

# 代数曲線論

Toshi2019

Feb 20, 2022

## 概要

本稿の目的は、21 年度の秋セメスターに [3] を用いて行ったセミナーの内容を報告することである。まず複素関数論について復習してからリーマン球面について述べる。その後、本稿ではほとんど 1 次元の場合、すなわちリーマン面の場合しか扱わないが、一般の次元に対して複素多様体を定義する。セミナーで学んだ事実のうち興味あるものとして、リーマン・ロッホの定理をリーマン球面に対して適用したものと代数学の基本定理がある。これらの証明が本稿の目標である。

## 凡例

本稿では、次の記号について断りなく用いる。

- $\mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{C}$  はそれぞれ整数, 有理数, 実数, 複素数全体の集合を表す。
- 何らかの族  $(x_i)_{i \in I}$  について、添字集合が明らかな場合は  $(x_i)_i$  や  $(x_i)$  のように略記することがある。
- $X$  を集合とする。たんに  $X$  の関数というときには、 $X$  上の複素数に値を取る写像とする。
- 差集合：集合  $X$  の元のうち  $A$  に属さないもの全体を  $X - A$  で表す。
- 球面： $S^{n-1} := \{x \in \mathbf{R}^n; \|x\| = 1\}$
- 第  $i$  射影：直積集合に対し第  $i$  成分を対応させる写像を  $\text{pr}_i: \prod_i X_i \rightarrow X_i$  とかく。
- 開近傍：距離  $d$  の定まっている空間  $X$  の点  $a$  に対して  $U_r(a) = \{x \in X; d(x, a) < r\}$  とかく。とくに平面の点  $P$  に対し  $\Delta_P := U_1(P)$  とかくことがある。
- ワイもや： $X$  と  $Y$  を位相空間とし  $f: X \rightarrow Y$  を連続写像とする。 $X$  の部分集合  $A$  が連結 (コンパクト) ならば  $f$  による像  $f(A)$  も連結 (コンパクト) である。この性質を ‘ワイもや’ と呼ぶ。
- 自己同形： $X$  を圏  $\mathcal{C}$  の対象とする。 $\text{Aut}_{\mathcal{C}}(X) := \{f: X \xrightarrow{\sim} X \text{ in } \mathcal{C}\}$  とおく。

# 1 複素関数論

複素関数論について復習する\*1.

**命題 1.1** ([3, 定義-命題 1.5]).  $U$  をガウス平面の領域 (連結開集合) とする.  $\varphi(z)$  を  $U$  上の複素数値関数とする. このとき, 次の条件 (1)–(3) は同値である\*2.

(1)  $\varphi(z)$  は  $U$  の各点で正則 (regular, holomorphic) すなわち,  $U$  の各点で極限值

$$\lim_{h \rightarrow a} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

が存在する.

(2)  $\varphi(z)$  は  $U$  の各点  $a$  の近傍でテイラー展開できる.

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi^{(n)}(a)}{n!} (z-a)^n$$

(3)  $U$  の各点  $a$  と  $a$  を中心とし  $U$  に含まれる任意の開円盤  $\Delta$  に対して,  $\varphi(z)$  と  $\varphi(z)$  の  $a$  を中心とするテイラー展開は  $\Delta$  で一致する.

**命題 1.2** ([3, 定義-命題 1.6]).  $U$  をガウス平面の領域 (連結開集合) とする.  $a$  を  $U$  の点とする.  $\varphi(z)$  を  $a$  を中心とするある開円盤  $\Delta_a$  から  $a$  を除いた集合  $\Delta_a - \{a\}$  上の正則関数とする. このとき, 次の条件 (1), (2) は同値である.

(1)  $\varphi(z)$  は  $a$  において高々極しかもたない.

(2)  $\varphi(z)$  は  $a$  においてローラン展開できる. つまり,  $a$  の適当な近傍  $W$  及び適当な整数  $k \geq 0$  と複素数列  $(a_n)_{n=-k}^{\infty}$  で,  $W - \{a\}$  で次が成り立つものが存在する.

$$\varphi(z) = \sum_{m=1}^k \frac{a_{-m}}{(z-a)^m} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n. \quad (1.1)$$

(1.1) の右辺第 2 項は正則である.  $k=0$  のときは右辺第 1 項は 0 であり,  $k>0$  のときは  $a_{-k} \neq 0$  であるとする.  $U$  の各点で高々極しかもたない  $U - R$  上の正則関数  $\varphi$  を  $U$  上の<sup>ゆうりけい</sup>有理形関数 (meromorphic function) という.

## 2 リーマン面

### 2.1 リーマン球面

$\mathbf{C}^2$  から原点  $0 = (0, 0)$  を除いた集合  $\mathbf{C}^2 - \{0\}$  の点  $(a_0, a_1), (b_0, b_1)$  に対し次の関係を考える.

\*1 複素関数論については例えば [6, 9, 4, 8] を参照.

\*2 正則関数の特徴づけについては, 例えば [4, 4.3 節] を参照.

$$(a_0, a_1) \sim (b_0, b_1) \iff (a_0, a_1) = c \cdot (b_0, b_1) \text{ となる複素数 } c \neq 0 \text{ が存在する.} \quad (2.1)$$

これは同値関係である.  $(a_0, a_1)$  の同値類  $\{c \cdot (a_0, a_1); c \in \mathbf{C} - \{0\}\}$  を  $[a_0 : a_1]$  とかく.

(2.1) が同値関係になることのチェック. (反射律)  $c = 1$  は  $(a_0, a_1) = 1 \cdot (a_0, a_1)$  をみたす.

(対称律) 複素数  $c \neq 0$  を  $(a_0, a_1) = c \cdot (b_0, b_1)$  をみたすものとする, 複素数  $c^{-1} \neq 0$  は  $(b_0, b_1) = c^{-1} \cdot (a_0, a_1)$  をみたす.

(推移律) 複素数  $c, c' \neq 0$  をそれぞれ  $(a_0, a_1) = c \cdot (b_0, b_1)$ ,  $(b_0, b_1) = c' \cdot (c_0, c_1)$  をみたすものとする. このとき複素数  $cc' \neq 0$  は

$$(a_0, a_1) = c \cdot (b_0, b_1) = cc' \cdot (c_0, c_1)$$

をみたす. □

同値関係  $\sim$  の定める商写像を用いて次の集合を定義する.

