Liu ゼミノート

概要

2021 年春セメスターに行なった [Liu] ゼミのノート.

実施日

- 5/15: 定義 2.1 – 注意 2.6
- 5/16: 補題 2.7 – 定義 2.10
- 5/21: 定義 2.8 – 定義 2.14

2 Ringed topological spaces

2.1 Sheaves

定義 2.1. X を位相空間とする. X 上の **(アーベル群の) 前層** (presheaf) $\mathcal{F}$ は次のデータからなる.

– X の各開部分集合 U に対するアーベル群 $\mathcal{F}(U)$, そして

– 部分開集合の各組 $V \subset U$ に対する群準同型 **(制限写像)** $\rho_{UV} : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$ で, 次の条件を満たすもの:

(1) $\mathcal{F}(\varnothing) = 0$;

(2) $\rho_{UU} = \mathrm{id}$;

(3) $W \subset V \subset U$ ならば, $\rho_{UW} = \rho_{VW} \circ \rho_{UV}$.

元 $s \in \mathcal{F}(U)$ を $\mathcal{F}$ の U 上の**切断** (section) という. $s|_V$ で $\rho_{UV}(s) \in \mathcal{F}(V)$ を表し, s の V への**制限** (restriction) とよぶ.

定義 2.2. 前層 $\mathcal{F}$ が次の条件をみたすとき, **層** であるという.

(4) **(一意性)** U を X の開部分集合とし, $s \in \mathcal{F}(U)$, $\{U_i\}_i$ を開部分集合 U_i による U の被覆とする. 全ての i に対し $s|_{U_i} = 0$ ならば, $s = 0$ である.

(5) **(局所切断の貼り合わせ)** (4) の記法を用いる. $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$, $i \in I$ を切断で $s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}$ をみたすものとする. このとき, 切断 $s \in \mathcal{F}(U)$ で $s|_{U_i} = s_i$ をみたすものが存在する (この切断 s は (4) より一意である).

定義 2.2 は何を言っているのか. 次の射を考える.

$$\prod_{i \in I} \rho_{UU_i} \colon \mathcal{F}(U) \to \prod_{i \in I} \mathcal{F}(U_i); \quad s \mapsto (s|_{U_i})_{i \in I}.$$

(4) は $\prod_{i \in I} \rho_{UU_i}$ が単射である, と言っている.

(4) について. $\prod_{i \in I} \mathcal{F}(U_i)$ の部分群

$$M := \left\{ (s_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} \mathcal{F}(U_i) \,\middle|\, \forall i, j \in I \; s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j} \right\}$$

を考える. (5) は $\prod_{i \in I} \rho_{UU_i} \colon \mathcal{F}(U) \to M$ が全射であるということである.

つまり, (4), (5) を合わせると, $\prod_{i \in I} \rho_{UU_i}$ によって $\mathcal{F}(U)$ と M が同形になるといっている.

定義 2.2 (5) の一意性の証明. 切断 $s, s' \in \mathcal{F}(U)$ が $s|_{U_i} = s_i$, $s'|_{U_i} = s_i$ をみたすとする. このとき,

$$\begin{aligned}
(s - s')|_{U_i} &= \rho_{UU_i}(s - s') \\
&= \rho_{UU_i}(s) - \rho_{UU_i}(s') \\
&= s|_{U_i} - s'|_{U_i} = s_i - s_i = 0.
\end{aligned}$$

したがって, 定義 2.2 (4) より $s - s' = 0$. すなわち. $s = s'$.

同様にして, **環上の層**, 固定した環の上の**代数上の層**等々を定義できる. $\mathcal{F}$ の**部分層** $\mathcal{F}'$ も自然な概念である: $\mathcal{F}'(U)$ は $\mathcal{F}(U)$ の部分群であり, 制限 ρ'_{UV} は ρ_{UV} によって引き起こされる.

部分層の定義. まず部分関手の定義を復習する. $F, G \colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ を関手とし, $\varphi \colon F \to G$ を関手の射とする. $\mathcal{C}$ の全ての対象 X に対し, $F(X) \subset G(X)$ であり $\varphi(X)$ が包含 $F(X) \hookrightarrow G(X)$ となるとき, F を G の部分関手という.

