第十章

P1. $A = UTU^*$ 且 $T = \begin{bmatrix} 1 & * & * \\ & 1 & * \\ & & 1 \end{bmatrix}$ A可逆.

$(A - I)^3 = 0 \Rightarrow A^3 - 3A^2 + 3A - I = 0$

$\Rightarrow A^2 - 3A + 3I = A^{-1}$

P2. (a) $A = UTU^* = U \begin{bmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{bmatrix} U^*$

$A^n = UT^nU^*$

$T^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & & * \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{bmatrix}$ $T^n = 0$

$\operatorname{spec} A = \{0\} \Rightarrow$ 幂零

若 $A^n = UT^nU^* = U[0]U^*$

$\lambda_1^n = \lambda_2^n \dots = \lambda_n^n = 0$. 幂零 $\Rightarrow \operatorname{spec} A = \{0\}$

(b) 设 $\operatorname{spec} A = \{0\}$, A 的最小多项式 $p_A(z) = z^d$

$d \le n$. 有 $p_A(A) = A^d = 0$, 幂零

幂零; $A^k = 0$. z^k 为零化多项式, A 特征值为 z^k 的根 $\Rightarrow \operatorname{spec} A = \{0\}$

P3. 幂零特征值全为0. schur三角化后, T为严格上三角阵. (a) (b) (c) 等价.

P4. ν个非零对角元素 对应 ν个非零列向量线性无关

rank T = col $T \geq \nu$.

$\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{bmatrix}$ rank = 2.

P5、$A = UTU^*$ rank A = rank$T$ 由P4得证.

$\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{bmatrix}$ 本身就是例子.

P6、记为 ① ≤ ② = ③ ≤ ④ = ⑤

① ≤ ②, 算术平均 ≤ 平方平均

③ ≤ ④, 显然,

P4 + ① ≤ ④ 可导出. 等号成立仅当所有 λ 相等

$T = cI_k \oplus 0_{n-k}$

P7. (a) $A = UTU^*$ $A^k = UT^kU^*$

$\mathrm{tr}\,A^k = \mathrm{tr}\,UT^kU^* = \mathrm{tr}\,T^kU^*U = \mathrm{tr}\,T^k$

$= \lambda_1^k + \cdots + \lambda_n^k$.

(b) 显然

(c) 易证

(d) $(A - \lambda_1 I)(A - \lambda_2 I)(A - \lambda_3 I) = 0$

$A^3 - (\mathrm{tr}A)A^2 + \frac{1}{2}((\mathrm{tr}A)^2 - \mathrm{tr}A^2)A = \det A \cdot I$

$\mathrm{tr}(\det A \cdot I) = 3.\det A = \mathrm{tr}A^3 - \frac{3}{2}\mathrm{tr}A \cdot \mathrm{tr}A^2 + \frac{1}{2}(\mathrm{tr}A)^3$

显然，得证

P8 $P_A(z)=z^n+c_{n-1}z^{n-1}\cdots+c_0$

$A^n+c_{n-1}A^{n-1}+\cdots+c_0I=0$

$I+c_{n-1}A^{-1}+\cdots+c_0A^{-n}=0$

$A^{-n}(A^n+c_{n-1}A^{n-1}+\cdots c_0I)=0$

$c_0P_{A^{-1}}(z)=z^nP_A(z^{-1})$

$P_{A^{-1}}(z)=\frac{z^n}{c_0}P_A(z^{-1})$

P9. $A^{-n}=(A^{-1})^n$ A^{-1}又是 $I,\cdots A^{n-1}$的

线性组合 有 $\mathrm{span}\{I, A, A^{-1}\cdots\}=\mathrm{span}\{I\ A\cdots\}$

$=\mathrm{span}\{I, A\cdots A^{n-1}\}$ 得证.

