第九章 习题

P1. 设B的特征值为 $\lambda_1 \cdots \lambda_n$, B^2 特征值为 $\lambda_1^2 \cdots \lambda_n^2$, 不应该有负的特征值. 不存在

P2. $\lambda_1 \cdots \lambda_n$ 可能有重复的, 去重后就是 $u_1 \cdots u_d$

P3. (a) 不一定, 重数可能不一样

(b) 相等, 特征多项式相同, 特征值相同, 谱集相同

P4. (a) A与Λ相似. $\mathrm{rank}(A)=\mathrm{rank}(\Lambda)$ $\mathrm{rank}(\Lambda)$又等于对角线上非零值个数

(b) 秩1 0个, 特征值全为0. $B-\lambda I=B$

几何重数为1 $\neq$ 代数重数, 不可对角化

P5. $z^n=0$ $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

P6. A与Λ相似. 设 $A^k=0$, 有 $\Lambda^k=0$, 即 $\Lambda=0$

$A=S\Lambda S^{-1}$, $A=0$

P7. $\det(A-\lambda_1 I)=0 \Rightarrow \det(A+cI-(\lambda_1+c)I)=0$

λ_1+c 为 $A+cI$ 特征值, 同理 $\lambda_2+c \cdots \lambda_n+c$ 为其特征值. $P_{A+cI}=[z-(\lambda_1+c)][z-(\lambda_2+c)]\cdots\cdots$

$=(z-c-\lambda_1)\cdots\cdots = P_A(z-c)$

P8. $\lambda_1+\lambda_2=\mathrm{tr}A$ $\lambda_1\lambda_2=\det A$

$x^2 - \mathrm{tr}A\, x + \det A = 0$ 的解为特征值

$x = \dfrac{\mathrm{tr}A \pm \sqrt{\mathrm{tr}A^2 - 4\det A}}{2}$ 得证

P9. 对角化之后，易证

P10. (a) $p_C(z) = \det(zI_{2n} - C) = \det\begin{bmatrix} zI_n & A \\ B & zI_n \end{bmatrix}$

zI_n 与 A 可交换 $= \det(z^2 I_n - AB)$

$= \det(z^2 I_n - BA)$

$= p_{AB}(z^2) = p_{BA}(z^2)$

(b) 由(a)导出

(c) $p_C(\lambda) = 0 \Rightarrow p_{AB}(\lambda^2) = 0 \Rightarrow p_{AB}((-\lambda)^2) = 0$

$\Rightarrow p_C(-\lambda) = 0$ 若 λ 不为零，$(\lambda, -\lambda)$ 特征值个数必为偶数。又 $C \in M_{2n}$，特征值个数为偶数，去除所有非零特征对，剩下的零特征值数必为偶数。

(d) $p_C(\pm\lambda_i) = 0 \Rightarrow p_{AB}(\lambda_i^2) = 0$ 其余同理。

(e) $p_{AB}(\lambda) = 0 \Rightarrow p_C(\pm\sqrt{\lambda}) = 0$

(f) 由 e，$\det(C) = (-1)^n(\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_n) = (-1)^n \det(AB)$

$= (-1)^n \det A \cdot \det B$.

P11. (a) $V^*V = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} iI_n & I_n \\ iI_n & -I_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -iI_n & -iI_n \\ I_n & -I_n \end{bmatrix}$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2I_n & 0 \\ 0 & 2I_n \end{bmatrix} = I_m$$

$$V^*CV = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} iI_n & I_n \\ iI_n & -I_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_2 & -A_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -iI_n & -iI_n \\ I_n & -I_n \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} iA_1+A_2 & iA_2-A_1 \\ iA_1-A_2 & iA_2+A_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cdots \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} A_1 - iA_2 + iA_2 - A_1 & A_1 - iA_2 - iA_2 + A_1 \\ A_1 + iA_2 + iA_2 + A_1 & A_1 + iA_2 - iA_2 - A_1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & \bar{A} \\ A & 0 \end{bmatrix}$$ 题目有误?

(b) $p_C(z) = \det(C - zI) = \det V^*V \det(C - zI)$

$= \det(V^*CV - zI) = p_{V^*CV}(z) = p_{\bar{A}A}(z^2) = p_{A\bar{A}}(z^2)$.

(c) λ是特征值, $\bar{\lambda}$也是, 由P10有$-\lambda$, $-\bar{\lambda}$也是,

非零特征值肯定成偶数. 同理.

