметь значения: $1 \cdot 10^{n}$, $1{,}5 \cdot 10^{n}$, $2 \cdot 10^{n}$, $2{,}5 \cdot 10^{n}$, $4 \cdot 10^{n}$, $5 \cdot 10^{n}$ при $n = 1, 0, -1, -2$ и т.д.

Во втором случае (формула 13), относительная погрешность – переменная величина и для ее определения задаются значения постоянных c и [illegible]

Форма выражения основной предельной погрешности и значения класса точности указываются в паспорте прибора и на самом приборе. [illegible]ные обозначения представлены в табл. 2.

Таблица 2

Классы точности приборов

	Заданная форма погрешности прибора	Выражение для погрешности	Предельная основная погрешность	Обозначение класса точности	
				в паспорте	на приборе
I.	Приведенная	Для равномерной шкалы $\gamma = \pm \frac{\Delta}{X_N}$ (II)	$\gamma = \pm 1{,}5$	Класс точности I,5	I,5
		Для неравномерной шкалы $\gamma = \pm \frac{\Delta}{X_Д}$ (II)	$\gamma = \pm 0{,}5$	Класс точности 0,5	0,5
2.	Относительная	$\delta = \pm \frac{\Delta}{x}$ (I2)	$\delta = \pm 0{,}5$	Класс точности 0,5	0,5
		$\delta = \pm \frac{\Delta}{x}$ (I3)	$\delta = \pm\left[0{,}02 + 0{,}01\left(\left\lvert\frac{X_к}{x}\right\rvert - 1\right)\right]$	Класс точности 0,02/0,0I	0,02/0,0I
3.	Абсолютная			Класс точности М	М
				Класс точности С	С

В нашей лаборатории имеются в основном приборы, для которых задана постоянная относительная погрешность (I2). В этом случае класс точности прибора определяет относительную погрешность δ измерения величины x и тогда абсолютная погрешность измерения $\Delta = \delta x$.

При использовании старых приборов, у которых не обозначен класс точности, за погрешность принимается половина цены деления шкалы.

Мы будем предполагать, что при измерениях в лаборатории поддерживаются нормальные условия, поэтому дополнительная погрешность измерительных приборов равна нулю.

Обнаружение и исключение систематических погрешностей представляет одну из наиболее трудных задач в планировании и проведении эксперимента. Трудность заключается еще и в том, что нельзя указать, какие-либо общие методы или приемы для решения этой задачи, что в каждом конкретном случае она решается по-своему.

Следует иметь в виду, что если даже источники систематических погрешностей обнаружены и путем введения поправок ошибки исключены, полного исключения ошибок никогда не происходит и поэтому всегда сохраняются остаточные систематические погрешности. Нужно добиваться, чтобы остаточные систематические погрешности были не больше случайных погрешностей эксперимента.

Мы будем предполагать, что в лабораторных работах остаточные систематические погрешности существенно меньше случайных и поэтому из систематических погрешностей будем учитывать только инструментальные погрешности.

В . Ошибки, обусловленные свойствами объекта измерения

Эта категория ошибок вызвана отклонением реального объекта от принятой модели. Так, например, при определении плотности некоторого материала из него делается образец, обычно правильной формы, для которого определяется объем и масса и из них находится плотность материала. При этом предполагается, что материал в образце является однородным. Если в материале оказались раковины (пустоты), это приведет к появлению систематической ошибки. Чтобы обнаружить и исключить такую ошибку, необходимо сделать несколько образцов и, если величина плотности для всех образцов оказывается одинаковой, можно с большой вероятностью утверждать, что систематическая ошибка, обусловленная неоднородностью материала, отсутствует.

В некоторых случаях систематическую ошибку, обусловленную несоответствием объекта принятой модели, можно перевести в разряд случайных и определить ее по методу оценки случайных погрешностей.

В качестве примера рассмотрим задачу определения удельного электрического сопротивления материала. Для определения удельного сопротивления берется отрезок проволоки из требуемого материала, и, измеряя длину и диаметр проволоки, а также ее сопротивление, определяют удельное сопротивление. Полученный результат будет содержать методическую погрешность, обусловленную тем, что проволока имеет царапины, перетяжки, которые влияют на величину сопротивления.

Чтобы перевести систематическую погрешность в разряд случайных, для измерения удельного сопротивления берут не один, а несколько (5 ÷ 10) отрезков проволоки, и тогда систематическая погрешность у разных образцов будет принимать различные случайные значения и может быть определена как случайная погрешность.

Можно указать другой пример: определение объема диска. Для вычисления объема измеряются диаметр d и высота h, а тогда $V = \frac{1}{4}\pi d^2 h$. При этом принимается, что диск имеет правильную круглую форму. В действительности сечение диска не является окружностью, а представляет более сложную кривую. Поэтому, измеряя диаметр d, получаем результат с ошибкой, имеющей характер систематической. Если диаметр диска измерять многократно, причем каждый раз [illegible] произвольное направление диаметра, то при каждом измерении будет вноситься систематическая погрешность, однако совокупность этих погрешностей имеет случайный характер, обусловленный произвольным выбором направления измеренного диаметра. Поэтому погрешность таких измерений может быть найдена как случайная погрешность.

1.4. Промахи

Ошибки, которые относятся к категории промаха, обычно обусловлены недостаточным вниманием экспериментатора. Так, например, если экспериментатор прочел по шкале гониометра угол $32^\circ 46' 18''$, а записал в протокол $52^\circ 46' 18''$, он внес ошибку в 20°, которая является результатом его невнимательности и относится к категории промаха.

Обнаружить промах в общем случае непросто.

Грубый промах, как в рассматриваемом случае, может быть обнаружен при сопоставлении ряда полученных в измерениях результатов. Допустим, что в последовательном ряде измерений получены значения $32^\circ 46' 17''$; $32^\circ 46' 29''$; $52^\circ 46' 18''$; $32^\circ 46' 23''$; $32^\circ 46' 19''$. Анализируя этот ряд значений, видим, что третий результат является явным промахом и его необходимо отбросить, т.к. он не характеризует измеряемую величину.

При выполнении лабораторных работ рекомендуется все измерения проводить независимо двум студентам и, если в результате сравнения обнаруживаются заметные расхождения, измерения нужно повторить. Такой метод проведения измерений в значительной мере исключает промахи из результатов измерений.

II. ОБРАБОТКА ИЗМЕРЕНИЙ

2.1. Типы измерений

Все измерения с точки зрения их обработки делятся на два типа: прямые и косвенные измерения.

К прямым относятся такие измерения, при которых интересующая нас величина находится путем непосредственного отсчета по прибору. Так, например, измерение длины микрометром или штангенциркулем, измерение напряжения в электрической сети вольтметром, измерение отрезков времени секундомером и т.д. представляют собой прямые измерения.

К косвенным относятся измерения, при которых интересующая нас величина определяется путем математических расчетов с использованием параметров, которые находятся путем непосредственных измерений. В качестве примера косвенных измерений можно привести измерение плотности материала $\rho = \frac{m}{V}$.

Для определения плотности материала из него изготавливают образец правильной формы, например, в виде цилиндра. В этом случае измеряемыми параметрами являются диаметр d , высота h и масса m цилиндра, которые измеряются непосредственно в прямых измерениях. Плотность материала определяется из выражения

$$\rho = 4m/\pi d^2 h$$

В свою очередь косвенные измерения тоже можно разделить на два типа: косвенные измерения с постоянными параметрами и косвенные измерения с переменными параметрами.

Если в процессе косвенного измерения истинные значения непосредственно измеряемых параметров не изменяются (остаются постоянными), имеет место косвенное измерение с постоянными параметрами. Но если в процессе косвенного измерения истинные значения хотя бы одного параметра измеряемого приборами не остаются постоянными – имеет место косвенное измерение с переменными параметрами.

2.2. Обработка прямых измерений

Прежде чем проводить какие-либо измерения необходимо внимательно проанализировать все возможные источники погрешностей измерения, обратив особое внимание на систематические ошибки. Необходимо выбрать так методику проведения эксперимента и измерений, чтобы достигалось максимальное исключение систематических погрешностей. Если все это проделано тщательно, то из систематических погрешностей остаются погрешности приборов, методика определения которых рассмотрена в I.3.

Для определения случайных погрешностей измерения повторяют N ($N = 5 \div 10$) раз. В результате получают значения $a_1, a_2 \ldots a_N$.

Обработка измерений включает следующие этапы:

I. Анализируется совокупность полученных измерений с целью выявления промахов. Если какое-либо измерение будет квалифицировано как промах, его исключают из дальнейшей обработки.

2. Вычисляется значение измеряемой величины как среднее арифметическое из результатов измерений

$$\bar{a} = \frac{1}{N}\sum a_i$$

3. Определ-ся погрешности каждого измерения

$$\Delta a_i = a_i - \bar{a} \quad (i = 1, 2, 3, \ldots)$$

4. Вычисляется среднеквадратичное отклонение среднего

$$S_{\bar{a}} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)}\sum \Delta a_i^2}$$

5. Находится коэффициент Стьюдента $t_\alpha(N)$ из табл. I на с. 11 по известному числу измерений N и заданной доверительной вероятности α. В наших работах принято значение доверительной вероятности $\alpha = 0,9$.