P10 设A, B 存在一个共同的特征值 λ, 有

$Ax=\lambda x,\quad B^*y=\bar{\lambda}y$

$Axy^*=\lambda xy^*\quad B^*yx^*=\bar{\lambda}yx^*\Rightarrow xy^*B=\lambda xy^*$

令 $X=xy^*$ $AX-XB=0$

P11. 显然 略

P12. P9-21. 双正交原理 $y^*x=0$, 调整元效

这样 $y^*x=u\|x\|_2\neq 0$

P13. $Ax - x(-B) = 0 \Rightarrow (A+B)x = 0$ 仅有 $x=0$

$A+B$ 可逆.

P14. 不可商. AB 不可交换.

P15 A^{-1} 是 $I \dots A^{n-1}$ 的线性组合. 全为上三角阵

A^{-1} 也是上三角阵

考虑对角元素 λ. $-C_0^{-1}(\lambda^{n-1} + C_{n-1}\lambda^{n-2} + \dots + C_1)$

$\lambda \neq 0$ $= -C_0^{-1}\lambda^{-1}(\lambda^n + C_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + C_1\lambda + C_0 - C_0)$

$= -C_0^{-1} \cdot \lambda^{-1} \cdot (-C_0) = \lambda^{-1}$

P16. $S^{-1}AS = R^{-1}Q^{-1}AQR$ 注意 R^{-1}. R 上三角

$Q^{-1}AQ = Q^{*}AQ$ 上三角. B 同理. 同相似

P17. I 在这里是个纯量.

P19. AB BA 非零特征值及对应重数相同. 应

为特征值的和 $\operatorname{tr}AB = \operatorname{tr}BA$. 矩阵乘法可证

P18 $-1/1$ 的代数重数小于等于 $n-1$. 其特征多项式

$P_A(z) = (z-1)^d (z+1)^{n-d}$ 一定能整除 $P(z)$

$P(z) = f \cdot P_A(z)$, $P(A) = f(A) \cdot 0 = 0$

P20. $f(z)$ 为 A 的零化多项式. 特征值为其根. 0 不是

A 可逆. $x^4 + 11z^3 - 7z^2 + 5z + 37 = 0$

$$A^{-1} = -\frac{1}{3}A^4 - \frac{11}{3}A^3 + \frac{7}{3}A^2 - \frac{5}{3}I$$

P21 (a) 显然

(b) $\begin{bmatrix}1 & \\ & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & \\ & 2\end{bmatrix}$

(c) $\operatorname{spec} AB \subseteq (\operatorname{spec} A)(\operatorname{spec} B)$

P22 $AC_{ij} = A_{i*} C_{*j} = A_{ii} \cdot C_{ij}$

$CB_{ij} = C_{i*} B_{*j} = C_{ij} B_{jj}$

$A_{ii} C_{ij} = C_{ij} B_{jj}$ 若 $i \neq j$ $C_{ij} = 0$

可得 C 为保形划分分块对角阵

P23 定理 10.4.6、 $A = S^{-1}TS$、 $T = T_1 \oplus \cdots \oplus T_d$.

$\operatorname{spec} T_n = \{\mu_n\}$. 又 $AB = BA$, $B = S^{-1}B'S$, $TB' = B'T$

T 为分块对角有 B' 为分块对角. 得证

P24. A 可对角化 $\Rightarrow$ $A = UTU^*$. $T = T_1 \oplus \cdots \oplus T_d$.

T_k 为纯量矩阵 $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} T$.

$A^k = UT^kU^*$ $T^k = T_1^k \oplus \cdots \oplus T_d^k$

$\operatorname{rank} A^k = \operatorname{rank} T^k = \operatorname{rank} T$.

P25. $C = \begin{bmatrix}0 & 1 \\ 1 & 0\end{bmatrix} \otimes I_n$ $\det C = \left(\det \begin{bmatrix}0 & 1 \\ 1 & 0\end{bmatrix}\right)^n = (-1)^n$

P26 设 $A = UTU^*$. $T = T_1 \oplus \cdots \oplus T_d$. $m_A = m_T = m_{T_1} \cdots m_{T_d}$

$m_{T_1}(A) \cdot m_{T_2}(A) \cdots m_{T_d}(A) = 0$. $z - \lambda_i I$ 的次数对应

$m_{T_i}(A)$中$A-\lambda_i I$的指数.

