

代数曲線論

Toshi2019

Feb 20, 2022

概要

報告者は、21 年度の秋セメスターに [3] を用いてセミナーを行った。本稿では、このセミナーで勉強した内容を報告する。まず複素関数論について復習してからリーマン球面について述べる。その後、本稿ではほとんど 1 次元の場合、すなわちリーマン面の場合しか扱わないが、一般の次元に対して複素多様体を定義する。セミナーで学んだ事実のうち興味あるものとして、リーマン・ロッホの定理をリーマン球面に対して適用したものと代数学の基本定理がある。これらの証明が本稿の目標である。最後に、特異点のない代数曲線について、方程式の解としての構造と複素多様体としての構造の間の対応について述べる。

凡例

本稿では、次の記号について断りなく用いる。

- $\mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{C}$ は整数, 有理数, 実数, 複素数全体の集合を表す。
- 何らかの族 $(x_i)_{i \in I}$ について、添字集合が明らかな場合は $(x_i)_i$ のように表すことがある。
- X を集合とする。たんに X の関数というときには、 X 上の複素数に値を取る写像とする。
- 差集合: 集合 X の元のうち A に属さないものの全体を $X - A$ で表す。
- 球面: $S^{n-1} := \{x \in \mathbf{R}^n; \|x\| = 1\}$
- 射影: 直積集合に対し第 i 成分を対応させる写像を $\text{pr}_i: \prod_i X_i \rightarrow X_i$ とかく。
- 開近傍: 距離 d の定まっている空間 X の点 a に対して $U_r(a) = \{x \in X; d(x, a) < r\}$ とかく。

1 複素関数論

複素関数論について復習する^{*1}。 c を複素数とし f を複素数平面の開集合 Ω で定義された複素数に値を取る関数とする。 f が $z = c$ で解析的であるとは、何らかの実数 $r > 0$ に対しては、 $U_r(c)$ で巾級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - c)^n$ を用いて $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - c)^n$ と表せることをいう。

^{*1} 複素関数論については例えば [7, 10, 4, 9] を参照。

定義 1.1. f を複素数平面の開集合 Ω で定義された関数とし, $z = x + iy$ を Ω に属する複素数とする. コーシー・リーマンの方程式

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) f(z) = 0 \quad (1)$$

をみたす C^1 級の関数を正則関数という.

f が $z = c$ で解析的となるのは, $z = c$ で (複素) 微分可能となるときである. またこのとき f はコーシー・リーマンの方程式をみたす^{*2}.

2 リーマン面

2.1 リーマン球面

\mathbf{C}^2 から原点 $0 = (0, 0)$ を除いた集合 $\mathbf{C}^2 - \{0\}$ の点 $(a_0, a_1), (b_0, b_1)$ に対し次の関係を考える.

$$(a_0, a_1) \sim (b_0, b_1) \iff (a_0, a_1) = c \cdot (b_0, b_1) \text{ となる複素数 } c \neq 0 \text{ が存在する.} \quad (2)$$

これは同値関係である. (a_0, a_1) の同値類 $\{c \cdot (a_0, a_1); c \in \mathbf{C} - \{0\}\}$ を $[a_0 : a_1]$ とかく.

(2) が同値関係になることのチェック. (反射律) $c = 1$ は $(a_0, a_1) = 1 \cdot (a_0, a_1)$ をみたす.

(対称律) 複素数 $c \neq 0$ を $(a_0, a_1) = c \cdot (b_0, b_1)$ をみたすものとする, 複素数 $c^{-1} \neq 0$ は $(b_0, b_1) = c^{-1} \cdot (a_0, a_1)$ をみたす.

(推移律) 複素数 $c, c' \neq 0$ をそれぞれ $(a_0, a_1) = c \cdot (b_0, b_1)$, $(b_0, b_1) = c' \cdot (c_0, c_1)$ をみたすものとする. このとき複素数 $cc' \neq 0$ は

$$(a_0, a_1) = c \cdot (b_0, b_1) = cc' \cdot (c_0, c_1)$$

をみたす. □

同値関係 \sim の定める商写像を用いて次の集合を定義する.

定義 2.1. $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}) = (\mathbf{C}^2 - \{0\}) / \sim$ をリーマン球面 (Riemann sphere) という. $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ を $\mathbf{P}_{\mathbf{C}}^1$ とか \mathbf{P}^1 とにかく^{*3}.

