6、7 问题

P6.1 反例 $I+(-I)$

P6.2. $\|Ux\|^2=\|x\|^2=\lambda^2\|x\|^2 \Rightarrow |\lambda|=1$

P6.3. $\|Tu_i\|=\|u_i\|=1$

$(Tu_i)^*(Tu_j)=u_i^*T^*\cdot Tu_j=1$

P6.4 $\|Tv\|^2=\|\sum_{i=1}^{n}T(a_iu_i)\|^2=\sum_{i=1}^{n}a_i^2$

$\sum_{1\le i<j\le n} a_i\bar{a}_j\langle Tu_i,Tu_j\rangle$

而 $\langle Tu_i,Tu_j\rangle=\langle u_i,u_j\rangle$ 不一定成立 故

$\|v\|^2=\sum_{i=1}^{n}a_i^2$ 不一定等于 $\|Tv\|^2$，原命题不成立.

P6.5 证明 $\rightarrow$ 不妨设 $U=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

U的行标准正交 $\rightarrow$ $|a|^2+|b|^2=1$

列标准正交 $\rightarrow$ $|a|^2+|c|^2=1$ 令 c 为 $b/\bar{b}$ 在复平面上旋转的一个向量 即 $c=\pm e^{i\varphi}b/\pm e^{i\varphi}\bar{b}$

$U^*=\begin{bmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{d} \end{bmatrix}$ $U^*U=\begin{bmatrix} 1 & \bar{a}b+\bar{c}d \\ a\bar{b}+c\bar{d} & 1 \end{bmatrix}$

同理令 $d=\pm e^{i\alpha}a/\pm e^{i\alpha}\bar{a}$

若 $a\bar{b}+c\bar{d}=0$，取 $c=e^{i\varphi}\bar{b}$，d 取 $e^{i\alpha}\bar{a}$

$c\bar{d}=e^{i(\varphi-\alpha)}a\bar{b}$ 令 $\alpha=\varphi$. $U^*U=0$，得证

反之易证.

P6.6. 证明 →，不妨设 $U=\begin{bmatrix}\cos\alpha & \cos\beta \\ \sin\alpha & \sin\beta\end{bmatrix}$

$U^T=\begin{bmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha \\ \cos\beta & \sin\beta\end{bmatrix}$ $U^TU=\begin{bmatrix}1 & \cos(\alpha-\beta) \\ \cos(\alpha-\beta) & 1\end{bmatrix}$

取 $\alpha-\beta=\frac{\pi}{2}$ 则 $U=\begin{bmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha\end{bmatrix}$. 若设

$U=\begin{bmatrix}\cos\alpha & \cos\beta \\ -\sin\alpha & \sin\beta\end{bmatrix}$ 同理. 得证

反之易证.

P6.7. 证明 →，令 $a=e^{i(\alpha+\beta)}\cos\theta$, $b=e^{i(\alpha-\beta)}\sin\theta$

见 P6.5，得证. 反之易证.

P6.8. $U^*U=I$ 类似.

P6.9. (a) 设 f 并非一对一，存在 $u_1\neq u_2$, $f(u_1)=f(u_2)$

则 $\langle f(u_1), f(u_1)\rangle=\langle f(u_1), f(u_2)\rangle \Rightarrow$

$\langle u_1, u_1\rangle=\langle u_1, u_2\rangle$ 矛盾. 得证.

(b) $\langle f(u+cv), f(w)\rangle=\langle u+cv, w\rangle=\langle u,w\rangle+c\langle v,w\rangle$

$=\langle f(u)+cf(v), f(w)\rangle \Rightarrow$

$f(u+cv)=f(u)+cf(v)$

(c) 因为 f 是线性的，V是有限维，$\dim\ker f=0$.

$\dim \operatorname{Im} f=V$. 所以 f 是映上的

(d) $\|f(u)\|^2 = \langle f(u), f(u)\rangle = \langle u, u\rangle = \|u\|^2$

$\|f(u)\| = \|u\|$, 得证.

6.10 $U(\theta)\cdot U(\varphi) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} \cos(\varphi+\theta) & -\sin(\varphi+\theta) \\ \sin(\varphi+\theta) & \cos(\varphi+\theta) \end{bmatrix} = U(\theta+\varphi)$

推导过程中得证

6.11、设 $P = P_{u_1} + \cdots + P_{u_n}$ $U = [u_1 \cdots u_n]$ 为酉矩阵.

