End 環であそぼう

Toshi2019

概要

この間, 初めてコホモロジーの計算をしてみた. なかなか? いや結構楽しかったのでそれを記事にしようというやつ. 理解の過程を割とありのまま残すように心がけた. 教養程度の知識をお持ちであればほとんどはご理解いただけるよう配慮したが, 用いる術語のブレがあったりと, 完璧を期したわけではない. 不備は各自で補完されたい. 最後に, 愚直に計算する例を多めに載せた. 眺める (手を動かして計算を再現してみる) なり, 他にも面白い例を作ろうと試みられるなりすると納得感も強く得られると思う.

1 凡例

よく用いる (かもしれない) 記号についてまとめておく.

- 集合: $\mathbf{N}, \mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{C}$ を自然数, 整数, 有理数, 実数, 複素数全体の成す集合とする.
- 基数: 集合 X に対し, $|X|$ で X の基数を表す. 例えば, $|\{0, 1, \ldots, n-1\}| = n$ である.
- 交換子: $[p, q]$ は $pq - qp$ を表す.
- クロネッカー記号: δ^i_j は $i = j$ のとき 1, そうでないとき 0 を表すとする.
- 射: 群や環といった諸々の代数系の準同型をたんに射という.
- 双対空間: 体 k 上の線形空間 V に対し, $V^* = \mathrm{Hom}_k(V, k)$ とおく.
- 標数: 標数 0 の体といった言い回しを用いることがある. 不慣れな方は, $\mathbf{R}$ や $\mathbf{C}$ を思い浮かべてもらえばよい.

2 加群もろもろ

行列を線形写像だと思うと, 正方行列は自分から自身への線型写像ということになる. このことについてもう少し想いを馳せてみる. 行列には足し算とスカラー倍があって, 線形空間を成していた. のみならず, 積も備えた代数系になってもいる. このようなものを多元環とか結合代数, あるいはたんに代数と言ったりする[*1]. 標語的には

$$(\text{代数}) = (\text{線形空間}) + (\text{積}) \tag{甲}$$

[*1] 本稿では, 専ら代数の語を用いる.

あるいは

$$(\text{代数}) = (\text{環}) + (\text{スカラー倍}) \tag{乙}$$

という具合である.

復習: 環の定義

環について不慣れな方のために復習しておく.

定義 2.1. 集合 R が **環** (ring) であるとは, R に加法 $+\colon R \times R \to R$ と乗法 $\times\colon R \times R \to R$ が定まっており, 次の条件 (1)–(4) をみたすことをいう.

(1) R は加法について可換群である.
(2) 任意の $x, y, z \in R$ に対し, $(xy)z = x(yz)$.
(3) 元 $1 \in R$ で, 任意の $x \in R$ に対し $x1 = 1x = x$ をみたすものがただ一つ存在する.
(4) 任意の $x, y, z \in R$ に対し, $(x+y)z = xz + yz, x(y+z) = xy + xz$.

さらに次の (5) を満たすとき, R は**可換環** (commutative ring) であるという.
(5) 任意の $x, y, z \in R$ に対し, $xy = yx$.

2.1 代数

標語 (乙) をもう少しきちんと定式化してみる. k を可換環とし, A を単位元を持つ (可換とは限らない) 環とする. 環の射 $\varphi : k \to A$ で, k の像 $\varphi(k)$ が A の中心に含まれるものが与えられたとき, すなわち,

$$\text{任意の } x \in k, a \in A \text{ に対し, } \varphi(x)a = a\varphi(x)$$

をみたすものが与えられたとき, A を k **代数** (algebra) であるという.

例 2.2. 線形空間 $\mathbf{R}^n$ から自身への線形写像を n 次正方行列とみなすと, その全体 $M_n(\mathbf{R})$ は, 可換環 $\mathbf{R}$ からの射 $\varphi : \mathbf{R} \to M_n(\mathbf{R})$ を $\varphi(x) = xE_n$ (E_n は単位行列) で定めることで $\mathbf{R}$ 代数となる. 実際, X を n 次正方行列とすると $\varphi(x)X = xE_nX = XxE_n = X\varphi(x)$ である.

多項式環も素敵な対象である.

例 2.3. 可換環 A 上の n 変数多項式環 $A[x_1, \ldots, x_n]$ は A 代数になる. 実際, $a \mapsto a \cdot 1$ とすればスカラー倍が定まる.

環上の加群についてすこし

定義 2.4. A を環とする. 加法群 M が A 上の**左加群** (left module) であるとは, M に左からの作用 $A \times M \to M$ が定まっており, 次の条件 (1)–(4) をみたすことをいう.

(1) 任意の $a \in A$, $x, y \in M$ に対し, $a(x+y) = ax + ay$.
(2) 任意の $a, b \in A$, $x \in M$ に対し, $(a+b)x = ax + bx$.
(3) 任意の $a, b \in A$, $x \in M$ に対し, $(ab)x = a(bx)$.
(4) 任意の $x \in M$ に対し, $1x = x$.

定義 2.4 の作用を右からに変えて, 右加群を定義する. さらに, 環 A, B をそれぞれ左右から掛けるとき, $a(xb) = (ax)b$ が成り立つとしたものを, (A, B) **両側加群** (bimodule) という. 以下, 特に断らない限り, A 加群といえば左 A 加群を指す.