$G \colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ を関手とし, 各対象 $X \in \mathcal{C}$ に対し部分対象 $F(X) \subset G(X)$ が与えられているとき, G の部分関手 F が定まるための条件は, $\mathcal{C}$ の任意の射 $f \colon X \to Y$ に対し

$G(f)(F(X)) \subset F(Y)$ となることである.

$$\begin{array}{ccc} G(X) & \xrightarrow{G(f)} & G(Y) \\ \uparrow & & \uparrow \\ F(X) & \xrightarrow{G(f)} & G(Y). \end{array}$$

同様の条件をみたす関手 $\mathcal{G} \subset \mathcal{F} \colon \mathsf{Open}_X^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Ab}$ で, 層の条件 (4), (5) をみたすものとして $\mathcal{F}$ の部分層 $\mathcal{G}$ を定める.

例 2.3. X を位相空間とする. X の任意の開集合 U に対し, $\mathcal{C}(U) = \mathrm{C}^0(U, \mathbb{R})$ を U から $\mathbb{R}$ への連続関数の集合とする. 制限 ρ_{UV} は普通の関数の制限である. このとき, $\mathcal{C}$ は X の層である. $\mathcal{F}(U) = \mathbb{R}^U$ を U 上の $\mathbb{R}$ に値をとる関数の集合とすると, これは $\mathcal{C}$ を部分層としてもつ層 $\mathcal{F}$ を定める.

証明. $\mathcal{C}(\varnothing) = 0$ であるか: 空集合からの写像は包含 $i \colon \varnothing \hookrightarrow \mathbb{R}$ のみであるから, $\mathcal{C}(\varnothing) = \{i\} \cong 0$ である.

$\mathcal{C}$ が層になるための条件 (4), (5) をみたすことを示す. $U = \cup_{i \in I} U_i$ とする. このとき, $s \colon U \to \mathbb{R}; s(x) = (x \in U_i)$ を考える. 任意の $x \in U$ に対し $x \in U_i$ となる i が存在するので $s(x) = 0$ である. したがって, $\mathcal{C}$ は (4) をみたす.

$(s_i)_{i \in I}$, $s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}$ $(i, j \in I)$ とする. 写像 $s \colon U \to \mathbb{R}$ を $s(x) = s_i(x)$ $(x \in U_i)$ で定めたい. いま, $x \in U$ について $x \in U_i$ をとなる $i \in I$ が存在することは保証されている. x が U_i の元であり, かつ U_j の元でもあるとする. このとき $s_i(x) = s_j(x)$ が成り立つことを示す.

$$s_i(x) = s_i|_{U_i \cap U_j}(x), s_j(x) = s_j|_{U_j \cap U_i}(x).$$

したがって, $s_i(x) = s_j(x)$ が成り立つので, s は well-defined であり (5) が成り立つ.

$s \colon U \to \mathbb{R}$ が連続写像であることを示す. $x \in U$ とし, $\varepsilon > 0$ を実数とする. いま x が U_i の点であるとすると, s_i は連続なので開近傍 $V_i \subset U_i$ が存在する. この V_i に対し, $V_i \subset U$ である. x_0 を V_i の点とすると,

$$|s(x) - s(x_0)| = |s_i(x) - s_i(x_0)| < \varepsilon$$

が成り立つ. したがって, s は連続である. $\square$

関手 $\mathcal{F}$ について． $V\subset U$ を X の開集合とする．

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(U) \arrow[r, "\rho^{\mathcal{C}}_{UV}"] \arrow[d, hook] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathcal{C}(V) \arrow[d, hook] \\
\mathcal{F}(U) \arrow[r, "\rho^{\mathcal{F}}_{UV}"] & \mathcal{F}(V)
\end{tikzcd}$$

$f\in\mathcal{C}(U)$ を切断とする．$\rho^{\mathcal{C}}_{UV}(f)=f|_V$ であり，$f|_V\in\mathcal{C}(V)$ が成り立つ．よって，$\mathcal{C}$ は $\mathcal{F}$ の部分層である． □

例 2.4. A を非自明なアーベル群とする．X を位相空間とする．$\mathcal{A}_X(U)=A$ とし，U と V が空でなければ $\rho_{UV}=\mathrm{id}_A$ とする．これは X 上の前層を定める．一般には，$\mathcal{A}_X$ は層にはならない．例えば，X が空でない 2 つの開集合の非交和だとすると，層の条件 (5) が成り立たない．