**定義 2.1.**  $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}) = (\mathbf{C}^2 - \{0\}) / \sim$  をリーマン球面 (Riemann sphere) という.  $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$  を  $\mathbf{P}_{\mathbf{C}}^1$  とか  $\mathbf{P}^1$  ともかく<sup>\*3</sup>.

$\mathbf{P}^1$  の任意の点  $P$  は  $[a_0 : a_1]$  の形に表せる. 実際,  $P$  を  $\mathbf{P}^1$  の点とすると,  $\mathbf{P}^1$  の定義より,  $(a_0, a_1) \in \mathbf{C}^2 - \{0\}$  で  $P = \pi(a_0, a_1) = [a_0 : a_1]$  となるものが存在する.

また,  $[a_0 : a_1] = [b_0 : b_1]$  となるのは,  $a_0 : a_1 = b_0 : b_1$  となるときである. 実際,

$$\begin{aligned} [a_0 : a_1] = [b_0 : b_1] &\iff (a_0, a_1) \in [b_0 : b_1] \\ &\iff (a_0, a_1) \sim (b_0, b_1) \\ &\iff (a_0, a_1) = c(b_0, b_1) \text{ for some } c \neq 0 \\ &\iff a_0 = cb_0, a_1 = cb_1 \text{ for some } c \neq 0 \\ &\iff a_0 : b_0 = a_1 : b_1 \\ &\iff a_0 b_1 = a_1 b_0 \\ &\iff a_0 : b_1 = b_0 : b_1 \end{aligned}$$

である.

**定義 2.2.** 次の写像の組を考える.  $\mathbf{C}^2 - \{0\} \xrightarrow[\text{pr}_2=X_1]{\text{pr}_1=X_0} \mathbf{C}; (a_0, a_1) \mapsto a_0, a_1$ . この組を  $\mathbf{C}^2 - \{0\}$  の標準座標,  $\mathbf{P}^1$  の同次座標という.

$P \in \mathbf{P}^1$  を代表する  $\mathbf{C}^2 - \{0\}$  の点  $\tilde{P}$  の標準座標の値  $(a_0, a_1)$  が  $P$  の同次座標の値である. なお,  $P$  に対する  $\tilde{P}$  の取り方, すなわち  $(a_0, a_1)$  の取り方には任意性がある.

$\mathbf{P}^1$  は商写像  $\pi: \mathbf{C}^2 - \{0\} \longrightarrow (\mathbf{C}^2 - \{0\}) / \sim$  による商位相により位相空間になる. この定義から  $\pi$  の連続性が従う.

---

<sup>\*3</sup>トポロジストは  $\mathbf{CP}^1$  等と書くらしい.

$\mathbf{P}^1$  の位相空間としての性質を調べるために、次の部分集合を定義する。

$$U_0 = \{[a_0 : a_1] \in \mathbf{P}^1; a_0 \neq 0\},$$

$$U_1 = \{[a_0 : a_1] \in \mathbf{P}^1; a_1 \neq 0\}.$$

このとき次が成り立つ。

$$U_0 \cup U_1 = \mathbf{P}^1, \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} U_0 \cap U_1 &= \{[a_0 : a_1] \in \mathbf{P}^1; a_0, a_1 \neq 0\} \\ &= U_0 - \{[1 : 0]\} \\ &= U_1 - \{[0 : 1]\}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

**補題 2.3.** 1. 商写像  $\pi: \mathbf{C}^2 - \{0\} \rightarrow (\mathbf{C}^2 - \{0\})/\sim$  は開写像である。

2.  $U_0$  と  $U_1$  は  $\mathbf{P}^1$  の開集合であり、

$$\varphi_0: U_0 \xrightarrow{\sim} \mathbf{C}; [a_0 : a_1] \mapsto a_1/a_0,$$

$$\varphi_1: U_1 \xrightarrow{\sim} \mathbf{C}; [a_0 : a_1] \mapsto a_0/a_1$$

はともに同相写像である。

3. 任意の  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in GL(2, \mathbf{C})$  は自己同相写像

$$p_A: \mathbf{P}^1 \xrightarrow{\sim} \mathbf{P}^1; \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix}$$

を引き起こす。

4.  $\mathbf{P}^1$  は第 2 可算公理をみたす連結なコンパクトハウスドルフ空間である。

**証明.** 1.  $U$  を  $\mathbf{C}^2 - \{0\}$  の開集合とする。  $\pi(U)$  が  $\mathbf{P}^1$  の開集合であること、すなわち  $\pi^{-1}(\pi(U))$  が  $\mathbf{C}^2 - \{0\}$  の開集合であることを示す。いま、任意の開集合  $U \subset \mathbf{C}^2 - \{0\}$  に対し、複素数  $c \neq 0$  を用いて

$$cU = \{(ca_0, ca_1); (a_0, a_1) \in \mathbf{C}^2 - \{0\}\}$$

とおくと、 $cU$  は  $\mathbf{C}^2 - \{0\}$  の開集合であり、

$$\pi^{-1}(\pi(U)) = \bigcup_{c \in \mathbf{C} - \{0\}} cU \quad (*)$$

なので、 $\pi^{-1}(\pi(U))$  は  $\mathbf{C}^2 - \{0\}$  の開集合である。

2. まず  $U_0, U_1$  が  $\mathbf{P}^1$  の開集合であることを示す。  $U_0 = \{[a_0 : a_1]; a_0 \neq 0\}$  は  $V_0 = \{(a_0, a_1); a_0 \neq 0\}$  の  $\pi$  による像であり、 $V_0$  は  $\mathbf{C}^2 - \{0\}$  の開集合であるから、 $U_0$  は  $\mathbf{P}^1$  の開集合である。同様に  $U_1$  も  $\mathbf{P}^1$  の開集合である。

$\varphi_0: U_0 \rightarrow \mathbf{C}$  が連続であることを示す.  $V$  を  $\mathbf{C}$  の開集合とする.  $V = \varphi_0 \circ \pi(V_0) (= \widetilde{\varphi_0}(V_0))$  とおく) である.  $\widetilde{\varphi_0}^{-1}(V) = \pi^{-1}(\varphi_0^{-1}(V))$  は  $V_0$  の開集合である. したがって, これは  $\mathbf{C}^2 - \{0\}$  の開集合であり, 商位相の定義から  $\varphi_0^{-1}(V) \subset U_0$  は開集合である.

