Lie 環と代数の随伴

Toshi2019

Lie 環と代数の間の随伴についてまとめたノート.

$$\begin{tikzcd} \mathsf{Lie}_k \arrow[r, bend left, "U"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathsf{Alg}_k \arrow[l, bend left, "\mathrm{L}"] \end{tikzcd}$$

1 主定理

k を単位元を持つ可換環とする. k 代数と k 代数射のなす圏を Alg_k, k 上の Lie 環と Lie 環射のなす圏を Lie_k とかく. 次の (1.1) を示すのが本稿の目的である.

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{Alg}_k}(U(\mathfrak{g}), A) \cong \mathrm{Hom}_{\mathsf{Lie}_k}(\mathfrak{g}, \mathrm{L}(A)) \tag{1.1}$$

ここで, $U : \mathsf{Lie}_k \to \mathsf{Alg}_k$ は Lie 環 $\mathfrak{g}$ に対し, 包絡環 $U(\mathfrak{g})$ を対応させ, Lie 環射 $f : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ に対し, 代数射 $U(f) : U(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{g}')$ を対応させる関手である. また, $L : \mathsf{Alg}_k \to \mathsf{Lie}_k$ は, 代数 A に対し Lie 環を, 代数射 $h : A \to A'$ に対し Lie 環射を, 後述する方法 (3.1) で対応させる関手である.

2 Lie 環

Lie 環 $(\mathfrak{g}, [\bullet, \bullet])$ とは, k 線形空間 $\mathfrak{g}$ と k 双線形写像 $[\bullet, \bullet] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ の組で次の条件を満たすものをいう.

(L1) 任意の $x \in \mathfrak{g}$ に対し $[x, x] = 0$

(L2) 任意の $x, y, z \in \mathfrak{g}$ に対し $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$

3　代数

k を単位元を持つ可換環とする．k 代数 (A, m, u) とは, k 線形空間 A と k 線形写像 $m : A \otimes A \to A$, $u : k \to A$ の三つ組で次の図式を可換にするものをいう.

$$
\begin{tikzcd}
A \otimes A \otimes A \arrow[r, "m \otimes \mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id} \otimes m"'] & A \otimes A \arrow[d, "m"] \\
A \otimes A \arrow[r, "m"] & A
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
k \otimes A \arrow[r, "u \otimes \mathrm{id}"] \arrow[dr, "\sim"'] & A \otimes A \arrow[d, "m"] & A \otimes k \arrow[l, "\mathrm{id} \otimes u"'] \arrow[dl, "\sim"] \\
& A &
\end{tikzcd}
$$

以下, k を取り替えないので, k 代数をたんに代数とよぶ．$(A, m_A, u_A), (B, m_B, u_B)$ を代数とする．線形写像 $f : A \to B$ が代数射であるとは, 次の図式が可換となることをいう.

$$
\begin{tikzcd}
A \otimes A \arrow[r, "m_A"] \arrow[d, "f \otimes f"'] & A \arrow[d, "f"] \\
B \otimes B \arrow[r, "m_B"] & B
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
k \arrow[r, "u_A"] \arrow[d, equal] & A \arrow[d, "f"] \\
k \arrow[r, "u_B"] & B
\end{tikzcd}
$$

代数 A に対し, 次の方法でブラケット積を定める.

$$[x, y] = xy - yx \tag{3.1}$$

これにより, A から Lie 環 $\mathrm{L}(A)$ が定まる．このとき, 代数射 $f : A \to B$ に対し,

$$
\begin{aligned}
f([x, y]) = f([x, y]) &= f(xy) - f(yx) \\
&= f(x)f(y) - f(y)f(x) = [f(x), f(y)]
\end{aligned}
$$

が成り立つので, f を自然に Lie 環射とみなせる．これを $L(f) : \mathrm{L}(A) \to \mathrm{L}(B)$ とかく.

4　包絡環

$\mathfrak{g}$ を Lie 環とする.

5　証明

参考文献

[阿部 77] 阿部英一, ホップ代数, 岩波書店, 1977.

[谷崎 02] 谷崎俊之, リー代数と量子群, 共立叢書　現代数学の潮流, 共立出版, 2002.

[Kas95] C. Kassel, Quantum Groups, Graduate Texts in Mathematics, vol. 155, Springer-Verlag, New York, 1995.