6. Определяется граница доверительного интервала для случайной погрешности:

$$\overline{\Delta a}_{сл} = S_{\bar{a}}\, t_\alpha(N)$$

7. Вычисляется инструментальная погрешность $\overline{\Delta a}_{инс}$ измерения, исходя из класса точности измерительного прибора (см. I.3).

8. Находится граница доверительного интервала с учетом случайной и систематической погрешностей:

$$\overline{\Delta a} = \sqrt{\Delta a_{сл}^2 + \Delta a_{инс}^2}$$

9. Записывается результат измерения

$$a = \bar{a} \pm \overline{\Delta a}$$

10. Определяется относительная погрешность измерения:

$$\delta_a = \frac{\overline{\Delta a}}{\bar{a}}$$

2.3. Обработка косвенных измерений с постоянными параметрами

В процессе косвенных измерений искомая величина определяется путем математических расчетов, использующих параметры, измеренные в прямых измерениях. При этом истинные значения параметров в процессе измерений оставались постоянными. Полученные в прямых измерениях значения параметров содержат ошибки, поэтому рассчитанная по ним искомая величина будет определена с погрешностью. Задача обработки косвенных измерений заключается в определении доверительного интервала искомой величины по известным ошибкам непосредственно измеренных параметров. Ошибки параметров определяются как погрешности прямых измерений.

Пусть искомая величина является функцией от a:

$$z = f(a), \tag{14}$$

где a - параметр, который измеряется непосредственно.

В результате прямого измерения параметра a получено значение

$$a = \bar{a} \pm \overline{\Delta a} \tag{15}$$

с доверительной вероятностью α.

Очевидно, если в выражении (I4) подставить

$$a = \bar{a},$$

то в результате расчетов получим значение искомой величины $z = \bar{z}$.

Если в выражение (I4) подставить значение параметра a с ошибкой (I5), то получим величину z тоже с ошибкой, следовательно

$$\bar{z} \pm \Delta\bar{z} = f(\bar{a} \pm \Delta\bar{a})$$

Откуда

$$\pm\Delta\bar{z} = f(\bar{a} \pm \Delta\bar{a}) - f(\bar{a})$$

Если $\Delta\bar{a} \ll \bar{a}$, то функцию $f(\bar{a} \pm \Delta\bar{a})$ можно разложить в ряд Тейлора, ограничиваясь двумя членами:

$$f(\bar{a} \pm \Delta\bar{a}) = f(\bar{a}) \pm \frac{df(\bar{a})}{d\bar{a}}\Delta\bar{a}$$

Отсюда

$$\Delta\bar{z} \doteq \pm \frac{df(\bar{a})}{d\bar{a}}\Delta\bar{a} \qquad (I6)$$

Таким образом, если искомая величина задается функцией от одного параметра, погрешность этой величины определяется как произведение производной от функции при среднем значении параметра на погрешность самого параметра. После этого результат косвенного измерения можно записать в таком виде:

$$z = \bar{z} \pm \Delta\bar{z}$$

с доверительной вероятностью α.

Относительная погрешность измерения

$$\delta_z = \frac{\Delta\bar{z}}{\bar{z}} = \frac{1}{f(\bar{a})}\frac{df(\bar{a})}{d\bar{a}}\Delta\bar{a}$$

Поскольку

$$\frac{1}{f(\bar{a})}\frac{df(\bar{a})}{d\bar{a}} = \frac{d\ln f(\bar{a})}{d\bar{a}},$$

то формулу для относительной ошибки можно записать

$$\delta_z = \frac{d\ln f(\bar{a})}{d\bar{a}}\Delta\bar{a} \qquad (I7)$$

Относительная погрешность величины, определяемой функцией от одного параметра, равна произведению производной от логарифма функции при среднем значении параметра, на погрешность самого параметра.

Пусть теперь искомая величина z зависит от трех параметров a, b, c, которые определяются в прямых измерениях.

$$z = f(a, b, c) \qquad (I8)$$

После обработки измерений параметров будут получены значения

$$a = \bar{a} \pm \Delta\bar{a}$$
$$b = \bar{b} \pm \Delta\bar{b}$$
$$c = \bar{c} \pm \Delta\bar{c}$$

Подставляя значения $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ в формулу (18), получим искомое значение:

$$\bar{z} = f(\bar{a}, \bar{b}\ \bar{c})$$

Формулу для абсолютной погрешности при трех параметрах можно получить путем обобщения формулы (18), тогда получим:

$$\Delta\bar{z} = \sqrt{\left(\frac{\partial}{\partial\bar{a}} f(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})\Delta\bar{a}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial\bar{b}} f(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})\Delta\bar{b}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial\bar{c}} f(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})\Delta\bar{c}\right)^2} \quad (19)$$

Обобщая формулу (17) на случай трех параметров, получим формулу для относительной погрешности величины:

$$\delta_z = \sqrt{\left(\frac{\partial \ln f(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})}{\partial\bar{a}}\Delta\bar{a}\right)^2 + \left(\frac{\partial \ln f(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})}{\partial\bar{b}}\Delta\bar{b}\right)^2 + \left(\frac{\partial \ln f(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})}{\partial\bar{c}}\Delta\bar{c}\right)^2} \quad (20)$$

В результате процедура обработки косвенных измерений может быть представлена в следующей последовательности:

1. Проводятся прямые измерения и обработка всех параметров, необходимых для рассматриваемого косвенного измерения, в результате получают значения:

$$a = \bar{a} \pm \Delta\bar{a}$$
$$b = \bar{b} \pm \Delta\bar{b}$$
$$c = \bar{c} \pm \Delta\bar{c}$$

при одном значении доверительной вероятности α.

2. Определяется искомое значение косвенно измеряемой величины:

$$\bar{z} = f(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$$

3. Вычисляется относительная погрешность δ_z косвенного измерения по формуле (20).

4. Находится абсолютная погрешность косвенного измерения:

$$\Delta z = \delta_z \bar{z}$$

6. Записывается окончательный результат:

$$z = \bar{z} \pm \Delta\bar{z}$$

Иногда удобно находить абсолютную погрешность $\Delta\bar{z}$ по формуле (19), тогда порядок расчетов несколько изменится.

3. Определяется абсолютная погрешность $\Delta\bar{z}$ косвенно измеряемой величины по формуле (19).

4. Записывается окончательный результат

$$z = \bar{z} \pm \Delta\bar{z}$$

5. Вычисляется относительная погрешность результата:

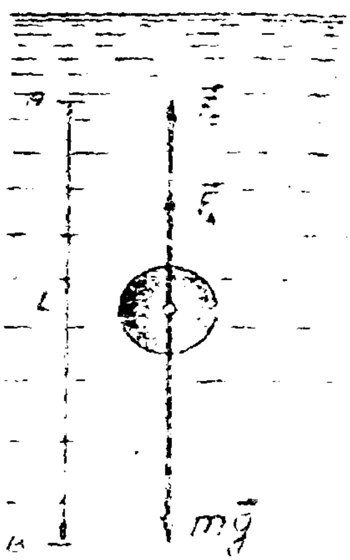
$$\delta_z = \frac{\Delta\bar{z}}{z}$$

2.4. Обработка косвенных измерений с переменными параметрами

Часто косвенные измерения можно проводить как с постоянными, так и с переменными параметрами и это влияет на методику обработки результатов.

В качестве примера рассмотрим задачу определения коэффициента вязкости жидкости методом Стокса. В этом случае измеряется скорость установившегося движения шарика в испытуемой жидкости.

На шарик в жидкости (рис. 6) действуют три силы:



сила тяжести

$$m\vec{g} = [illegible]\,\vec{g}$$

сила Архимеда

$$\vec{F}_A = [illegible]$$

сила трения

$$\vec{F}_c = [illegible]$$

где ρ – [illegible] шарика,

ρ_0 – плотность [illegible],

r – [illegible];

η – [illegible] движения

v – [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

Подставляя выражения для сил, получим:

$$\eta = \frac{2g(\rho-\rho_0)r^2}{9v}$$

Скорость шарика можно определить по времени t прохождения пути L:

$$v = \frac{L}{t}$$

и тогда

$$\eta = \frac{2g(\rho-\rho_0)r^2 t}{9L} \qquad (20')$$

Может быть два метода проведения эксперимента.
В первом случае берут один шарик и опускают его в жидкость. В момент прохождения шариком метки A запускают секундомер, а когда шарик проходит метку B – секундомер останавливают и получают время движения шарика t_1. Затем шарик вынимают и эксперимент повторяют, и так N раз получают значения для t_1, t_2, t_3 ... t_N. В процессе этого эксперимента истинные значения всех параметров: ρ, ρ_0, r, L, t оставались постоянными, значит обработка должна проводиться как для косвенного измерения с постоянными параметрами, изложенная выше. При этом предполагается, что температура жидкости остается постоянной.

Во втором случае берется N шариков, радиусы которых r_1, r_2, ... r_N, и в процессе эксперимента вначале опускается первый шарик и для него определяется t_1, затем второй – определяется t_2 и т.д. В результате тоже получится N значений интервалов времени t_1, t_2 ... t_N. Однако в этом случае истинные значения r и t в процессе эксперимента не остаются постоянными. Значит имеет место косвенное измерение с переменными параметрами.

