幾何学続論 (第 15 回)

「今回は前回の続きと，軽くお話をして終わりましょう.」

前回

- $*\colon \bigwedge^k(T_p^*M) \to \bigwedge^{m-k}(T_p^*M);\ \omega \mapsto *\omega$

$$\forall \eta \in \bigwedge^k(T_p^*M) \quad \eta \wedge *\omega = g_p^k(\eta, \omega)(\omega^1 \wedge \cdots \wedge \omega^m)$$

- $\delta\colon \Omega^k(M) \to \Omega^{k-1}(M) \quad \delta \overset{\text{def}}{=} (-1)^{m(k+1)+1} * d *.$
- $\langle\ ,\ \rangle\colon \Omega^k(M) \times \Omega^{k-1}(M) \to \mathbf{R};\quad \langle \omega, \eta \rangle = \int_M \omega \wedge \eta$

今回

定義. $\Delta\colon \Omega^k(M) \to \Omega^k(M)$:Lapracian を

$$\Delta = \delta \circ d + d \circ \delta$$

で定める.

ω: harmonic form $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \Delta\omega = 0.$

$\mathcal{H}^k(M) = \bigl\{\omega \in \Omega^k(M);\ \Delta\omega = 0\bigr\}.$

$$\begin{aligned}\langle \Delta\omega, \omega \rangle &= \langle \delta \circ d\omega + d \circ \delta\omega, \omega \rangle \\ &= \langle \delta \circ d\omega, \omega \rangle + \langle d \circ \delta\omega, \omega \rangle \\ &= \langle d\omega, \delta\omega \rangle + \langle \delta\omega, d\omega \rangle\end{aligned}$$

より

$$\Delta\omega = 0 \Longleftrightarrow \delta\omega = 0 \text{ かつ } d\omega = 0$$

が成り立つ．よって $\mathcal{H}^k(M) = \mathrm{Ker}\, d \cap \mathrm{Ker}\, \delta$ となる．

$\omega \in \mathcal{H}^k(M), d\eta \in \mathrm{Im}\, d, \delta\mu \in \mathrm{Im}\, \delta$ とすれば，

$$\begin{aligned}\langle \omega, d\eta \rangle &= \langle \delta\omega, \eta \rangle = 0, \\ \langle \omega, \delta\mu \rangle &= \langle d\omega, \mu \rangle = 0, \\ \langle d\eta, \delta\mu \rangle &= \langle d \circ d\eta, \mu \rangle = 0\end{aligned}$$

より

$$\mathcal{H}^k(M) \perp \mathrm{Im}\, d, \mathcal{H}^k(M) \perp \mathrm{Im}\, \delta, \mathrm{Im}\, d \perp \mathrm{Im}\, \delta.$$

「つまり，今の場合 Ω^k の中で，直和分解

$$\Omega^k \supset \mathcal{H}^k \oplus \mathrm{Im}\, d^{k-1} \oplus \mathrm{Im}\, \delta^{k+1}$$

が成り立ってんねんな．」

実は次の定理が成り立つ．

定理 (Hodge-de Rham-Kodaira)**.**

$$\Omega^k = \mathcal{H}^k \oplus \mathrm{Im}\, d^{k-1} \oplus \mathrm{Im}\, \delta^{k+1}.$$

この分解を Hodge 分解という．

> 「俺は . . . . . . 証明読んだことない (笑) 聞いたことあるのは，ソボレフ空間の埋め込み定理とかを使った，解析的な証明.」

この定理の系として次が従う．

定理 (Hodge)**.** $^\forall[\omega] \in H^k_{DR}(M) \quad ^{\exists!}\omega_H \in \Omega^k.$

pf. $\omega = Z^k(M)$ に対し，Hodge 分解

$$\omega = \omega + d\eta + \delta\mu \quad (\omega \in \mathcal{H}^k(M), \eta \in \Omega^{k-1}(M), \mu \in \Omega^{k+1}(M))$$

を考える．$\omega \in Z^k(M)$ なので

$$d\omega = d \circ \delta\mu = 0.$$

従って，$\langle d \circ \delta\mu, \mu \rangle = \langle \delta\mu, \delta\mu \rangle = 0$ より $\delta\mu = 0$.

$$\therefore \omega = \omega_H + d\eta \quad \text{となり} \quad \omega_H \in [\omega].$$

$\square$

「こんなもんでどうでしょう．あとは小話.」

小話

「微分形式といえば，(俺はトポロジーの人間なので)，特性類の理論がある．また，コホモロジーといったら，群のコホモロジーがあって，佐藤隆夫『群のコホモロジー』が最近出たが，他の和書はあまり無いと思う．俺が専門にしてるのは写像類群で，森田（茂之）先生のグループとか北大の秋田（利之）先生とかがやってる．あと河澄（響矢）先生とか.」

「群から空間を作ることを考える.」

G: grp.

$$X\text{: } K(G,1) \text{ sp.} \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} \text{(i) } \pi_1(X) \cong G \\ \text{(ii) } \pi_n(X) = 0 \quad (n \geqq 2) \end{cases}$$

問題. X はいつ存在するか？

事実. ${}^{\forall}G \quad {}^{\exists!}X$ up to homotopy.

X を G の Eilenberg-MacLane sp. と呼ぶ．このとき

$$H_*(G) \coloneqq H_*(K(G,1))$$
$$H^*(G) \coloneqq H^*(K(G,1))$$

とおき，群 G の（コ）ホモロジーという.

「G の Euler class も $K(G,1)$ のそれで定める.」

例. $K(\mathbf{Z}^n, 1) = \underbrace{S^1 \times \cdots \times S^1}_{n} = T^n$,

$K(F_n,1)=\bigvee_{k=1}^{n} S^1$.（$F_n$ は rank n の自由群）

「所謂 n 弁ブーケ．Euler 数は $1-n$.」

写像類群を定義する．

Σ_g: oriented closed surf. $(g>1)$ に対し，

$$\mathrm{Mod}(\Sigma_g) \coloneqq \{f\colon \Sigma_g \to \Sigma_g; \text{ori. pres. diffeo.}\}/\text{isotopy}$$

を曲面 Σ_g の写像類群という．

「トポロジカルな surface があると，そこにどのくらい複素構造が入るか？ というのがリーマンのモジュライ問題．複素構造の同値類はタイヒミュラー空間と呼ばれ，$6g-6$ 次元の ball と同相になる．つまり $3g-3$ の複素多様体になる．$\mathrm{Mod}(\Sigma_g)$ はタイヒミュラー空間に作用しているので $\mathrm{Mod}(\Sigma_g)$ をモジュライ空間の基本群とも呼ぶ．基本群を調べればモジュライ空間がよくわかることになるが，$\mathrm{Mod}(\Sigma_g)$ はバカデカい群．そのためよくわかってないことも多い．例えば忠実表現があるか？ といったこと．モンスター群とも関係がある．」

$\mathcal{M}_g = \{$ 複素構造 $\}$ と書く．

事実. $H^*(\mathcal{M}_g;\mathbf{Q}) \cong H^*(\mathrm{Mod}(\Sigma_g);\mathbf{Q})$

「この辺は特性類とかやると出てくる．」

「こんなところで．今期の話で扱わなかったのは

- ポアンカレ双対
- リーマン幾何
- 接続，曲率から定まるコホモロジー
- リー微分，フロベニウスの定理

とか．」