(d) 由b. c λ, $-\lambda$对应λ^2 $\bar{\lambda}$, $-\bar{\lambda}$对应$\bar{\lambda}^2$

必然共轭成对

p12.(a) $U^*U=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} I_n & -iI_n \\ -iI_n & I_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_n & iI_n \\ iI_n & I_n \end{bmatrix} = I_{2n}$

$$U^*C(A)U=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} I_n & -iI_n \\ -iI_n & I_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_1 & -A_2 \\ A_2 & A_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_n & iI_n \\ iI_n & I_n \end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} A_1-iA_2 & -A_2-iA_1 \\ -iA_1+A_2 & iA_2+A_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cdots \end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} A_1-iA_2-iA_2+A_1 & iA_1+A_2-A_2-iA_1 \\ -iA_1+A_2-A_2+iA_1 & A_1+iA_2+iA_2+A_1 \end{bmatrix}$$

$$=\bar{A}\oplus A$$

(b) 矩阵直和特征值为矩阵的特征值，$\bar{A}$ 和 A 的特征值.

(c) $\bar{A}$ 和 A 对应特征值共轭. 全部相乘等于 $\det(U^*C(A)U)$

$=\det(C(A))\geq 0$

(d) $\det(zI-C(A))=\det(zI-U^*C(A)U)$

$=p_{U^*C(A)U}(z) = p_A(z)\,p_{\bar{A}}(z)$. 得证.

(e) 二阶实矩阵 $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ 特征值为 $a+bi$ $a-bi$

(f) 加法易证.

$C(A)C(B)=\begin{bmatrix} A_1 & -A_2 \\ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B_1 & -B_2 \\ \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} A_2 & A_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B_2 & B_1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A_1B_1 - A_2B_2 & -A_1B_2 - A_2B_1 \\ A_2B_1 + A_1B_2 & -A_2B_2 + A_1B_1 \end{bmatrix}$$

$$AB = (A_1 + iA_2)(B_1 + iB_2)$$

$$= (A_1B_1 - A_2B_2) + (A_1B_2 + A_2B_1)i \quad \text{得证.}$$

(g) $C(I_n) = \begin{bmatrix} I_n & \\ & I_n \end{bmatrix} = I_{2n}$

(h) $C(A)^{-1} \cdot C(A) = C(I) = C(A) \cdot C(A^{-1})$.

$C(A)^{-1} = C(A^{-1})$ 得证.

P13. (a) $Q^TQ = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} I_n & I_n \\ I_n & -I_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_n & I_n \\ I_n & -I_n \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2I_n & 0 \\ 0 & 2I_n \end{bmatrix} = I_{2n}$

$$Q^TCQ = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} I_n & I_n \\ I_n & -I_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_n & I_n \\ I_n & -I_n \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} A+B & A+B \\ A-B & B-A \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cdots \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2(A+B) & 0 \\ 0 & 2(A-B) \end{bmatrix} = (A+B) \oplus (A-B)$$

(b) $p_C(z) = \det(zI - C) = \det(Q^TQ)\det(zI - C)$

$$= \det(zI - Q^TCQ) = p_{Q^TCQ}(z) = p_{A+B}(z)\, p_{A-B}(z)$$

逆命题也成立

(c) $\det C = \det(Q^{T}CQ) = \det\left((A+B)\oplus(A-B)\right) = \det(A+B)(A-B)$

$= \det(A^2 - AB + BA - B^2)$ 若可交换 $\det C = \det(A^2 - B^2)$

P14. $p_C = p_{2A}(z)\,p_0(z)$ 特征值 $2\lambda_1, \cdots 2\lambda_n, 0$.

$C = 2A \oplus 0 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \otimes A$ $2A$ / 0 为特征值

P15. $AB \sim ABAA^{-1}$ 相似 特征值相同

P16. (a) $AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $BA = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ $BA \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ 相似 相同

(b) $AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $BA = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 肯定不相似

P17. 求和公式可得 P8 公式可得 两个解加 $n-2$ 个 0

P18. (a) 易得

(b) 定理，易证

(c) 特征值为虚

(d) P9.8 解得

P19. (a) 易证

(b) $CB = \begin{bmatrix} 2a & (n-2)a \\ a+b & (n-2)b \end{bmatrix}$ 定理就行了

(c) 判别式 $r = [2a+(n-2)b]^2 - 4[2a(n-2)b - (n-2)a(a+b)]$

$= 4a^2 + (n-2)^2b^2 - 4a(n-2)b + 4(n-2)a(a+b)$

$= 4a^2 + (n-2)^2 b^2 + 4(n-2)a^2 \geq 0$ 得证

P20. (a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ & \vdots & & \end{bmatrix}$

