

実数論

Toshi2019

2021-04-18

概要

1 凡例

よく用いる用語と記号をまとめておく.

- 数列: 数列 $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (a_0, a_1, \dots)$ を (a_n) のように略記することがある.
- 開球: \mathbb{R}^n をユークリッド距離による距離空間と考え, $a \in \mathbb{R}^n$ を中心とする半径 $r > 0$ の開球を $U_r(a) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(a, x) < r\}$ で表す.
- 開集合: X を位相空間とする. U が X の開集合であることを $U \subset_{\text{open}} X$ のようにかくことがある.

2 導入

$1/3 = 0.333\dots$ であることはよく知られた事実である. 中学校では $x = 0.333\dots$ とおき, 両辺に 10 を掛けて $10x = 3.333\dots$. 辺々引いて $9x = 3$. 最後に両辺を 9 で割って $0.333\dots = x = 1/3$ のようにすると習った.

これを示すのに, 高校では極限を教わった上で

$$0.333\dots = 0.3 + 0.03 + 0.003 + \dots$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{3}{10^k} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{10} \frac{1 - (1/10)^n}{1 - 1/10} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \left(1 - \left(\frac{1}{10} \right)^n \right) \\ &= \frac{1}{3} \times (1 - 0) = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

と習った.

大学に入ってすぐの微積分の授業で極限を厳密に定義することで、これがきちんと基礎付けられた。すなわち、任意の自然数 $n \geq 1$ に対し、

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^n \frac{3}{10^k} - \frac{1}{3} \right| &= \left| \frac{1}{3} \left(1 - \left(\frac{1}{10} \right)^n \right) - \frac{1}{3} \right| \\ &= \left| - \left(\frac{1}{10} \right)^n \right| \\ &= \left(\frac{1}{10} \right)^n < \frac{1}{n} \end{aligned}$$

が成り立つので、後述するはさみうちの原理 (命題 3.3) より、 $0.333\cdots = 1/3$ ということになるのであった。

このように、無限小数を、無限級数と捉えることで、特に有理数の場合には、容易に極限を求められる。

3 実数の連続性

次を公理とする。

公理 3.1. 1. (アルキメデスの原理 (axiom of Archimedes)) a が実数ならば、 $n \leq a \leq n+1$ をみたす整数 n が存在する。

2. (a_n) を自然数列で、任意の $n \geq 0$ に対し、 $a_n = 0$ か $a_n = 1$ のどちらかであるものとする。このとき、実数 b で、全ての自然数 $m \geq 0$ に対し

$$\sum_{n=1}^m \frac{a_n}{2^n} \leq b \leq \sum_{n=1}^m \frac{a_n}{2^n} + \frac{1}{2^m} \quad (3.1)$$

をみたすものが存在する。

$m = 0$ とすると、 $\sum_{n=1}^m \frac{a_n}{2^n} = 0$ となり不等式 (3.1) は $0 \leq b \leq 1$ を表す。

公理 3.1 から、実数は閉区間 $[0, 1]$ を整数で左右にずらしたもので覆うことができ、それらを整数部分と 2 進小数で表せる。次の命題の系から式 (3.1) の b はただ 1 つであることがわかる。

命題 3.2 (有理数の稠密性). a と b を実数とする。 $a < b$ ならば、有理数 r で $a < r < b$ をみたすものが存在する。

証明. $a < b$ より $b - a > 0$. 自然数 n を、 $n = \left\lceil \frac{1}{b-a} \right\rceil + 1$ とおく。 n は $0 < \frac{1}{b-a} < n$ をみたす最小の自然数である。さらに $m = [na] + 1$ とおくと $na < m \leq na + 1 < nb$ なので、有理数 $r = m/n$ は $a < r < b$ をみたす。 \square

命題 3.3 (はさみうちの原理 (squeeze theorem)). a と b を実数とする。任意の自然数 $n \geq 1$ に対し $|a - b| < \frac{1}{n}$ ならば、 $a = b$ である。

証明. $|a - b| > 0$ だったとする. このとき, $\frac{1}{|a - b|} > 0$ は実数なので, アルキメデスの公理 (公理 3.1.1) より $\frac{1}{|a - b|} \leq n$ をみたす自然数 $n > 0 \Leftrightarrow n \geq 1$ が存在する. この不等式の逆数をとると, $\frac{1}{n} \leq |a - b|$ となるが, 仮定より $|a - b| < \frac{1}{n}$ なので $\frac{1}{n} \leq |a - b| < \frac{1}{n}$ となりムジユン. したがって $|a - b| = 0$ であり, $a = b$. \square

系 3.4. (a_n) を公理 3.1.2 の仮定をみたす数列とする. 不等式 (3.1) をみたす実数 b はただ 1 つである.