証明． $X=U\sqcup V(U,V\neq\varnothing)$ とおき，$a\neq b\in A$ とする．$a|_{U\cap V}=b|_{U\cap V}$ であるが，$U\cup V$ について，$x\in A$ で，$x|_U=a,x|_V=b$ をみたすものが存在し，$x|_U=x$ となるが，これは $a\neq b$ にムジュン．したがって，$\mathcal{A}_X$ は層の条件 (5) を満たさず，層にはならない． □

注意 2.5. U が X の開集合であるとき，X 上の任意の前層 $\mathcal{F}$ は自明な方法で，すなわち，U の任意の開部分集合 V に対し，$\mathcal{F}|_U(V)=\mathcal{F}(V)$ とおくことで，U 上の前層 $\mathcal{F}|_U$ を引き起こす．$\mathcal{F}$ の U への**制限** (restriction) という．$\mathcal{F}$ が層になるならば，$\mathcal{F}|_U$ もそうなる．

コメント． X:top. sp., $V\subset U\subset X$: open のとき，$\mathcal{F}\colon \mathsf{Open}X^{\mathrm{op}}\to\mathsf{Ab}$ に対し $\mathcal{F}|_U\colon\mathsf{Open}U^{\mathrm{op}}\to\mathsf{Ab}:V\mapsto\mathcal{F}(V)$ としてとるということ．

注意 2.6. $\mathcal{B}$ を X の部分集合の基底とする (即ち，$\mathcal{B}$ は X の開集合のなす集合であって，X の任意の開集合は $\mathcal{B}$ に属する部分開集合の合併であり，有限の共通部分について安定であるということである)．$\mathcal{B}$ 前層と $\mathcal{B}$ 層を，上の定義において「X の開集合 U」を「$\mathcal{B}$ に属する開集合 U」で置き換えることで定められる．このとき任意の $\mathcal{B}$ 層 $\mathcal{F}_0$ は X 上の層 $\mathcal{F}$ に一意に (より正確には同型を除いて一意に，定義 2.10 参照) 拡張される．

$\mathcal{U}=\{U_i\}_i$ を X の開集合族とする．$U=\cup_iU_i$ とし $U_{ij}=U_i\cap U_j$ とする．X 上の任意

の前層 $\mathcal{F}$ に対し, アーベル群の複体 $C^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F})$

$$0 \to \mathcal{F}(Y) \xrightarrow{d_0} \prod_i \mathcal{F}(U_i) \xrightarrow{d_1} \prod_{i,j} \mathcal{F}(U_{ij})$$

で, $d_0 \colon s \mapsto (s|_{U_i})_i$ と $d_1 \colon (s_i)_i \mapsto (s_i|_{U_{ij}} - s_j|_{U_{ij}})_{i,j}$ で定まるものを得る.

補題 2.7. 上の記号のもとで, $\mathcal{F}$ が層であることと, X の任意の開集合族 $\mathcal{U}$ に対し $C^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ が完全であることは同値である.

証明. $\mathcal{U}$

定義 2.8. $\mathcal{F}$ を X 上の前層とし, $x \in X$ とする. $\mathcal{F}$ の x における茎 (stalk) とは, 群

$$\mathcal{F}_x = \varinjlim_{U \in I_x} \mathcal{F}(U)$$

のことをいう.

I_x について. $I_x \subset \mathsf{Open}X$ を x の開近傍全体の成す順序集合で, $U, V \in I_x$ の順序を $U < V \iff U \supset V$ で定めたものとする (I_x を圏とみなしたとき, I_x は $\mathsf{Open}X^{\mathrm{op}}$ の充満部分圏になっている).

補題 2.9. $s_x = t_x$

定義 2.10. $\alpha(U)$

例 2.11. $\mathbb{C} \setminus \{0\}$

命題 2.12. α_x

系 2.13. $\alpha \colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$

定義 2.14. $\mathcal{F}^\dagger$

参考文献

[Liu] Qing Liu, *Algebraic Geometry and Arithmetic Curves*, Oxford Graduate Text in Mathematics, **6**, 2010.