代数曲線論

Toshi2019

Feb 20, 2022

概要

報告者は，21 年度の秋セメスターに [3] を用いてセミナーを行った．本稿では，このセミナーで勉強した内容を報告する．まず複素関数論について復習してからリーマン球面について述べる．その後，本稿ではほとんど 1 次元の場合，すなわちリーマン面の場合しか扱わないが，一般の次元に対して複素多様体を定義する．セミナーで学んだ事実のうち興味あるものとして，リーマン・ロッホの定理をリーマン球面に対して適用したものと代数学の基本定理がある．これらの証明が本稿の目標である．最後に，特異点のない代数曲線について，方程式の解としての構造と複素多様体としての構造の間の対応について述べる．

凡例

本稿では，次の記号について断りなく用いる．

- $\mathbf{Z}, \mathbf{R}, \mathbf{C}$ は整数，実数，複素数全体の集合を表す．
- 何らかの族 $(x_i)_{i\in I}$ について，添字集合が明らかな場合は $(x_i)_i$ のように表すことがある．
- X を集合とする．たんに X の関数というときには，X 上の複素数に値を取る写像とする．
- 差集合：集合 X の元のうち A に属さないもの全体を $X - A$ で表す．
- 球面：$S^{n-1} \coloneqq \{x \in \mathbf{R}^n; \|x\| = 1\}$
- 射影：直積集合に対し第 i 成分を対応させる写像を $\mathrm{pr}_i \colon \prod_i X_i \to X_i$ とかく．

1　複素関数論

f を複素数平面全体で定義された複素数に値を取る関数とする．

2　リーマン面

2.1　リーマン球面

$\mathbf{C}^2$ から原点 $0 = (0, 0)$ を除いた集合 $\mathbf{C}^2 - \{0\}$ の点 $(a_0, a_1), (b_0, b_1)$ に対し次の関係を考える．

$$(a_0, a_1) \sim (b_0, b_1) \iff (a_0, a_1) = c \cdot (b_0, b_1) \text{ となる複素数 } c \neq 0 \text{ が存在する．} \tag{1}$$

これは同値関係である．(a_0, a_1) の同値類 $\{c \cdot (a_0, a_1); c \in \mathbf{C} - \{0\}\}$ を $[a_0 \colon a_1]$ とかく．

(1) **が同値関係になることのチェック**．（反射律）$c = 1$ は $(a_0, a_1) = 1 \cdot (a_0, a_1)$ をみたす．

（対称律）複素数 $c \neq 0$ を $(a_0, a_1) = c \cdot (b_0, b_1)$ をみたすものとすると，複素数 $c^{-1} \neq 0$ は $(b_0, b_1) = c^{-1} \cdot (a_0, a_1)$ をみたす．

（推移律）複素数 $c, c' \neq 0$ をそれぞれ $(a_0, a_1) = c \cdot (b_0, b_1)$，$(b_0, b_1) = c' \cdot (c_0, c_1)$ をみたすものとする．このとき複素数 $cc' \neq 0$ は

$$(a_0, a_1) = c \cdot (b_0, b_1) = cc' \cdot (c_0, c_1)$$

をみたす．　□

同値関係 $\sim$ の定める商写像を用いて次の集合を定義する．

定義 2.1. $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}) = \left(\mathbf{C}^2 - \{0\}\right)/\!\sim$ を**リーマン球面** (Riemann sphere) という．$\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ を $\mathbf{P}^1_{\mathbf{C}}$ とか $\mathbf{P}^1$ ともかく．

$\mathbf{P}^1$ の任意の点 P は $[a_0 \colon a_1]$ の形に表せる．実際，P を $\mathbf{P}^1$ の点とすると，$\mathbf{P}^1$ の定義より，$(a_0, a_1) \in \mathbf{C}^2 - \{0\}$ で $P = \pi(a_0, a_1) = [a_0 \colon a_1]$ となるものが存在する．