証明. b と c を不等式 (3.1) をみたす実数とすると, すべての自然数 $m \geq 1$ に対し, $\sum_{n=1}^m \frac{a_n}{2^n} \leq b \leq \sum_{n=1}^m \frac{a_n}{2^n} + \frac{1}{2^m}$, $\sum_{n=1}^m \frac{a_n}{2^n} \leq c \leq \sum_{n=1}^m \frac{a_n}{2^n} + \frac{1}{2^m}$ が成り立つので, ふたつめの不等式を -1 倍したものをひとつめの不等式に辺々足して, $-\frac{1}{2^m} \leq b - c \leq \frac{1}{2^m}$ すなわち $|b - c| \leq \frac{1}{2^m}$ を得る. $|b - c| \leq \frac{1}{2^m} < \frac{1}{m}$ なので, はさみうちの原理 (命題 3.3) より $b = c$ である. \square

これで公理 3.1.2 の b を特徴づけることができた. この b を $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n}$ で表す. (∞ の記号単体では意味を持たせていない.) $0.a_1a_2a_3a_4\dots$ のように表し, b の 2 進小数表示 (binary decimal representation) ということもある. (たとえば $1/2 = 0.1000\dots$, $5/8 = 1/2 + 1/8 = 0.101000\dots$ のように.)

実数はいくつかの同値な性質により, その性質を様々な視点から捉えることができる. 以下, 公理 3.1 から出発して, それらの性質を順次示していくことにする.

定理 3.5 (実数の連続性 (continuity of real numbers)). $a \leq b$ を実数とし, 閉区間 $[a, b]$ の部分集合 A が次の条件 (D) をみたすとする.

(D) x が A の元ならば, 閉区間 $[a, x]$ は A に含まれる.

このとき, 実数 c で $A = [a, c]$ か $A = [a, c)$ のどちらか一方が成り立つものが存在する.

定理 3.5 の実数 c を A の終点 (end point) と呼ぶことにする.

証明. まず, $[a, b] = [0, 1]$ の場合に示し, その後 a, b が一般の場合を $a = 0, b = 1$ の場合に帰着させて示す. $a = 0, b = 1$ とする. $0 \notin A$ のとき, 条件 (D) より, $A = \emptyset$. $1 \in A$ のとき, 条件 (D) より, $A = [0, 1]$. よって $0 \in A, 1 \notin A$ のときを考える.

数列 (a_n) を次のように帰納的に定義する. $a_0 = 0$ とする. a_n が自然数 m に対し a_m まで定まっているとき, $s_m = \sum_{n=1}^m \frac{a_n}{2^n}$ とおく. $s_0 = 0$ である. $s_m + \frac{1}{2^{m+1}} \in A$ のとき, $a_{m+1} = 1$ とおく, そうでないときは $a_{m+1} = 0$ とおく.

(a_n) の定義と, 自然数 m に関する帰納法により, どの番号 $m = 0, 1, 2, \dots$ に対しても, $s_m \in A$

かつ $s_m + \frac{1}{2^m} \notin A$ が成り立つことを示す. (I) $m = 0$ のとき, $s_0 = a_0 = 0 \in A$ かつ $s_0 + \frac{1}{2^0} = 1 \notin A$. ($0 \in A, 1 \notin A$ と仮定したのであった.) (II) $m = l$ のとき, $s_l \in A$ かつ $s_l + \frac{1}{2^l} \notin A$ である
 とすると, $m = l + 1$ のとき, (1) $s_l + \frac{1}{2^{l+1}} \in A$ の場合, $a_{l+1} = 1$ であり, $s_{l+1} = s_l + \frac{1}{2^{l+1}} \in A$.
 (たった今そう場合分けした.) また, $s_{l+1} + \frac{1}{2^{l+1}} = s_l + \frac{1}{2^{l+1}} + \frac{1}{2^{l+1}} = s_l + \frac{1}{2^l} \notin A$. ($m = l$
 のときの帰納法の仮定.) (2) $s_l + \frac{1}{2^{l+1}} \notin A$ の場合, $a_{l+1} = 0$ であり, $s_{l+1} = s_l \in A$. また,
 $s_{l+1} + \frac{1}{2^{l+1}} = s_l + \frac{1}{2^{l+1}} \notin A$. 以上より, どの番号 $m = 0, 1, 2, \dots$ に対しても, $s_m \in A$ かつ
 $s_m + \frac{1}{2^m} \notin A$ が成り立つ.

□

4 上限と下限^{*1}

$A \subset \mathbb{R}$ に対し, A の上界と下界を定める. 実数 r が A の上界 (下界) であるとは, 任意の A の元 $x \in A$ に対し $x \leq r$ ($r \leq x$) となることをいう.

参考文献

- [1] 青本和彦, 『微分と積分 1』, 現代数学への入門, 岩波書店, 2003.
- [2] 斎藤毅, 『集合・位相』, 東京大学出版会, 2009.
- [3] 斎藤毅, 『微積分』, 東京大学出版会, 2013.
- [4] 斎藤毅, 「はじまりはコンパクト」, 『新・数学の学び方』, 岩波書店, 2015, pp.34-50.
- [5] 杉浦光夫, 『解析入門 I』, 東京大学出版会, 1980.
- [6] 一松信, 『解析学序説 上』, 裳華房, 1962.
- [7] 一松信, 『初等関数の数値計算』, シリーズ新しい応用の数学 8, 教育出版, 1974.
- [8] 森毅, 『現代の古典解析』, ちくま学芸文庫, 2006.
- [9] 森毅, 『位相のころ』, ちくま学芸文庫, 2006.

^{*1}ここからは, 2021, Apr, 17 以降の追加分.