End 環

A を可換環とし, M を環 A 上の加群とするとき, M の A **自己準同型環**[*2](endomorphism algebra) $\mathrm{End}_A(M)$ を $\mathrm{End}_A(M) \coloneqq \mathrm{Hom}_A(M, M)$ で定める. たとえば, $\mathrm{End}_{\mathbf{R}}(\mathbf{R}^n) = M_n(\mathbf{R})$ であり, 例 2.2 で見たように, $\mathrm{End}_{\mathbf{R}}(\mathbf{R}^n)$ は $\mathbf{R}$ 代数になる.

念のため, $\mathrm{End}_A(M)$ に代数の構造がのることを見ておく.

まず, $\mathrm{End}_A(M)$ 自身が環になっていることを示す. $f, g \in \mathrm{End}_A(M)$ に対し, $f+g \in \mathrm{End}_A(M)$, $fg \in \mathrm{End}_A(M)$ を

$$(f+g)(x) \coloneqq f(x) + g(x), \quad (fg)(x) \coloneqq f \circ g(x) \quad (x \in M)$$

で定められる. このとき, $0 \in \mathrm{End}_A(M)$ $(0(x) \coloneqq 0), \mathrm{id}_M$ を加法, 乗法の単位元として定義 2.1 の条件をみたす. 実際, 加法群の条件については, M の加法群の性質から従う. 積に関する条件については, 写像の合成に関する結合則と,

$$f(g+h)(x) = f(g(x) + h(x)) = f(g(x)) + f(h(x)) = (fg + fh)(x),$$

同様に, $(f+g)h(x) = (fh + gh)(x)$ から従う.

A の M への作用をみる. $a \in A, f \in \mathrm{End}_A(M)$ に対し, $af \in \mathrm{End}_A(M)$ を $(af)(x) \coloneqq af(x)$ で定められる. 実際, $(af)(bx) = af(bx) = abf(x) = baf(x)b(af)(x)$ が成り立ち, af は A 加群の射になる[*3]. ということで, このとき, $a, b \in A, f, g \in \mathrm{End}_A(M), x \in M$ に対し,

$$\begin{aligned}
a(f+g)(x) &= a((f+g)(x)) = a(f(x) + g(x)) \\
&= af(x) + ag(x) = (af + ag)(x), \\
(a+b)f(x) &= af(x) + ag(x) = (af + bf)(x), \\
(ab)f(x) &= a(bf(x)) = a(bf)(x), \\
1f(x) &= f(x)
\end{aligned}$$

が成り立つ. したがって, $\mathrm{End}_A(M)$ は A 代数である.

以下, 環と言っていても代数の構造を入れて考えていることもある (そうでないこともある).

[*2] 個人的には ‘エンドかん’ と読むのが好み.

[*3] ここで, A の可換性が効いていることに注意. 一般に, (A, B) 両側加群から A 加群への射でないと, スカラー倍したものは射にならない.

多項式の End 環

多項式環の自己射として, 掛け算による作用が考えられる. 具体的な式で見てみる.

例 2.5. 体 k 上の多項式 $a{x_1}^2+bx_2+c$ に対し, x_2 をかけても

$$x_2(a{x_1}^2+bx_2+c)=a{x_1}^2x_2+bx_2x_3+cx_2$$

となり, 再び多項式である.

微分による作用も考えられる.

例 2.6. 体 k 上の多項式 $a{x_1}^2+bx_2+c$ を x_1 で微分しても

$$\partial_1(a{x_1}^2+bx_2+c)\coloneqq\frac{\partial}{\partial x_1}(a{x_1}^2+bx_2+c)=2ax_1$$

となり, 再び多項式である[*4].

ここまでくると, 多項式環 $k[x_1,\ldots,x_n]$ の End 環の部分代数のうち, 微分と掛け算の成すものを考えることができる.

定義 2.7 (Weyl 代数)**.** k を体とする. 不定元 x_i, ∂_j $(1\leqq i,j\leqq n)$ で生成され, 関係

$$[x_i,x_j]=0,\quad [\partial_i,\partial_j]=0,\quad [\partial_j,x_i]=\delta^i_j \tag{2.1}$$

を入れることで定まる k 上の代数を Weyl 代数といい, $W_n(k)$ で表す.

$W_n(k)\subset\mathrm{End}(k[x_1,\ldots,x_n])$ であり, $k[x_1,\ldots,x_n]$ は左 $W_n(k)$ 加群になる[*5].

$W_n(k)$ の元の表示について見ておく. $W_n(k)$ の元 $P(x,\partial)$ は $k[x_1,\ldots,x_n]$ を係数とする多項式

$$P(x,\partial)=\sum_{|\alpha|\geqq 0}a_\alpha(x)\partial^\alpha\quad(\text{有限和}) \tag{2.2}$$

(ただし $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in\mathbf{N}^n$, $|\alpha|=\alpha_1+\cdots+\alpha_n$, $a_\alpha(x)\in k[x_1,\ldots,x_n]$, $\partial^\alpha=\partial_1^{\alpha_1}\cdots\partial_n^{\alpha_n}$) として一意にかける. 次の例で説明しよう.

例 2.8. $P_1(x,\partial)=\partial_1x_1+\partial_2\partial_3x_3$ とおく. 交換関係 (2.1) から例えば $[\partial_1,x_1]=\partial_1x_1-x_1\partial_1=1$ が得られるので, $\partial_1x_1=x_1\partial_1+1$ と交換していくことで

$$\begin{aligned}P_1(x,\partial)&=(x_1\partial_1+1)+\partial_2(x_3\partial_3+1)\\&=x_1\partial_1+1+\partial_2x_3\partial_3+\partial_2\\&=1+x_1\partial_1+\partial_2+x_3\partial_2\partial_3\end{aligned}$$

[*4] ∂ は d の異字体なので, d と同じ読み方をするのが個人的には好み.