Обработка результатов измерений в этом случае осуществляется по следующей схеме. Вначале определяются значения вязкости жидкости η_i (20') по измерениям параметров для i – го шарика – r_i, t_i. В результате будут получено N значений η_1, η_2 ... η_N для вязкости жидкости, которые различаются между собой в результате ошибок измерений. Затем совокупность значений η_i обрабатывается по методике обработки прямого измерения [illegible] $\bar{\eta}$ и $\Delta\bar{\eta}$. Окончательный результат записывается в виде

$$\eta = \bar{\eta} \pm \Delta\bar{\eta}$$

[illegible] Графическое представление [illegible] измерения

3.1. Графическое представление результатов измерений

В процессе обработки результатов [illegible] бывает необходимо строить [illegible] которые получаются в эксперимента. Графическое представление результатов делает их более [illegible] и облегчает проведение анализа. По виду кривой сразу обнаруживаются экстремальные значения, точки пересечения кривой с осями координат, точки перегиба, точки возврата и другие особенности, которые характеризуют закономерности изучаемого явления.

Для построения графиков необходимо руководствоваться следующими положениями:

1. Для графиков используются стандартные бланки с миллиметровой или логарифмической сеткой.

2. Координатные оси, экспериментальные точки, кривые, подписи и вспомогательные построения необходимо наносить остро заточенным карандашом.

3. Все линии на графике проводятся с использованием чертежных инструментов: прямые – по линейке, кривые – по лекало.

4. В конце координатных осей ставятся условные обозначения откладываемых величин и их размерности.

5. Масштабы и начала отсчета по осям выбираются так, чтобы площадь бланка использовалась наиболее полно, рис. 7.

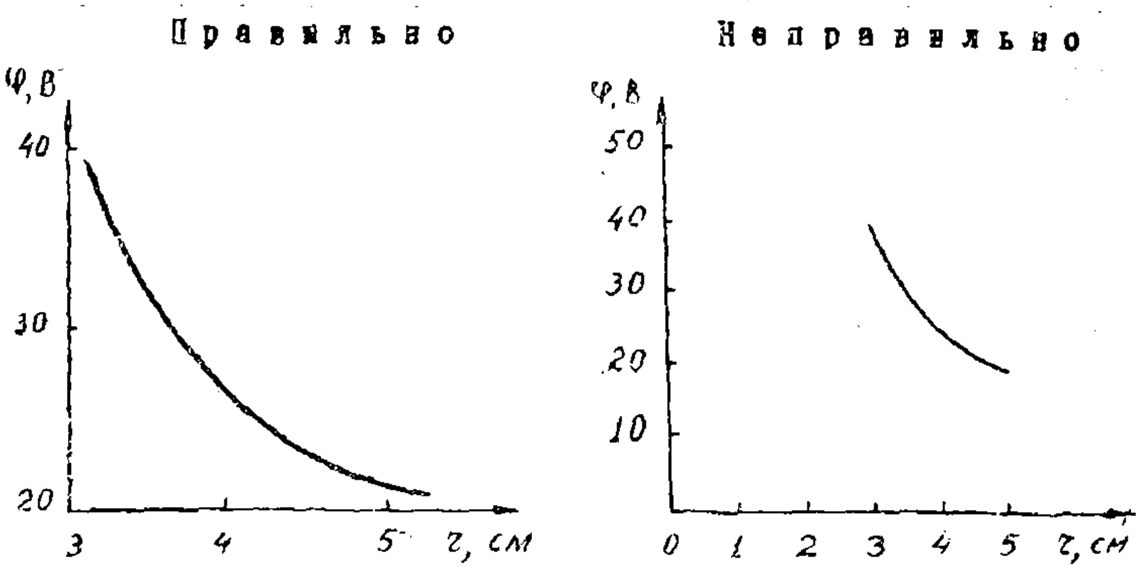


Рис. 7

6. На координатных осях откладываются численные значения физических величин так, чтобы было удобно работать с графиком. Значения, полученные в эксперименте, на осях не обозначаются (рис. 8).

7. Экспериментальные точки на графике наносятся вместе с доверительными интервалами в виде { , ⁝ или [·] .

8. Если при построении кривой доверительные интервалы не [illegible], экспериментальные точки представляются в виде маленьких кружков с центром в точке, соответствующей экспериментальным данным. Если на

графике строятся несколько экспериментальных кривых, то для нанесения экспериментальных точек каждой кривой используются свои, отличные от других, обозначения (например в виде квадратов [] , треугольников △ , знаков умножения x и т.д.).

Правильно Неправильно

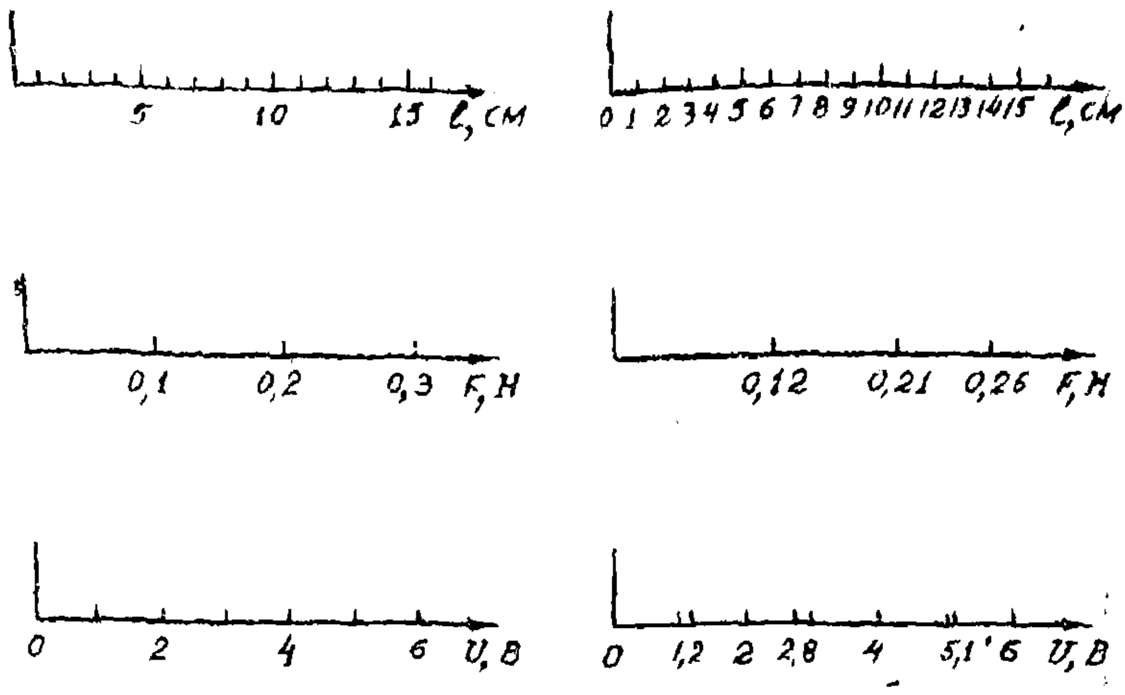


Рис. 8

9. Экспериментальная кривая проводится в виде плавной линии, проходящей через доверительные интервалы всех или большинства экспериментальных точек, так, чтобы экспериментальные точки наиболее близко и равномерно располагались около кривой (рис. 9).

Правильно Неправильно

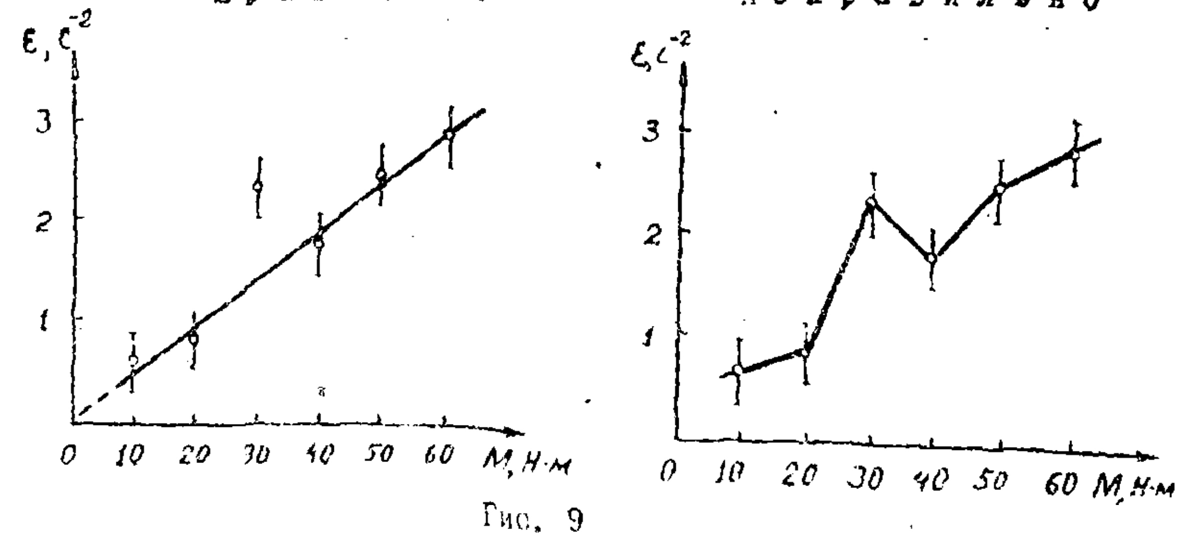


Рис. 9

10. График должен содержать надпись, из которой было бы ясно физическое содержание представленной закономерности.