P27 设 $A=S^{-1}(2I_3\oplus 3I_2)S$, $m(A)=S^{-1}m(\Lambda)S=0$

而 $A-2I$, $A-3I$ 均非零. $m(A)$为极小多项式

P28. $p(A)$ 极小多项式, $p(A)=0$, A可对角化

A可对角化. $A=S^{-1}(\lambda_1 I_{n_1}\oplus\cdots\oplus\lambda_k I_{n_k})S=S^{-1}\Lambda S$

$p(A)=S^{-1}p(\Lambda)S$. 考虑 $p(\Lambda)$ 中各个项, 按其特征值

重数分块对角, 共k个矩阵, 对角线上k个分块, 每个矩阵

只有第k个分块为零. 分块对角矩阵乘法使结果为零. 若

减少其中一个项, 结果均不为0, p为极小多项式.

P29. $A^2=I \Rightarrow A^2x=x \Rightarrow \lambda^2x=x$ $\quad\lambda=\pm1$

schur分解 $A=U\begin{bmatrix}I_k & \times\\ & -I_{n-k}\end{bmatrix}U^*$

P30 (a) $m(A)=0$, $m(A)$中A的次数最大为n, $I\cdots A^n\in M^n$

必有矩阵线性相关. $v_1\cdots v_{n+1}$线性相关

(b) $v_1\cdots v_{L+1}$线性相关, 这是显然的

(c) $v_1\cdots v_L$线性无关, $c_{L+1}=0$, 则$c_1\cdots c_n$全为0, 矛盾.

$m_A(z)=c_1+c_2z+\cdots+c_{L+1}z^L$

(d) 令 $v_1'=v_1$, 对 $v_2\cdots v_{n+1}$ 进行正交化, 依次得到 $v_2', v_3'\cdots$

直至 v_{L+1}' 等于0, 而 $v_L=c_0v_1+c_1v_2+\cdots+c_{L-2}v_{L-1}$ 有

$m_A(z) = z^{l-1} - c_{l-2}z^{l-2} \cdots - c_0$

P31. 略

P32. (a) 设 $m = f_1 m_A = f_2 m_B$ 且 m 为 m_A, m_B 最小公倍式

$m(A \oplus B) = f_1 m_A(A) \oplus f_2 m_B(B) = 0$. 极小多项式须保

证能同时整除 m_A, m_B. m 保证了该条件下次数最小

(b) $A \oplus B$ 可对角化, $\operatorname{spec} A \oplus B = \{\lambda_1 \cdots \lambda_d\}$

$m_{A\oplus B} = (z-\lambda_1)\cdots(z-\lambda_d)$ 记为 p

$p(A\oplus B) = S^{-1} p(\Lambda) S = S^{-1}(p(a_1)I \oplus p(a_2)I \cdots p(b_1) \cdots) S = 0$

其中 $a_1 \cdots \in \operatorname{spec} A\oplus B$ 为 A 的特征值, $b_1 \cdots \in \operatorname{spec} A \oplus B$ 为 B

的特征值. 而 m_A, m_B 均为 $m_{A\oplus B}$ 的因式. m_A 又满足

$m_A(a_1) \cdots$ 等于 0, m_B 又满足 $m_B(b_1) \cdots$ 等于 0,

$m_A = (z-a_1)\cdots(z-a_d) \quad m_B = (z-b_1)\cdots(z-b_d)$

A, B 可对角化

P33. m_A 次数为 l, 说明 $I \cdots A^l$ 线性相关.