$PU = [Pu_1 \cdots Pu_n]$, 而 $P_{u_i} \cdot u_j = \begin{cases} u_j & i=j \\ 0 & i\neq j \end{cases}$

所以 $PU = [u_1 \cdots u_n] = U \Rightarrow P = I$.

设 $P' = c_1 P_{u_1} + \cdots c_n P_{u_n}$

$P'^* P' = \bar{c}_1 P_{u_1}^* + \cdots \bar{c}_n P_{u_n}^* = \sum_{1\le i\le j\le n} \bar{c}_i c_j P_{u_i} P_{u_j}$

对 $P_{u_i} P_{u_j}$ 有 $i=j$ $P_{u_i}P_{u_j} = P_{u_i}$

$i\neq j$ $P_{u_i}P_{u_j} = u_i u_i^* u_j u_j^* = 0$

$P'^* P' = P = I$

6.12 设 $A = [a_1 \cdots a_n]$ $B = [b_1 \cdots b_n]$, 则

$UB = A \Rightarrow U = AB^{-1} = AB^*$

6.13 $1/-1$, 2^n 个

6.14. $U^* (U^*)^* = U^* U = I$

$U^T (U^T)^* = U^T U^{*T} = (U^* U)^T = I$

$\bar{U} (\bar{U})^* = \bar{U} U^T = (\bar{U}^T)^T U^T = (U U^*)^T = I$

$\bar{U}^{-1} = U^T$

6.15. 证明 → $\operatorname{col} A = \operatorname{col} B \Rightarrow$ 存在 M_n 使 $A = BM$.

而 A, B 为酉矩阵有 $M = B^{-1}A = B^*A$, M 亦为酉矩阵

反之显而易见.

6.16. $\|U\|_F = \sqrt{\operatorname{tr} U^*U} = \sqrt{\operatorname{tr} I_n} = \sqrt{n}$.

6.17. 正交基 并非标准. 题目有误?

6.18. $A = I A I^*$

$A = UBU^*$ $B = U^*AU = U^*A(U^*)^*$

$A = U_1 B U_1^*$ $B = U_2 C U_2^*$ $A = U_1 U_2 C (U_1 U_2)^*$

实正交相似同理 $M_n(\mathbb{R})$ $M_n(\mathbb{C})$ 成立

6.19. $\begin{bmatrix} * & * \\ 0 & * \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} e^{i\alpha} & 0 \\ 0 & e^{i\beta} \end{bmatrix}$

6.20. $A_{*1} = [e^{i\alpha}, 0, \dots, 0]^T \Rightarrow$

$A_{*2} = [0, e^{i\alpha}, \dots, 0]^T \Rightarrow \dots$

A 为对角阵, 对角线元素为 $e^{i\varphi}$ (每个元素可取不同)

6.21. x, y 线性相关. $\|w_+\|$ 或 $\|w_-\|$ 其中一个为0, 不影

[illegible]

的另一个的解释.

(a) 若 $y=x, \sigma=-1, w=2x, u=\frac{x}{\|x\|}, U_w = I-2P_u = -U_x$

若 $y=-x, \sigma=1, w=-2x, u=-\frac{x}{\|x\|}, U_w = I-2P_u = U_x$

(b) 此时 $\sigma = -e^{i\theta} \quad w = 2e^{i\theta}x$

$$\sigma U_w = \sigma(I-2P_u) = -e^{i\theta}\left(I - 2\cdot\frac{4xx^*}{4\|x\|_2^2}\right)$$

$$= -e^{i\theta}U_x$$

(c) (a) $\sigma U_w x = \mp U_x \cdot x = \mp(I-2P_x)\cdot x$

$$= \mp(x-2x) = \pm x = y$$

(b) $\sigma U_w x = -e^{i\theta}(I-2P_x)\cdot x = e^{i\theta}\cdot x = y$

6.22. (a) 设 $y-x = v_1$, $y+x = v_2$

$$U_{y-x} = I - 2\frac{v_1v_1^T}{v_1^Tv_1} \qquad U_{y+x} = I - 2\frac{v_2v_2^T}{v_2^Tv_2}.$$

