# 代数曲線論

Toshi2019

Feb 20, 2022

**概要**

本稿の目的は，21 年度の秋セメスターに [3] を用いて行ったセミナーの内容を報告することである．まず複素関数論について復習してからリーマン球面について述べる．その後，本稿ではほとんど 1 次元の場合，すなわちリーマン面の場合しか扱わないが，一般の次元に対して複素多様体を定義する．セミナーで学んだ事実のうち興味あるものとして，リーマン・ロッホの定理をリーマン球面に対して適用したものと代数学の基本定理がある．これらの証明が本稿の目標である．

## 凡例

本稿では，次の記号について断りなく用いる．

- $\mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{C}$ はそれぞれ整数，有理数，実数，複素数全体の集合を表す．
- 何らかの族 $(x_i)_{i\in I}$ について，添字集合が明らかな場合は $(x_i)_i$ や $(x_i)$ のように略記することがある．
- $X$ を集合とする．たんに $X$ の関数というときには，$X$ 上の複素数に値を取る写像とする．
- 差集合：集合 $X$ の元のうち $A$ に属さないもの全体を $X - A$ で表す．
- 球面：$S^{n-1} \coloneqq \{x \in \mathbf{R}^n; \|x\| = 1\}$
- 第 $i$ 射影：直積集合に対し第 $i$ 成分を対応させる写像を $\mathrm{pr}_i\colon \prod_i X_i \to X_i$ とかく．
- 開近傍：距離 $d$ の定まっている空間 $X$ の点 $a$ に対して $U_r(a) = \{x \in X; d(x,a) < r\}$ とかく．とくに平面の点 $P$ に対し $\Delta_P \coloneqq U_1(P)$ とかくことがある．
- ワイもや：$X$ と $Y$ を位相空間とし $f\colon X \to Y$ を連続写像とする．$X$ の部分集合 $A$ が連結（コンパクト）ならば $f$ による像 $f(A)$ も連結（コンパクト）である．この性質を ‘ワイもや’ と呼ぶ．
- 自己同形：$X$ を圏 $\mathcal{C}$ の対象とする．$\mathrm{Aut}_{\mathcal{C}}(X) \coloneqq \{f\colon X \xrightarrow{\sim} X \text{ in } \mathcal{C}\}$ とおく．

# 1　複素関数論

複素関数論について復習する[*1].

**命題 1.1** ([3, 定義–命題 1.5]). $U$ をガウス平面の領域（連結開集合）とする．$\varphi(z)$ を $U$ 上の複素数値関数とする．このとき，次の条件 (1)–(3) は同値である[*2].

(1) $\varphi(z)$ は $U$ の各点で**正則** (regular, holomorphic) すなわち，$U$ の各点で極限値

$$\lim_{h\to a}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

が存在する．

(2) $\varphi(z)$ は $U$ の各点 $a$ の近傍でテイラー展開できる．

$$\varphi(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varphi^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n$$

(3) $U$ の各点 $a$ と $a$ を中心とし $U$ に含まれる任意の開円盤 $\Delta$ に対して，$\varphi(z)$ と $\varphi(z)$ の $a$ を中心とするテイラー展開は $\Delta$ で一致する．

**命題 1.2** ([3, 定義–命題 1.6]). $U$ をガウス平面の領域（連結開集合）とする．$a$ を $U$ の点とする．$\varphi(z)$ を $a$ を中心とするある開円盤 $\Delta_a$ から $a$ を除いた集合 $\Delta_a-\{a\}$ 上の正則関数とする．このとき，次の条件 (1), (2) は同値である．

(1) $\varphi(z)$ は $a$ において高々極しかもたない．

(2) $\varphi(z)$ は $a$ においてローラン展開できる．つまり，$a$ の適当な近傍 $W$ 及び適当な整数 $k\geqq 0$ と複素数列 $(a_n)_{n=-k}^{\infty}$ で，$W-\{a\}$ で次が成り立つものが存在する．

$$\varphi(z)=\sum_{m=1}^{k}\frac{a_{-m}}{(z-a)^m}+\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-a)^n. \tag{1.1}$$

(1.1) の右辺第 2 項は正則である．$k=0$ のときは右辺第 1 項は 0 であり，$k>0$ のときは $a_{-k}\neq 0$ であるとする．$U$ の各点で高々極しかもたない $U-R$ 上の正則関数 $\varphi$ を $U$ 上の**有理形関数**（ゆうりけい）(meromorphic function) という．

# 2　リーマン面

## 2.1　リーマン球面

$\mathbf{C}^2$ から原点 $0=(0,0)$ を除いた集合 $\mathbf{C}^2-\{0\}$ の点 $(a_0,a_1),(b_0,b_1)$ に対し次の関係を考える．

[*1] 複素関数論については例えば [6, 9, 4, 8] を参照.

[*2] 正則関数の特徴づけについては，例えば [4, 4.3 節] を参照.

$$(a_0, a_1) \sim (b_0, b_1) \iff (a_0, a_1) = c \cdot (b_0, b_1) \text{ となる複素数 } c \neq 0 \text{ が存在する．} \tag{2.1}$$

これは同値関係である．$(a_0, a_1)$ の同値類 $\{c \cdot (a_0, a_1); c \in \mathbf{C} - \{0\}\}$ を $[a_0 \colon a_1]$ とかく．

**(2.1) が同値関係になることのチェック**．（反射律）$c = 1$ は $(a_0, a_1) = 1 \cdot (a_0, a_1)$ をみたす．

（対称律）複素数 $c \neq 0$ を $(a_0, a_1) = c \cdot (b_0, b_1)$ をみたすものとすると，複素数 $c^{-1} \neq 0$ は $(b_0, b_1) = c^{-1} \cdot (a_0, a_1)$ をみたす．

（推移律）複素数 $c, c' \neq 0$ をそれぞれ $(a_0, a_1) = c \cdot (b_0, b_1)$，$(b_0, b_1) = c' \cdot (c_0, c_1)$ をみたすものとする．このとき複素数 $cc' \neq 0$ は

$$(a_0, a_1) = c \cdot (b_0, b_1) = cc' \cdot (c_0, c_1)$$

をみたす． □

同値関係 $\sim$ の定める商写像を用いて次の集合を定義する．

**定義 2.1.** $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}) = \left(\mathbf{C}^2 - \{0\}\right)/\!\sim$ を**リーマン球面** (Riemann sphere) という．$\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ を $\mathbf{P}^1_{\mathbf{C}}$ とか $\mathbf{P}^1$ ともかく*3.