[*5] 進んだ注: 定義 2.7 は生成元と関係式のみでなされていることに注意. 微分と掛け算という解釈は $W_n(k)$ が多項式空間上に表現されるということである. (Fock 表現)

と書き直せる．第 1 項は $\alpha=(0,0,0)$ で, $1=a_{(0,0,0)}\partial^{(0,0,0)}$ とかける．同様にして, $a_{(1,0,0)}(x)=x_1$, $a_{(0,1,0)}(x)=1$, $a_{(0,1,1)}(x)=x_3$ とおけば,

$$P_1(x,\partial)=a_{(0,0,0)}\partial^{(0,0,0)}+a_{(1,0,0)}(x)\partial^{(1,0,0)}+a_{(0,1,0)}(x)\partial^{(0,1,0)}+a_{(0,1,1)}(x)\partial^{(0,1,1)}$$

となり, 確かに, (2.2) の形になる．

いまの例はつまらないかもしれないが, 次の場合も眺めておくと楽しい．

例 2.9. $P_2(x,\partial)=x_1\partial_2x_2x_1\partial_1+\partial_2\partial_1x_2\partial_1x_1\partial_2$ とおく．交換関係 (2.1) から,

$$\begin{aligned}
P_2(x,\partial)&=x_1\partial_2x_2x_1\partial_1+\partial_2\partial_1x_2\partial_1x_1\partial_2\\
&=x_1^2\partial_1\partial_2x_2+\partial_2\partial_1x_2(x_1\partial_1+1)\partial_2\\
&=x_1^2\partial_1(x_2\partial_2+1)+\partial_2\partial_1x_2x_1\partial_1\partial_2+\partial_2\partial_1x_2\partial_2\\
&=x_1^2\partial_1x_2\partial_2+{x_1}^2\partial_1+(x_2\partial_2+1)\partial_1x_1\partial_1\partial_2+(x_2\partial_2+1)\partial_1\partial_2\\
&=x_1^2x_2\partial_1\partial_2+{x_1}^2\partial_1+x_2\partial_2\partial_1x_1\partial_1\partial_2+\partial_1x_1\partial_1\partial_2+x_2\partial_2\partial_1\partial_2+\partial_1\partial_2\\
&=x_1^2x_2\partial_1\partial_2+{x_1}^2\partial_1+x_2\partial_2(x_1\partial_1+1)\partial_1\partial_2+(x_1\partial_1+1)\partial_1\partial_2+x_2\partial_1\partial_2^2+\partial_1\partial_2\\
&=x_1^2x_2\partial_1\partial_2+{x_1}^2\partial_1+x_2\partial_2x_1\partial_1\partial_1\partial_2+x_2\partial_2\partial_1\partial_2+x_1\partial_1\partial_1\partial_2+\partial_1\partial_2+x_2\partial_1\partial_2^2+\partial_1\partial_2\\
&=x_1^2x_2\partial_1\partial_2+{x_1}^2\partial_1+x_1x_2\partial_1^2\partial_2^2+x_2\partial_1\partial_2^2+x_1\partial_1^2\partial_2+2\partial_1\partial_2+x_2\partial_1\partial_2^2\\
&=x_1^2\partial_1+(2+x_1^2)\partial_1\partial_2+x_1\partial_1^2\partial_2+2x_2\partial_1\partial_2^2+x_1x_2\partial_1^2\partial_2^2
\end{aligned}$$

と書き直せる．第 1 項は $\alpha=(1,0)$ で, $x_1^2\partial_1=a_{(1,0)}(x)\partial^{(1,0)}$ とかける．同様にして, $a_{(1,1)}(x)=2+x_1^2$, $a_{(2,1)}(x)=x_1$, $a_{(1,2)}(x)=2x_2$, $a_{(2,2)}(x)=x_1x_2$, とおけば

$$P_2(x,\partial)=a_{(1,0)}(x)\partial^{(1,0)}+a_{(1,1)}(x)\partial^{(1,1)}+a_{(2,1)}(x)\partial^{(2,1)}+a_{(1,2)}(x)\partial^{(1,2)}+a_{(2,2)}(x)\partial^{(2,2)}$$

となり, 確かに, (2.2) の形になる．実際に (単項式だけでなく) 多項式が係数になっていることもわかった．

以上の変形が, そのまま表示の一意性の証明になっていることに注意．

核と余核と時々 (余) 像

$f\colon M\to N$ を A 加群の射とする．このとき,

$$\operatorname{Ker} f:=f^{-1}(0),\quad \operatorname{Im} f:=f(M)$$

とおき, f の**核** (kernel), **像** (image) という．それぞれ M,N の部分加群になっていて, 商加群を考えられる．

$$\operatorname{Coker} f:=N/\operatorname{Im} f,\quad \operatorname{Coim} f:=M/\operatorname{Ker} f$$

を f の**余核** (cokernel), **余像** (coimage) という．実は, $\operatorname{Coim} f$ と $\operatorname{Im} f$ は同形になる．(準同型定理!)

