実数論

大柴寿浩

2021 年 4 月 18 日

概要

1 凡例

よく用いる用語と記号をまとめておく.

- 数列: 数列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_0, a_1, \dots)$ を (a_n) のように略記することがある.
- 開球: $\mathbb{R}^n$ をユークリッド距離による距離空間と考え, $a \in \mathbb{R}^n$ を中心とする半径 $r > 0$ の開球を $U_r(a) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(a,x) \leq r\}$ で表す.
- 開集合: X を位相空間とする. U が X の開集合であることを $U \underset{\text{open}}{\subset} X$ のようにかくことがある.

2 導入

$1/3 = 0.333\cdots$ であることはよく知られた事実である. 中学校では $x = 0.333\cdots$ とおき, 両辺に 10 を掛けて $10x = 3.333\cdots$. 辺々引いて $9x = 3$. 最後に両辺を 9 で割って $0.333\cdots = x = 1/3$ のようにすると習った.

これを示すのに, 高校では極限を教わった上で

$$\begin{aligned}
0.333\cdots &= 0.3 + 0.03 + 0.003 + \cdots \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{3}{10^k} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3}{10} \frac{1-(1/10)^n}{1-1/10} \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3} \left(1 - \left(\frac{1}{10} \right)^n \right) \\
&= \frac{1}{3} \times (1-0) = \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

と習った.

大学に入ってすぐの微積分の授業で極限を厳密に定義することで, これがきちんと基礎付けられた. すなわち, 任意の自然数 $n \geqq 1$ に対し,

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{3}{10^k}-\frac{1}{3}\right| &= \left|\frac{1}{3}\left(1-\left(\frac{1}{10}\right)^n\right)-\frac{1}{3}\right| \\ &= \left|-\left(\frac{1}{10}\right)^n\right| \\ &= \left(\frac{1}{10}\right)^n < \frac{1}{n}\end{aligned}$$

が成り立つので, 後述するはさみうちの原理 (命題 3.3) より, $0.333\cdots = 1/3$ ということになるのであった.

このように, 無限小数を, 無限級数と捉えることで, 特に有理数の場合には, 容易に極限を求められる.

3 実数の連続性

次を公理とする.

公理 3.1. 1. (アルキメデスの原理 (axiom of Archimedes)) a が実数ならば, $n \leqq a \leqq n+1$ をみたす整数 n が存在する.

2. (a_n) を自然数列で, 任意の $n \geqq 0$ に対し, $a_n = 0$ か $a_n = 1$ のどちらかであるものとする. このとき, 実数 b で, 全ての自然数 $m \geqq 0$ に対し

$$\sum_{n=1}^{m}\frac{a_n}{2^n} \leqq b \leqq \sum_{n=1}^{m}\frac{a_n}{2^n}+\frac{1}{2^m} \tag{3.1}$$

をみたすものが存在する.

$m = 0$ とすると, $\displaystyle\sum_{n=1}^{m}\frac{a_n}{2^n} = 0$ となり不等式 (3.1) は $0 \leqq b \leqq 1$ を表す.

公理 3.1 から, 実数は閉区間 $[0, 1]$ を整数で左右にずらしたもので覆うことができ, それらを整数部分と 2 進小数で表せる. 次の命題の系から式 (3.1) の b はただ 1 つであることがわかる.

命題 3.2 (有理数の稠密性)**.** a と b を実数とする. $a < b$ ならば, 有理数 r で $a < r < b$ をみたすものが存在する.

証明. $a < b$ より $b - a > 0$. 自然数 n を, $n = \left[\dfrac{1}{b-a}\right] + 1$ とおく. n は $0 < \dfrac{1}{b-a} < n$ をみたす最小の自然数である. さらに $m = [na] + 1$ とおくと $na < m \leqq na + 1 < nb$ なので, 有理数 $r = m/n$ は $a < r < b$ をみたす. □

命題 3.3 (はさみうちの原理 (squeeze theorem))**.** a と b を実数とする. 任意の自然数 $n \geqq 1$ に対し $|a - b| < \dfrac{1}{n}$ ならば, $a = b$ である.

証明. $|a-b|>0$ だったとする．このとき, $\dfrac{1}{|a-b|}>0$ は実数なので, アルキメデスの公理 (公理 3.1.1) より $\dfrac{1}{|a-b|} \geqq n$ をみたす自然数 $n>0 \Leftrightarrow n \geqq 1$ が存在する．この不等式の逆数をとると, $\dfrac{1}{n} \leqq |a-b|$ となるが, 仮定より $|a-b|<\dfrac{1}{n}$ なので $\dfrac{1}{n} \leqq |a-b| < \dfrac{1}{n}$ となりムジュン．したがって $|a-b|=0$ であり, $a=b$. □

系 3.4. (a_n) を公理 3.1.2 の仮定をみたす数列とする．不等式 (3.1) をみたす実数 b はただ 1 つである．

証明. b と c を不等式 (3.1) をみたす実数とすると, すべての自然数 $m \geqq 1$ に対し, $\displaystyle\sum_{n=1}^{m} \frac{a_n}{2^n} \leqq b \leqq \sum_{n=1}^{m} \frac{a_n}{2^n} + \frac{1}{2^m}$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{m} \frac{a_n}{2^n} \leqq c \leqq \sum_{n=1}^{m} \frac{a_n}{2^n} + \frac{1}{2^m}$ が成り立つので, ふたつめの不等式を -1 倍したものをひとつめの不等式に辺々足して, $-\dfrac{1}{2^m} \leqq b-c \leqq \dfrac{1}{2^m}$ すなわち $|b-c| \leqq \dfrac{1}{2^m}$ を得る. $|b-c| \leqq \dfrac{1}{2^m} < \dfrac{1}{m}$ なので, はさみうちの原理 (命題 3.3) より $b=c$ である． □