$\mathbf{P}^1$ の任意の点 $P$ は $[a_0 \colon a_1]$ の形に表せる．実際，$P$ を $\mathbf{P}^1$ の点とすると，$\mathbf{P}^1$ の定義より，$(a_0, a_1) \in \mathbf{C}^2 - \{0\}$ で $P = \pi(a_0, a_1) = [a_0 \colon a_1]$ となるものが存在する．

また，$[a_0 \colon a_1] = [b_0 \colon b_1]$ となるのは，$a_0 \colon a_1 = b_0 \colon b_1$ となるときである．実際，

$$\begin{aligned}
[a_0 \colon a_1] = [b_0 \colon b_1] &\iff (a_0, a_1) \in [b_0 \colon b_1] \\
&\iff (a_0, a_1) \sim (b_0, b_1) \\
&\iff (a_0, a_1) = c(b_0, b_1) \text{ for some } c \neq 0 \\
&\iff a_0 = cb_0, a_1 = cb_1 \text{ for some } c \neq 0 \\
&\iff a_0 \colon b_0 = a_1 \colon b_1 \\
&\iff a_0 b_1 = a_1 b_0 \\
&\iff a_0 \colon b_1 = b_0 \colon b_1
\end{aligned}$$

である．

**定義 2.2.** 次の写像の組を考える． $\mathbf{C}^2 - \{0\} \overset{\mathrm{pr}_1 = X_0}{\underset{\mathrm{pr}_2 = X_1}{\rightrightarrows}} \mathbf{C}$ ; $(a_0, a_1) \mapsto a_0, a_1$. この組を $\mathbf{C}^2 - \{0\}$ の標準座標，$\mathbf{P}^1$ の同次座標という．

$P \in \mathbf{P}^1$ を代表する $\mathbf{C}^2 - \{0\}$ の点 $\widetilde{P}$ の標準座標の値 $(a_0, a_1)$ が $P$ の同次座標の値である．なお，$P$ に対する $\widetilde{P}$ の取り方，すなわち $(a_0, a_1)$ の取り方には任意性がある．

$\mathbf{P}^1$ は商写像 $\pi \colon \mathbf{C}^2 - \{0\} \longrightarrow \left(\mathbf{C}^2 - \{0\}\right)/\!\sim$ による商位相により位相空間になる．この定義から $\pi$ の連続性が従う．

*3 トポロジストは $\mathbf{CP}^1$ 等と書くらしい．

$\mathbf{P}^1$ の位相空間としての性質を調べるために，次の部分集合を定義する．

$$U_0 = \{[a_0 \colon a_1] \in \mathbf{P}^1; a_0 \neq 0\},$$
$$U_1 = \{[a_0 \colon a_1] \in \mathbf{P}^1; a_1 \neq 0\}.$$

このとき次が成り立つ．

$$U_0 \cup U_1 = \mathbf{P}^1, \tag{2.2}$$
$$\begin{aligned} U_0 \cap U_1 &= \{[a_0 \colon a_1] \in \mathbf{P}^1; a_0, a_1 \neq 0\} \\ &= U_0 - \{[1 \colon 0]\} \\ &= U_1 - \{[0 \colon 1]\}. \end{aligned} \tag{2.3}$$

**補題 2.3.** 1. 商写像 $\pi \colon \mathbf{C}^2 - \{0\} \longrightarrow \big(\mathbf{C}^2 - \{0\}\big)/\!\sim$ は開写像である．

2. $U_0$ と $U_1$ は $\mathbf{P}^1$ の開集合であり，

$$\varphi_0 \colon U_0 \xrightarrow{\sim} \mathbf{C};\ [a_0 \colon a_1] \mapsto a_1/a_0,$$
$$\varphi_1 \colon U_1 \xrightarrow{\sim} \mathbf{C};\ [a_0 \colon a_1] \mapsto a_0/a_1$$

はともに同相写像である．

3. 任意の $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in GL(2, \mathbf{C})$ は自己同相写像

$$p_A \colon \mathbf{P}^1 \xrightarrow{\sim} \mathbf{P}^1; \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix}$$

を引き起こす．

4. $\mathbf{P}^1$ は第 2 可算公理をみたす連結なコンパクトハウスドルフ空間である．

**証明**. 1. $U$ を $\mathbf{C}^2 - \{0\}$ の開集合とする．$\pi(U)$ が $\mathbf{P}^1$ の開集合であること，すなわち $\pi^{-1}(\pi(U))$ が $\mathbf{C}^2 - \{0\}$ の開集合であることを示す．いま，任意の開集合 $U \subset \mathbf{C}^2 - \{0\}$ に対し，複素数 $c \neq 0$ を用いて

$$cU = \big\{(ca_0, ca_1); (a_0, a_1) \in \mathbf{C}^2 - \{0\}\big\}$$

とおくと，$cU$ は $\mathbf{C}^2 - \{0\}$ の開集合であり，

$$\pi^{-1}(\pi(U)) = \bigcup_{c \in \mathbf{C} - \{0\}} cU \tag{$*$}$$

なので，$\pi^{-1}(\pi(U))$ は $\mathbf{C}^2 - \{0\}$ の開集合である．

2. まず $U_0, U_1$ が $\mathbf{P}^1$ の開集合であることを示す．$U_0 = \{[a_0 : a_1]; a_0 \neq 0\}$ は $V_0 = \{(a_0, a_1); a_0 \neq 0\}$ の $\pi$ による像であり，$V_0$ は $\mathbf{C}^2 - \{0\}$ の開集合であるから，$U_0$ は $\mathbf{P}^1$ の開集合である．同様に $U_1$ も $\mathbf{P}^1$ の開集合である．