即证 $$\frac{v_1v_1^T}{v_1^Tv_1} + \frac{v_2v_2^T}{v_2^Tv_2} = I. \quad ①$$

左式 $= M$, 则 $$M_{ij} = \frac{(y_i-x_i)(y_j-x_j)}{\sum_{i=1}^{n}(y_i-x_i)^2} +$$

$$\frac{(y_j+x_j)(y_j+x_j)}{\sum_{i=1}^{n}(y_i+x_i)^2}$$

当 $n=2$ 时，考虑 $M_{11}=\frac{(y_1-x_1)^2}{(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2}+\frac{(y_1+x_1)^2}{(y_1+x_1)^2+(y_2+x_2)^2}$

$$=\frac{1}{1+\frac{(y_2-x_2)^2}{(y_1-x_1)^2}}+\frac{1}{1+\frac{(y_2+x_2)^2}{(y_1+x_1)^2}}$$

①　　②

又 $x_1^2+x_2^2=y_1^2+y_2^2 \Rightarrow \frac{y_2+x_2}{y_1+x_1}=-\frac{y_1-x_1}{y_2-x_2}$

①② 互为倒数 $M_{11}=\frac{1}{1+\frac{1}{a}}+\frac{1}{1+a}=1$

同理可得 $M_{22}=1$　$M_{21}=M_{12}=0$

$M=I$，得证。

(b) 观察①式，$uu^T+vv^T=I$，$\|u\|_2=\|v\|_2=1$ 有设

有 [illegible] 成立，设 $M=uu^T+vv^T$，$x\in F^n$，存在 a, b

$Mx = uu^T x + vv^T x = au + bv$ 即 col M 是以 u, v 为基的二维空间. $\dim \operatorname{col} M = 2$

当 $n \geq 3$, $\dim \operatorname{col} M = 2 \neq \dim \operatorname{col} I = n$.

$uu^T + vv^T \neq I$, 得证.

6.23. 略

6.24. $U_w x_i = (I - 2P_u) x_i = x_i - 2uu^T x_i$

$$= x_i - 2\langle x_i, u\rangle u$$

得证.

6.25 (a) $|\det Q| = 1 \Rightarrow |\det A| = |\det Q \cdot \det R| = \det R$

(b) $a_i = Q r_i \Rightarrow \|a_i\|_2 = \sqrt{a^* a} = \sqrt{(Q r_i)^* (Q r_i)}$

$$= \sqrt{r_i^* r_i} = \|r_i\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} r_{ij}^2} \geq r_{ii}$$

(c) 综合(a)(b)可证.

6.26. Gram-Schmidt 分解可以看作一系列操作.

① 用 A_{*1} 计算 Q_{*1}　$A_{*1} = Q_{*1}$

② A_{*1}, A_{*2} 计算 Q_{*2}　$A_{*2} = Q_{*2}$

故矩阵 Q 可以看作 A 右乘一个上三角矩阵.

$AR' = Q \Rightarrow A = QR'^{-1}$，$R'^{-1}$ 亦为上三角矩阵

又 $\mathrm{rank}A = n$，QR 分解唯一，两者等价.

6.27. 根据条件可知，A，B 均为酉矩阵 且 $AB = Q$

Q 亦为酉矩阵.

$|tr(ABAB)| = |\langle Q, Q^* \rangle| \le \|Q\|_F \cdot \|Q^*\|_F = \sqrt{n} \cdot \sqrt{n} = n$

6.28 $B = QAQ^*$

$B^* = (QAQ^*)^* = QAQ^* = B$，$B$ 是 Hermite 矩阵.

即 B 是上 Hessenberg 矩阵，也是下 Hessenberg 矩阵.

得证

6.29. $Q_0^* A = R_0 = A_1 Q_0^* \Rightarrow A_1 = Q_0^* A Q_0$

A_1 与 A 酉相似. 类推出 A_k 与 A 酉相似

6.30. $y = U_w x = (I - 2P_u)x = x - 2 \cdot \dfrac{ww^*}{\|w\|_2^2} \cdot x$

$$= x - 2\frac{\langle x, w\rangle w}{\|w\|_2^2}$$

$\|y\|_2^2 = \left\| x - 2\dfrac{\langle x, w\rangle w}{\|w\|_2^2} \right\|^2 = \|x\|^2 + 4\dfrac{|\langle x, w\rangle|^2}{\|w\|_2^2}$

$4\mathrm{Re}\dfrac{|\langle x, w\rangle|^2}{\|w\|_2^2} = \|x\|^2$

$$y^* x = \left(x^* - 2\frac{\langle x, w\rangle w^*}{\|w\|_2^2}\right)x = \|x\|^2 - 2\frac{|\langle x, w\rangle|^2}{\|w\|_2^2}$$

为实数

反之亦成立　取 $w = y - x$

$$\|w\|_2^2 = \|y - x\|_2^2 = 2\left(\|x\|^2 - \langle x, y\rangle\right)$$

$$\langle x, w\rangle = \langle x, y - x\rangle = \langle x, y\rangle - \|x\|^2$$

$$U_w x = x - 2\frac{\langle x, w\rangle \cdot w}{\|w\|_2^2} = y - \frac{\|w\|_2^2 + 2\langle x, w\rangle}{\|w\|_2^2} \cdot x$$

$= y$，得证.