$I \cdots A^{l-1}$ 线性无关. $\dim \operatorname{span}\{I \cdots\} = \dim \operatorname{span}\{I \cdots A^{l-1}\} = l$

P34. 特征值为 $\pm 2i$

(a) 实矩阵特征值共轭成对. 3个特征值不满足. 不存在

(b) 存在

(c) 存在

P36. $A=S^{-1}(T_1\oplus T_2\oplus\cdots\oplus T_d)S$. 令 $T_i=\lambda_i I+(T_i-\lambda_i I)$

$=\Lambda_i+T_i'$，有 $A=S^{-1}[(\Lambda_1\oplus\cdots\oplus\Lambda_d)+(T_1'\oplus\cdots\oplus T_d')]S$

$=B+C$，其中 B 可对角化，而 T_i' 特征值全为0，幂等，C 亦幂等，$\Lambda_i T_i'=T_i'\Lambda_i$ 有 $BC=CB$

P36 (a) $C_f^T x_\lambda=[\lambda,\cdots,\lambda^{n-1},-(c_0+c_1\lambda+\cdots+c_{n-1}\lambda^{n-1})]$

仅当末项为0，即 $f(\lambda)=0$. $\lambda\in\mathrm{spec}(C_f)$，$C_f^T x_\lambda=[\lambda,\cdots,\lambda^n]$

$=\lambda x_\lambda$ ∴ x_λ 为特征向量

(b) $y=[y_1\cdots y_n]$ $C_f^T y_n=[y_2\cdots y_n\ -(c_0y_1+\cdots c_{n-1}y_n)]$

$=\lambda[y_1\cdots y_n]$

$y_2=\lambda y_1$ $y_3=\lambda y_2=\lambda^2 y_1$ $\cdots$ $y_n=\lambda^{n-1}y_1$

$-(c_0y_1+\cdots c_{n-1}y_n)=-y_1(c_0+\cdots c_{n-1}\lambda^{n})=\lambda^n y_1=\lambda y_n$

所以 $y=y_1x_\lambda$

(c) 如果一个向量是 C_f^T 的特征向量，必定为 kx_λ 即几何重数为1

P37. $C_fC_g=\begin{bmatrix}0 & & -c_0\\ 1 & & \vdots\\ & \ddots & \\ & 1 & -c_{n-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & & -c_0'\\ 1 & & \vdots\\ & \ddots & \\ & 1 & -c_{n-1}'\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}0 & -c_0 & c_0c_{n-1}'\\ 0 & \vdots & -c_0'+c_1c_{n-1}'\\ 1 & \vdots & \vdots\\ & \ddots & \end{bmatrix}$

$$c_{n-1} = c_{n-2} + c_{n-1}c_{n-1}$$

C_f, C_g 可交换，有 $c_0 = c_0'$ … $c_{n-1} = c_{n-1}'$，即 $f = g$

p38. 求多项式的根 即求 C_f 的特征值，等价于证明

复方阵至少有一个特征值

p39. (a) 之前问题的结论可得.

$A \otimes B$ 特征值为 λu，$\lambda \in \operatorname{spec} A$，$u \in \operatorname{spec} B$.

$T \otimes T$ 考虑 $m \times n$ 分块，对角线外为 $T_{ij}T$，所以对角线处

元素就是 λu.

(b) 见(a)

(c) $I_m = U I_m U^*$ $I_n = V I_n V^*$ 由(a)可证. 全员.

(d) 左右 右式 分别相加，可导出

(e) 一样的结论 较优，计算少

(f) $\det A \otimes B = \prod\limits_{0<i<m,\, 0<j<n} \lambda_i u_j = (\lambda_1 \cdots \lambda_m)^n (u_1 \cdots u_n)^m$

$= (\det A)^n (\det B)^m = \det B \otimes A$.

p40. (a) $\operatorname{vec}(AX - XB) = \operatorname{vec}(AXI_n - I_m XB)$

$= (I_n \otimes A - B^T \otimes I_m) \operatorname{vec} X = \operatorname{vec} C$

题目错了？

(b) 上一个问题有 K 的特征值 $\lambda_i - u_j$，共 mn 个.

当且仅当 $\lambda_i \neq \mu_j$. 特征值非零. K 可逆. 即

$\mathrm{spec}\,A \cap \mathrm{spec}\,B = \emptyset$

(c) 见 b

(d) K 可逆 $K\,\mathrm{vec}X = \mathrm{vec}C$ $C \neq 0$ 有一个解

$C=0$, $X=0$, 等价于 $AX = XB$ 的解.