$\varphi_0\colon U_0 \to \mathbf{C}$ が連続であることを示す．$V$ を $\mathbf{C}$ の開集合とする．$V = \varphi_0 \circ \pi(V_0)(= \widetilde{\varphi_0}(V_0)$ とおく）である．$\widetilde{\varphi_0}^{-1}(V) = \pi^{-1}\left(\varphi_0^{-1}(V)\right)$ は $V_0$ の開集合である．したがって，これは $\mathbf{C}^2 - \{0\}$ の開集合であり，商位相の定義から $\varphi_0^{-1}(V) \subset U_0$ は開集合である．

$$
\begin{tikzcd}
V_0 \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, "\widetilde{\varphi_0}"] & \\
U_0 \arrow[r, "\varphi_0"'] & V
\end{tikzcd}
$$

$\varphi_0$ が同相であることを示す．$\psi_0\colon \mathbf{C} \to U_0$ を $\psi_0(z) = [1\colon z]$ で定める．このとき $\psi_0 \circ \varphi_0\left([a_0\colon a_1]\right) = \psi_0\left(a_1/a_0\right) = [1\colon a_1/a_0] = [a_0\colon a_1]$ である．また $\varphi_0 \circ \psi_0(z) = \varphi_0([1\colon z]) = z/1 = z$．したがって，$\psi_0 \circ \varphi_0 = \mathrm{id}_{U_0}$ かつ $\varphi_0 \circ \psi_0 = \mathrm{id}_{\mathbf{C}}$ であり，$\psi_0 = \varphi_0^{-1}$ である．$\psi_0 = \varphi_0^{-1}$ は自然な単射 $\mathbf{C} \hookrightarrow \mathbf{C}^2 - \{0\}$ と $\pi$ の合成であり，これらは連続なので，その合成である $\psi_0$ も連続である．以上より $\varphi_0$ は同相である．

3. $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ を可逆な行列とする．$A$ を自己同形 $\mathbf{C}^2 \to \mathbf{C}^2$ とみたとき，それを $\mathbf{C}^2 - \{0\}$ に制限した $A|_{\mathbf{C}^2-\{0\}}\colon \mathbf{C}^2 - \{0\} \to \mathbf{C}^2 - \{0\}$ は自己同相であり，逆写像は $A^{-1}\big|_{\mathbf{C}^2-\{0\}}$ で与えられる．一般に $A(cx) = cAx$ なので，$A$ から可逆な写像 $p_A$ が不備なく定まり，逆写像は $p_{A^{-1}}$ で与えられる．

$p_A$ が連続であることを示す．$V$ を $\mathbf{P}^1$ の開集合とする．次の図式が可換であり，$\pi$ と $A$ は連続写像であるから，$\pi^{-1}\left(p_A^{-1}(V)\right) = A^{-1}\left(\pi^{-1}(V)\right)$ は $\mathbf{C}^2 - \{0\}$ の開集合である．

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{C}^2 - \{0\} \arrow[r, "A"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathbf{C}^2 - \{0\} \arrow[d, "\pi"] \\
\mathbf{P}^1 \arrow[r, "p_A"'] & \mathbf{P}^1
\end{tikzcd}
$$

$\mathbf{P}^1$ の商位相の定義より $\pi^{-1}(V)$ は $\mathbf{P}^1$ の開集合である．したがって $p_A$ で連続である．$p_A^{-1}$ が連続であることも同様である．

4. 第 2 可算公理をみたすこと：

$$\mathbf{Q}(\sqrt{-1}) = \{a + b\sqrt{-1}; a, b \in \mathbf{Q}\}$$

に属する点 $z$ と有理数 $p$ に対し $U_p(z)$ を考えると $\left(U_p(z)\right)_{p\in\mathbf{Q}, z\in\mathbf{C}}$ は $\mathbf{C}$ の位相空間としての基底になる．したがって $\mathbf{C}$ は第 2 可算公理をみたす．直積集合 $\mathbf{C}^2$ も第 2 可算であるから，1 点を除いた $\mathbf{C}^2 - \{0\}$ もそうであり，これに全射 $\pi$ を適用した $\mathbf{P}^1$ も第 2 可算公理をみたす．

連結かつコンパクトであること：$S^3 = \{P = (a_0, a_1) \in \mathbf{C}^2; |a_0|^2 + |a_1|^2 = 1\} \subset \mathbf{C}^2 - \{0\}$ であり，$\mathbf{C} - \{0\}$ の相対位相により，$S^3$ は有界閉集合つまりコンパクト集合であり，連結である．全射連続写像 $\pi|_{S^3}\colon S^3 \to \mathbf{P}^1$ により ‘ワイもや’ で $\mathbf{P}^1$ は連結かつコンパクト．$\pi|_{S^3}$ が全射であることは

$$[a_0 \colon a_1] = \left[\frac{a_0}{\sqrt{a_0^2+a_1^2}} \colon \frac{a_1}{\sqrt{a_0^2+a_1^2}}\right]$$

であることからしたがう．

ハウスドルフであること：$P \neq Q$ を $\mathbf{P}^1$ の点とする．$p \colon GL(2,\mathbf{C}) \to \mathrm{Aut}_{\mathsf{Top}}(\mathbf{P}^1)$ は全射．したがって，$U_0 \subset \mathbf{P}^1$ から，任意の $p_A \in \mathrm{Aut}_{\mathsf{Top}}(U_0)$ に対し $A \in GL(2,\mathbf{C})$ が存在する．つまり $p_A(P), p_A(Q) \in U_0$ となる $A \in GL(2,\mathbf{C})$ が存在する．$U_0 \cong \mathbf{C}$ であり $\mathbf{C}$ はハウスドルフなので，$p_A(P)$ の開近傍 $U_P$ と $p_A(Q)$ の開近傍 $U_Q$ で $U_P \cap U_Q = \varnothing$ をみたすものが存在する．$U_P$ と $U_Q$ は $U_0 \subset \mathbf{P}^1$ の開集合であり，$p_A$ が同相なので $p_A^{-1}(U_P)$, $p_A^{-1}(U_Q)$ は $\mathbf{P}^1$ における $P, Q$ の開近傍で $p_A^{-1}(U_P) \cap p_A^{-1}(U_Q) = \varnothing$ をみたす．よって $\mathbf{P}^1$ はハウスドルフである． $\square$