$$\begin{array}{ccc} V_0 & & \\ \pi \downarrow & \searrow \widetilde{\varphi_0} & \\ U_0 & \xrightarrow{\varphi_0} & V \end{array}$$

$\varphi_0$  が同相であることを示す.  $\psi_0: \mathbf{C} \rightarrow U_0$  を  $\psi_0(z) = [1: z]$  で定める. このとき  $\psi_0 \circ \varphi_0([a_0: a_1]) = \psi_0(a_1/a_0) = [1: a_1/a_0] = [a_0: a_1]$  である. また  $\varphi_0 \circ \psi_0(z) = \varphi_0([1: z]) = z/1 = z$ . したがって,  $\psi_0 \circ \varphi_0 = \text{id}_{U_0}$  かつ  $\varphi_0 \circ \psi_0 = \text{id}_{\mathbf{C}}$  であり,  $\psi_0 = \varphi_0^{-1}$  である.  $\psi_0 = \varphi_0^{-1}$  は自然な単射  $\mathbf{C} \hookrightarrow \mathbf{C}^2 - \{0\}$  と  $\pi$  の合成であり, これらは連続なので, その合成である  $\psi_0$  も連続である. 以上より  $\varphi_0$  は同相である.

3.  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  を可逆な行列とする.  $A$  を自己同形  $\mathbf{C}^2 \rightarrow \mathbf{C}^2$  とみたとき, それを  $\mathbf{C}^2 - \{0\}$  に制限した  $A|_{\mathbf{C}^2 - \{0\}}: \mathbf{C}^2 - \{0\} \rightarrow \mathbf{C}^2 - \{0\}$  は自己同相であり, 逆写像は  $A^{-1}|_{\mathbf{C}^2 - \{0\}}$  で与えられる. 一般に  $A(cx) = cAx$  なので,  $A$  から可逆な写像  $p_A$  が不備なく定まり, 逆写像は  $p_{A^{-1}}$  で与えられる.

$p_A$  が連続であることを示す.  $V$  を  $\mathbf{P}^1$  の開集合とする. 次の図式が可換であり,  $\pi$  と  $A$  は連続写像であるから,  $\pi^{-1}(p_A^{-1}(V)) = A^{-1}(\pi^{-1}(V))$  は  $\mathbf{C}^2 - \{0\}$  の開集合である.

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{C}^2 - \{0\} & \xrightarrow{A} & \mathbf{C}^2 - \{0\} \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ \mathbf{P}^1 & \xrightarrow{p_A} & \mathbf{P}^1 \end{array}$$

$\mathbf{P}^1$  の商位相の定義より  $\pi^{-1}(V)$  は  $\mathbf{P}^1$  の開集合である. したがって  $p_A$  で連続である.  $p_A^{-1}$  が連続であることも同様である.

4. 第2可算公理をみたすこと:

$$\mathbf{Q}(\sqrt{-1}) = \{a + b\sqrt{-1}; a, b \in \mathbf{Q}\}$$

に属する点  $z$  と有理数  $p$  に対し  $U_p(z)$  を考えると  $(U_p(z))_{p \in \mathbf{Q}, z \in \mathbf{C}}$  は  $\mathbf{C}$  の位相空間としての基底になる. したがって  $\mathbf{C}$  は第2可算公理をみたす. 直積集合  $\mathbf{C}^2$  も第2可算であるから, 1点を除いた  $\mathbf{C}^2 - \{0\}$  もそうであり, これに全射  $\pi$  を適用した  $\mathbf{P}^1$  も第2可算公理をみたす.

連結かつコンパクトであること:  $S^3 = \{P = (a_0, a_1) \in \mathbf{C}^2; |a_0|^2 + |a_1|^2 = 1\} \subset \mathbf{C}^2 - \{0\}$  であり,  $\mathbf{C} - \{0\}$  の相対位相により,  $S^3$  は有界閉集合つまりコンパクト集合であり, 連結である. 全射連続写像  $\pi|_{S^3}: S^3 \rightarrow \mathbf{P}^1$  により ‘ワイモヤ’ で  $\mathbf{P}^1$  は連結かつコンパクト.  $\pi|_{S^3}$  が全射であることは

$$[a_0 : a_1] = \left[ \frac{a_0}{\sqrt{a_0^2 + a_1^2}} : \frac{a_1}{\sqrt{a_0^2 + a_1^2}} \right]$$

であることからしたがう.

ハウスドルフであること:  $P \neq Q$  を  $\mathbf{P}^1$  の点とする.  $p: GL(2, \mathbf{C}) \rightarrow \text{Aut}_{\text{Top}}(\mathbf{P}^1)$  は全射. したがって,  $U_0 \subset \mathbf{P}^1$  から, 任意の  $p_A \in \text{Aut}_{\text{Top}}(U_0)$  に対し  $A \in GL(2, \mathbf{C})$  が存在する. つまり  $p_A(P), p_A(Q) \in U_0$  となる  $A \in GL(2, \mathbf{C})$  が存在する.  $U_0 \cong \mathbf{C}$  であり  $\mathbf{C}$  はハウスドルフなので,  $p_A(P)$  の開近傍  $U_P$  と  $p_A(Q)$  の開近傍  $U_Q$  で  $U_P \cap U_Q = \emptyset$  をみたすものが存在する.  $U_P$  と  $U_Q$  は  $U_0 \subset \mathbf{P}^1$  の開集合であり,  $p_A$  が同相なので  $p_A^{-1}(U_P), p_A^{-1}(U_Q)$  は  $\mathbf{P}^1$  における  $P, Q$  の開近傍で  $p_A^{-1}(U_P) \cap p_A^{-1}(U_Q) = \emptyset$  をみたす. よって  $\mathbf{P}^1$  はハウスドルフである.  $\square$