Например:

правильно	неправильно
Зависимость напряженности E электрического поля цилиндрического конденсатора от расстояния r до оси	Зависимость E от r

3.2. Графическая обработка измерений

С помощью графика можно проводить обработку измерений. Допустим, проводится измерение коэффициента теплового линейного расширения некоторого материала. Для этого из исследуемого материала изготавливают образец в виде цилиндра и измеряют длину этого образца в зависимости от температуры. В результате проведенных измерений получены значения, представленные в табл. 3.

Зависимость длины ℓ образца от температуры t° Таблица 3

t °C	20	54	80	115	[illegible]	150	[illegible]	190
ℓ мм	50,01	50,03	50,05	50,06	[illegible]	[illegible]	50,10	50,12

Теоретическ[illegible] длина стержня в зависим[illegible] [illegible]ется формулой:

$$\ell = \ell_0 ([illegible]) \quad [illegible]$$

где ℓ_0 – длина стержня при температур[illegible]

α – коэффициент [illegible]ного ра[illegible] [illegible]

[illegible]

Из формулы (2[illegible]) следует, что для [illegible]

[illegible] расширения α до[illegible] [illegible]

[illegible] значен[illegible] [illegible]

[illegible]

из которого видно, что эта погрешность будет большой за счет второго члена, поскольку величина $\ell_2 - \ell_1$ является малой, как это видно из табл. 3.

Чтобы повысить точность определения коэффициента линейного расширения, измерения проводятся многократно. По данным измерений можно графически построить зависимость длины образца ℓ от температуры t. Теоретически эта зависимость представляет прямую (2), угловой коэффициент которой:

$$\frac{d\ell}{dt} = \ell_0 \alpha$$

С другой стороны, угловой коэффициент прямой равен тангенсу угла φ наклона прямой к оси Ох, поэтому

$$\ell_0 \alpha = tg\,\varphi ,$$

откуда

$$\alpha = \frac{1}{\ell_0} tg\,\varphi \qquad (22)$$

Следовательно, чтобы определить коэффициент линейного расширения, нужно по результатам совокупности измерений построить прямую зависимость $\ell = \ell(t)$, из которой определится тангенс угла наклона прямой $tg\,\varphi$ и значение длины ℓ_0 образца при $t = 0^{\circ}C$, как ордината точки пересечения прямой с осью Оу. И тогда по формуле (22) определяется α.

Рассматриваем совокупность измерений $\ell = \ell(t)$, представленную в табл. 3. Предполагаем, что каждое значение длины ℓ определялось однократно с помощью индикатора, имеющего цену деления 0,01мм, а температура – термометром с ценой деления 1 град. Следовательно, систематические погрешности в измерениях длины $\Delta\ell$ = ...5 мм, а температуры $\Delta t = 0,5^{\circ}C$.

Экспериментальные данные из табл. 3, вместе с доверительными интервалами наносим на график (рис. 10). Через доверительные интервалы проводим две крайние прямые – с наименьшим углом наклона φ_1 – прямая 1 и наибольшим углом наклона φ_2 – прямая 2.

При этом видим, что четвертая точка выпадает. Это свидетельствует о том, что при измерении четвертой точки допущена грубая ошибка и поэтому ее из обработки нужно исключить.

[illegible] $\cdot K^{-1}$,

ℓ_0 [illegible] = 50,... тогда

Для второй прямой

$$tg\,\varphi_2 = \frac{AC}{DC} = \frac{50{,}112 - 50{,}01}{180 - 27} = \frac{0{,}102}{153} = 6{,}67 \cdot 10^{-4}\ мм\,k^{-1}$$

l_{o2} определяется точкой N, следовательно l_{o2} = 49,999 мм

и тогда $\alpha_2 = \frac{1}{l_{o2}}\, tg\,\varphi_2 = \frac{6{,}67 \cdot 10^{-4}}{49{,}999} = 1{,}33 \cdot 10^{-5}\ k^{-1}$

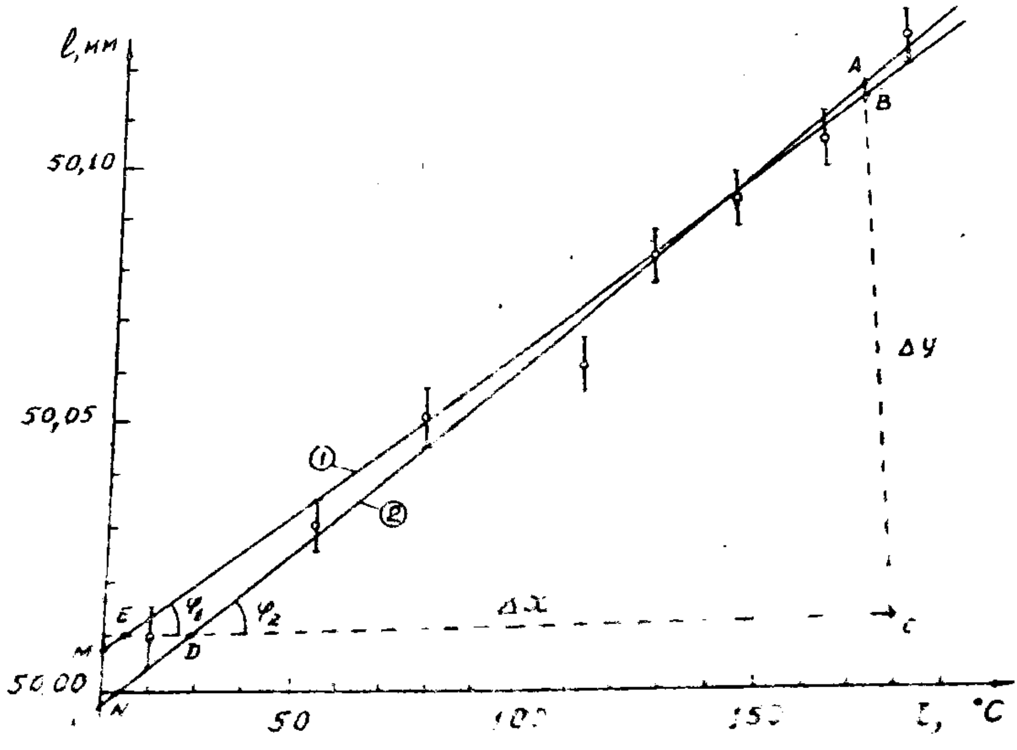


Рис. 10

За результат измерения для коэффициента [illegible] расширения берем среднее значение [illegible]. В [illegible] случае:

[illegible]

За погрешность берем [illegible]

[illegible]

и окончательно получаем:

$$\alpha = (1{,}25 \pm 0{,}08)\,10^{-5}\,K^{-1}$$

с относительной погрешностью $\delta_\alpha = \frac{0{,}08}{1{,}25} \approx 0{,}06$

3.3. Метод наименьших квадратов

При проведении эксперимента обычно получают значения некоторой величины y (например, длины стержня) при изменении другой величины x (например, температуры) в ряде дискретных точек.

Часто бывает необходимо представлять полученные эксперементальные закономерности в аналитической форме, в виде зависимости $y(x)$. Обычно в этом случае искомая закономерность представляется в виде полинома (аппроксимируется полиномом), а параметры полинома подбирают так, чтобы среднеквадратичное отклонение экспериментальных точек было минимальным. Эта задача решается методом наименьших квадратов.

Метод наименьших квадратов мы рассмотрим для простейшего случая-линейной зависимости, когда эксперементальная закономерность аппроксимируется прямой.

Допустим в эксперименте изучалась зависимость некоторой величины x от другой величины y, про которую известно, что эта зависимость является линейной. В результате измерений величины y при некоторых значениях x, равных x_1, x_2 ... x_N, были получены соответственно y_1, y_2 ... y_N.

Необходимо по этим экспериментальным данным провести прямую:

$$y = kx + c, \qquad (23)$$

т.е. подобрать значения k и c так, чтобы среднеквадратичное отклонение результатов измерений было минимальным.

Если в уравнение (23) подставить значение x_i, получим $y_i' = kx_i + c$, которое в общем случае отличается от эксперментального значения y_i на величину $d_i = kx_i + c - y_i$. Очевидно, что отклонение экспериментальных точек от проведенной прямой будет минимальным, если будет минимальной сумма F:

$$F = \sum (kx_i + c - y_i)^2$$

Условия минимума для функции F имеют вид

$$\frac{\partial F}{\partial k} = 0 \;; \quad \frac{\partial F}{\partial c} = 0$$

Подставляя значение функции F, эти условия можно записать:

$$\sum 2x_i(\bar{k}x_i + \bar{c} - y_i) = 0$$
$$\sum 2(\bar{k}x_i + \bar{c} - y_i) = 0 \qquad (24)$$

Эти уравнения можно решить относительно $\bar{k}$ и $\bar{c}$ и тогда получим:

$$\bar{k} = \frac{N\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{N\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \qquad (25)$$

$$\bar{c} = \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{N\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \qquad (26)$$

Если обозначать $\mathcal{D} = N\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2$, то для среднеквадратичных погрешностей значений $\Delta\bar{k}$ и $\Delta\bar{c}$ получим выражение:

$$\Delta\bar{k} = \sqrt{\frac{1}{\mathcal{D}(N-2)}\sum d_i^2} \qquad (27)$$

$$\Delta\bar{c} = \sqrt{\frac{1}{N-2}\left[\frac{1}{N} + \frac{1}{\mathcal{D}N^2}(\sum x_i)^2\right]\sum d_i^2} \qquad (28)$$

Для удобства расчетов полезно все вычисления заносить в табл. 4

Обработка экспериментальных данных

Таблица 4

x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$	$\bar{k}x_i$	$\bar{k}x_i - y$	d_i^2
$\sum x_i$	$\sum y_i$	$\sum x_i^2$	$\sum x_i y_i$			$\sum d_i^2$

После заполнения первых четырех столбцов таблицы и сложения по столбцам получаем данные для определения $\bar{k}$ и $\bar{c}$ по формулам (25) и (26). После чего заполняются остальные 3 столбца.