\mathbf{P}^1 の任意の点 P は $[a_0 : a_1]$ の形に表せる. 実際, P を \mathbf{P}^1 の点とすると, \mathbf{P}^1 の定義より, $(a_0, a_1) \in \mathbf{C}^2 - \{0\}$ で $P = \pi(a_0, a_1) = [a_0 : a_1]$ となるものが存在する.

^{*2}正則関数の特徴づけについては, 例えば [4, 4.3 節] を参照.

^{*3}トポロジストは \mathbf{CP}^1 等と書くらしい.

また, $[a_0 : a_1] = [b_0 : b_1]$ となるのは, $a_0 : a_1 = b_0 : b_1$ となるときである. 実際,

$$\begin{aligned}
[a_0 : a_1] = [b_0 : b_1] &\iff (a_0, a_1) \in [b_0 : b_1] \\
&\iff (a_0, a_1) \sim (b_0, b_1) \\
&\iff (a_0, a_1) = c(b_0, b_1) \text{ for some } c \neq 0 \\
&\iff a_0 = cb_0, a_1 = cb_1 \text{ for some } c \neq 0 \\
&\iff a_0 : b_0 = a_1 : b_1 \\
&\iff a_0 b_1 = a_1 b_0 \\
&\iff a_0 : b_1 = b_0 : b_1
\end{aligned}$$

である.

定義 2.2. 次の写像の組を考える. $\mathbf{C}^2 - \{0\} \xrightleftharpoons[\text{pr}_2=X_1]{\text{pr}_1=X_0} \mathbf{C}; (a_0, a_1) \mapsto a_0, a_1$. この組を $\mathbf{C}^2 - \{0\}$ の標準座標, \mathbf{P}^1 の同次座標という.

$P \in \mathbf{P}^1$ を代表する $\mathbf{C}^2 - \{0\}$ の点 \tilde{P} の標準座標の値 (a_0, a_1) が P の同次座標の値である. なお, P に対する \tilde{P} の取り方, すなわち (a_0, a_1) の取り方には任意性がある.

\mathbf{P}^1 は商写像 $\pi: \mathbf{C}^2 - \{0\} \rightarrow (\mathbf{C}^2 - \{0\})/\sim$ による商位相により位相空間になる. この定義から π の連続性が従う.

\mathbf{P}^1 の位相空間としての性質を調べるために, 次の部分集合を定義する.

$$\begin{aligned}
U_0 &= \{[a_0 : a_1] \in \mathbf{P}^1; a_0 \neq 0\}, \\
U_1 &= \{[a_0 : a_1] \in \mathbf{P}^1; a_1 \neq 0\}.
\end{aligned}$$

このとき次が成り立つ.

$$\begin{aligned}
U_0 \cup U_1 &= \mathbf{P}^1, \\
U_0 \cap U_1 &= \{[a_0 : a_1] \in \mathbf{P}^1; a_0, a_1 \neq 0\} \\
&= U_0 - \{[1 : 0]\} \\
&= U_1 - \{[0 : 1]\}.
\end{aligned}$$

補題 2.3. 1. 商写像 $\pi: \mathbf{C}^2 - \{0\} \rightarrow (\mathbf{C}^2 - \{0\})/\sim$ は開写像である.

2. U_0 と U_1 は \mathbf{P}^1 の開集合であり,

$$\varphi_0: U_0 \xrightarrow{\sim} \mathbf{C}; [a_0 : a_1] \mapsto a_1/a_0, \varphi_1: U_1 \xrightarrow{\sim} \mathbf{C}; [a_0 : a_1] \mapsto a_0/a_1,$$

はともに同相写像である.

3. 任意の $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in GL(2, \mathbf{C})$ は自己同相写像

$$p_A: \mathbf{P}^1 \xrightarrow{\sim} \mathbf{P}^1; \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix}$$

を引き起こす.

4. \mathbf{P}^1 は第 2 可算公理をみたす連結なコンパクトハウスドルフ空間である.

証明. 1. U を $\mathbf{C}^2 - \{0\}$ の開集合とする. $\pi(U)$ が \mathbf{P}^1 の開集合であること, すなわち $\pi^{-1}(\pi(U))$ が $\mathbf{C}^2 - \{0\}$ の開集合であることを示す. いま, 任意の開集合 $U \subset \mathbf{C}^2 - \{0\}$ に対し, 複素数 $c \neq 0$ を用いて

$$cU = \{(ca_0, ca_1); (a_0, a_1) \in \mathbf{C}^2 - \{0\}\}$$

とおくと, cU は $\mathbf{C}^2 - \{0\}$ の開集合であり,

$$\pi^{-1}(\pi(U)) = \bigcup_{c \in \mathbf{C} - \{0\}} cU \quad (*)$$

なので, $\pi^{-1}(\pi(U))$ は $\mathbf{C}^2 - \{0\}$ の開集合である.