**注意 2.4** ((∗) の幾何的イメージ)**.** この等式については次の図 1 を見ると理解しやすい．いま，簡

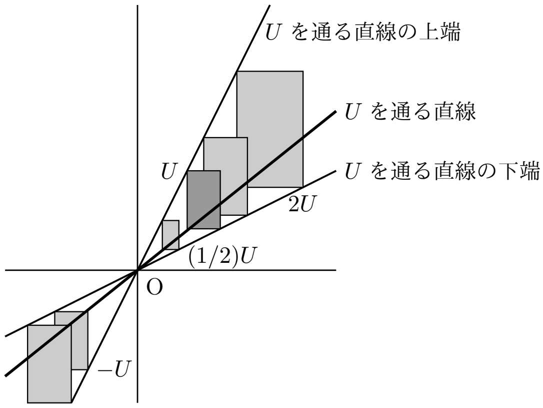


図 1　商写像の逆像 1

単のため $\mathbf{R}^2$ の部分集合 $U$ について考える．$\pi(U)$ は $U$ を通る直線たちの集合である．像が $\pi(U)$ となるようなもの，つまり $\pi^{-1}(\pi(U))$ は $U$ を $c$ 倍に拡大・縮小したもの全体である．したがって

$$\begin{aligned}\pi^{-1}(\pi(U)) &= (U \text{ を射影したものと同じところに行くもの}) \\ &= (U \text{ を } c \text{ 倍に拡大したもの全て}) \\ &= \bigcup_{c \in \mathbf{R}-\{0\}} cU\end{aligned}$$

のようになり，$\mathbf{C}^2$ の場合には (∗) が成り立つ．

次のような場合も見ておくと複素トーラスの導入のときなどに役立つ．

$$\pi \colon \mathbf{R} \twoheadrightarrow \mathbf{R}/\mathbf{Z}; x \mapsto x \mod \mathbf{Z}$$

を考える．これは図 2 の上の直線を螺旋状に巻いて潰し，1 次元トーラスにしたものである．

この場合は次のようになる．

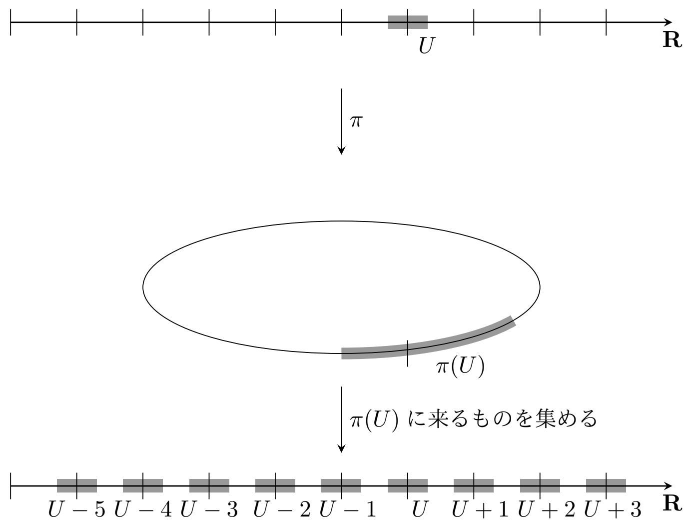


図 2　商写像の逆像 2

$$
\begin{aligned}
\pi^{-1}\left(\pi(U)\right) &= (U \text{ を射影したものと同じところに行くもの}) \\
&= (U \text{ を整数分だけずらしたもの全て}) \\
&= \bigcup_{n\in\mathbf{Z}} (U+n).
\end{aligned}
$$

## 2.2　貼りあわせ関数

補題 2.3.2 から $\varphi_0\colon U_0 \xrightarrow{\sim} \mathbf{C}$, $\varphi_1\colon U_1 \xrightarrow{\sim} \mathbf{C}$ である．ここで，$\varphi_0(U_0)$ の標準座標を $w$, $\varphi_1(U_1)$ の標準座標を $z$ で表すことにする[*4]．定義 2.2 のようにかくと

$$
\begin{aligned}
z\colon \varphi_1(U_1) = \mathbf{C} \to \mathbf{C}; (a) \mapsto a \\
w\colon \varphi_0(U_0) = \mathbf{C} \to \mathbf{C}; (b) \mapsto b
\end{aligned}
$$

のようになる．複素数の一つ組に対し第一成分を対応させるということである．これによって点 $(a)$ と座標値 $z(a)$ を同一視し，点を単に $z$ と書いたりする．ガウス平面 $\mathbf{C}$ に，そこでの標準座標をつけて $\mathbf{C}_z$, $\mathbf{C}_w$ のように表すと，$\mathbf{C}_w \subset \mathbf{P}^1$, $\mathbf{C}_z \subset \mathbf{P}^1$ とみなせる．例えば $\mathbf{C}_z$ の点 $1+\sqrt{-1}$ は $\mathbf{P}^1$ では

$$
\varphi_1^{-1}\left(1+\sqrt{-1}\right) = \left[1+\sqrt{-1}\colon 1\right]
$$

であり $\mathbf{C}_w$ の点 $1/(1+\sqrt{-1})$ は $\mathbf{P}^1$ では

$$
\varphi_0^{-1}\left(\frac{1}{1+\sqrt{-1}}\right) = \left[1\colon \frac{1}{1+\sqrt{-1}}\right] = \left[1+\sqrt{-1}\colon 1\right]
$$