Затем находится $\sum d_i^2$, а по формулам (27),(28) определяются значения среднеквадратичных погрешностей $\Delta\bar{k}$ и $\Delta\bar{c}$.

Метод наименьших квадратов оказывается особенно простым, если искомая прямая проходит через начало координат. В этом случае уравнение искомой прямой имеет вид:

$$y = kx$$

и отклонение i - го измерения от прямой можно записать:

$$d_i = kx_i - y_i$$

Среднеквадратичное отклонение экспериментальных точек от искомой прямой будет минимально, когда будет минимальна сумма F:

$$F = \sum (kx_i - y_i)^2$$

Условие минимума функции F имеет вид $\frac{dF}{dk} = 0$ или это можно записать:

$$\sum 2x_i(\bar{k}x_i - y_i) = 0$$

Отсюда найдем:

$$\bar{k} = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2} \tag{29}$$

Среднеквадратичная погрешность в определении значения $\bar{k}$ определится из выражения:

$$\Delta\bar{k} = \sqrt{\frac{\sum d_i^2}{(N-1)\sum x_i^2}} \tag{30}$$

В качестве примера обработки результатов измерений методом наименьших квадратов возьмем задачу по определению коэффициента теплового расширения, рассмотренную в 3.2.

Результаты экспериментальных измерений длины стержня для различных температур приведены в табл. 3 на с. 26. На рис. 10 построена зависимость длины стержня от температуры, из которой видно, что четвертая точка содержит грубую ошибку, а поэтому ее из обработки исключаем. Для того, чтобы сохранять обозначения формул в методе наименьших квадратов будем температуру (t) обозначать через x, длину стержня (ℓ) - через y.

Исходные данные и результаты расчета заносим в табл. 5.

По формулам (15) и (20) находим оценки для значения $\bar{k}$ и c

$$k = \frac{7\cdot 3376[illegible] - 791\cdot 350[illegible]}{7\cdot 11116 - [illegible]} = [illegible]\cdot 10^{-[illegible]}\ \text{мм}\cdot K^{-1}$$

Таблица 6

Обработка экспериментальных данных по определению коэффициента линейного расширения

x_i, °C	y_i, мм	x_i^2, $(°C)^2$	$x_i y_i$, мм °C	$\bar{k} x_i$, мм	$\bar{k} x_i - y_i$, мм	d_i^2, мм^2
20	50,01	400	1000,2	0,012	-49,998	10^{-6}
54	50,03	2916	2701,62	0,034	-49,996	10^{-6}
80	50,05	6400	4004	0,050	-50	$9\cdot 10^{-6}$
130	50,08	16900	6510,4	0,082	-49,998	10^{-6}
150	50,09	22500	7513,5	0,094	-49,996	$16\cdot 10^{-6}$
170	50,10	28900	8517	0,106	-49,994	$36\cdot 10^{-6}$
190	50,12	36100	9522,8	0,119	-50,001	$36\cdot 10^{-6}$
$\sum x_i = 794$	$\sum y_i = 350,48$	$\sum x_i^2 = 114116$	$\sum x_i y_i = 39769,52$			10^{-4}

$$\bar{c} = \frac{114116\cdot 350,48 - 794\cdot 39769,52}{7\cdot 114116 - 794^2} = 49,997 \text{ мм}$$

и коэффициент линейного расширения:

$$\bar{\alpha} = \frac{6,27\cdot 10^{-4}}{49,997} = 1,254\cdot 10^{-5}\ \text{К}^{-1}$$

После этого заполняем последние три столбца табл. 6.
Затем находим $D = N\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2 = 7\cdot 114116 - 794^2 = 168376.$
Среднеквадратичная погрешность по формуле (27):

$$\Delta\bar{\alpha} = \frac{10^{-4}}{168376\cdot 4} = 0,12\cdot 10^{-6}\ \text{К}^{-1}$$

И окончательный результат для коэффициента линейного расширения получаем:

$$\alpha = (1,254 \pm 0,012)\cdot 10^{-5}\ \text{К}^{-1}$$

Если сравнить его с результатом, полученным графической обработкой на с. 20 видим, что графическая обработка дала хорошее приближение к оптимальному значению, полученному методом наименьших квадратов.

IУ. Точность вычислений при обработке измерений

В результате обработки измерений всегда получается приближенное значение измеряемой величины, точность которого характеризуется той погрешностью, которая получилась в процессе измерения, и никакими расчетами эту погрешность уменьшить нельзя. Поэтому и результат обработки с точки зрения количества значащих цифр должен соответствовать точности, полученной в процессе измерения. Избыточное количество значащих цифр в результате создает ложное впечатление о точности измерения, но кроме того, создает и дополнительные трудности в процессе обработки.

Допустим, при косвенном измерении некоторой величины z в результате математических вычислений было получено значение:

$$z = 242,87546 \pm 0,0084265$$

Глядя на этот результат, можно отметить, что пять первых разрядов значения z (242,87) не содержат погрешности. Эти разряды называются д о с т о в е р н ы м и разрядами приближенного числа. Остальные разряды, которые содержат погрешности, называются с о м н и т е л ь н ы м и разрядами приближенного числа.

Ошибка измерений находится приближенно, поэтому принято у погрешности оставлять только первую значащую цифру.

Но если первой значащей цифрой погрешности является единица или двойка, то у погрешности оставляется две значащие цифры. При этом у среднего значения оставляются цифры с таким расчетом, чтобы последние цифры среднего значения и погрешности были одного разряда.

Так, число $z = 242,87546 \pm 0,0084265$ должно быть записано:

$$z = 242,875 \pm 0,008,$$

а число $x = 4,862452 \pm 0,12465$ должно быть записано:

$$x = 4,86 \pm 0,12$$

При записи окончательного результата лишние цифры отбрасываются округлением. При округлении руководствуются следующим правилом. Если отбрасываемая цифра меньше пяти, то оставшиеся цифры записываются без изменения. Если отбрасываемая цифра больше пяти, то последняя сохраняемая цифра увеличивается на единицу. И наконец, если отбрасываемая цифра равна пяти, то последняя удерживаемая цифра увеличивается на единицу, если она нечетная и остается без измений, если она четная. В промежуточных расчетах необходимо удерживать дополнительно I – 2 разряда.

Следует помнить, что при составлении всякого рода справочных данных, физических констант и т.д. записываются только достоверные разряды числа. В этом случае смысловое значение приобретают и нули, стоящие в последних разрядах. Так, если записаны числа 28,6 и 28,600, то это означает, что первое число имеет три достоверных разряда, а второе – пять. Следовательно, эти два числа не равнозначны.

Поскольку погрешность табличного числа не указывается, при использовании его для расчетов за погрешность принимается половина единицы последнего разряда. Так для числа 28,6 нужно взять $28{,}60 \pm 0{,}05$, а для числа 28,600 нужно взять $28{,}6000 \pm 0{,}0005$.

При проведении косвенных измерений часто выполняются математические расчеты с использованием приближенных чисел, определяемых с различной точностью. В этом случае необходимо руководствоваться следующими правилами:

I. Абсолютная погрешность алгебраической суммы нескольких приближенных чисел не превышает суммы абсолютных погрешностей этих чисел. Допустим, нужно вычислить сумму приближенных чисел:

$$S = (251{,}3 \pm 0{,}3) + (0{,}284 \pm 0{,}004) + (7{,}68 \pm 0{,}03) + (24{,}6 \pm 0{,}4) + (2{,}4685 \pm 0{,}0008)$$

Складывая результаты измерений и погрешности, получим:

$$S = 286{,}3325 \pm 0{,}7348$$

В окончательном виде эта сумма запишется:

$$S = 286{,}3 \pm 0{,}7$$

Глядя на окончательный результат, видим, что в абсолютную погрешность суммы дали вклад только слагаемые, абсолютная погрешность которых имеет наибольшее значение, тогда как погрешность остальных слагаемых не играла роли в результате. Следовательно, абсолютная погрешность алгебраической суммы нескольких величин определяется погрешностями слагаемых, имеющих наибольшую величину абсолютной погрешности. Погрешности остальных слагаемых можно не учитывать.

2. Относительная погрешность произведения нескольких приближенных чисел, отличных от нуля, не превышает суммы относительных погрешностей сомножителей.