2. まず U_0, U_1 が \mathbf{P}^1 の開集合であることを示す. $U_0 = \{[a_0 : a_1]; a_0 \neq 0\}$ は $V_0 = \{(a_0, a_1); a_0 \neq 0\}$ の π による像であり, V_0 は $\mathbf{C}^2 - \{0\}$ の開集合であるから, U_0 は \mathbf{P}^1 の開集合である. 同様に U_1 も \mathbf{P}^1 の開集合である.

$\varphi_0: U_0 \rightarrow \mathbf{C}$ が連続であることを示す. V を \mathbf{C} の開集合とする. $V = \varphi_0 \circ \pi(V_0) (= \widetilde{\varphi_0}(V_0))$ とおく) である. $\widetilde{\varphi_0}^{-1}(V) = \pi^{-1}(\varphi_0^{-1}(V))$ は V_0 の開集合である. したがって, これは $\mathbf{C}^2 - \{0\}$ の開集合であり, 商位相の定義から $\varphi_0^{-1}(V) \subset U_0$ は開集合である.

$$\begin{array}{ccc} V_0 & & \\ \pi \downarrow & \searrow \widetilde{\varphi_0} & \\ U_0 & \xrightarrow{\varphi_0} & V \end{array}$$

φ_0 が同相であることを示す. $\psi_0: \mathbf{C} \rightarrow U_0$ を $\psi_0(z) = [1: z]$ で定める. このとき $\psi_0 \circ \varphi_0([a_0: a_1]) = \psi_0(a_1/a_0) = [1: a_1/a_0] = [a_0: a_1]$ である. また $\varphi_0 \circ \psi_0(z) = \varphi_0([1: z]) = z/1 = z$. したがって, $\psi_0 \circ \varphi_0 = \text{id}_{U_0}$ かつ $\varphi_0 \circ \psi_0 = \text{id}_{\mathbf{C}}$ であり, $\psi_0 = \varphi_0^{-1}$ である. $\psi_0 = \varphi_0^{-1}$ は自然な単射 $\mathbf{C} \hookrightarrow \mathbf{C}^2 - \{0\}$ と π の合成であり, これらは連続なので, その合成である ψ_0 も連続である. 以上より φ_0 は同相である.

3. $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ を可逆な行列とする. A を自己同形 $\mathbf{C}^2 \rightarrow \mathbf{C}^2$ とみたとき, それを $\mathbf{C}^2 - \{0\}$ に制限した $A|_{\mathbf{C}^2 - \{0\}}: \mathbf{C}^2 - \{0\} \rightarrow \mathbf{C}^2 - \{0\}$ は自己同相であり, 逆写像は $A^{-1}|_{\mathbf{C}^2 - \{0\}}$ で与えられる. 一般に $A(cx) = cAx$ なので, A から可逆な写像 p_A が不備なく定まり, 逆写像は $p_{A^{-1}}$ で与えられる.

p_A が連続であることを示す. V を \mathbf{P}^1 の開集合とする. 次の図式が可換であり, π と A は連続写像であるから, $\pi^{-1}(p_A^{-1}(V)) = A^{-1}(\pi^{-1}(V))$ は $\mathbf{C}^2 - \{0\}$ の開集合である.

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{C}^2 - \{0\} & \xrightarrow{A} & \mathbf{C}^2 - \{0\} \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ \mathbf{P}^1 & \xrightarrow{p_A} & \mathbf{P}^1 \end{array}$$

\mathbf{P}^1 の商位相の定義より $\pi^{-1}(V)$ は \mathbf{P}^1 の開集合である．したがって p_A で連続である． p_A^{-1} が連続であることも同様である．

4. 第 2 可算公理をみtasこと：

$$\mathbf{Q}(\sqrt{-1}) = \{a + b\sqrt{-1}; a, b \in \mathbf{Q}\}$$

に属する点 z と有理数 p に対し $U_p(z)$ を考えると $(U_p(z))_{p \in \mathbf{Q}, z \in \mathbf{C}}$ は \mathbf{C} の位相空間としての基底になる．したがって \mathbf{C} は第 2 可算公理をみtas．直積集合 \mathbf{C}^2 も第 2 可算であるから，1 点を除いた $\mathbf{C}^2 - \{0\}$ もそうであり，これに全射 π を適用した \mathbf{P}^1 も第 2 可算公理をみtas．

