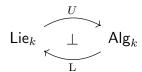
# Lie 環と代数の随伴

#### Toshi2019

Lie 環と代数の間の随伴についてまとめたノート.



#### 1 主定理

k を単位元を持つ可換環とする. k 代数と k 代数射のなす圏を  $\mathsf{Alg}_k$ , k 上の Lie 環と Lie 環射のなす圏を  $\mathsf{Lie}_k$  とかく. 次の (1.1) を示すのが本稿の目的である.

$$\operatorname{Hom}_{\mathsf{Alg}_k}(U(\mathfrak{g}), A) \cong \operatorname{Hom}_{\mathsf{Lie}_k}(\mathfrak{g}, \mathsf{L}(A))$$
 (1.1)

ここで,  $U: \mathrm{Lie}_k \to \mathsf{Alg}_k$  は Lie 環  $\mathfrak{g}$  に対し, 包絡環  $U(\mathfrak{g})$  を対応させ, Lie 環射  $f: \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$  に対し, 代数射  $U(f): U(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{g}')$  を対応させる関手である. また,  $L: \mathsf{Alg}_k \to \mathsf{Lie}_k$  は, 代数 A に対し Lie 環を, 代数射  $h: A \to A'$  に対し Lie 環射を, 後述する方法 (3.1) で対応させる関手である.

# 2 Lie 環

Lie 環  $(\mathfrak{g}, [\bullet, \bullet])$  とは, k 線形空間  $\mathfrak{g}$  と k 双線形写像  $[\bullet, \bullet]: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$  の組で次の条件を満たすものをいう.

- (L1) 任意の  $x \in \mathfrak{g}$  に対し [x,x] = 0
- (L2) 任意の  $x,y,z\in\mathfrak{g}$  に対し [x,[y,z]]+[y,[z,x]]+[z,[x,y]]=0

#### 3 代数

k を単位元を持つ可換環とする. k 代数 (A,m,u) とは, k 線形空間 A と k 線形写像  $m:A\otimes A\to A, u:k\to A$  の三つ組で次の図式を可換にするものをいう.



以下, k を取り替えないので, k 代数をたんに代数とよぶ.  $(A, m_A, u_A)$ ,  $(B, m_B, u_B)$  を代数とする. 線形写像  $f:A\to B$  が代数射であるとは, 次の図式が可換となることをいう.

$$\begin{array}{cccc}
A \otimes A & \xrightarrow{m_A} & A & & k & \xrightarrow{u_A} & A \\
f \otimes f \downarrow & & \downarrow f & & \parallel & \downarrow f \\
B \otimes B & \xrightarrow{m_B} & B & & k & \xrightarrow{u_B} & B
\end{array}$$

代数 A に対し、次の方法でブラケット積を定める.

$$[x,y] = xy - yx \tag{3.1}$$

これにより, A から Lie 環 L(A) が定まる. このとき, 代数射  $f: A \to B$  に対し,

$$f([x,y]) = f([x,y]) = f(xy) - f(yx)$$
  
=  $f(x)f(y) - f(y)f(x) = [f(x), f(y)]$ 

が成り立つので, f を自然に Lie 環射とみなせる. これを  $L(f): L(A) \to L(B)$  とかく.

## 4 包絡環

g を Lie 環とする.

### 5 証明

## 参考文献

[阿部 77] 阿部英一, ホップ代数, 岩波書店, 1977.

[谷崎 02] 谷崎俊之, リー代数と量子群, 共立叢書 現代数学の潮流, 共立出版, 2002.

[Kas95] C. Kassel, Quantum Groups, Graduate Texts in Mathematics, vol. 155, Springer-Verlag, New York, 1995.