(b) $X^T Y = [v \ e] \begin{bmatrix} ne^T \\ r^T \end{bmatrix} = [nve^T + er^T] \neq A$

题目错了 定理3.2.9 $\operatorname{rank} X^T Y = \operatorname{rank} X^T I_2 Y = \operatorname{rank} I_2 = 2$

(c) $Y X^T = \begin{bmatrix} ne^T v & n^2 \\ r^T v & e^T r \end{bmatrix}$ 定理可证

(d) 判别式 $r = (ne^T v + e^T r)^2 - 4(ne^T v e^T r - n^2 r^T v)$

$= (ne^T v - e^T r)^2 + 4n^2 r^T v \geq 0$

P21. (a) $(y^* A)^* = A^* y = \bar{u} y = (u y^*)^*$ 得证

(b) $y^* A x = u y^* x = \lambda y^* x \quad \lambda \neq u \Rightarrow y^* x = 0$

P22. fact.1 (a). A相异特征值. B亦有n个线性无关特征向量和相异特征值. 可对角化.

A B 共有n个线性无关特征向量 构成 S 有

$AS = SX \quad BS = SY$. X, Y 对角阵

P23. $S\Lambda S^{-1} B = BS\Lambda S^{-1} \Rightarrow \Lambda S^{-1} BS = S^{-1} BS \Lambda$

Λ 与 $S^{-1}BS$ 可交换 分块对角矩阵 $S^{-1}BS$ 对角阵

P24. $\Lambda C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \cdots \end{bmatrix} \quad \Lambda S = S\begin{bmatrix} 0 & \\ & \cdots \end{bmatrix} \quad A = S\Lambda S^{-1}$

P24 若 $S = \begin{bmatrix} & & \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ 则 $S^{-1} = \begin{bmatrix} & \\ & -1 \end{bmatrix}$ $A = \ldots$

P25. 若特征值为虚数，肯定成对共轭出现，n为奇数，不可能全为虚数.

P26. (a) $zI - C_f = \begin{bmatrix} z & & & & c_0 \\ -1 & z & & & \vdots \\ & -1 & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & z & \vdots \\ & & & -1 & z+c_{n-1} \end{bmatrix}$

$\xrightarrow{M_1} \begin{bmatrix} \ddots & & & \\ & -1 & 0 & c_{n-2}+z^2+c_{n-1}z \\ & & -1 & z+c_{n-1} \end{bmatrix}$

$\vdots$

$\xrightarrow{M_{n-1}} \begin{bmatrix} 0 & & & f(z) \\ -1 & & & \vdots \\ & -1 & & \vdots \\ & & -1 & c_{n-2}+z^2+c_{n-1}z \\ & & & -1 \quad z+c_{n-1} \end{bmatrix}$

M_i 形如 $\begin{bmatrix} 1 & & z \\ & \ddots & 1 \\ & & 1 \end{bmatrix}$ 上三角阵 对角线为1

$P_{C_f} = \det(zI - C_f) = \det(M_{n-1} \cdots M_1 \cdot (zI - C_f))$

$= (-1)^{n+1} \cdot f \cdot (-1)^{n-1} = f$

(b) $n=1$时 $P_{C_{f(1)}} = f = c_0$

假设$n=k$时 $P_{C_{f(n)}} = f_n(z)$

$n=k+1$时 $zI - C_{f(n+1)} = \left[\begin{array}{c|c} z & \cdots\cdots c_0 \\ \hline -1 & \\ \vdots & zI - C_f \\ 0 & \end{array}\right] = \begin{bmatrix} z & x^T \\ y & A \end{bmatrix}$

$A - \frac{1}{z} y x^T = \begin{bmatrix} z & \cdots & c_1 \\ & \ddots & \vdots \end{bmatrix} = \frac{1}{z}\begin{bmatrix} 0 & \cdots & c_0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \end{bmatrix}$

$$\cdots \begin{bmatrix} \ddots & & \vdots \\ \vdots & & z+c_n \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} z & & c_1+\frac{1}{z}\cdot c_0 \\ & \ddots & \vdots \\ & & z+c_n \end{bmatrix} = zI - C'_{f(n)}$$

$$p_{C_{f(n+1)}} = z\cdot\det\left(A - \frac{1}{z}yx^T\right) = z\cdot\left(z^n + c_n z^{n-1} + \cdots + c_2 z + c_1 + \frac{1}{z}\cdot c_0\right)$$

$$= z^{n+1} + c_n z^n + \cdots + c_1 z + c_0 = f_{n+1}(z)$$

(c) 转置后特征值不变 圆盘变为 $\max\{1, |c_0|+\cdots|c_{n-1}|\}$

两个圆盘的交集 $\min\{R_{max} C_f, R_{max} C_f^T\}$

P27. (a) 易证

(b) 易证

(c) $c_2 = \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3$ $\quad c_0 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$ 通过行列式