**注意 2.4** ((\*) の幾何的イメージ). この等式については次の図 1 を見ると理解しやすい. いま, 簡

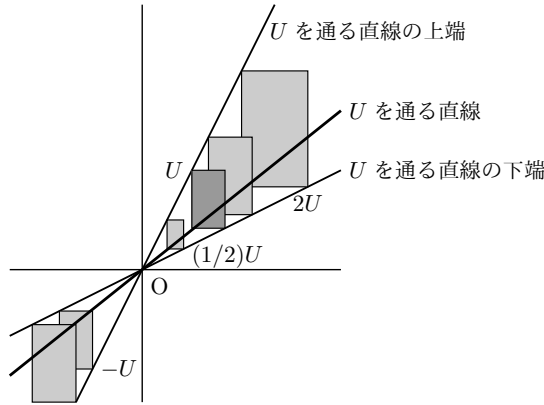


図 1 商写像の逆像 1

単のため  $\mathbf{R}^2$  の部分集合  $U$  について考える.  $\pi(U)$  は  $U$  を通る直線たちの集合である. 像が  $\pi(U)$  となるようなもの, つまり  $\pi^{-1}(\pi(U))$  は  $U$  を  $c$  倍に拡大・縮小したもの全体である. したがって

$$\begin{aligned} \pi^{-1}(\pi(U)) &= (U \text{ を射影したものと同じところに行くもの}) \\ &= (U \text{ を } c \text{ 倍に拡大したもの全て}) \\ &= \bigcup_{c \in \mathbf{R} - \{0\}} cU \end{aligned}$$

のようになり,  $\mathbf{C}^2$  の場合には (\*) が成り立つ.

次のような場合も見ておくと複素トーラスの導入のときなどに役立つ.

$$\pi: \mathbf{R} \twoheadrightarrow \mathbf{R}/\mathbf{Z}; x \mapsto x \pmod{\mathbf{Z}}$$

を考える. これは図 2 の上の直線を螺旋状に巻いて潰し, 1 次元トーラスにしたものである.

この場合は次のようになる.

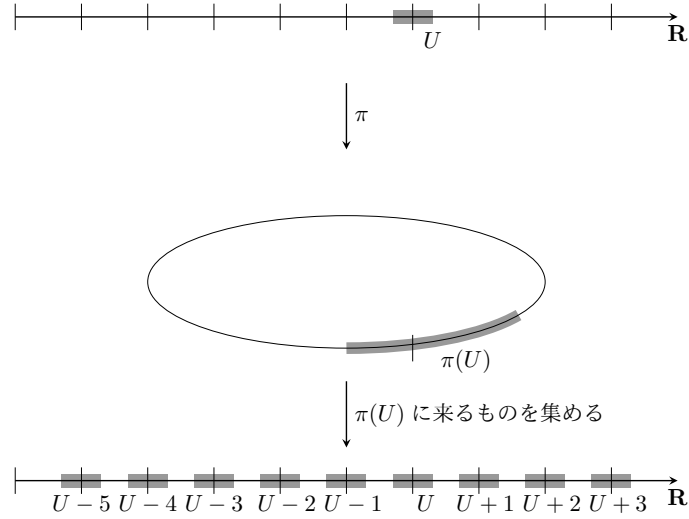


図2 商写像の逆像2

$$\begin{aligned}
 \pi^{-1}(\pi(U)) &= (U \text{ を射影したものと同じところに行くもの}) \\
 &= (U \text{ を整数分だけずらしたものの全て}) \\
 &= \bigcup_{n \in \mathbf{Z}} (U + n).
 \end{aligned}$$

## 2.2 貼りあわせ関数

補題 2.3.2 から  $\varphi_0: U_0 \xrightarrow{\sim} \mathbf{C}$ ,  $\varphi_1: U_1 \xrightarrow{\sim} \mathbf{C}$  である. ここで,  $\varphi_0(U_0)$  の標準座標を  $w$ ,  $\varphi_1(U_1)$  の標準座標を  $z$  で表すことにする<sup>\*4</sup>. 定義 2.2 のようにかくと

$$\begin{aligned}
 z: \varphi_1(U_1) = \mathbf{C} &\rightarrow \mathbf{C}; (a) \mapsto a \\
 w: \varphi_0(U_0) = \mathbf{C} &\rightarrow \mathbf{C}; (b) \mapsto b
 \end{aligned}$$

のようになる. 複素数の一つ組に対し第一成分を対応させるということである. これによって点  $(a)$  と座標値  $z(a)$  を同一視し, 点を単に  $z$  と書いたりする. ガウス平面  $\mathbf{C}$  に, そこでの標準座標をつけて  $\mathbf{C}_z$ ,  $\mathbf{C}_w$  のように表すと,  $\mathbf{C}_w \subset \mathbf{P}^1$ ,  $\mathbf{C}_z \subset \mathbf{P}^1$  とみなせる. 例えば  $\mathbf{C}_z$  の点  $1 + \sqrt{-1}$  は  $\mathbf{P}^1$  では

$$\varphi_1^{-1}(1 + \sqrt{-1}) = [1 + \sqrt{-1}: 1]$$

であり  $\mathbf{C}_w$  の点  $1/(1 + \sqrt{-1})$  は  $\mathbf{P}^1$  では

$$\varphi_0^{-1}\left(\frac{1}{1 + \sqrt{-1}}\right) = \left[1: \frac{1}{1 + \sqrt{-1}}\right] = [1 + \sqrt{-1}: 1]$$

<sup>\*4</sup>全くの余談だが  $w$  を ‘オメガ’ と見間違える人が多いので 2 つとも並べておく.  $w$  が ‘ダブルユー’ で,  $\omega$  が ‘オメガ’ である. 関係あるのかどうかは不明だが,  $w$  はドイツ語で ‘値’ を意味する ‘Wert’ の頭文字である. ちなみに  $\varpi$  は ‘オメガバー’ ではなく ‘パイ’ である (TeX では `\varpi` と入力する).