6.31　$P_{cu} = cu(cu)^* = c\bar{c}uu^* = uu^* = P_u$.

$P_{\bar{u}} = \bar{u}(\bar{u})^* = (u^*)^T u^T = (uu^*)^T = P_u^T$

6.32、$\mathrm{rank}(A) = 1$　R 为 1×1 矩阵. $[a] = A$. $V[e_1] = V_1$,

6.33. 因为 $A = [A\ A']\begin{bmatrix} I_n \\ 0 \end{bmatrix}$. $[A\ A']$ 为 A 的列向量扩展为一组标准正交基，又 $\mathrm{rank}(A) = n$　QR 分解唯一，即 $R = I_n$. V 的前 n 列构成 A

给定标准正交向量组构成矩阵作完 QR 分解，其中 V 的列向量为扩展后的标准正交基.

6.34、QR分解过程中涉及的矩阵均为实矩阵，分解结果自然是实的

6.35 A宽QR分解为 $A=V\begin{bmatrix}R\\0\end{bmatrix}$ 其中 $V=[Q\ Q']$

则 $\begin{bmatrix}R\\0\end{bmatrix}=V^*A$，$r_{ij}=V^*_{i*}A_{*j}=q_i^*a_j=\langle a_j,q_i\rangle$

$i>j$ 时 R上三角阵 $r_{ij}=0$ （书有误吧？）

6.36 $A=SBS^{-1}=QRBR^{-1}Q^*$ R/R^{-1} 均为上三角阵，RBR^{-1} 上三角，得证

6.37.(a) 略

(b) $F_4^4=F_4^2\cdot F_4^2=\begin{bmatrix}1&\\&K_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&\\&K_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&\\&\overline{K_3^2}\end{bmatrix}=I$

6.38.(a) $F_n^2=\frac{1}{n}\left[\sum_{k=1}^{n}(w^{i+j-2})^{k-1}\right]_{i,j=1}^{n}$

当 $i+j-2=pn$，$F^2_{n\,ij}=1$ 否则为0，有

$i+j=n-2$ / $i+j=2$、前者代表反对角线、

后者为1.1处元素，即 $\begin{bmatrix}1&\\&K_{n-1}\end{bmatrix}$

(b) 显然

6.39. 略

6.40. 置换不做元素增删，只做行列交换，显然成立。

6.41. 不总是，A^T 并非作行列交换。

6.42. (a) $\text{rank}=r$，有 r 个列/行向量线性无关，交错构成的子矩阵，列/行向量为线性无关。

(b) 证明：A有一个 $k\times k$ 可逆子矩阵，A至少 k 个行向量线性无关，假设有 k 个行向量线性相关，则其 $k\times k$ 可逆子矩阵也线性相关，矛盾。

(c) 由 (a) 可推出

(d) 最大子方阵就是 [1]。

(e) $\text{rank}A\le n-2$，最大非零行列式子阵的阶为 $n-2$，而 $\text{adj}A$ 每个元素对应的子方阵阶为 $n-1$，行列式必为0，$\text{adj}A=0$。

(f) 同理，$\text{rank}A=n-1$，$\text{adj}A$ 至少一个非零元素，$\text{rank}\,\text{adj}A\ge 1$，$\text{adj}A\,A=0$，而A有 $n-1$ 个线性无关的列向量，$\dim\text{null}\,\text{adj}A=n-1$，$\text{Rank}\,\text{adj}A=1$

6.43. $U\otimes V=[u_{ij}V]=M_{m\times m}$，M为分块矩阵

$$MM^*_{ij}=\sum_{k=1}^{m}M_{ik}M^*_{kj}=\sum_{k=1}^{m}u_{ik}\overline{u_{kj}}\,I$$

$$=\langle u_i,u_j\rangle I=\begin{cases}I, & i=j\end{cases}$$

$0,\ i$时

$MM^\dagger = I$，$U \otimes V$为酉矩阵