例 2.10. $W_n(k)$ を Weyl 代数とする．左 $W_n(k)$ 加群の射 $W_n(k) \to k[x_1, \ldots, x_n]$ を $P \mapsto P(1, 0)$ で定める．$a(x) \in k[x_1, \ldots, x_n]$ に対し，$a(x)\partial^{(0)} \in W_n(k)$ が $a(x)\partial^{(0)} \mapsto a(x)$ をみたすので，この射は全射であり，核は $(\partial_1, \ldots, \partial_n)$ で生成される左イデアルである．したがって，$\operatorname{Coim} f \cong \operatorname{Im} f$ から，左 $W_n(k)$ 加群の同形

$$W_n(k)/\sum_j W_n(k)\partial_j \xrightarrow{\sim} k[x_1, \ldots, x_n] \tag{2.3}$$

を得る．

テンソル積について少々

A を k 代数とする．右 A 加群 M と左 A 加群 N に対し，k 加群 $M \otimes_A N$[*6]を次の性質を満たすものとして定める．

任意の $m, m' \in M$, $n, n' \in N$, $a \in A$, $\lambda \in k$ に対し，

$$\begin{aligned}
&(m + m') \otimes n = m \otimes n + m' \otimes n, \\
&m \otimes (n + n') = m \otimes n + m \otimes n', \\
&ma \otimes n = m \otimes an, \\
&\lambda(m \otimes n) = m\lambda \otimes n = m \otimes \lambda n.
\end{aligned}$$

$M \otimes_A N$ を A 上の**テンソル積** (tensor product) という．

A, B を環とする．$\lambda : A \to B$ を環の射とすると，B を (A, B) 両側加群とみなせる．実際，$a \in A$, $b \in B$ に対し $ab := \lambda(a)b$ とかくことにすると，$x \in B$ に対し $a(xb) = \lambda(a)(xb) = (\lambda(a)x)b = (ax)b$ が成り立つ．

このとき，任意の A 加群 M に対し，$M \otimes_A B$ は B 加群となる，これを M の A から B へのスカラー拡大といい，$M_{(B)}$ とかく．具体的には，

$$(M \otimes_A B) \times B \to M \otimes_A B; \quad (x \otimes b, a) \mapsto x \otimes (ba)$$

という構造が入っている．

3 ちょっとホモロジー代数

あとで使うのでまとめておく．定義の羅列にこそなるが，語学だと思って，眺めておいてもらえればよい．

定義 3.1. A 加群の列 $(M^n)_{n \in \mathbf{N}}$ と射の列 $(d_M^n \colon M^n \to M^{n+1})_{n \in \mathbf{N}}$ に対し，次を満たすものを**複体** (complex) $(M^\bullet, d^\bullet)$ という．

$$\text{任意の } n \in \mathbf{Z} \text{ に対し，} d_M^n \circ d_M^{n-1} = 0.$$

[*6] ‘M テンサー N’ と読むのが個人的には好み．

これは, 任意の $n \in \mathbf{Z}$ に対し, $\operatorname{Im} d_M^{n-1} \subset \operatorname{Ker} d_M^n$ ということである. 各 d_M^n を微分 (写像) という.

さらに, $\operatorname{Im} d_M^{n-1} \supset \operatorname{Ker} d_M^n$ が成り立っているとき, すなわち, $\operatorname{Im} d_M^{n-1} = \operatorname{Ker} d_M^n$ のとき, この列は**完全** (exact) であるという.

定義 3.2 (複体の射)**.** 複体 $(M^\bullet, d_M^\bullet), (N^\bullet, d_N^\bullet)$ に対し, 複体の射 $\varphi^\bullet \colon (M^\bullet, d_M^\bullet) \to (N^\bullet, d_N^\bullet)$ とは, 射の族 $(\varphi^n)_{n\in\mathbf{Z}}$ で, 次の図式を可換にするものをいう.

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & M^n \arrow[r, "d_M^n"] \arrow[d, "\varphi^n"'] & M^{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "\varphi^{n+1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & N^n \arrow[r, "d_N^n"'] & N^{n+1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

定義 3.3 (コホモロジー)**.** 複体 $(M^\bullet, d^\bullet)$ に対し,

$$H^i(M^\bullet, d^\bullet) \coloneqq \operatorname{Ker} d^i / \operatorname{Im} d^{i-1}$$

とおき, i 次コホモロジーという.

4 koszul 複体

4.1 外冪について

k を標数 0 の体とし, A を k 代数とする.

定義 4.1. 2 項演算 $x \wedge y$[*7]を, 次の性質をみたすものとして定める.

(結合則) $(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$

(双線形性) $(ax + by) \wedge z = ax \wedge z + by \wedge z, \quad x \wedge (ay + bz) = ax \wedge y + bx \wedge z,$

(反対称性) $y \wedge x = -x \wedge y, x \wedge x = 0$

ざっくり, j コかけたものを (L^* 上の) j 線形交代形式ということを頭に入れておいてもらえるとよい.

L を n 次元 k 線形空間とするとき, L^* 上の j 線形交代形式の成す k 線形空間を $\bigwedge^j L$ とかき, L の j 次外冪という. 具体的には,

$$\bigwedge^j L \coloneqq \left\{ \sum a_i x_{i_1} \wedge \cdots \wedge x_{i_j} \mid i_1 < \cdots < i_j, a_i \in k \right\}$$

である. $\dim \left(\bigwedge^j L \right) = \binom{n}{j}$, とくに $\bigwedge^0 L = k$, $\bigwedge^1 L = L$, $\bigwedge^n L = k$ である.