である．本節では， $\mathbf{C}_z$  と  $\mathbf{C}_w$  の間の関係を調べる．

いまの  $1 + \sqrt{-1}$  の例を見ると

$$z = \frac{1}{w} \quad (2.4)$$

の関係が成り立っているようである．他の例も見る．例えば点  $[2: 1]$  と点  $[1: 1/2]$  は  $\mathbf{P}^1$  では同じものである．これらをそれぞれ  $\varphi_1, \varphi_0$  で  $\mathbf{C}_z, \mathbf{C}_w$  の点とみなすと座標値は  $z = 2$  と  $w = 1/2$  である．したがって  $z = 1/w$  が成り立つ．

$z = 0$  のときはうまくいかない． $[z: 1] = [1: 1/z] = [1: w]$  のようにして  $w = 1/z$  となるものを見つけたいが  $w = 1/0$  となってしまう不合理である． $w = 0$  のときも同様である．そもそも  $\varphi_0$  は  $U_0$  上で定義されており， $z = 0$  となる  $[0: 1]$  のような点に対しては  $w$  の値は定まっていない．つまり，関係式 (2.4) が成り立つためには  $z$  も  $w$  も 0 でないことが必要である．逆に  $z$  と  $w$  のどちらも 0 でなければ，関係式 (2.4) が成り立つ．

$z, w \neq 0$  は (2.3) より  $[z: w] \in U_0 \cap U_1$  ということである． $[z: w] \in U_0 \cap U_1$  のとき  $z$  は  $w$  の正則関数になっている． $\varphi_0(U_0 \cap U_1) = \mathbf{C}_w - \{0\} = \mathbf{C}_w \cap \mathbf{C}_z = \mathbf{C}_z - \{0\} = \varphi_1(U_0 \cap U_1)$  なので，この正則関数を  $\varphi_{10}: \mathbf{C}_w - \{0\} = \varphi_0(U_0 \cap U_1) \rightarrow \mathbf{C}_z - \{0\} = \varphi_1(U_0 \cap U_1)$  とかくことにすると，次の図式が可換になる．

$$\begin{array}{ccc} U_0 \cap U_1 & \xrightarrow{[1: w]=[z: 1]} & U_0 \cap U_1 \\ \uparrow \varphi_0^{-1} & & \downarrow \varphi_1 \\ \mathbf{C}_w - \{0\} & \xrightarrow{\varphi_{10}} & \mathbf{C}_z - \{0\} \end{array}$$

つまり， $\varphi_{10} = \varphi_1 \circ \varphi_0^{-1}$  である．この正則関数を貼りあわせ関数と呼ぶ．また， $\varphi_{01} = \varphi_0 \circ \varphi_1^{-1}: \varphi_1(U_0 \cap U_1) \rightarrow \varphi_0(U_0 \cap U_1)$  も  $w = 1/z$  として同様に定まる．これは正則であり  $\varphi_{10}$  の逆関数でもある．

### 2.3 複素多様体とリーマン面

$\mathbf{C}^n$  での座標が  $z = (z^1, \dots, z^n)$  であるとき複素数空間  $\mathbf{C}^n$  を  $\mathbf{C}_z^n$  とか  $\mathbf{C}_{(z^1, \dots, z^n)}^n$  とかく． $\mathcal{U}$  を  $\mathbf{C}^n$  の空でない開集合とする．このとき， $\mathcal{U}$  で定義された複素数値関数  $f$  は標準座標を用いて  $f(z) = f(z^1, \dots, z^n)$  とかける．

$f$  が  $\mathcal{U}$  で正則であるとは，次の条件 (1), (2) のどちらかをみたすことをいう．（これらは同値．）

- (1)  $f(z)$  は  $\mathcal{U}$  で連続であり，各変数  $z^j$  ( $j = 1, \dots, n$ ) について正則である．
- (2)  $\mathcal{U}$  の各点  $a = (a^1, \dots, a^n)$  に対して，関数  $f(z)$  は  $a$  の近傍で収束巾級数

$$f(z) = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} c_{\alpha_1 \dots \alpha_n} (z^1 - a^1)^{\alpha_1} \dots (z^n - a^n)^{\alpha_n}$$

で表される．



**定義 2.5** ( $n$  次元複素多様体 [3, 定義 4.1]).  $X$  を位相空間とする.  $(\varphi_i: U_i \rightarrow \mathcal{U}_i)_{i \in I}$  を写像の族とする. このとき, 対  $(X, (\varphi_i)_i)$  が次の条件 (1)–(4) をみたすとき,  $X$  を台集合とし  $(\varphi_i)_i$  を座標近傍系とする  $n$  次元複素多様体 ( $n$ -dimensional complex manifold) という.

- (1)  $X$  は空集合でなく, 第 2 可算公理を満たす連結なハウスドルフ空間である\*5.
- (2) すべての  $i \in I$  に対して  $U_i$  は  $X$  の空でない開集合であり,  $(U_i)_i$  は  $X$  の開被覆である.
- (3) すべての  $i \in I$  に対して,  $\mathcal{U}_i$  は  $\mathbf{C}_{(z^1, \dots, z^n)}^n$  の空でない開集合であり  $\varphi_i: U_i \rightarrow \mathcal{U}_i$  は同相である.
- (4) 任意の  $i \neq j \in I$  で  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$  をみたすものに対して  $\mathcal{U}_{ij} := \varphi_j(U_i \cap U_j) \subset \mathcal{U}_j$  とおくと,  $\varphi_{ij} := \varphi_i \circ \varphi_j^{-1}|_{\mathcal{U}_{ij}}: \mathcal{U}_{ij} \rightarrow \mathcal{U}_{ji}$  は正則である.

**例 2.6.** 1.  $\mathbf{C}^n$  の領域  $\mathcal{U}$  は  $(\text{id}_{\mathcal{U}}: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U})$  を座標近傍系とする  $n$  次元複素多様体である.

2.  $X = (X, (\varphi_i: U_i \rightarrow \mathcal{U}_i)_{i \in I})$  を  $n$  次元複素多様体とし,  $U$  を  $X$  の領域とする.  $J := \{i \in I; U \cap U_i \neq \emptyset\}$  とおく.  $U$  は  $(\varphi_j|_{U \cap U_j})_{j \in J}$  を座標近傍系とする  $n$  次元複素多様体になる. この多様体  $U$  を開部分 (複素) 多様体という.

1 次元複素多様体をリーマン面 (Riemann surface) という.

**命題 2.7.** リーマン球面  $\mathbf{P}^1$  はリーマン面である.

**証明.** (1) 補題 2.3.4 からしたがう.

(2) (2.2) と (2.3) からしたがう.

(3) 補題 2.3.2 からしたがう.