Допустим нужно вычислить величину $S = \frac{a \cdot b}{c}$, если

$a = 241{,}8 \pm 0{,}4$; $b = 0{,}0541 \pm 0{,}0005$; $c = 2{,}68 \pm 0{,}03$

Вначале определяем относительные погрешности сомножителей:

$$\delta_a = \frac{0,4}{241,8} = 0,00165; \quad \delta_b = \frac{0,0005}{0,0541} = 0,00092; \quad \delta_c = \frac{0,03}{2,68} = 0,0112$$

Из сопоставления относительных погрешностей видим, что наименее точно определено число c .

Наибольшая относительная погрешность величины:

$$\delta_S = \delta_a + \delta_b + \delta_c = 0,00165 + 0,00092 + 0,0112 = 0,0137,$$

округляя получим $\delta_c = 0,014$.

Отсюда видим, что относительная погрешность произведения нескольких чисел определяется относительной погрешностью числа с наименьшей точностью.

Искомая величина произведения: $\bar{S} = \frac{\bar{a}\,\bar{b}}{\bar{c}} = \frac{241,8 \cdot 0,0541}{2,68} = 4,881.$

Абсолютная погрешность произведения:

$$\Delta \bar{S} = 4,881 \cdot 0,014 = 0,068$$

и окончательный результат:

$$S = 4,88 \pm 0,07$$

Часто в расчетах используют иррациональные числа: π , $\sqrt{2}$, e ; и т.д., для которых в расчетах используются приближенные значения.

Каждое иррациональное число обычно вычислено и имеет большое число разрядов. В расчетах используется небольшое число разрядов, а остальное отбрасывается. За погрешность иррационального числа принимается первая цифра отбрасываемого остатка. Так, скажем, $\sqrt{3} = 1,7320508...$. Если в расчете берем $\sqrt{3} = 1,73$, то погрешность $\Delta(\sqrt{3}) = 0,002$. Или $e = 2,718281$. Если в расчете берем $e = 2,71$, то $\Delta e = 0,008$, но если в расчете берем $e = 2,7$, то $\Delta e = 0,02$ и т.д.

У. ПРИМЕР ОБРАБОТКИ ИЗМЕРЕНИЙ

Рассмотрим пример обработки измерения из задаче по определению горизонтальной составляющей магнитного поля Земли с помощью тангенсгальванометра.

Вектор напряженности магнитного поля Земли в общем случае наклонен к горизонтальной плоскости в рассматриваемой точке земной поверхности. Угол наклонения зависит от географической широты места. По[illegible] рассматривать его составляющие магнитного поля – горизонтальную и вертикальную. Наша задача состоит в измерении горизонтальной составляющей напряженности магнитного поля Земли.

Идея работы заключается в следующем. Пусть плоскость листа совпадает с горизонтальной плоскостью, и $\vec{H}_г$ представляет вектор горизонтальной составляющей магнитного поля Земли. Если дополнительно создать поле известной напряженности $\vec{H}$ перпендикулярно к $\vec{H}_г$ (рис. II),

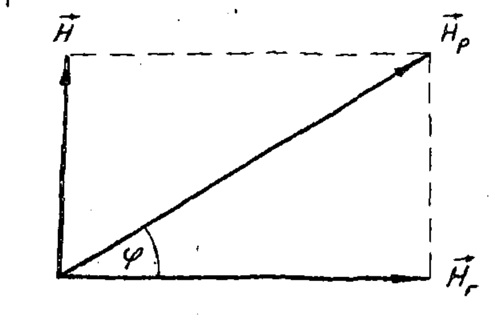


Рис. II

то образуется результирующее поле $\vec{H}_p$, вектор напряженности которого будет направлен под углом φ к магнитному меридиану, в плоскости которого лежит вектор $\vec{H}_г$, причем

$$tg\,\varphi = \frac{H}{H_г}$$

Измерив угол φ, можно вычислить горизонтальную составляющую магнитного поля Земли:

$$H_г = \frac{H}{tg\,\varphi}$$

Угол φ можно измерить с помощью магнитной стрелки, которая свободно вращается вокруг вертикальной оси. Такая магнитная стрелка (компас) устанавливается в направлении горизонтальной составляющей напряженности магнитного поля в данной точке. Магнитная стрелка с лимбом, разделенным на градусы, называется буссолью.

Магнитное поле $\vec{H}$ создается круговым током. Экспериментальная установка представляет собой короткую катушку радиуса R, содержащую N витков, по которой пропускается ток (круговой ток). В центре катушки установлена буссоль, нулевое деление шкалы которой совпадает с плоскостью катушки (кругового тока). Это устройство называется тангенс-гальванометром и может быть использовано для измерения силы тока, протекающего по катушке.

Если по катушке тангенс-гальванометра протекает ток J, то в центре катушки, где помещается магнитная стрелка, создается магнитное поле напряженностью:

$$H = \frac{JN}{2R}$$

Электрическая схема установки для измерения горизонтальной составляющей магнитного поля Земли представлена на рис. I2, где I – источник постоянного тока; 2 – реостат, с помощью которого можно регулировать силу тока в катушке тангенс-гальванометра; 3 – амперметр для измерения силы тока; 4 – переключатель, с помощью которого можно изменять направление тока в катушке тангенс-гальванометра; 5 – катушка тангенс-гальванометра; 6 – выключатель, служащий для выключения тока в цепи.

Работа выполняется следующим образом. Вначале, при отсутствии тока в цепи тангенс-гальванометра, стрелка буссоли устанавливается вдоль магнитного меридиана. Подождав, когда стрелка буссоли успокоится, устанавливают тангенс-гальванометр так, чтобы нулевое

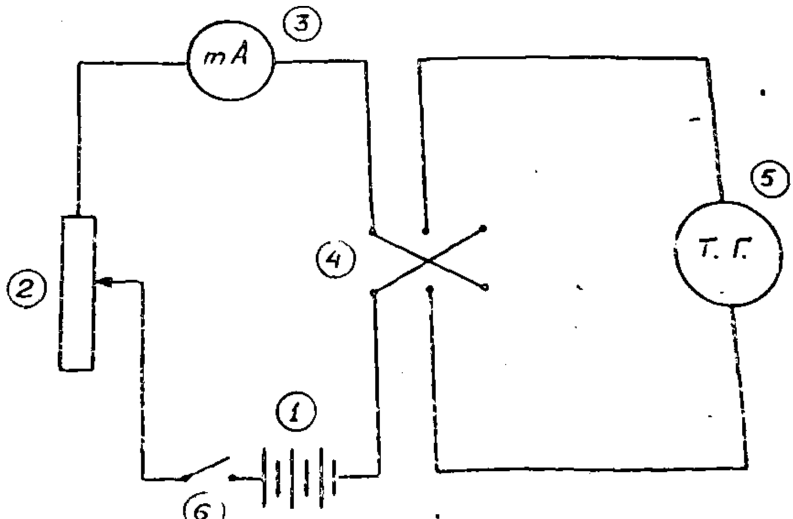


Рис. I2

деление лимба совпадало с положением северного конца магнитной стрелки. При этом плоскость катушки будет лежать в плоскости магнитного меридиана. Затем включают ток выключателем 6, величина которого измеряется амперметром 3. В центре витка создаётся магнитное поле напряжённостью [illegible], которое будет направлено перпендикулярно плоскости магнитного меридиана, как это показано на рис. II. В результате наложения двух полей образуется результирующее поле, напряженность которого H_p будет направлена под углом φ к меридиану. Под действием этого поля магнитная стрелка повернется на угол φ, который отсчитывается по лимбу буссоли. При этом

$$tg\,\varphi = \frac{JN}{2RH_r}$$

Откуда

$$H_r = \frac{JN}{2R\,tg\,\varphi} \tag{31}$$

В этой формуле все величины известны (сила тока J и угол φ - измеряются, а число витков N и радиус витка R - постоянные прибора) и по ним вычисляется горизонтальная составляющая магнитного поля Земли.

Прежде чем приступать к измерениям нужно внимательно проанализировать возможные источники ошибок и затем выбрать такую методику измерений, при которой влияние ошибок на результат измерений будет минимальным.

В нашем случае источниками ошибок являются:

1. Погрешности в показаниях амперметра.
2. Эксцентриситет магнитной стрелки.
3. Трение в опоре магнитной стрелки.
4. Отклонение плоскости витка от плоскости магнитного меридиана.
5. Отличие напряженности магнитного поля в точках расположения концов магнитной стрелки от напряженности поля в центре витка
6. Колебания тока в цепи в процессе измерения.

Рассмотрим каждую из этих погрешностей в отдельности.

1. Погрешность в показаниях амперметра имеет систематический характер и определяется классом точности прибора.

2. Эксцентриситет магнитной стрелки есть смещение оси вращения стрелки от линии, соединяющей ее концы. Величина эксцентриситета, как это показано на рис. 13, равна ε. В результате эксцентриситета северный конец стрелки (рис. 13) показывает 3 деления, а южный 5 делений. Как видно из рисунка, если бы эксцентриситет $\varepsilon = 0$, то оба конца стрелки показывали 4 деления шкалы. Отсюда следует, что для исключения ошибки, обусловленной эксцентри-

ситетом магнитной стрелки, нужно снимать показания северного и

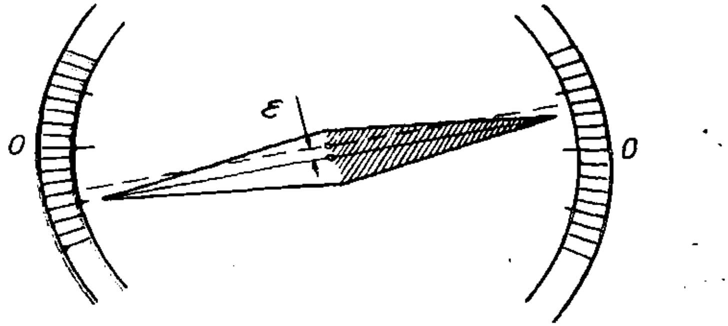


Рис. 13

южного концов стрелки и за результат измерения брать среднее значение.