[*4] 全くの余談だが $w$ を ‘オメガ’ と見間違える人が多いので 2 つとも並べておく．$w$ が ‘ダブリュー’ で，$\omega$ が ‘オメガ’ である．関係あるのかどうかは不明だが，$w$ はドイツ語で ‘値’ を意味する ‘Wert’ の頭文字である．ちなみに $\varpi$ は ‘オメガバー’ ではなく ‘パイ’ である（TeX では `\varpi` と入力する）．

である．本節では，$\mathbf{C}_z$ と $\mathbf{C}_w$ の間の関係を調べる．

いまの $1+\sqrt{-1}$ の例を見ると

$$z = \frac{1}{w} \tag{2.4}$$

の関係が成り立っているようである．他の例も見る．例えば点 $[2\colon 1]$ と点 $[1\colon 1/2]$ は $\mathbf{P}^1$ では同じものである．これらをそれぞれ $\varphi_1$, $\varphi_0$ で $\mathbf{C}_z$, $\mathbf{C}_w$ の点とみなすと座標値は $z=2$ と $w=1/2$ である．したがって $z=1/w$ が成り立つ．

$z=0$ のときはうまくいかない．$[z\colon 1]=[1\colon 1/z]=[1\colon w]$ のようにして $w=1/z$ となるものを見つけたいが $w=1/0$ となってしまい不合理である．$w=0$ のときも同様である．そもそも $\varphi_0$ は $U_0$ 上で定義されており，$z=0$ となる $[0\colon 1]$ のような点に対しては $w$ の値は定まっていない．つまり，関係式 (2.4) が成り立つためには $z$ も $w$ も 0 でないことが必要である．逆に $z$ と $w$ のどちらも 0 でなければ，関係式 (2.4) が成り立つ．

$z,w\neq 0$ は (2.3) より $[z\colon w]\in U_0\cap U_1$ ということである．$[z\colon w]\in U_0\cap U_1$ のとき $z$ は $w$ の正則関数になっている．$\varphi_0(U_0\cap U_1)=\mathbf{C}_w-\{0\}=\mathbf{C}_w\cap\mathbf{C}_z=\mathbf{C}_z-\{0\}=\varphi_1(U_0\cap U_1)$ なので，この正則関数を $\varphi_{10}\colon \mathbf{C}_w-\{0\}=\varphi_0(U_0\cap U_1)\to\mathbf{C}_z-\{0\}=\varphi_1(U_0\cap U_1)$ とかくことにすると，次の図式が可換になる．

$$\begin{tikzcd}
U_0\cap U_1 \arrow[r, equal, "{[1\colon w]=[z\colon 1]}"] & U_0\cap U_1 \arrow[d, "\varphi_1"] \\
\mathbf{C}_w-\{0\} \arrow[u, "\varphi_0^{-1}"] \arrow[r, "\varphi_{10}"'] & \mathbf{C}_z-\{0\}
\end{tikzcd}$$

つまり，$\varphi_{10}=\varphi_1\circ\varphi_0^{-1}$ である．この正則関数を貼りあわせ関数と呼ぶ．また，$\varphi_{01}=\varphi_0\circ\varphi_1^{-1}\colon \varphi_1(U_0\cap U_1)\to\varphi_0(U_0\cap U_1)$ も $w=1/z$ として同様に定まる．これは正則であり $\varphi_{10}$ の逆関数でもある．

## 2.3 複素多様体とリーマン面

$\mathbf{C}^n$ での座標が $z=(z^1,\ldots,z^n)$ であるとき複素数空間 $\mathbf{C}^n$ を $\mathbf{C}^n_z$ とか $\mathbf{C}^n_{(z^1,\ldots,z^n)}$ とかく．$\mathcal{U}$ を $\mathbf{C}^n$ の空でない開集合とする．このとき，$\mathcal{U}$ で定義された複素数値関数 $f$ は標準座標を用いて $f(z)=f(z^1,\ldots,z^n)$ とかける．

$f$ が $\mathcal{U}$ で**正則**であるとは，次の条件 (1), (2) のどちらかをみたすことをいう．（これらは同値．）

(1) $f(z)$ は $\mathcal{U}$ で連続であり，各変数 $z^j$ $(j=1,\ldots,n)$ について正則である．

(2) $\mathcal{U}$ の各点 $a=(a^1,\ldots,a^n)$ に対して，関数 $f(z)$ は $a$ の近傍で収束巾級数

$$f(z)=\sum_{|\alpha|=0}^{\infty} c_{\alpha_1\ldots\alpha_n}(z^1-a^1)^{\alpha_1}\ldots(z^n-a^n)^{\alpha_n}$$

で表される．

**定義 2.5** ($n$ 次元複素多様体 [3, 定義 4.1])**.** $X$ を位相空間とする．$(\varphi_i\colon U_i \to \mathcal{U}_i)_{i\in I}$ を写像の族とする．このとき，対 $(X, (\varphi_i)_i)$ が次の条件 (1)–(4) をみたすとき，$X$ を台集合とし $(\varphi_i)_i$ を座標近傍系とする $n$ **次元複素多様体** ($n$-dimensional complex manifold) という．

(1) $X$ は空集合でなく，第 2 可算公理を満たす連結なハウスドルフ空間である*5.