[*7]'x ウェッジ y' と読むのが個人的には好み. 敢えて定義域を明示していないが, 後述する $\bigwedge^j L$ を $j = 1, \ldots, n$ と走らせて直和したものである. (外積代数)

4.2　複体の導入

$(e_1, \ldots, e_n)$ を L の基底とし, $I = \{i_1 < \cdots < i_j\} \subset \{1, \ldots, n\}$ するとき,

$$e_I \coloneqq e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_j}$$

とおく. $M^{(j)} = M \otimes \bigwedge^j k^n$ とすると, $M^{(j)}$ には $1 \otimes a : x \otimes e_I \mapsto x \otimes e_I \lambda(a)$ で A 加群の構造が入る. $M^{(j)}$ の元 m は一意的に

$$m = \sum_{|I|=j} m_I \otimes e_I$$

とかける.

2 次の場合を見てみる. $|I| = 2$ となる I は $I = \{1,2\}, \{1,3\}, \ldots, \{1,n\}, \ldots, \{n-1,n\}$ であるので,

$$\begin{aligned} m &= m_{\{1,2\}} \otimes e_{\{1,2\}} + \cdots + m_{\{n-1,n\}} \otimes e_{\{n-1,n\}} \\ &= m_{\{1,2\}} \otimes e_1 \wedge e_2 + \cdots + m_{\{n-1,n\}} \otimes e_{n-1} \wedge e_n \end{aligned}$$

という形になる. 一意性は $e_j \wedge e_i = -e_i \wedge e_j$ で潰せば従うことも見やすいであろう.

$\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ を $\varphi_i \in \mathrm{End}_A(M)$ で, 互いに可換, 即ち $[\varphi_i, \varphi_j] = 0$ $(1 \leqq i, j \leqq n)$ をみたすものの列とする. $d \in \mathrm{Hom}_A(M^{(j)}, M^{(j+1)})$ を

$$d(m \otimes e_I) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(m) \otimes e_i \wedge e_I = \varphi_1(m) \otimes e_1 \wedge e_I + \cdots + \varphi_n(m) \otimes e_n \wedge e_I$$

と, これを線形に拡張したものにより定める. φ_i たちの可換性から, $d \circ d = 0$ であることがしたがう. 試しに $n = 4$ の場合を見てみよう. $k^n = k^4$ で, e_1, e_2, e_3, e_4 を標準基底とする. まず,

- $\bigwedge^0 k^4 = k,$
- $\bigwedge^1 k^4 = \langle e_1, e_2, e_3, e_4 \rangle \cong k^4,$
- $\bigwedge^2 k^4 = \langle e_1 \wedge e_2, e_1 \wedge e_3, e_1 \wedge e_4, e_2 \wedge e_3, e_2 \wedge e_4, e_3 \wedge e_4 \rangle,$
- $\bigwedge^3 k^4 = \langle e_1 \wedge e_2 \wedge e_3, e_1 \wedge e_2 \wedge e_4, e_1 \wedge e_3 \wedge e_4, e_2 \wedge e_3 \wedge e_4 \rangle,$
- $\bigwedge^4 k^4 = \langle e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4, \rangle \cong k$

となることから,

- $M^{(0)} = M \otimes \bigwedge^0 k^4 = M \otimes k \cong M,$
- $M^{(1)} = M \otimes \bigwedge^1 k^4 \cong M \otimes k^4,$
- $M^{(2)} = M \otimes \bigwedge^2 k^4,$
- $M^{(3)} = M \otimes \bigwedge^3 k^4,$
- $M^{(4)} = M \otimes \bigwedge^4 k^4 \cong M \otimes k \cong M$

のようになる．それぞれの元の形は次のようになる．$M^{(0)}$ は,

$$m = \sum_{|I|=0} m_I \otimes e_I = m_{\varnothing} =: m_0 \in M,$$

$M^{(1)}$ は,

$$\begin{aligned} m = \sum_{|I|=1} m_I \otimes e_I &= m_{\{1\}} \otimes e_{\{1\}} + m_{\{2\}} \otimes e_{\{2\}} + m_{\{3\}} \otimes e_{\{3\}} + m_{\{4\}} \otimes e_{\{4\}} \\ &= m_{\{1\}} \otimes e_1 + m_{\{2\}} \otimes e_2 + m_{\{3\}} \otimes e_3 + m_{\{4\}} \otimes e_4, \end{aligned}$$

$M^{(2)}$ は,

$$\begin{aligned} m = \sum_{|I|=2} m_I \otimes e_I &= m_{\{1,2\}} \otimes e_{\{1,2\}} + m_{\{1,3\}} \otimes e_{\{1,3\}} + m_{\{1,4\}} \otimes e_{\{1,4\}} \\ &\quad + m_{\{2,3\}} \otimes e_{\{2,3\}} + m_{\{2,4\}} \otimes e_{\{2,4\}} + m_{\{3,4\}} \otimes e_{\{3,4\}} \\ &= m_{\{1,2\}} \otimes e_1 \wedge e_2 + m_{\{1,3\}} \otimes e_1 \wedge e_3 + m_{\{1,4\}} \otimes e_1 \wedge e_4 \\ &\quad + m_{\{2,3\}} \otimes e_2 \wedge e_3 + m_{\{2,4\}} \otimes e_2 \wedge e_4 + m_{\{3,4\}} \otimes e_3 \wedge e_4 \end{aligned}$$