(4) 2.2 節で説明した. □

$\mathbf{P}^1$  のような, 台空間がコンパクトなリーマン面をとくにコンパクトリーマン面という. 例 2.6.2 のように, リーマン面  $X$  の領域  $U$  はリーマン面になる. この  $U$  を  $X$  開リーマン面という.

**定義 2.8.**  $X$  を  $n$  次元複素多様体,  $Y$  を  $m$  次元複素多様体とする.  $f: X \rightarrow Y$  を  $X$  から  $Y$  への連続写像とする.

1.  $P$  を  $X$  の点とする.  $P, f(P)$  の近傍での  $f$  のある座標表示  $w_j = f_{ij}(z_i)$ , きちんと書くと  $(w_j^1, \dots, w_j^m) = (f_{ij}^1(z_i^1, \dots, z_i^n), \dots, f_{ij}^m(z_i^1, \dots, z_i^n))$  が  $z_i(P) = (z_i^1(P), \dots, z_i^n(P))$  で正則であるとき,  $f$  は  $P$  で正則であるという.

2.  $f$  がすべての点  $\in X$  で正則であるとき  $f$  を正則写像 (holomorphic mapping) とか正則射 (holomorphism) という. また  $\mathbf{C}$  への正則写像を正則関数 (holomorphic function) という.

3.  $U$  を  $X$  の空でない開集合とする.  $U$  上の関数  $f$  は  $U$  の各連結成分上正則であるとき  $U$  上の正則関数という. ここで, 複素多様体の領域は例 2.6.2 の方法で複素多様体とみなしている.

**定義 2.9.**  $X$  と  $Y$  を  $n$  次元複素多様体とする.  $f: X \rightarrow Y$  を正則写像とする. 正則写像  $g: Y \rightarrow X$  で  $g \circ f = \text{id}_X$  かつ  $f \circ g = \text{id}_Y$  をみたすものが存在するとき,  $f$  を双正則写像

---

\*5 条件 (1) のうち第 2 可算と連結を課さないことも多い ([5] など).

(biholomorphic mapping) とか双正則射 (biholomorphism) という.  $X$  から  $Y$  への双正則写像が存在するとき,  $X$  と  $Y$  は同形 (isomorphic) とか双正則同値 (biholomorphically equivalent), またはたんに双正則 (biholomorphic) であるという.

正則写像の合成は正則写像であり, 恒等写像  $\text{id}$  は正則である. これらは結合則と単位則をみたす. したがって  $\{\text{リーマン面}\}$ , より一般に  $\{n\text{次元複素多様体}\}$  は正則写像を射とする圏になる.

### 3 1次元における諸結果

#### 3.1 リーマン球面上の正則写像と等質性

$\mathbf{P}^1$  から  $\mathbf{P}^1$  への写像はそれぞれ 2 枚の局所座標系を用いて  $z, w$  と  $t, s$  により表示できる.

**補題 3.1** ([3, 補題 1.12]).  $z$  の有理関数  $t = g(z)$  は  $\mathbf{P}^1$  から  $\mathbf{P}^1$  への正則写像  $\tilde{g}$  に一意に延長される.

**証明.** (一意性)  $g: \mathbf{C}_z \rightarrow \mathbf{C}_t$  に対し  $\tilde{g}: \mathbf{P}^1 \rightarrow \mathbf{P}^1$  が存在したとする.  $\tilde{g}$  の座標表示はいずれも  $s = 1/t, w = 1/z$  を用いて得られる.  $g$  に対してもう一つの正則関数  $\tilde{g}'$  があっても,  $\mathbf{C}_z$  では  $\tilde{g}_{t,z} = g(z) = \tilde{g}'_{t,z}$  が成り立つから, 有理関数  $\mathbf{P}^1 \rightarrow \mathbf{C}_t$  の剛性より  $\tilde{g} = \tilde{g}'$ .

(存在)  $t = g(z)$  に  $z = 1/w$  を代入して  $t = g(1/w)$ . これを  $g(z)$  と貼りあわせて  $\mathbf{P}^1 = \mathbf{C}_z \cup \mathbf{C}_w$  上の有理関数  $\tilde{g}$  を定めることができる.  $\tilde{g}$  が  $\mathbf{P}^1$  から  $\mathbf{P}^1$  への正則写像になることを示す.  $P$  を  $\mathbf{P}^1$  の点とする.  $\tilde{g}$  が  $P$  で極をもつとき,  $\tilde{g}(P) = [1: 0]$  とする.  $\lim_{Q \rightarrow P} \tilde{g}(Q) = \infty$  なので  $\tilde{g}$  は  $P$  で連続である. これにより  $\tilde{g}$  は  $\mathbf{P}^1$  から  $\mathbf{P}^1$  への連続写像となる.  $P \in \mathbf{C}_z$  のとき  $\tilde{g}$  は  $P$  の近傍で  $s = 1/g(z)$  とかける.  $1/g(z(P)) = 0$  であり,  $a(z)$  は  $z(P)$  で正則である. 同様に  $z, w, t, s$  の全ての座標で正則であることがわかる.  $P$  で極をもたなければ  $\tilde{g}$  は正則である. よって  $\tilde{g}$  は  $\mathbf{P}^1$  から  $\mathbf{P}^1$  への正則写像である.  $\square$

**補題 3.2** (リーマン球面の等質性 [3, 補題 1.13]).  $A \in GL(2, \mathbf{C})$  のとき  $p_A \in \text{Aut}_{\text{リーマン面}}(\mathbf{P}^1)$ . また,  $\mathbf{P}^1$  の任意の 2 点  $P, Q$  に対し,  $p_A(P) = Q$  となる  $A \in GL(2, \mathbf{C})$  が存在する.

**証明.**  $P = [a_0: a_1], Q = [a'_0: a'_1]$  とおく.  $\mathbf{P}^1$  の定義より,  $(a_0, a_1), (a'_0, a'_1 \in \mathbf{C}^2)$  はどちらも  $(0, 0)$  ではない. したがって可逆な行列  $A \in GL(2, \mathbf{C})$  で  $A \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a'_0 \\ a'_1 \end{bmatrix}$  となるものが存在する. この  $A$  に対し  $p_A(P) = Q$  が成り立つ.  $\square$

#### 3.2 リーマンロッホの定理

次はリーマンロッホの定理の特殊な場合である.