(2) すべての $i \in I$ に対して $U_i$ は $X$ の空でない開集合であり，$(U_i)_i$ は $X$ の開披覆である．

(3) すべての $i \in I$ に対して，$\mathcal{U}_i$ は $\mathbf{C}^n_{(z^1,\dots,z^n)}$ の空でない開集合であり $\varphi_i\colon U_i \to \mathcal{U}_i$ は同相である．

(4) 任意の $i \neq j \in I$ で $U_i \cap U_j \neq \varnothing$ をみたすものに対して $\mathcal{U}_{ij} \coloneqq \varphi_j(U_i \cap U_j) \subset \mathcal{U}_j$ とおくとき，$\varphi_{ij} \coloneqq \varphi_i \circ \varphi_j^{-1}\big|_{\mathcal{U}_{ij}}\colon \mathcal{U}_{ij} \to \mathcal{U}_{ji}$ は正則である．

**例 2.6.** 1. $\mathbf{C}^n$ の領域 $\mathcal{U}$ は $(\mathrm{id}_{\mathcal{U}}\colon \mathcal{U} \to \mathcal{U})$ を座標近傍系とする $n$ 次元複素多様体である．

2. $X = (X, (\varphi_i\colon U_i \to \mathcal{U}_i)_{i\in I})$ を $n$ 次元複素多様体とし，$U$ を $X$ の領域とする．$J \coloneqq \{i \in I; U \cap U_i \neq \varnothing\}$ とおく．$U$ は $(\varphi_j|_{U\cap U_j})_{j\in J}$ を座標近傍系とする $n$ 次元複素多様体になる．この多様体 $U$ を開部分（複素）多様体という．

1 次元複素多様体を**リーマン面** (Riemann surface) という．

**命題 2.7.** リーマン球面 $\mathbf{P}^1$ はリーマン面である．

**証明.** (1) 補題 2.3.4 からしたがう．

(2) (2.2) と (2.3) からしたがう．

(3) 補題 2.3.2 からしたがう．

(4) 2.2 節で説明した． □

$\mathbf{P}^1$ のような，台空間がコンパクトなリーマン面をとくにコンパクトリーマン面という．例 2.6.2 のように，リーマン面 $X$ の領域 $U$ はリーマン面になる．この $U$ を $X$ 開リーマン面という．

**定義 2.8.** $X$ を $n$ 次元複素多様体, $Y$ を $m$ 次元複素多様体とする．$f\colon X \to Y$ を $X$ から $Y$ への連続写像とする．

1. $P$ を $X$ の点とする．$P, f(P)$ の近傍での $f$ のある座標表示 $w_j = f_{ij}(z_i)$, きちんと書くと $(w_j^1, \dots, w_j^m) = \big(f_{ij}^1(z_i^1, \dots, z_i^n), \dots, f_{ij}^m(z_i^1, \dots, z_i^n)\big)$ が $z_i(P) = (z_i^1(P), \dots, z_i^n(P))$ で正則であるとき，$f$ は $P$ で**正則**であるという．

2. $f$ がすべての点 $\in X$ で正則であるとき $f$ を**正則写像** (holomorphic mapping) とか**正則射** (holomorphism) という．また $\mathbf{C}$ への正則写像を**正則関数** (holomorphic function) という．

3. $U$ を $X$ の空でない開集合とする．$U$ 上の関数 $f$ は $U$ の各連結成分上正則であるとき $U$ 上の正則関数という．ここで，複素多様体の領域は例 2.6.2 の方法で複素多様体とみなしている．

**定義 2.9.** $X$ と $Y$ を $n$ 次元複素多様体とする．$f\colon X \to Y$ を正則写像とする．正則写像 $g\colon Y \to X$ で $g \circ f = \mathrm{id}_X$ かつ $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ をみたすものが存在するとき，$f$ を**双正則写像**

*5 条件 (1) のうち第 2 可算と連結を課さないことも多い ([5] など).

(biholomorphic mapping) とか**双正則射** (biholomorphism) という．$X$ から $Y$ への双正則写像が存在するとき，$X$ と $Y$ は**同形** (isomorphic) とか**双正則同値** (biholomorphically equivalent), またはたんに**双正則** (biholomorhic) であるという．

正則写像の合成は正則写像であり，恒等写像 id は正則である．したがって { リーマン面 }，より一般に $\{n$ 次元複素多様体 } は正則写像を射とする圏になる．

# 3　1 次元における諸結果

## 3.1　リーマン球面上の正則写像と等質性

$\mathbf{P}^1$ から $\mathbf{P}^1$ への写像はそれぞれ 2 枚の局所座標系を用いて $z, w$ と $t, s$ により表示できる．

**補題 3.1** ([3, 補題 1.12])**.** $z$ の有理関数 $t = g(z)$ は $\mathbf{P}^1$ から $\mathbf{P}^1$ への正則写像 $\widetilde{g}$ に一意に延長される．

証明. $g\colon \mathbf{C}_z \to \mathbf{C}_t$ に対し $\widetilde{g}\colon \mathbf{P}^1 \to \mathbf{P}^1$ が存在したとする．$\widetilde{g}$ の座標表示は $s = 1/t$, $w = 1/z$ を用いて得られる．

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{C}_z \arrow[r, "g_{t,z}"] \arrow[d, "w=1/z"'] \arrow[dr, "g_{s,z}" near end] & \mathbf{C}_t \arrow[d, "s=1/t"] \\
\mathbf{C}_w \arrow[r, "g_{s,w}"'] \arrow[ur, "g_{t,w}"' near end] & \mathbf{C}_s
\end{tikzcd}$$

□

**補題 3.2** (リーマン球面の等質性 [3, 補題 1.13])**.** $A \in GL(2, \mathbf{C})$ のとき $p_A \in \mathrm{Aut}_{\text{リーマン面}}(\mathbf{P}^1)$. また，$\mathbf{P}^1$ の任意の 2 点 $P, Q$ に対し，$p_A(P) = Q$ となる $A \in GL(2, \mathbf{C})$ が存在する．

証明. $P = [a_0\colon a_1]$, $Q = [a'_0\colon a'_1]$ とおく．$\mathbf{P}^1$ の定義より，$(a_o, a_1), (a'_0, a'_1 \in \mathbf{C}^2)$ はどちらも $(0, 0)$ ではない．したがって可逆な行列 $A \in GL(2, \mathbf{C})$ で $A \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a'_0 \\ a'_1 \end{bmatrix}$ となるものが存在する．この $A$ に対し $p_A(P) = Q$ が成り立つ． □

## 3.2　リーマンロッホの定理

次はリーマンロッホの定理の特殊な場合である．

**定理 3.3** ([3, 命題 1.14])**.** $P_1, \ldots, P_m$ を $\mathbf{P}^1$ の互いに相異なる点とする．$\mathbf{P}^1$ 上の有理形関数で各 $P_i$ のみで高々 $n_i$ の極をもつもの全体

$$\Gamma\left(\mathbf{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}\left(\sum_{i=1}^m n_i P_i\right)\right)$$