これで公理 3.1.2 の b を特徴づけることができた．この b を $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n}$ で表す．(∞ の記号単体では意味を持たせていない.) $0.a_1a_2a_3a_4\ldots$ のように表し, b の **2 進小数表示** (binary decimal representation) ということもある．(たとえば $1/2 = 0.1000\ldots, 5/8 = 1/2+1/8 = 0.101000\ldots$ のように.)

実数はいくつかの同値な性質により, その性質を様々な視点から捉えることができる．以下, 公理 3.1 から出発して, それらの性質を順次示していくことにする．

定理 3.5 (実数の連続性 (continuity of real numbers))**.** $a \leqq b$ を実数とし, 閉区間 $[a,b]$ の部分集合 A が次の条件 (D) をみたすとする．

(D)　x が A の元ならば, 閉区間 $[a,x]$ は A に含まれる．

このとき, 実数 c で $A=[a,c]$ か $A=[a,c)$ のどちらか一方が成り立つものが存在する．

定理 3.5 の実数 c を A の**終点** (end point) と呼ぶことにする．

証明. まず, $[a,b]=[0,1]$ の場合に示し, その後 a,b が一般の場合を $a=0,b=1$ の場合に帰着させて示す．$a=0,b=1$ とする．$0 \notin A$ のとき, 条件 (D) より, $A=\emptyset$. $1 \in A$ のとき, 条件 (D) より, $A=[0,1]$. よって $0 \in A, 1 \notin A$ のときを考える．

数列 (a_n) を次のように帰納的に定義する．$a_0=0$ とする．a_n が自然数 m に対し a_m まで定まっているとき, $s_m = \displaystyle\sum_{n=1}^{m} \frac{a_n}{2^n}$ とおく．$s_0=0$ である．$s_m + \dfrac{1}{2^{m+1}} \in A$ のとき, $a_{m+1}=1$ とおき, そうでないときは $a_{m+1}=0$ とおく．

(a_n) の定義と, 自然数 m に関する帰納法により, どの番号 $m=0,1,2,\ldots$ に対しても, $s_m \in A$

かつ $s_m + \dfrac{1}{2^m} \notin A$ が成り立つことを示す. (I) $m = 0$ のとき, $s_0 = a_0 = 0 \in A$ かつ $s_0 + \dfrac{1}{2^0} = 1 \notin A$. ($0 \in A, 1 \notin A$ と仮定したのだった.) (II) $m = l$ のとき, $s_l \in A$ かつ $s_l + \dfrac{1}{2^l} \notin A$ であるとすると, $m = l+1$ のとき, (1) $s_l + \dfrac{1}{2^{l+1}} \in A$ の場合, $a_{l+1} = 1$ であり, $s_{l+1} = s_l + \dfrac{1}{2^{l+1}} \in A$. (たった今そう場合分けした.) また, $s_{l+1} + \dfrac{1}{2^{l+1}} = s_l + \dfrac{1}{2^{l+1}} + \dfrac{1}{2^{l+1}} = s_l + \dfrac{1}{2^l} \notin A$. ($m = l$ のときの帰納法の仮定.) (2) $s_l + \dfrac{1}{2^{l+1}} \notin A$ の場合, $a_{l+1} = 0$ であり, $s_{l+1} = s_l \in A$. また, $s_{l+1} + \dfrac{1}{2^{l+1}} = s_l + \dfrac{1}{2^{l+1}} \notin A$. 以上より, どの番号 $m = 0, 1, 2, \ldots$ に対しても, $s_m \in A$ かつ $s_m + \dfrac{1}{2^m} \notin A$ が成り立つ.

$\square$

4 上限と下限[*1]

$A \subset \mathbb{R}$ に対し, A の上界と下界を定める. 実数 r が A の上界 (下界) であるとは, 任意の A の元 $x \in A$ に対し $x \leqq r$ ($r \leqq x$) となることをいう.

参考文献

[1] 青本和彦, 『微分と積分 1』, 現代数学への入門, 岩波書店, 2003.
[2] 斎藤毅, 『集合・位相』, 東京大学出版会, 2009.
[3] 斎藤毅, 『微積分』, 東京大学出版会, 2013.
[4] 斎藤毅, 「はじまりはコンパクト」, 『新・数学の学び方』, 岩波書店, 2015, pp.34-50.
[5] 杉浦光夫, 『解析入門 I』, 東京大学出版会, 1980.
[6] 一松信, 『解析学序説 上』, 裳華房, 1962.
[7] 一松信, 『初等関数の数値計算』, シリーズ新しい応用の数学 8, 教育出版, 1974.
[8] 森毅, 『現代の古典解析』, ちくま学芸文庫, 2006.
[9] 森毅, 『位相のこころ』, ちくま学芸文庫, 2006.

[*1] ここからは, 2021,Apr,17 以降の追加分.