**定理 3.3** ([3, 命題 1.14]).  $P_1, \dots, P_m$  を  $\mathbf{P}^1$  の互いに相異なる点とする.  $\mathbf{P}^1$  上の有理関数で各

$P_i$  のみで高々  $n_i$  の極をもつもの全体

$$\Gamma\left(\mathbf{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}\left(\sum_{i=1}^m n_i P_i\right)\right)$$

は関数の和とスカラー倍によって  $\mathbf{C}$  ベクトル空間を成す．さらにその空間の次元は次で与えられる．

$$\dim \Gamma\left(\mathbf{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}\left(\sum_{i=1}^m n_i P_i\right)\right) = 1 + \sum_{i=1}^m n_i.$$

証明．関数の和は局所的に  $\sum_j a_j(z-p_i)^j + \sum_j b_j(z-p_i)^j = \sum_j (a_j + b_j)(z-p_i)^j$  と表示すればよく，スカラー倍も  $c\left(\sum_j a_j(z-p_i)^j\right) = \sum_j ca_j(z-p_i)^j$  とすればよい．零元は恒等的に 0 である関数である．

次元についての等式を示す． $N = \sum_{i=1}^m n_i$  とおく． $\mathbf{P}^1$  の等質性から，どの  $i = 1, \dots, m$  に対しても  $P_i \in \mathbf{C}_z$  であるとしてよい．このとき  $P_i$  を  $z$  座標を用いて  $a_i = z(P_i)$  と表示する． $f \in \Gamma(\mathbf{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\sum_{i=1}^m n_i P_i)) - \{0\}$  とすると  $f$  は  $z$  の有理関数  $f(z) \in \mathbf{C}(z)$  を延長したものである． $(\Gamma(\mathbf{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\sum_{i=1}^m n_i P_i)) - \{0\}) \subset \mathcal{M}_{\mathbf{P}^1}(\mathbf{P}^1) \cong \mathbf{C}(z)$ ． $f$  は  $a_i$  で高々  $n_i$  の極しか持たないから  $g(z) := (z-a_1)^{n_1} \dots (z-a_m)^{n_m} f(z)$  は  $\mathbf{C}_z$  で正則である． $g$  は有理関数  $f$  の分数を払ったものなので多項式関数である．したがって，

$$f(z) = \frac{b_0 z^l + \dots + b_l}{(z-a_1)^{n_1} \dots (z-a_m)^{n_m}}, \quad b_0 \neq 0 \quad (3.1)$$

とかける． $P_i \in \mathbf{C}_z$  としたので， $z = \infty$  で  $f$  は極を持たない．よって  $w = 0$  で

$$\begin{aligned} f_w(w) = f\left(\frac{1}{w}\right) &= \frac{b_0/w^l + \dots + b_l}{(1/w - a_1)^{n_1} \dots (1/w - a_m)^{n_m}} \\ &= \frac{b_0 w^{N-l} + \dots + b_l w^N}{(1 - a_1 w)^{n_1} \dots (1 - a_m w)^{n_m}} \\ &= w^{N-l} \frac{b_0 + \dots + b_l w^l}{(1 - a_1 w)^{n_1} \dots (1 - a_m w)^{n_m}} \end{aligned}$$

となる．右の分数は  $w = 0$  で正則であり  $b_0 \neq 0$  なので， $w = 0$  で  $f_w(w) \neq 0$ ． $f$  が  $w = 0$  で極でないのは  $l \leq N$  のときである．

逆に  $l \leq N$  のとき， $f$  で (3.1) の形になるものは  $\Gamma(\mathbf{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\sum_{i=1}^m n_i P_i))$  の元で  $w = 0$  で極でないものである．よって， $\Gamma(\mathbf{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\sum_{i=1}^m n_i P_i))$  の元は

$$f_k(z) = \frac{z^k}{(z-a_1)^{n_1} \dots (z-a_m)^{n_m}}$$

の 1 次結合でかける． $f_0, \dots, f_m$  は 1 次独立であるから

$$\dim \Gamma \left( \mathbf{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1} \left( \sum_{i=1}^m n_i P_i \right) \right) = 1 + N = 1 + \sum_{i=1}^m n_i.$$

□

## 4 コンパクトリーマン面

### 4.1 コンパクトリーマン面の間の正則写像

**補題 4.1** ([3, 問題 2.8]). コンパクト集合の離散部分集合は有限集合である. ただし, 位相空間  $X$  の部分集合  $R$  が離散集合であるとは,  $X$  の任意の点  $P$  に対して,  $R \cap U_P \subset \{P\}$  である  $P$  の近傍  $U_P$  が存在することをいう.

**証明.**  $R$  を  $X$  の離散部分集合とする.  $X$  の任意の点  $P$  に対して,  $R \cap U_P \subset \{P\}$  である  $P$  の近傍  $U_P$  が存在するので, これを用いて  $X = \bigcup_{P \in X} U_P$  とすると,  $X$  はコンパクトなので有限個の  $P_1, \dots, P_n$  で  $X = U_{P_1} \cup \dots \cup U_{P_n}$  とかける. いま

$$R = R \cap X = R \cap (U_{P_1} \cup \dots \cup U_{P_n}) = (R \cap U_{P_1}) \cup \dots \cup (R \cap U_{P_n}) \subset \{P_1\} \cup \dots \cup \{P_n\}$$

が成り立っている.  $S = \{P_1\} \cup \dots \cup \{P_n\}$  は有限集合なので  $S$  の部分集合である  $R$  も有限集合である. □

**定理 4.2** ([3, 定理 2.18]).  $X$  と  $Y$  をリーマン面とする.  $f: X \rightarrow Y$  を定値でない正則写像とする.  $P$  を  $X$  の点とし  $f(P) = Q$  とおく. このとき  $P$  と  $Q$  の局所座標系

$$t: U_P \rightarrow \Delta_P, \quad s: V_P \rightarrow \Delta_Q$$

と自然数  $n \geq 1$  で,  $f$  の座標表示が  $s = t^n$  となるものが存在する. とくに  $f$  は開写像である.