$M^{(3)}$ は,

$$\begin{aligned} m = \sum_{|I|=3} m_I \otimes e_I &= m_{\{1,2,3\}} \otimes e_{\{1,2,3\}} + m_{\{1,2,4\}} \otimes e_{\{1,2,4\}} \\ &\quad + m_{\{1,3,4\}} \otimes e_{\{1,3,4\}} + m_{\{2,3,4\}} \otimes e_{\{2,3,4\}} \\ &= m_{\{1,2,3\}} \otimes e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 + m_{\{1,2,4\}} \otimes e_1 \wedge e_2 \wedge e_4 \\ &\quad + m_{\{1,3,4\}} \otimes e_1 \wedge e_3 \wedge e_4 + m_{\{2,3,4\}} \otimes e_2 \wedge e_3 \wedge e_4, \end{aligned}$$

$M^{(4)}$ は,

$$m = \sum_{|I|=4} m_I \otimes e_I = m_{\{1,2,3,4\}} \otimes e_{\{1,2,3,4\}} = m_{\{1,2,3,4\}} \otimes e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4$$

となる．

$d \circ d : M^{(0)} \to M^{(2)}$ を計算してみよう．

$$\begin{aligned} & d \circ d(m) = d\left(\varphi_1(m) \otimes e_1 + \varphi_2(m) \otimes e_2 + \varphi_3(m) \otimes e_3 + \varphi_4(m) \otimes e_4\right) \\ = \quad & d(\varphi_1(m) \otimes e_1) + d(\varphi_2(m) \otimes e_2) + d(\varphi_3(m) \otimes e_3) + d(\varphi_4(m) \otimes e_4) \\ = \quad & \varphi_1\varphi_1(m) \otimes e_1 \wedge e_1 + \varphi_2\varphi_1(m) \otimes e_2 \wedge e_1 + \varphi_3\varphi_1(m) \otimes e_3 \wedge e_1 + \varphi_4\varphi_1(m) \otimes e_4 \wedge e_1 \\ & + \varphi_1\varphi_2(m) \otimes e_1 \wedge e_2 + \varphi_2\varphi_2(m) \otimes e_2 \wedge e_2 + \varphi_3\varphi_2(m) \otimes e_3 \wedge e_2 + \varphi_4\varphi_2(m) \otimes e_4 \wedge e_2 \\ & + \varphi_1\varphi_3(m) \otimes e_1 \wedge e_3 + \varphi_2\varphi_3(m) \otimes e_2 \wedge e_3 + \varphi_3\varphi_3(m) \otimes e_3 \wedge e_3 + \varphi_4\varphi_3(m) \otimes e_4 \wedge e_3 \\ & + \varphi_1\varphi_4(m) \otimes e_1 \wedge e_4 + \varphi_2\varphi_4(m) \otimes e_2 \wedge e_4 + \varphi_3\varphi_4(m) \otimes e_3 \wedge e_4 + \varphi_4\varphi_4(m) \otimes e_4 \wedge e_4 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
= \quad & 0-\varphi_2\varphi_1(m)\otimes e_1\wedge e_2-\varphi_3\varphi_1(m)\otimes e_1\wedge e_3-\varphi_4\varphi_1(m)\otimes e_1\wedge e_4\\
& +\varphi_1\varphi_2(m)\otimes e_1\wedge e_2+0-\varphi_3\varphi_2(m)\otimes e_2\wedge e_3-\varphi_4\varphi_2(m)\otimes e_2\wedge e_4\\
& +\varphi_1\varphi_3(m)\otimes e_1\wedge e_3+\varphi_2\varphi_3(m)\otimes e_2\wedge e_3+0-\varphi_4\varphi_3(m)\otimes e_3\wedge e_4\\
& +\varphi_1\varphi_4(m)\otimes e_1\wedge e_4+\varphi_2\varphi_4(m)\otimes e_2\wedge e_4+\varphi_3\varphi_4(m)\otimes e_3\wedge e_4+0\\
= \quad & (\varphi_1\varphi_2-\varphi_2\varphi_1)(m)\otimes e_1\wedge e_2+(\varphi_1\varphi_3-\varphi_3\varphi_1)(m)\otimes e_1\wedge e_3+(\varphi_1\varphi_4-\varphi_4\varphi_1)(m)\otimes e_1\wedge e_4\\
& +(\varphi_2\varphi_3-\varphi_3\varphi_2)(m)\otimes e_2\wedge e_3+(\varphi_2\varphi_4-\varphi_4\varphi_2)(m)\otimes e_2\wedge e_4+(\varphi_3\varphi_4-\varphi_4\varphi_3)(m)\otimes e_3\wedge e_4\\
= \quad & [\varphi_1,\varphi_2](m)\otimes e_1\wedge e_2+[\varphi_1,\varphi_3](m)\otimes e_1\wedge e_3+[\varphi_1,\varphi_4](m)\otimes e_1\wedge e_4\\
& +[\varphi_2,\varphi_3](m)\otimes e_2\wedge e_3+[\varphi_2,\varphi_4](m)\otimes e_2\wedge e_4+[\varphi_3,\varphi_4](m)\otimes e_3\wedge e_4\\
= \quad & 0+0+0+0+0+0=0.
\end{aligned}
$$

確かに $d\circ d=0$ になった.

$d\circ d=0$ から, 複体を考えたくなる.

$$
K^\bullet(M,\varphi)\colon 0\xrightarrow{0}M^{(0)}\xrightarrow{d}\cdots\xrightarrow{d}M^{(n)}\xrightarrow{0}0
$$

定義 4.2. 上で定まる複体 $K^\bullet(M,\varphi)$ を Koszul 複体という[*8].

