2021 年度 方程

大柴 寿浩

October 12, 2021

内容

高校の関数

写像とは

置換のなす集合

$1, 2, \ldots, n$ の入れ換えを集めた集合を $\mathfrak{S}_n$ で表す．
置換の個数は $1, \ldots, n$ の並べ方の個数と同じ．つまり，

$$|\mathfrak{S}_n| = \left| \left\{ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix} \right\} \right| = n!$$

1 から 4 までの例

ポイント

例を作ってみるのは大事!

$n = 1$ のとき, $1 \mapsto 1$ のひとつだけ.
$n = 2$ のとき,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

の 2 コ.
$n = 3$ のとき, さっきやった 6 コ.

展開: 置換を行列として書いてみる.

置換 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ に対し, ベクトル $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ を, 第 i 成分を第 $\sigma(i)$ 成分に移動させたベクトル $\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_1 \end{pmatrix}$ に対応させる行列を A_σ とする.

展開: 置換を行列として書いてみる.

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_1 \end{pmatrix} = A_\sigma \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

から, A_σ の成分を求めてみると,

$$A_\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となる.

展開: 置換を行列として書いてみる.

行列は

$$A(x+y) = Ax + Ay, \quad A(cx) = cAx$$

という性質を持っていた.
写像でこの性質を満たすものを線形写像といって, n 次元ベクトルから自分自身への全単射な線形写像の集合を $GL_n(\mathbf{R})$ とかくと, これは, 正則な $n \times n$ 行列の集合と思える.
さっきやった '置換 $\longleftrightarrow$ 行列' の対応は $\mathfrak{S}_n \to GL_n(\mathbf{R})$ という写像になっている. (置換の行列表現という.)
群を線形写像にうつして調べる分野もあったりします.