は関数の和とスカラー倍によって $\mathbf{C}$ ベクトル空間を成す．さらにその空間の次元は次で与えられる．

$$\dim \Gamma\left(\mathbf{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}\left(\sum_{i=1}^m n_i P_i\right)\right) = 1 + \sum_{i=1}^m n_i.$$

**証明．** 関数の和は局所的に $\sum_j a_j(z-p_i)^j + \sum_j b_j(z-p_i)^j = \sum_j (a_j+b_j)(z-p_i)^j$ と表示すればよく，スカラー倍も $c\left(\sum_j a_j(z-p_i)^j\right) = \sum_j ca_j(z-p_i)^j$ とすればよい．零元は恒等的に 0 である関数である．

次元についての等式を示す．$N = \sum_{i=1}^m n_i$ とおく．$\mathbf{P}^1$ の等質性から，どの $i = 1, \ldots, m$ に対しても $P_i \in \mathbf{C}_z$ であるとしてよい．このとき $P_i$ を $z$ 座標を用いて $a_i = z(P_i)$ と表示する．$f \in \Gamma\left(\mathbf{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}\left(\sum_{i=1}^m n_i P_i\right)\right) - \{0\}$ とすると $f$ は $z$ の有理関数 $f(z) \in \mathbf{C}(z)$ を延長したものである．$\left(\Gamma\left(\mathbf{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}\left(\sum_{i=1}^m n_i P_i\right)\right) - \{0\} \subset \mathcal{M}_{\mathbf{P}^1}(\mathbf{P}^1) \cong \mathbf{C}(z).\right)$ $f$ は $a_i$ で高々 $n_i$ の極しか持たないから $g(z) \coloneqq (z-a_1)^{n_1} \ldots (z-a_m)^{n_m} f(z)$ は $\mathbf{C}_z$ で正則である．$g$ は有理関数 $f$ の分数を払ったものなので多項式関数である．したがって，

$$f(z) = \frac{b_0 z^l + \cdots + b_l}{(z-a_1)^{n_1} \ldots (z-a_m)^{n_m}}, \quad b_0 \neq 0 \tag{3.1}$$

とかける．$P_i \in \mathbf{C}_z$ としたので，$z = \infty$ で $f$ は極を持たない．よって $w = 0$ で

$$\begin{aligned} f_w(w) = f\left(\frac{1}{w}\right) &= \frac{b_0/w^l + \cdots + b_l}{(1/w - a_1)^{n_1} \ldots (1/w - a_m)^{n_m}} \\ &= \frac{b_0 w^{N-l} + \cdots + b_l w^N}{(1-a_1 w)^{n_1} \ldots (1-a_m w)^{n_m}} \\ &= w^{N-l} \frac{b_0 + \cdots + b_l w^l}{(1-a_1 w)^{n_1} \ldots (1-a_m w)^{n_m}} \end{aligned}$$

となる．右の分数は $w = 0$ で正則であり $b_0 \neq 0$ なので，$w = 0$ で $f_w(w) \neq 0$．$f$ が $w = 0$ で極でないのは $l \leqq N$ のときである．

逆に $l \leqq N$ のとき，$f$ で (3.1) の形になるものは $\Gamma\left(\mathbf{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}\left(\sum_{i=1}^m n_i P_i\right)\right)$ の元で $w = 0$ で極でないものである．よって，$\Gamma\left(\mathbf{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}\left(\sum_{i=1}^m n_i P_i\right)\right)$ の元は

$$f_k(z) = \frac{z^k}{(z-a_1)^{n_1} \ldots (z-a_m)^{n_m}}$$

の 1 次結合でかける．$f_0, \ldots f_m$ は 1 次独立であるから

$$\dim \Gamma\left(\mathbf{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}\left(\sum_{i=1}^m n_i P_i\right)\right) = 1 + N = 1 + \sum_{i=1}^m n_i.$$

□

## 4　コンパクトリーマン面

**補題 4.1** ([3, 問題 2.8])**.** コンパクト集合の離散部分集合は有限集合である．ただし，位相空間 $X$ の部分集合 $R$ が離散集合であるとは，$X$ の任意の点 $P$ に対して，$R \cap U_P \subset \{P\}$ である $P$ の近傍 $U_P$ が存在することをいう．

**証明.** $R$ を $X$ の離散部分集合とする．$X$ の任意の点 $P$ に対して，$R \cap U_P \subset \{P\}$ である $P$ の近傍 $U_P$ が存在するので，これを用いて $X = \bigcup_{P \in X} U_P$ とすると，$X$ はコンパクトなので有限個の $P_1, \ldots P_n$ で $X = U_{P_1}, \ldots, U_{P_n}$ とかける．いま

$$R = R \cap X = R \cap (U_{P_1} \cup \cdots \cup U_{P_n}) = (R \cap U_{P_1}) \cup \cdots \cup (R \cap U_{P_n}) \subset \{P_1\} \cup \cdots \cup \{P_n\}$$

が成り立っている．$S = \{P_1\} \cup \cdots \cup \{P_n\}$ は有限集合なので $S$ の部分集合である $R$ も有限集合である． □