また，$[a_0 \colon a_1] = [b_0 \colon b_1]$ となるのは，$a_0 \colon a_1 = b_0 \colon b_1$ となるときである．実際，

$$\begin{aligned}
[a_0 \colon a_1] = [b_0 \colon b_1] &\iff (a_0, a_1) \in [b_0 \colon b_1] \\
&\iff (a_0, a_1) \sim (b_0, b_1) \\
&\iff (a_0, a_1) = c(b_0, b_1) \text{ for some } c \neq 0 \\
&\iff a_0 = cb_0, a_1 = cb_1 \text{ for some } c \neq 0 \\
&\iff a_0 \colon b_0 = a_1 \colon b_1 \\
&\iff a_0 b_1 = a_1 b_0 \\
&\iff a_0 \colon b_1 = b_0 \colon b_1
\end{aligned}$$

である．

定義 2.2. 次の写像の組を考える．$\mathbf{C}^2 - \{0\} \underset{\mathrm{pr}_2 = X_1}{\overset{\mathrm{pr}_1 = X_0}{\rightrightarrows}} \mathbf{C}$; $(a_0, a_1) \mapsto a_0, a_1$. この組を $\mathbf{C}^2 - \{0\}$ の標準座標，$\mathbf{P}^1$ の同次座標という．

$P \in \mathbf{P}^1$ を代表する $\mathbf{C}^2 - \{0\}$ の点 $\tilde{P}$ の標準座標の値 (a_0, a_1) が P の同次座標の値である．なお，P に対する $\tilde{P}$ の取り方，すなわち (a_0, a_1) の取り方には任意性がある．

$\mathbf{P}^1$ は商写像 $\pi \colon \mathbf{C}^2 - \{0\} \longrightarrow \left(\mathbf{C}^2 - \{0\}\right)/\!\sim$ による商位相により位相空間になる．この定義から π の連続性が従う．

$\mathbf{P}^1$ の位相空間としての性質を調べるために，次の部分集合を定義する．

$$\begin{aligned}
U_0 &= \{[a_0 \colon a_1] \in \mathbf{P}^1; a_0 \neq 0\}, \\
U_1 &= \{[a_0 \colon a_1] \in \mathbf{P}^1; a_1 \neq 0\}.
\end{aligned}$$

このとき次が成り立つ．

$$\begin{aligned} U_0 \cup U_1 &= \mathbf{P}^1, \\ U_0 \cap U_1 &= \{[a_0\colon a_1] \in \mathbf{P}^1; a_0, a_1 \neq 0\} \\ &= U_0 - \{[1\colon 0]\} \\ &= U_1 - \{[0\colon 1]\}. \end{aligned}$$

補題 2.3. 1. 商写像 $\pi\colon \mathbf{C}^2 - \{0\} \longrightarrow \left(\mathbf{C}^2 - \{0\}\right)/{\sim}$ は開写像である．

2. U_0 と U_1 は $\mathbf{P}^1$ の開集合であり，

$$\varphi_0\colon U_0 \xrightarrow{\sim} \mathbf{C}; [a_0\colon a_1] \mapsto a_1/a_0, \varphi_1\colon U_1 \xrightarrow{\sim} \mathbf{C}; [a_0\colon a_1] \mapsto a_0/a_1,$$

はともに同相写像である．

3. 任意の $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in GL(2, \mathbf{C})$ に対し，自己同相写像

$$p_A\colon \mathbf{P}^1 \xrightarrow{\sim} \mathbf{P}^1; \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix}$$

が存在する．

4. $\mathbf{P}^1$ は第 2 可算公理をみたす連結なコンパクトハウスドルフ空間である．

証明． 1. U を $\mathbf{C}^2 - \{0\}$ の開集合とする．$\pi(U)$ が $\mathbf{P}^1$ の開集合であること，すなわち $\pi^{-1}(\pi(U))$ が $\mathbf{C}^2 - \{0\}$ の開集合であることを示す．いま，任意の開集合 $U \subset \mathbf{C}^2 - \{0\}$ に対し，複素数 $c \neq 0$ を用いて

$$cU = \left\{(ca_0, ca_1); (a_0, a_1) \in \mathbf{C}^2 - \{0\}\right\}$$

とおくと，cU は $\mathbf{C}^2 - \{0\}$ の開集合であり，

$$\pi^{-1}(\pi(U)) = \bigcup_{c \in \mathbf{C} - \{0\}} cU \tag{$*$}$$

なので，$\pi^{-1}(\pi(U))$ は $\mathbf{C}^2 - \{0\}$ の開集合である． □

注意 2.4 ($(*)$ について)**.** この等式については次の図 1 を見ると理解しやすい．いま，簡単のため $\mathbf{R}^2$ の部分集合 U について考える．$\pi(U)$ は U を通る直線たちの集合である．像が $\pi(U)$ となるようなもの，つまり $\pi^{-1}(\pi(U))$ は U を c 倍に拡大・縮小したもの全体である．したがって $(*)$ が成り立つ．