$n=1$ のとき, この複体は

$$
0\xrightarrow{0}M^{(0)}\xrightarrow{d}M^{(1)}\xrightarrow{0}0
$$

という形になるが, $M^{(0)}=M^{(1)}=M$ なので,

$$
0\xrightarrow{0}M\xrightarrow{d}M\xrightarrow{0}0,
$$

さらに,

$$
\begin{aligned}
d(m\otimes 1)&=\sum_{i=1}^{1}\varphi_i(m)\otimes e_i\wedge 1\\
&=\varphi_1(m)\otimes e_1\wedge 1\\
&=\varphi_1(m)\otimes e_1\cong\varphi_1(m)
\end{aligned}
$$

なので,

$$
0\xrightarrow{0}M\xrightarrow{\varphi_1}M\xrightarrow{0}0
$$

である. コホモロジーを計算すると,

$$
\begin{aligned}
H^0(K^\bullet(M,\varphi))&=\operatorname{Ker}\varphi_1/\operatorname{Im}0=\operatorname{Ker}\varphi_1/0=\operatorname{Ker}\varphi_1,\\
H^1(K^\bullet(M,\varphi))&=\operatorname{Ker}0/\operatorname{Im}\varphi_1=M/\operatorname{Im}\varphi_1=\operatorname{Coker}\varphi_1
\end{aligned}
$$

となる.

[*8] フランス語の発音に倣い ‘コシュール’ と読むのが個人的には好み.

一般の n では,

$$\begin{aligned}H^0(K^\bullet(M,\varphi)) &= \operatorname{Ker} d/\operatorname{Im} 0 = \operatorname{Ker} d = \operatorname{Ker}\varphi_1 \cap \cdots \cap \operatorname{Ker}\varphi_n,\\ H^n(K^\bullet(M,\varphi)) &= \operatorname{Ker} 0/\operatorname{Im} d = M/\operatorname{Im} d = M/\left(\varphi_1(M) + \cdots + \varphi_n(M)\right)\end{aligned}$$

となる.

$\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ に対して, $\varphi' = (\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1})$ とおき, d' を $K^\bullet(M,\varphi')$ の微分とする. このとき, φ_n は複体の射

$$\widetilde{\varphi}_n : K^\bullet(M,\varphi') \to K^\bullet(M,\varphi')$$

を定める. $n = 3$ のときの例をみてみよう. $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$, $d' : M^{(j)} \to M^{(j+1)}$ $(j = 0, 1)$ で, 2 つの複体

$$0 \longrightarrow M^{(0)} \xrightarrow{d'} M^{(1)} \xrightarrow{d'} M^{(2)} \longrightarrow 0,$$

$$0 \longrightarrow M^{(0)} \xrightarrow{d'} M^{(1)} \xrightarrow{d'} M^{(2)} \longrightarrow 0$$

の間に φ_3 で射を定めたい. φ_i, φ_j は互いに可換であったことから, 図式

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M^{(0)} \arrow[r, "d'"] \arrow[d, "\varphi_3"] & M^{(1)} \arrow[r, "d'"] \arrow[d, "\varphi_3"] & M^{(2)} \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_3"] & 0 \\
0 \arrow[r] & M^{(0)} \arrow[r, "d'"] & M^{(1)} \arrow[r, "d'"] & M^{(2)} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

が可換になることを見越して計算してみる. $d' : M^{(0)} \to M^{(1)}$ の構成は $n = 2$ のときと同じだから, $\varphi_3 : M \to M$ に対して,

$$\begin{aligned}\varphi_3 \circ d'(m) &= \varphi_3\left(\varphi_1(m) \otimes e_1 + \varphi_2(m) \otimes e_2\right)\\ &= \varphi_3\varphi_1(m) \otimes e_1 + \varphi_3\varphi_2(m) \otimes e_2\\ &= \varphi_1\varphi_3(m) \otimes e_1 + \varphi_2\varphi_3(m) \otimes e_2 = d' \circ \varphi_3(m)\end{aligned}$$

となり, 確かに図式の左側は可換になる. 右側も同様に確かめられるが, もはや書くまでもないだろう. 以上より, めでたく射 $K^\bullet(M,\varphi') \to K^\bullet(M,\varphi')$ が定まり, $\widetilde{\varphi}_n$ と書く必然性が納得できた.

Koszul 複体では, 次の定理 (とその系) を用いることで, コホモロジーの計算が非常に単純になる.

定理 4.3. 次の完全列が存在する.

$$\cdots \longrightarrow H^j(K^\bullet(M,\varphi')) \xrightarrow{\varphi_n} H^j(K^\bullet(M,\varphi')) \longrightarrow H^{j+1}(K^\bullet(M,\varphi)) \longrightarrow \cdots \tag{4.1}$$

証明. カンタンのため,

$$\begin{aligned}
Z^j(\varphi) &:= \mathrm{Ker}(d^j\colon M^{(j)} \to M^{(j+1)}) \quad \left(= \mathrm{Ker}(d^j\colon M \otimes \bigwedge^{j} k^n \to M \otimes \bigwedge^{j+1} k^n)\right), \\
B^j(\varphi) &:= \mathrm{Im}(d^{j-1}\colon M^{(j-1)} \to M^{(j)}) \quad \left(= \mathrm{Im}(d^{j-1}\colon M \otimes \bigwedge^{j-1} k^n \to M \otimes \bigwedge^{j} k^n)\right), \\
H^j(\varphi) &:= H^j(K^\bullet(M, \varphi)) = Z^j(\varphi)/B^j(\varphi)
\end{aligned}$$

とおく. $Z^j(\varphi'), B^j(\varphi'), H^j(\varphi')$ も同様に定める.