連結であること： $S^3 = \{P = (a_0, a_1) \in \mathbf{C}^2; |a_0|^2 + |a_1|^2 = 1\} \subset \mathbf{C}^2 - \{0\}$ □

注意 2.4 ((*) について)．この等式については次の図 1 を見ると理解しやすい．いま，簡単のため

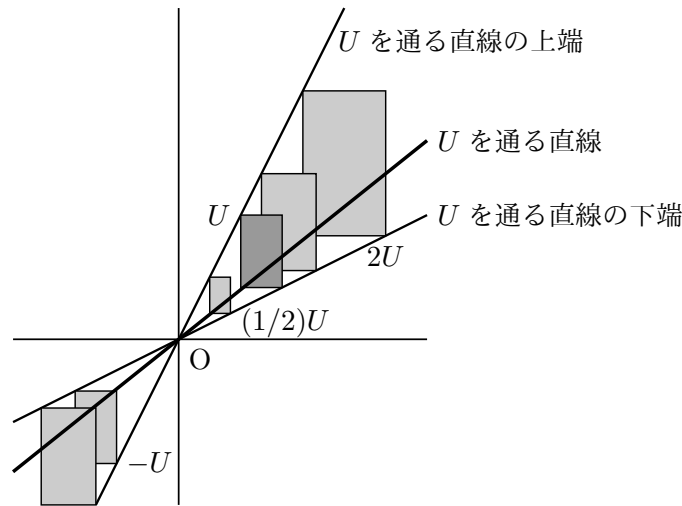


図 1 商写像の逆像 1

\mathbf{R}^2 の部分集合 U について考える． $\pi(U)$ は U を通る直線たちの集合である．像が $\pi(U)$ となるようなもの，つまり $\pi^{-1}(\pi(U))$ は U を c 倍に拡大・縮小したもの全体である．したがって

$$\begin{aligned} \pi^{-1}(\pi(U)) &= (U \text{ を射影したものと同じところに行くもの}) \\ &= (U \text{ を } c \text{ 倍に拡大したもの全て}) \\ &= \bigcup_{c \in \mathbf{R} - \{0\}} cU \end{aligned}$$

のようになり， \mathbf{C}^2 の場合には (*) が成り立つ．

次のような場合も見ておくと複素トーラスの導入のときなどに役立つ．

$$\pi: \mathbf{R} \twoheadrightarrow \mathbf{R}/\mathbf{Z}; x \mapsto x \mod \mathbf{Z}$$

を考える．これは図 2 の上の直線を螺旋状に巻いて潰し，1 次元トーラスにしたものである．

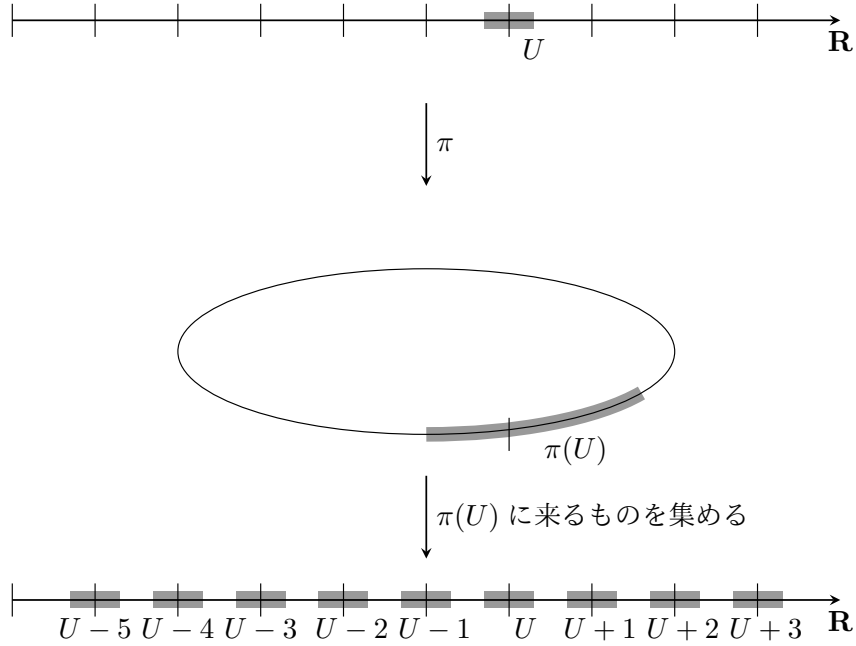


図2 商写像の逆像2

この場合は次のようになる。

$$\begin{aligned}
 \pi^{-1}(\pi(U)) &= (U \text{ を射影したものと同じところに行くもの}) \\
 &= (U \text{ を整数分だけずらしたものの全て}) \\
 &= \bigcup_{n \in \mathbf{Z}} (U + n).
 \end{aligned}$$