次のような場合も見ておくと複素トーラスの導入のときなどに役立つ．

$$\pi\colon \mathbf{R} \twoheadrightarrow \mathbf{R}/\mathbf{Z}; x \mapsto x \mod \mathbf{Z}$$

を考える．これは図 2 の上の直線を丸めて 1 次元トーラスにしたものである．

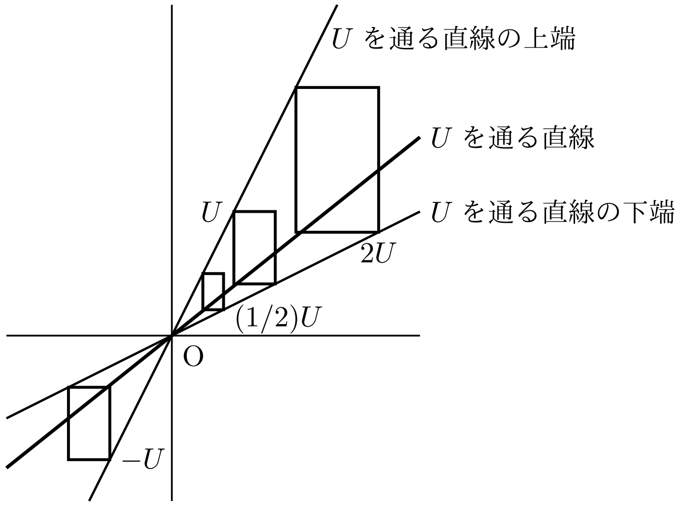

図 1　商写像の逆像 1

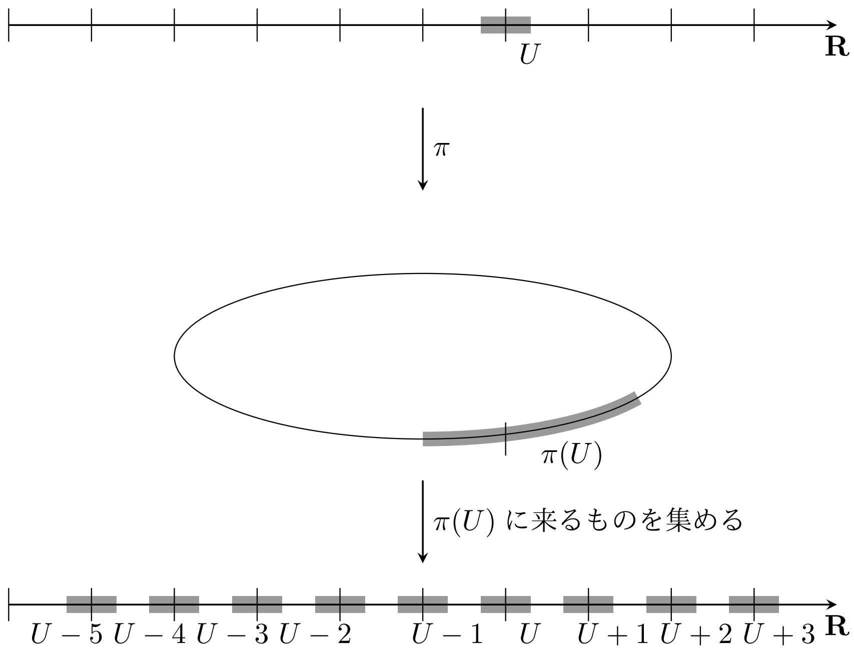

図 2　商写像の逆像 2

この場合は次のようになる．

$$
\begin{aligned}
\pi^{-1}\left(\pi(U)\right) &= (U \text{ を射影したものと同じところに行くもの}) \\
&= (U \text{ を整数分だけずらしたもの全て}) \\
&= \bigcup_{n \in \mathbf{Z}} (U+n).
\end{aligned}
$$