3. Влияние трения в опоре. Когда магнитная стрелка находится в магнитном поле, последнее стремится ориентировать ее так, чтобы направление магнитной стрелки совпадало с направлением линии магнитного поля. Наличие трения в опоре стрелки приводит к появлению зоны нечувствительности, в пределах которой ориентирующее действие магнитного поля не может преодолеть трения, и магнитная стрелка может устанавливаться в любом положении в пределах зоны нечувствительности. В результате появляется погрешность в установке стрелки, которая имеет случайный характер. Чтобы уменьшить эту погрешность, измерения нужно проводить многократно.

4. Теперь рассмотрим ошибку, обусловленную отклонением плоскости витка от плоскости магнитного меридиана. Прежде всего заметим, что даже при очень тщательной установке прибора не удается точно совместить плоскость витка с плоскостью меридиана, а это значит, что создаваемое поле $\vec{H}$ не будет строго перпендикулярно к горизонтальной составляющей магнитного поля Земли, как это показано на рис. II.

Если бы возбуждаемое поле было перпендикулярно $\vec{H}_r$, то вектор равнодействующей $\vec{H}_p$ был бы он отклонен на угол φ (рис. 14). Однако в результате погрешности вектор $\vec{H}_k$ установлен не перпендикулярно к $\vec{H}_r$, и равнодействующая будет отклонена на угол φ'. В результате измерения угла отклонения стрелки будет допущена погрешность:

$$\varphi' \quad \varphi$$

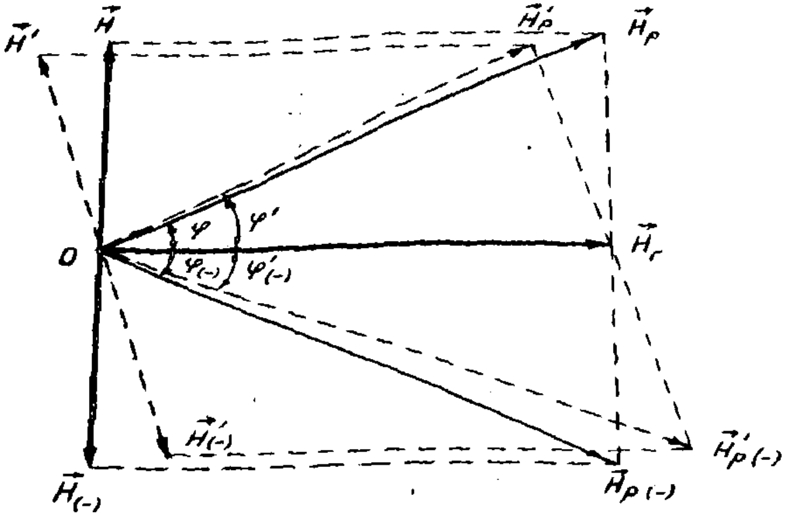


Рис. 14

Если теперь изменить направление накладываемого поля (заменить $\vec{H}'$ на $\vec{H}'_{(-)}$, рис. 14), то при измерении угла отклонения стрелки будет допущена погрешность:

$$\Delta\varphi_2 = \varphi'_{(-)} - \varphi_{(-)}$$

Из рис. 14 видно, что $\Delta\varphi_1$ и $\Delta\varphi_2$ близки по величине, но противоположные по знаку. Поэтому, если производить измерение угла отклонения стрелки при взаимно противоположных направлениях накладываемого поля и результат измерения определить как среднее арифметическое из полученных значений, то систематическая ошибка, обусловленная неточностью установки плоскости кольца тангенс-гальванометра, будет исключена. Чтобы изменить направление накладываемого поля на противоположное, нужно изменить направление тока в катушке, что осуществляется с помощью переключателя 4 (рис. 12).

5. При вычислении величины горизонтальной составляющей по формуле (31) за величину напряженности накладываемого поля принимается поле в центре кругового тока. На магнитную стрелку действует поле, которое имеет место в точках расположения ее концов. Очевидно, что это поле будет отлично от поля в центре витка. Следовательно, при расчете H_r по формуле (31) допускается систематическая погрешность,

которая является методической погрешностью. Эту погрешность можно исключить или путем применения однородного магнитного поля, или путем вычисления поля в точках расположения концов магнитной стрелки. Мы будем предполагать, что эта ошибка мала и не будем ее учитывать.

6. Наконец погрешность, обусловленная колебанием тока в цепи. Если в процессе измерений величина силы тока, протекающего по кольцу тангенс-гальванометра, будет изменяться, это приведет к изменению величины магнитного поля $\vec{H}$ и появится ошибка в определении горизонтальной составляющей напряженности магнитного поля Земли. Колебания тока в цепи могут быть обусловлены колебаниями напряжения источника питания и плохими контактами в местах соединения проводов электрической схемы.

Чтобы исключить эту погрешность, нужно тщательно собирать схему и внимательно следить за показаниями амперметра, поддерживая заданное значение силы тока.

Итак, величина горизонтальной составляющей напряженности магнитного поля Земли определяется выражением (31):

$$H_r = \frac{JN}{2R\,tg\,\varphi}$$

Относительная погрешность горизонтальной составляющей магнитного поля Земли (31) вычисляется по формуле (20):

$$\frac{\Delta H_r}{H_r} = \sqrt{\left(\frac{\Delta J}{J}\right)^2 + \left(\frac{\Delta R}{R}\right)^2 + \left(\frac{\Delta\,tg\,\varphi}{tg\,\varphi}\right)^2} \qquad (32)$$

Из выражения (32) видно, что погрешность определения $\vec{H}_r$ зависит от угла отклонения стрелки буссоли φ, поэтому не безразлично, при каких углах отклонения стрелки φ нужно проводить измерения.

$$\frac{\Delta\,tg\,\varphi}{tg\,\varphi} = \frac{\Delta\varphi}{\cos^2\varphi\,tg\,\varphi} = \frac{\Delta\varphi}{\sin\varphi\cdot\cos\varphi} \qquad (33)$$

Из (33) видно, что погрешность измерения $\vec{H}_r$ стремится к бесконечности, когда $\varphi \to 0$ и когда $\varphi \to \frac{\pi}{2}$. Очевидно, что имеются такие углы $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$, при которых эта погрешность будет иметь минимальное значение. Это минимальное значение будет достигаться тогда, когда знаменатель выражения (33) будет достигать максимума.

Найдем угол φ, при котором $f(\varphi) = \sin\varphi\cos\varphi$ достигает максимума:

$$f'(\varphi) = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi = 0$$

$$1 - tg^2\varphi = 0$$

$$\varphi = \frac{\pi}{4}.$$

Значит при $\varphi = \frac{\pi}{4}$ погрешность измерения $\vec{H_r}$ имеет минимальное значение. Учитывая результаты анализа погрешностей измерения, можно принять следующую методику проведения эксперимента. Через буссоль пропускают такой ток, чтобы магнитная стрелка отклонилась на 45^0, и измеряются углы отклонения северного и южного концов стрелки. Затем направление тока в буссоли изменяется на обратное, и измерения повторяются. Такие измерения нужно проделать многократно, чтобы уменьшить влияние погрешности, обусловленной трением магнитной стрелки.

Технические данные установки:

Тангенс-буссоль. Диаметр витка 0,49 м, число витков – 50.

Число делений лимбы – 360.

Амперметр. Прибор магнитоэлектрической системы № 462894 с постоянной относительной погрешностью. Класс точности 0,5. Шкала содержит 100 делений, максимальный ток 0,26 А.

Оценим систематические погрешности параметров, определяющих значение горизонтальной составляющей $\vec{H_r}$ магнитного поля Земли.

Из формулы (31) следует, что параметрами для определения $\vec{H_r}$ являются: сила тока J, протекающего в катушке, угол φ отклонения стрелки буссоли и радиус R кольца.

Относительная погрешность силы тока в кольце определяется классом точности прибора и составляет $\frac{\Delta J}{J} = 0{,}006$.

Относительная погрешность в определении угла отклонения стрелки:

$$\frac{\Delta\varphi}{\varphi} = \frac{0{,}5^0}{45^0} = 0{,}01$$

Относительная погрешность определения радиуса кольца:

$$\frac{\Delta R}{R} = 2\,\frac{0{,}005}{0{,}49} = 0{,}02$$

Сравнивая полученные относительные погрешности, видим, что погрешности в определении угла φ и радиуса R являются величинами одного порядка, тогда как относительная погрешность определения силы тока по крайней мере в 5 раз меньше. Это значит, что она не будет давать вклад в погрешность результата и поэтому ее в дальнейшем можно не учитывать.