\mathbf{C}^n での座標が $z = (z_1, \dots, z_n)$ であるとき複素数空間 \mathbf{C}^n を \mathbf{C}_z^n とか $\mathbf{C}_{(z_1, \dots, z_n)}^n$ とかく。

定義 2.5 (n 次元複素多様体). X を位相空間とする. $(\varphi_i: U_i \rightarrow \mathcal{U}_i)_{i \in I}$ を写像の族とする. このとき, 対 $(X, (\varphi_i)_i)$ が次の条件 (1)–(4) をみたすとき, X を台集合とし $(\varphi_i)_i$ を座標近傍系とする n 次元複素多様体 (n -dimensional complex manifold) という.

- (1) X は空集合でなく, 第2可算公理を満たす連結なハウスドルフ空間である.
- (2) すべての $i \in I$ に対して U_i は X の空でない開集合であり, $(U_i)_i$ は X の開被覆である.
- (3) すべての $i \in I$ に対して, \mathcal{U}_i は $\mathbf{C}_{(z_1, \dots, z_n)}^n$ の空でない開集合であり $\varphi_i: U_i \rightarrow \mathcal{U}_i$ は同相である.
- (4) 任意の $i \neq j \in I$ で $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ をみたすものに対して $\mathcal{U}_{ij} := \varphi_j(U_i \cap U_j) \subset \mathcal{U}_j$ とおくと, $\varphi_{ij} := \varphi_i \circ \varphi_j^{-1}|_{\mathcal{U}_{ij}}: \mathcal{U}_{ij} \rightarrow \mathcal{U}_{ji}$ は正則である.

1 次元複素多様体をリーマン面 (Riemann surface) という.

3 1次元における諸結果

次はリーマンロッホの定理の特殊な場合である.

定理 3.1 ([3, 命題 1.14]). P_1, \dots, P_m を \mathbf{P}^1 の互いに相異なる点とする. \mathbf{P}^1 上の有理形関数で各 P_i のみで高々 n_i の極をもつものの全体

$$\Gamma \left(\mathbf{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1} \left(\sum_{i=1}^m n_i P_i \right) \right)$$

は関数の和とスカラー倍によって \mathbf{C} ベクトル空間を成す. さらにその空間の次元は次で与えられる.

$$\dim \Gamma \left(\mathbf{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1} \left(\sum_{i=1}^m n_i P_i \right) \right) = 1 + \sum_{i=1}^m n_i.$$

4 コンパクトリーマン面

定理 4.1 (代数学の基本定理 [3, 系 2.24]). $n \geq 1$ とする. 複素数を係数とする n 次方程式

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n = 0, \quad a_0 \neq 0$$

に対し, 複素数解 α が存在する.

5 それから

参考文献

- [1] 上野健爾, 代数幾何, 岩波書店, 2005.
- [2] 梅村浩, 楕円関数論 楕円曲線の解析学 [増補新装版], 東京大学出版会, 2020.
- [3] 小木曾啓示, 代数曲線論, 朝倉書店, 2002.
- [4] 金子晃, 関数論講義 (ライブラリ数理・情報系の数学講義, 5), サイエンス社, 2021.
- [5] 小林昭七, 複素幾何 1 (岩波講座現代数学の基礎, 29), 岩波書店, 1997.
- [6] 小林昭七, 複素幾何 2 (岩波講座現代数学の基礎, 30), 岩波書店, 1998.
- [7] 神保道夫, 複素関数論 (岩波講座現代数学への入門, 4), 岩波書店, 1995.
- [8] 武部尚志, 楕円積分と楕円関数 おとぎの国の歩き方, 日本評論社, 2019.
- [9] 藤本坦孝, 複素解析 (岩波講座現代数学の基礎, 3), 岩波書店, 1996.
- [10] 吉田洋一, 函数論 第2版 (岩波全書, 141), 岩波書店, 1973.
- [11] 著者, 書名 (シリーズ名, 巻数), 発行所, 発行都市名, 年号