$\mathbf{C}^n$ での座標が $z = (z_1, \ldots, z_n)$ であるとき複素数空間 $\mathbf{C}^n$ を $\mathbf{C}^n_z$ とか $\mathbf{C}^n_{(z_1,\ldots,z_n)}$ とかく．

定義 2.5 (n 次元複素多様体)**.** X を位相空間とする．$(\varphi_i\colon U_i \to \mathcal{U}_i)_{i\in I}$ を写像の族とする．このとき，対 $(X, (\varphi_i)_i)$ が次の条件 (1)–(4) をみたすとき，X を台集合とし $(\varphi_i)_i$ を座標近傍系とする n **次元複素多様体** (n-dimensional complex manifold) という．

(1) X は空集合でなく，第 2 可算公理を満たす連結なハウスドルフ空間である．

(2) すべての $i \in I$ に対して U_i は X の空でない開集合であり，$(U_i)_i$ は X の開披覆である．

(3) すべての $i \in I$ に対して，$\mathcal{U}_i$ は $\mathbf{C}^n_{(z_1,\ldots,z_n)}$ の空でない開集合であり $\varphi_i\colon U_i \to \mathcal{U}_i$ は同相である．

(4) 任意の $i \neq j \in I$ で $U_i \cap U_j \neq \varnothing$ をみたすものに対して $\mathcal{U}_{ij} \coloneqq \varphi_j(U_i \cap U_j) \subset \mathcal{U}_j$ とおくとき，$\varphi_{ij} \coloneqq \varphi_i \circ \varphi_j^{-1}\big|\mathcal{U}_{ij}\colon \mathcal{U}_{ij} \to \mathcal{U}_{ji}$ は正則である．

1 次元複素多様体を**リーマン面** (Riemann surface) という．

3　1 次元における諸結果

次はリーマンロッホの定理の特殊な場合である．

定理 3.1 ([3, 命題 1.14])**.** $P_1, \ldots, P_m$ を $\mathbf{P}^1$ の互いに相異なる点とする．$\mathbf{P}^1$ 上の有理形関数で各 P_i のみで高々 n_i の極をもつもの全体

$$\Gamma\left(\mathbf{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}\left(\sum_{i=1}^m n_i P_i\right)\right)$$

は関数の和とスカラー倍によって $\mathbf{C}$ ベクトル空間を成す．さらにその空間の次元は次で与えられる．

$$\dim\Gamma\left(\mathbf{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}\left(\sum_{i=1}^m n_i P_i\right)\right) = 1 + \sum_{i=1}^m n_i.$$

4　コンパクトリーマン面

定理 4.1 (代数学の基本定理 [3, 系 2.24])**.** $n \geqq 1$ とする．複素数を係数とする n 次方程式

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n = 0, \quad a_0 \neq 0$$

に対し，複素数解 α が存在する．

5　それから

参考文献

[1] 上野健爾, 代数幾何, 岩波書店, 2005.

[2] 梅村浩, 楕円関数論 楕円曲線の解析学 [増補新装版], 東京大学出版会, 2020.

[3] 小木曽啓示, 代数曲線論, 朝倉書店, 2002.

[4] 金子晃, 関数論講義 (ライブラリ数理・情報系の数学講義, 5), サイエンス社, 2021.

[5] 小林昭七, 複素幾何 1 (岩波講座現代数学の基礎, 29), 岩波書店, 1997.

[6] 小林昭七, 複素幾何 2 (岩波講座現代数学の基礎, 30), 岩波書店, 1998.

[7] 神保道夫, 複素関数論 (岩波講座現代数学への入門, 4), 岩波書店, 1995.

[8] 武部尚志, 楕円積分と楕円関数 おとぎの国の歩き方, 日本評論社, 2019.

[9] 藤本坦孝, 複素解析 (岩波講座現代数学の基礎, 3), 岩波書店, 1996.

[10] 吉田洋一, 函数論 第 2 版 (岩波全書, 141), 岩波書店, 1973.

[11] 著者, 書名 (シリーズ名, 巻数), 発行所, 発行都市名, 年号