В результате эксперимента были получены углы отклонения стрелки буссоли, представленные в табл. 6

Результаты измерения углов отклонения буссоли Таблица 6

Отсчет по амперметру		Отсчет по шкале буссоли (град).				Угол отклонения стрелки $\overline{\varphi_i}$
число делений	сила тока, А	φ_N^+	φ_S^+	φ_N^-	φ_S^-	
54,5	0,1362	45	45	47	47	46,0
54,5	0,1362	46	45	47	47	46,2
54,5	0,1362	45	46	47	48	46,5
54,5	0,1362	45	45	48	49	46,8
54,5	0,1362	46	46	49	47	47,0

Затем проводим обработку измерения углов отклонения стрелки буссоли.

1. Среднее значение угла:

$$\overline{\varphi} = \frac{\sum \overline{\varphi_i}}{N} = \frac{1}{5}(46^\circ + 46{,}2^\circ + 46{,}5^\circ + 46{,}8^\circ + 47^\circ) = 46{,}5^\circ$$

2. Погрешности отдельных измерений:

$$\Delta\varphi_1 = 46{,}5^\circ - 46^\circ = 0{,}5^\circ$$
$$\Delta\varphi_2 = 46{,}5^\circ - 46{,}2^\circ = 0{,}3^\circ$$
$$\Delta\varphi_3 = 46{,}5^\circ - 46{,}5^\circ = 0^\circ$$
$$\Delta\varphi_4 = 46{,}5^\circ - 46{,}8^\circ = -0{,}3^\circ$$
$$\Delta\varphi_5 = 46{,}5^\circ - 47^\circ = -0{,}5^\circ$$

Если погрешности определены правильно, их алгебраическая сумма должна равняться нулю. В нашем случае

$$\sum \Delta\varphi_i = 0{,}5^\circ + 0{,}3^\circ + 0^\circ - 0{,}3^\circ - 0{,}5^\circ = 0$$

3. Квадраты погрешностей отдельных измерений:

$$\Delta\varphi_1^2 = 0{,}25$$
$$\Delta\varphi_2^2 = 0{,}09$$
$$\Delta\varphi_3^2 = 0$$
$$\Delta\varphi_4^2 = 0{,}09$$
$$\Delta\varphi_5^2 = 0{,}25$$

4. Среднее квадратичное отклонение среднего:

$$S_{\bar\varphi} = \sqrt{\frac{\sum\Delta\varphi_i^2}{N(N-1)}} = \sqrt{\frac{0,25 + 0,09 + 0,09 + 0 + 0,25}{5.(5 - I)}} = 0,I8^\circ$$

5. Из табл. I (с. 11) находим коэффициент Стьюдента для доверительной вероятности $\alpha = 0,9$ и числа измерений $N = 5$, $t_\alpha(N) = 2,I$.

Доверительный интервал по случайной погрешности:

$$\Delta\bar\varphi_{сл} = S_{\bar\varphi} \cdot t_\alpha(N) = 2,I \cdot 0,I8 = 0,39^0$$

Систематическая погрешность в определении угла:

$$\Delta\varphi_{сис} = 0,5^0$$

Доверительный интервал для угла отклонения стрелки:

$$\Delta\bar\varphi = \sqrt{\Delta\varphi_{сл}^2 + \Delta\varphi_{сис}^2} = \sqrt{0,I9^2 + 0,5^2} = 0,63^0$$

7. Результат измерения угла:

$$\varphi = (46,5 \pm 0,6)^0$$

Процесс обработки измерений может быть значительно упорядочен и облегчен путем разумного составления таблицы для записи результатов наблюдений и обработки (табл. 7).

Таблица 7

Обработка данных для определения $H_Г$

Отсчет по амперметру		Отсчет по шкале буссоли (град)				Угол отклонения стрелки	$\Delta\varphi_i = \bar\varphi_i - \bar\varphi$	$\Delta\varphi_i^2$
число делений	сила тока (А)	φ_N^+	φ_S^+	φ_N^-	φ_S^-	$\bar\varphi_i^\circ$	(ℓ°)	$(\ell^\circ)^2$
54,5	0,I362	45	45	47	47	46,0	0,5	0,25
54,5	0,I362	46	45	47	47	46,2	0,3	0,09
54,5	0,I362	45	46	47	48	46,5	0	0
54,5	0,I362	45	45	48	49	46,8	-0,3	0,09
54,5	0,I362	46	46	49	47	47,0	-0,5	0,25
						$\sum\bar\varphi_i = 232,5$	$\sum\Delta\varphi_i = 0$	$\sum\Delta\varphi_i^2 = 0,68$
						$\bar\varphi = \frac{232,5}{5} = 46,5^\circ$		$S_{\bar\varphi} = \sqrt{\frac{0,68}{5\cdot4}} = 0,18^\circ$

Искомое значение горизонтальной составляющей $\overline{H}_r$ магнитного поля Земли:

$$\overline{H}_r = \frac{0,1362\cdot 50}{0,49\cdot \quad 46,5^{\circ}} = 13,24\ \frac{А}{м}$$

Относительная ошибка определения горизонтальной составляющей магнитного поля Земли определяется выражением:

$$\frac{\Delta \overline{H}_r}{\overline{H}_r} = \sqrt{\left(\frac{\Delta R}{R}\right)^2 + \left(\frac{\Delta \varphi}{\sin\varphi \cos\varphi}\right)^2}$$

Причем здесь величину $\Delta\varphi$ необходимо выражать в радианах:

$$\frac{\Delta \overline{H}_r}{\overline{H}_r} = \sqrt{\left(2\,\frac{0,005}{0,49}\right)^2 + \frac{0,63\cdot 3,14}{180 \quad 46,5^{\circ} \quad 46,5^{\circ}}}$$

$$= \sqrt{(0,020)^2 + (0,022)^2} = 0,030$$

Граница доверительного интервала:

$$\Delta \overline{H}_r = 13,24\cdot 0,03 = 0,39\ \frac{А}{м}$$

И окончательный результат для горизонтальной составляющей магнитного поля Земли можно записать:

$$H_r = (13,2 \pm 0,4)\ \frac{А}{м}$$

Относительная погрешность определения горизонтальной составляющей

$$100\ \frac{\Delta \overline{H}_r}{\overline{H}_r} = 3\%$$

УI. НЕКОТОРЫЕ СОВЕТЫ

Каждая лабораторная работа представляет небольшое исследование, которое проводится в рамках учебного процесса. При подготовке и проведении лабораторной работы необходимо уяснить идею работы, ознакомиться с физическими приборами и приобрести навыки работы с ними, освоить методику проведения измерений и их обработки, приобрести навыки в проведении анализа полученных результатов и формулировании выводов по работе.

Перед выполнением работы студент должен получить допуск к работе. В процессе допуска в личной беседе с преподавателем он должен показать знание закономерностей изучаемого явления с выводом необходимых расчетных формул, знание установки и принципа работы используемых приборов, знание методики проведения эксперимента и обработки полученных результатов.

После допуска студент выполняет работу.

Для того, чтобы работа была более успешной, советуем руководствоваться следующими рекомендациями:

1. При монтаже экспериментальной схемы необходимо измерительные приборы располагать так, чтобы можно было легко снимать их показания. Ключи, реостаты и другие элементы схемы, которыми приходится манипулировать в процессе работы, нужно располагать в удобном месте, чтобы работа с ними не требовала напряжений.

2. Прежде чем начать эксперимент, необходимо освоить методику проведения работы - порядок проведения операций и снятия показаний. Проследить за характером изменения показаний приборов во всем диапазоне изменения параметров, которые регулируются в процессе выполнения работы. Исходя из этого, оценить частоту замера экспериментальных точек на различных участках изменения параметров, добиваясь того, чтобы наиболее полно уловить характерные особенности изучаемого явления.

Эта часть работы должна быть проведена особенно тщательно и от того, насколько качественно это будет сделано, зависит успех работы и точность полученных результатов.

3. Аккуратно вести лабораторный журнал, все записи делать четко чернилами.

До начала эксперимента в журнале записываются данные всех измерительных приборов. Для электроизмерительных приборов указывается тип прибора, класс точности, пределы измерений и цена деления шкалы. Затем записываются значения параметров, которые в процессе эксперимента поддерживаются постоянными.

В процессе эксперимента показания приборов удобно записывать в подготовленные таблицы, причем для каждого параметра в таблице необходимо отвести две графы. В первой графе записываются показания приборов в делениях шкалы. Во второй графе записываются значения параметра в принятых единицах измерения, с учетом цены деления шкалы прибора.

4. Измерения необходимо проводить спокойно, без спешки. При необходимости полученные в эксперименте данные сразу наносятся на график. Если какие-то точки выпадают из плавного хода экспериментальной кривой, измерения могут быть сразу же повторены.

После окончания эксперимента и обработки первичной информации, результаты предъявляются преподавателю, который дает разрешение на окончательную обработку результатов и оформление работы. После этого оформляется отчет и предъявляется для защиты работы.

ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Зайдель А.Н. Элементарные оценки ошибок измерений. - Л.: Наука, 1968.-96 с.
2. Кассандрова О.Н., Лебедев В.В. Обработка результатов наблюдений - М.: Наука, 1970.-102 с.
Рабинович С.Г. Погрешности измерений. - Л.:Энергия, 1978.-258с.
Сквайрс Дж. Практическая физика. - М.:Мир, 1971. -242 с.