次の完全列を構成することで示す.

$$\cdots \longrightarrow H^j(\varphi') \xrightarrow{\varphi_n} H^j(\varphi') \xrightarrow{\wedge e_n} H^{j+1}(\varphi) \xrightarrow{\vee e_n} H^{j+1}(\varphi') \xrightarrow{\varphi_n} \cdots.$$

(i) $\wedge e_n$ を次のように構成する. $a \in Z^j(\varphi')$ に対し

$$\wedge e_n(a) = a \wedge e_n$$

とおくと, $\wedge e_n(d'b) = d'(b \wedge e_n)$ が成り立つ. したがって, $\wedge e_n\colon H^j(\varphi') \to H^{j+1}(\varphi)$ が矛盾なく定まる.

(ii) $\vee e_n$ を次のように構成する. $a = \sum_I a_I e_I \in Z^j(\varphi)$ とする.

$$\vee e_n(a) = \sum_I a'_I e_I, \quad a'_I = \begin{cases} a_I & n \notin I, \\ 0 & n \in I \end{cases}$$

とすると, $\vee e_n(db) = d'(\vee e_n(b))$ となるので, $\vee e_n\colon H^{j+1}(\varphi) \to H^{j+1}(\varphi')$ が矛盾なく定まる.

あとは, $\wedge e_n \circ \varphi_n = 0$, $\varphi \circ \vee e_n = 0$, $\mathrm{Ker}(\wedge e_n) = \mathrm{Im}(\vee e_n)$, $\mathrm{Ker}(\vee e_n) = \mathrm{Im}(\wedge e_n)$ をチェックすればよい. □

定義 4.4. 任意の $1 \leqq j \leqq n$ に対し, φ_j が $M/(\varphi_1(M) + \cdots + \varphi_{j-1}(M))$ の自己射として単射であるとき, $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ は**正則列** (regular sequence) であるという.

系 4.5. $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ を正則列とする. このとき, $j \neq n$ に対し, $H^j(K^\bullet(M, \varphi)) \cong 0$ である.

証明. $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ を正則列とし, n に関する帰納法で示す. $n-1$ まで成り立つとすると, $M/(\varphi_1(M) + \cdots + \varphi_{n-1}(M)) \cong H^{n-1}(K^\bullet(M, \varphi))$ であり, φ_n は単射なので, 成り立つ. □

5 具体例の計算

k を標数 0 の体とし, $\mathcal{O}_n := k[x_1, \ldots, x_n]$ と略記する. $W_n := W_n(k)$ と略記し, $\cdot\partial_j$ で右からの掛け算を表すと, W_n 自身を左 W_n 加群とみたときの W_n 線形写像とみなせる. $(x_1\partial_2 + \partial_1) \cdot \partial_1 = x_1\partial_2\partial_1 + \partial_1^2 = \partial_1^2 + x_1\partial_1\partial_2$ という具合.

∂_i, ∂_j は互いに可換であったから, $(\partial_1, \dots, \partial_n)$ は Koszul 複体 $K^\bullet(W_n, (\partial_1, \dots, \partial_n))$:

$$0 \longrightarrow W_n^{(0)} \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} W_n^{(n)} \longrightarrow 0,$$

$$d(\sum_I a_I \otimes e_I) \coloneqq \sum_{j=i}^{n} \sum_I a_I \cdot \partial_j \otimes e_j \wedge e_I$$

を定める. $(\partial_1, \dots, \partial_n)$ は正則列なので, 系 4.5 より $j \neq n$ で完全であり, n 次のコホモロジーは,

$$H^n(K^\bullet(M, \varphi)) \cong W_n/(\sum_j W_n \cdot \partial_j) \cong \mathcal{O}_n{}^{*9}.$$

6 終わりに

志賀直哉『清兵衛と瓢箪』は瓢箪マニアの少年, 清兵衛が主人公の短編小説である. あるとき, 町家の軒先にぶら下がっている安物の瓢箪に目を奪われた清兵衛は, 一目でその価値を見抜き, 迷わず購入する. 来る日も来る日もその瓢箪を磨き続けるのであるが, ひょんなことから学校の教員に没収されてしまう. その後, 金に困った教員は瓢箪を二足三文で小間使いに売り払ってしまうのであるが, その何十倍もの値段で, 質屋に売られたという話である.

柏原正樹はチャーン賞受賞時に制作された映像の中で次のように語っている.

> 'To find what is important and what is not important — I think that is the most difficult part of the research of mathematics.'

清兵衛のような, 真に重要なものを見抜ける目を養いたい.

参考文献

[1] 志甫淳, 層とホモロジー代数, 共立出版 (2016).

[2] 堀田良之, 代数入門 – 群と加群, 裳華房 (1987).

[3] 堀田良之, 環と体 1 可換環論, 岩波書店 (1997).

[4] 谷崎俊之, 環と体 3 非可換環論, 岩波書店 (1998).

[5] H. Matsumura, *Commutative ring theory*, Cambridge Studies in Advanced Math. **8** Cambridge University Press (1986).

[6] M. Kashiwara, P. Schapira, *Categories and sheaves*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. **332** Springer-Verlag (2006).

[7] P. Schapira, *An introduction to algebra and topology*, `https://webusers.imj-prg.fr/~pierre.schapira/lectnotes/`

*9 例 2.10 と見比べよ.