c_1 等于 A 删除任意1行及对应列后行列式的和

P28. $P^2 = P \Rightarrow$ 特征值 0/1，对角和就是秩

P29. $I+AB$ 特征值是 AB 的特征值 $+1$

$I+BA$ 特征值是 BA 的特征值 $+1$

又 AB 和 BA 的非零特征值相同，行列式为特征值乘积

$\det(I+AB) = \det(I+BA)$

P3. 设 $M = I$ $\quad AM = MA \quad BM = MB$

P30. 设 $M \in \mathcal{F}$, $AM = MA$ $BM = MB$

$$ABM = AMB = MAB \quad AB \in \mathcal{F}'$$

P31. $e^{A} = Se^{\Lambda}S^{-1} = S\,\mathrm{diag}(e^{\lambda_1} \cdots e^{\lambda_n})S^{-1}$ 可逆

$$e^{-A} \cdot e^{A} = S\,\mathrm{diag}(e^{-\lambda_1} \cdots e^{-\lambda_n})\,\mathrm{diag}(e^{\lambda_1} \cdots e^{\lambda_n})S^{-1} = I$$

P32. (a) 易证

(b) A 特征值为0 有 B 的特征值仅有0. 令 $B =$

$$\begin{bmatrix} a & -a \\ a & -a \end{bmatrix} \quad (\mathrm{tr}\,A = 0,\ \det A = 0) = a\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$B^2 = a^2\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0 \neq \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(c) 几何重数 ≠ 代数重数

P33. $A = S\Lambda S^{-1} = S\Lambda' S^{-1} S\Lambda' S^{-1} = (S\Lambda' S^{-1})^2$

其中 $\Lambda' = \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\lambda_n} \end{bmatrix}$

P34. (a) $n=1$ $A=0$ 成立

$n=k$ 时 $\mathrm{tr}\,A = 0$. A是换位子成立

$n=k+1$ 时 $S^{-1}AS = A' = \begin{bmatrix} 0 & x'^T \\ y' & M' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & x'^T \\ y' & BC-CB \end{bmatrix}$

$M' \in M_n$ 且 $\mathrm{tr}\,A = 0$ 得证 $\mathrm{tr}\,M' = 0$ M'为换位子

设 $X = \begin{bmatrix} 1 & x^T \\ \end{bmatrix}$ $Y = \begin{bmatrix} 1 & x^T \\ \end{bmatrix}$

设 $X=\begin{bmatrix} & \\ y & B\end{bmatrix}$ $Y=\begin{bmatrix} & \\ y & C\end{bmatrix}$

$$XY-YX=\begin{bmatrix} 1+x^Ty & x^T+x^TC \\ y+By & x^Ty+BC\end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 1+x^Ty & x^T+x^TB \\ y+Cy & x^Ty+CB\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 0 & x^T(C-B) \\ (B-C)y & BC-CB\end{bmatrix}$$

令 $x'^T=x^T(C-B)$ $y'=(B-C)y$. 若有解

则为 SXS^{-1}. SYS^{-1} 的换位子.

(b) 取 $B'=B+\lambda I$, 令 $B'-C=B-C+\lambda I$ 可逆, 只要

$-\lambda$ 非 $B-C$ 的特征值, $B'C-C'B=BC-CB$ 此时

必有解.

(c) $XY-YX=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ Bv & BC\end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 0 & u^*B \\ 0 & CB\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix} 0 & -u^*B \\ Bv & BC-CB\end{bmatrix}$$

考虑 $B+\lambda I$ 可逆, 反求 u^*. v

P35. (a) 幂等 $\Rightarrow$ $\lambda=1/0$.

(b) 此时特征值全为1. 可逆 $P^2=P$ $P=P^2P^{-1}=PP^{-1}=I$.

(c) 特征值全为0. $(P-I)P=0$ 又1非P特征值,

$I-P$ 可逆, $P=0$

P36. (a) 左式 $= \dfrac{f(\lambda)-f(u)}{\lambda-u} S^{-1}\Lambda S + \dfrac{\lambda f(u)-u f(\lambda)}{\lambda-u} S^{-1} I S$

$$= S^{-1} f(\Lambda) S = f(A)$$

(b) $f(A) = S^{-1} f(\Lambda) S = S^{-1} \begin{bmatrix} f(\lambda) & \\ & f(\lambda) \end{bmatrix} S$

$$= f(\lambda) I.$$