局所座標系

**定理 4.2** ([3, 定理 2.18])**.** $X$ と $Y$ をリーマン面とする．$f\colon X \to Y$ を定値でない正則写像とする．$P$ を $X$ の点とし $f(P) = Q$ とおく．このとき $P$ と $Q$ の局所座標系

$$t\colon U_P \to \Delta_P, \quad s\colon V_P \to \Delta_Q$$

と自然数 $n \geqq 1$ で，$f$ の座標表示が $s = t^n$ となるものが存在する．とくに $f$ は開写像である．

**証明.** $P, Q$ の局所座標系を $T, S$ とする．このとき $P$ の近くで定義された $f$ の座標表示 $f_T(T)$ で $S = f_T(T)$ と $0 = f_T(0)$ をみたすものが存在する．$S = f_T(T)$ は正則である．$f$ は大域的に定値でないと仮定したので，$f_T(T)$ は関数として $0$ でない．したがって，$f_T(T) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n T^n$ とかくとき，$a_0 = 0$ であり，自然数 $m \geqq 1$ で $a_m \neq 0$ となる最小のものが存在する．この $m$ に対し，$a_m T^m + a_{m+1} T^{m+1} + \cdots = T^m(a_m + a_{m+1} T + \cdots)$ とかくと，$U(0) \neq 0$ となる正則関数 $U(T)$ で $S = T^m U(T) = f_T(T)$ と表せる．$U(0) \neq 0$ から，$|T|$ が十分小さいとき，$\mathbf{C}$ 内の半平面 $\mathcal{H}$ で $U(0) \in \mathcal{H}$ かつ $0 \notin \mathcal{H}$ となるものが存在する．したがって，$U(T)$ の $n$ 乗根の偏角を一価かつ連続に指定することができる．すなわち $U(T)^{\frac{1}{n}}$ の $1$ つを正則な一価関数として定めることができる．$t = TU(T)^{\frac{1}{n}}$ とおく．$U(0)^{\frac{1}{n}} \neq 0$ なので $t$ も $P$ での局所座標となる．$s = S$ とすると，$t$ と $s$ に関する $f$ の局所座標表示は $s = t^n$ となる．$t$ に対し $t^n$ を対応させる写像は，$U_r(0)$ を $U_{r^n}(0)$ にうつす．これらを適当に拡大・縮小すれば単位円盤になる． □

**定理 4.3** ([3, 定理 2.22])**.** $X$ をコンパクトリーマン面とし，$Y$ をリーマン面とする．$f\colon X \to Y$ を正則写像とする．このとき，$f$ は定数写像であるか全射であるかのどちらか一方である．また，$Y$ がコンパクトでなければ $f$ は定数写像となる．

**証明．** $f$ が定数写像でないとすると $f$ は開写像である．$X$ は開集合なので，像 $f(X) \subset Y$ は開集合である．また，$X$ はコンパクトかつ $Y$ はハウスドルフである．一般に，コンパクト空間 $A$ からハウスドルフ空間 $B$ への連続写像 $g$ に対し，$g(A)$ は $B$ の閉集合となるのだった．いま $f$ は連続なので，$f(X) \subset Y$ は閉集合である．$X$ は空ではないので $f(X)$ も空でない．$Y$ は連結なので $f(X) = Y$ である．したがって $f$ は全射．またこのとき，‘ワイもや’ で $Y$ はコンパクトである．

いま，$f$ が定数写像でないなら $Y$ がコンパクトであることがいえたので，対偶をとって，$Y$ がコンパクトでないなら $f$ が定数写像であることもわかった． □

**定理 4.4** (代数学の基本定理 [3, 系 2.24])**．** $n \geqq 1$ を自然数とする．複素数を係数とする $n$ 次方程式

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n = 0, \quad a_0 \neq 0 \tag{4.1}$$

に対し，複素数解 $\alpha$ が存在する．

**証明．** $f_z(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n$ とおくと，$f_z(z)$ は多項式関数なので有理関数である．したがって補題 3.1 より $\mathbf{P}^1$ 上の自己正則写像に一意に延長される．これを $f\colon \mathbf{P}^1 \to \mathbf{P}^1$ とおく．$\mathbf{P}^1 = \mathbf{C}_z \cup \mathbf{C}_w$ とかくとき，

$$f_w(w) = f_z\left(\frac{1}{w}\right) = a_0 \frac{1}{w^n} + \cdots + a_n = \frac{a_0 + a_1 w + \cdots + a_n}{w^n}$$

が $\mathbf{C}_w$ での $f$ の座標表示を与える．$n \geqq 1$ と $a_0 \neq 0$ より $f(\infty) = f_w(0) = \infty$ であり，$f(0) = f_z(0) = a_n \neq \infty$ より $f$ は定数写像ではない．従って $f$ は全射なので，0 に対し $f(a) = 0$ となる $a \in \mathbf{P}^1$ が存在する．いま $f(\infty) = \infty$ なので $a \neq \infty$．すなわち $a \in \mathbf{C}_z$ であり $a$ は方程式 (4.1) の解になる． □

## 5 結語

本稿はセミナーの予習ノートと板書（後述）を元に書いた．この辺りの経緯について述べる．2021 年度は対面での課外活動が制限されていた．そのため，Zoom を用いた遠隔でのセミナーを行うのが主であった．板書には Microsoft OneNote を利用した．Whiteboard Fox と異なり，14 日間で板書が削除されることもないので便利である．ただし，時々動作が重くなることがあったので，発表者の画面共有もしながらセミナーを行った．この発表の際に書いた板書と予習ノートが本稿の下書きに当たる．清書するにあたって行ったのは，叙述の順序を変更したことと，セミナー中に気付いたことなどのコメントを加えたことである．

## 参考文献

[1] 上野健爾, 代数幾何, 岩波書店, 2005.

[2] 梅村浩, 楕円関数論 楕円曲線の解析学 [増補新装版], 東京大学出版会, 2020.
[3] 小木曽啓示, 代数曲線論, 朝倉書店, 2002.
[4] 金子晃, 関数論講義 (ライブラリ数理・情報系の数学講義, 5), サイエンス社, 2021.
[5] 小林昭七, 複素幾何 1 (岩波講座現代数学の基礎, 29), 岩波書店, 1997.
[6] 神保道夫, 複素関数論 (岩波講座現代数学への入門, 4), 岩波書店, 1995.
[7] 武部尚志, 楕円積分と楕円関数 おとぎの国の歩き方, 日本評論社, 2019.
[8] 藤本坦孝, 複素解析 (岩波講座現代数学の基礎, 3), 岩波書店, 1996.
[9] 吉田洋一, 函数論 第 2 版 (岩波全書, 141), 岩波書店, 1973.