8.7 问题

P1 A的特征值为 $z^5+2z+1=0$ 的根. 0不是. 所以0非特征值, A可逆

P2 $AB \neq BA$, 略

P3 $Ax=\lambda x \Rightarrow A^{-1}x = \frac{1}{\lambda}x$.

P4 设 (λ, x) 为A的特征对. $Ax=\lambda x$

若x为实向量. Ax 为实, λx 为实, 矛盾.

$\overline{Ax} = \overline{\lambda x} \Rightarrow A\bar{x} = \bar{\lambda}\bar{x}$.

P5 $Ax = Au + Aiv = \lambda u + \lambda i v$. 若 $u=0$. v 为特征向量, 反之. u 为特征向量. u, v 非0 皆为特征向量

P6 $K_\lambda = n - \dim col(A-\lambda I)$

又 $\dim col(A-\lambda I) = \dim col(A-\bar{\lambda} I)$

$= \dim col(\overline{A-\lambda I})$

$K_{\bar{\lambda}} = K_\lambda$

P7 显然 $Ae = re$. 同理. 列和为 r

P9 (a) $Ee = ee^Te = ne$.

(b) $Ev = ee^Tv = 0$.

(c) $E^2 - nE = ee^Tee^T - nee^T = nee^T - nee^T = 0$

(d) $p(t)$ 为E的最小多项式. 又 $p(t)$ 仅有两根. 只

E仅有两个特征值 $n, 0$. 考虑 $Ev=0$. v为e的正交向量

$\dim col(v)=n-1$, 0重数为$n-1$, 则n重数为1

P8. $G(A_j)=|z-k| \le n-1$. 若$k>n-1$. 则圆在右侧.

严格对角占优

$A(1-n)\cdot e=0$.

P10. $\lambda_1=a-b$ $A-\lambda_1 I=bJ$ $col(A-\lambda_1 I)=1$ 即

λ_1重数为$n-1$

$\lambda_2=(1-n)b$ λ_2重数为1

P11. $A(Ax)=\lambda Ax=\lambda^2 x$

$A^2=\begin{bmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $A^2x=0=\lambda^2 x$

$\lambda^2=0$. 考虑多项式 $p(A)=A^2$. $p(z)=z^2$

根只有0. 所以 $\operatorname{spec} A=\{0\}$

P12. 可逆 严格对角占优

P13. $G_k(A)=|z-2^n|\le 2^n-1$. 都在右侧, 所有

特征值非零. 可逆

P14. ... $A-\lambda I$ 可逆 $\dim(\mathcal{E}_\lambda(A))=0$

P14、交换关系. 可交换

$\lambda \notin \mathrm{spec} A$

P15、(a)(b)(c) 分块矩阵易证.

P16、$A^2 = A \Rightarrow A^2 x = Ax \Rightarrow \lambda^2 x = \lambda x$.

$\Rightarrow \lambda^2 - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 1/0$.

P17、特征值全部相同.

P18.(a) $\lambda = 1$. $u = 1$ $A+B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

$A+B$ 特征值 $1/3$.

(b). $AB = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ 特征值不为1.

(c) 不可交换.

P19 (a) $(\lambda-1)(\lambda-4)=0$ A $1/4$

$(\lambda-2)(\lambda-1)=0$ B $2/1$

(b) $A+B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ $3/5$

(c) $AB = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ $2/4$

(d) $BA = \begin{bmatrix} 2 & 16 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ 不可交换.

P20. (a). 由 T.4. A B 共有特征向量 v

$(A+B)v = Av + Bv = \lambda v + u v = (\lambda + u) v$

(b). $ABv = Auv = uAv = \lambda u v$

P21. 旋转矩阵 证明过了, 不记了. 显然

P22. $(\lambda A_i + u A_j)(\alpha A_k + \beta A_l)$

$= (\alpha A_k + \beta A_l)(\lambda A_i + u A_j)$

P23. $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & -d \\ d & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ac-bd & -ad-bc \\ bc+ad & ac-bd \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} c & -d \\ d & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ac-bd & -ad-bc \\ ad+bc & ac-bd \end{bmatrix}$

$(\lambda - a)^2 + b^2 = 0 \quad \lambda_\pm = a \pm ib$

$Z - \lambda_+ I = \begin{bmatrix} -ib & -b \\ b & -ib \end{bmatrix} \Rightarrow [1, -i]$ 即.

旋转矩阵

P24. $J_n^4 - I = 0$ 是化零多项式

$z^4 - 1 = 0 \quad z = \pm 1 \,/\, \pm i$

P25. 按(1)提示. 全是列的初等变换.

P26. (a) 按P25 用 $\varepsilon_\lambda(A)$ 构造特征向量组，重数为 m.

构造 $Y=[y_1 \cdots y_m]$ 设 $y\in Y$，且 y_j 模长为1

$Ay=\lambda y$. $\lambda = a_{jj}$ $|\lambda - a_{jj}| = 0 \le R_j(A)$

$\lambda \in G_j(A)$，m个向量对应的行均满足.

(b) $n-m+1$ 个圆盘，意味至少有一个(a)中的圆盘.

(c). 特征值和等于迹

P27. (a) $(Tf)(t)=0$，f非零函数. 不成立

(b). $\int_0^t f(s)ds = \lambda f(t)$

$f(t)=\lambda f'(t)$ 一个常微分方程.

$(\lambda, e^{\frac{1}{\lambda}t})$ 为特征对

P28. $a_{ij}B \cdot x_j y = a_{ij}\cdot x_j \cdot \mu y$

第i行 $x\otimes y = (a_{i1} x_1 + \cdots a_{ij}x_j)\mu y$

$= \lambda\mu x_i y$

$A\otimes B\cdot x\otimes y = \lambda\mu\, x\otimes y$

$((A\otimes I_m)+(I_n\otimes B))\cdot x\otimes y$

前一步结论，I_m 将记对 $(1, y)$．I_n 将记为 $(1, x)$

有 $\lambda x \otimes y + u x \otimes y = (\lambda + u) x \otimes y$