**証明.**  $P, Q$  の局所座標系を  $T, S$  とする. このとき  $P$  の近くで定義された  $f$  の座標表示  $f_T(T)$  で  $S = f_T(T)$  と  $0 = f_T(0)$  をみたすものが存在する.  $S = f_T(T)$  は正則である.  $f$  は大域的に定値でないと仮定したので,  $f_T(T)$  は関数として 0 でない. したがって,  $f_T(T) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n T^n$  とかくとき,  $a_0 = 0$  であり, 自然数  $m \geq 1$  で  $a_m \neq 0$  となる最小のものが存在する. この  $m$  に対し,  $a_m T^m + a_{m+1} T^{m+1} + \dots = T^m (a_m + a_{m+1} T + \dots)$  とかくと,  $U(0) \neq 0$  となる正則関数  $U(T)$  で  $S = T^m U(T) = f_T(T)$  と表せる.  $U(0) \neq 0$  から,  $|T|$  が十分小さいとき,  $\mathbf{C}$  内の半平面  $\mathcal{H}$  で  $U(0) \in \mathcal{H}$  かつ  $0 \notin \mathcal{H}$  となるものが存在する. したがって,  $U(T)$  の  $n$  乗根の偏角を一価かつ連続に指定することができる. すなわち  $U(T)^{\frac{1}{n}}$  の 1 つを正則な一価関数として定めることができる.  $t = TU(T)^{\frac{1}{n}}$  とおく.  $U(0)^{\frac{1}{n}} \neq 0$  なので  $t$  も  $P$  での局所座標となる.  $s = S$  とすると,  $t$  と  $s$  に関する  $f$  の局所座標表示は  $s = t^n$  となる.  $t$  に対し  $t^n$  を対応させる写像は,  $U_r(0)$  を  $U_{r^n}(0)$  にうつす. これらを適当に拡大・縮小すれば単位円盤になる. □

**定理 4.3** ([3, 定理 2.22]).  $X$  をコンパクトリーマン面とし,  $Y$  をリーマン面とする.  $f: X \rightarrow Y$  を正則写像とする. このとき,  $f$  は定数写像であるか全射であるかのどちらか一方である. また,  $Y$  がコンパクトでなければ  $f$  は定数写像となる.

**証明.**  $f$  が定数写像でないとすると  $f$  は開写像である.  $X$  は開集合なので, 像  $f(X) \subset Y$  は開集合である. また,  $X$  はコンパクトかつ  $Y$  はハウスドルフである. 一般に, コンパクト空間  $A$  からハウスドルフ空間  $B$  への連続写像  $g$  に対し,  $g(A)$  は  $B$  の閉集合となるのだった. いま  $f$  は連続なので,  $f(X) \subset Y$  は閉集合である.  $X$  は空ではないので  $f(X)$  も空でない.  $Y$  は連結なので  $f(X) = Y$  である. したがって  $f$  は全射. またこのとき, ‘ワイもや’ で  $Y$  はコンパクトである.

いま,  $f$  が定数写像でないなら  $Y$  がコンパクトであることがいえたので, 対偶をとって,  $Y$  がコンパクトでないなら  $f$  が定数写像であることもわかった.  $\square$

## 4.2 代数学の基本定理

**定理 4.4** (代数学の基本定理 [3, 系 2.24]).  $n \geq 1$  を自然数とする. 複素数を係数とする  $n$  次方程式

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n = 0, \quad a_0 \neq 0 \quad (4.1)$$

に対し, 複素数解  $\alpha$  が存在する.

**証明.**  $f_z(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n$  とおくと,  $f_z(z)$  は多項式関数なので有理関数である. したがって補題 3.1 より  $\mathbf{P}^1$  上の自己正則写像に一意に延長される. これを  $f: \mathbf{P}^1 \rightarrow \mathbf{P}^1$  とおく.  $\mathbf{P}^1 = \mathbf{C}_z \cup \mathbf{C}_w$  とかくとき,

$$f_w(w) = f_z\left(\frac{1}{w}\right) = a_0 \frac{1}{w^n} + \cdots + a_n = \frac{a_0 + a_1 w + \cdots + a_n w^n}{w^n}$$

が  $\mathbf{C}_w$  での  $f$  の座標表示を与える.  $n \geq 1$  と  $a_0 \neq 0$  より  $f(\infty) = f_w(0) = \infty$  であり,  $f(0) = f_z(0) = a_n \neq \infty$  より  $f$  は定数写像ではない. 従って  $f$  は全射なので,  $0$  に対し  $f(a) = 0$  となる  $a \in \mathbf{P}^1$  が存在する. いま  $f(\infty) = \infty$  なので  $a \neq \infty$ . すなわち  $a \in \mathbf{C}_z$  であり  $a$  は方程式 (4.1) の解になる.  $\square$

## 5 結語

本稿はセミナーの予習ノートと板書(後述)を元に書いた. この辺りの経緯について述べる. 2021 年度は対面での課外活動が制限されていた. そのため, Zoom を用いた遠隔でのセミナーを行うのが主であった. 板書には Microsoft OneNote を利用した. Whiteboard Fox と異なり, 14 日間で板書が削除されることもないので便利である. ただし, 時々動作が重くなることがあったので, 発表者の画面共有もしながらセミナーを行った. この発表の際に書いた板書と予習ノートが本

稿の下書きに当たる。清書するにあたって行ったのは、叙述の順序を変更したことと、セミナー中に気付いたことなどのコメントを加えたことである。

## 参考文献

- [1] 上野健爾, 代数幾何, 岩波書店, 2005.
- [2] 梅村浩, 楕円関数論 楕円曲線の解析学 [増補新装版], 東京大学出版会, 2020.
- [3] 小木曾啓示, 代数曲線論, 朝倉書店, 2002.
- [4] 金子晃, 関数論講義 (ライブラリ数理・情報系の数学講義, 5), サイエンス社, 2021.
- [5] 小林昭七, 複素幾何 1 (岩波講座現代数学の基礎, 29), 岩波書店, 1997.
- [6] 神保道夫, 複素関数論 (岩波講座現代数学への入門, 4), 岩波書店, 1995.
- [7] 武部尚志, 楕円積分と楕円関数 おとぎの国の歩き方, 日本評論社, 2019.
- [8] 藤本坦孝, 複素解析 (岩波講座現代数学の基礎, 3), 岩波書店, 1996.
- [9] 吉田洋一, 函数論 第2版 (岩波全書, 141), 岩波書店, 1973.