代数曲線論

Toshi2019

Feb 20, 2022

概要

本稿の目的は，21 年度の秋セメスターに [3] を用いて行ったセミナーの内容を報告することである．まず複素関数論について復習してからリーマン球面について述べる．その後，本稿ではほとんど 1 次元の場合，すなわちリーマン面の場合しか扱わないが，一般の次元に対して複素多様体を定義する．セミナーで学んだ事実のうち興味あるものとして，リーマン・ロッホの定理をリーマン球面に対して適用したものと代数学の基本定理がある．これらの証明が本稿の目標である．最後に，特異点のない代数曲線について，方程式の解としての構造と複素多様体としての構造の間の対応について述べる．

凡例

本稿では，次の記号について断りなく用いる．

- $\mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{C}$ は整数，有理数，実数，複素数全体の集合を表す．
- 何らかの族 $(x_i)_{i \in I}$ について，添字集合が明らかな場合は $(x_i)_i$ や (x_i) のように略記することがある．
- X を集合とする．たんに X の関数というときには，X 上の複素数に値を取る写像とする．
- 差集合：集合 X の元のうち A に属さないもの全体を $X - A$ で表す．
- 球面：$S^{n-1} := \{x \in \mathbf{R}^n; \|x\| = 1\}$
- 射影：直積集合に対し第 i 成分を対応させる写像を $\mathrm{pr}_i \colon \prod_i X_i \to X_i$ とかく．
- 開近傍：距離 d の定まっている空間 X の点 a に対して $U_r(a) = \{x \in X; d(x,a) < r\}$ とかく．
- ワイもや：X と Y を位相空間とし $f \colon X \to Y$ を連続写像とする．X の部分集合 A が連結（コンパクト）ならば f による像 $f(A)$ も連結（コンパクト）である．この性質を ‘ワイもや’ と呼ぶ．

1　複素関数論

複素関数論について復習する[*1].

命題 1.1 ([3, 定義–命題 1.5]). U をガウス平面の領域（連結開集合）とする．$\varphi(z)$ を U 上の複素数値関数とする．このとき，次の条件 (1)–(3) は同値である[*2].

(1) $\varphi(z)$ は U の各点で**正則** (regular, holomorphic) すなわち，U の各点で極限値

$$\lim_{h\to a}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

が存在する．

(2) $\varphi(z)$ は U の各点 a の近傍でテイラー展開できる．

$$\varphi(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varphi^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n$$

(3) U の各点 a と a を中心とし U に含まれる任意の開円盤 Δ に対して，$\varphi(z)$ と $\varphi(z)$ の a を中心とするテイラー展開は Δ で一致する．

命題 1.2 ([3, 定義–命題 1.6]). U をガウス平面の領域（連結開集合）とする．a を U の点とする．$\varphi(z)$ を a を中心とするある開円盤 Δ_a から a を除いた集合 $\Delta_a-\{a\}$ 上の正則関数とする．このとき，次の条件 (1), (2) は同値である．

(1) $\varphi(z)$ は a において高々極しかもたない．

(2) $\varphi(z)$ は a においてローラン展開できる．つまり，a の適当な近傍 W 及び適当な整数 $k\geqq 0$ と複素数列 $(a_n)_{n=-k}^{\infty}$ で，$W-\{a\}$ で次が成り立つものが存在する．

$$\varphi(z)=\sum_{m=1}^{k}\frac{a_{-m}}{(z-a)^m}+\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-a)^n. \tag{1.1}$$

(1.1) の右辺第 2 項は正則である．$k=0$ のときは右辺第 1 項は 0 であり，$k>0$ のときは $a_{-k}\neq 0$ であるとする．U の各点で高々極しかもたない $U-R$ 上の正則関数 φ を U 上の**有理形関数** (meromorphic function) という．

2　リーマン面

2.1　リーマン球面

$\mathbf{C}^2$ から原点 $0=(0,0)$ を除いた集合 $\mathbf{C}^2-\{0\}$ の点 $(a_0,a_1),(b_0,b_1)$ に対し次の関係を考える．

[*1] 複素関数論については例えば [6, 9, 4, 8] を参照.
[*2] 正則関数の特徴づけについては，例えば [4, 4.3 節] を参照.

$$(a_0, a_1) \sim (b_0, b_1) \iff (a_0, a_1) = c \cdot (b_0, b_1) \text{ となる複素数 } c \neq 0 \text{ が存在する．} \tag{2.1}$$

これは同値関係である．(a_0, a_1) の同値類 $\{c \cdot (a_0, a_1); c \in \mathbf{C} - \{0\}\}$ を $[a_0 \colon a_1]$ とかく．

(2.1) が同値関係になることのチェック．（反射律）$c = 1$ は $(a_0, a_1) = 1 \cdot (a_0, a_1)$ をみたす．
（対称律）複素数 $c \neq 0$ を $(a_0, a_1) = c \cdot (b_0, b_1)$ をみたすものとすると，複素数 $c^{-1} \neq 0$ は $(b_0, b_1) = c^{-1} \cdot (a_0, a_1)$ をみたす．
（推移律）複素数 $c, c' \neq 0$ をそれぞれ $(a_0, a_1) = c \cdot (b_0, b_1)$，$(b_0, b_1) = c' \cdot (c_0, c_1)$ をみたすものとする．このとき複素数 $cc' \neq 0$ は

$$(a_0, a_1) = c \cdot (b_0, b_1) = cc' \cdot (c_0, c_1)$$

をみたす． □

同値関係 $\sim$ の定める商写像を用いて次の集合を定義する．

定義 2.1. $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}) = \left(\mathbf{C}^2 - \{0\}\right)/\!\sim$ を**リーマン球面** (Riemann sphere) という．$\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ を $\mathbf{P}^1_{\mathbf{C}}$ とか $\mathbf{P}^1$ ともかく[*3]．

$\mathbf{P}^1$ の任意の点 P は $[a_0 \colon a_1]$ の形に表せる．実際，P を $\mathbf{P}^1$ の点とすると，$\mathbf{P}^1$ の定義より，$(a_0, a_1) \in \mathbf{C}^2 - \{0\}$ で $P = \pi(a_0, a_1) = [a_0 \colon a_1]$ となるものが存在する．
また，$[a_0 \colon a_1] = [b_0 \colon b_1]$ となるのは，$a_0 \colon a_1 = b_0 \colon b_1$ となるときである．実際，

$$\begin{aligned}
[a_0 \colon a_1] = [b_0 \colon b_1] &\iff (a_0, a_1) \in [b_0 \colon b_1] \\
&\iff (a_0, a_1) \sim (b_0, b_1) \\
&\iff (a_0, a_1) = c(b_0, b_1) \text{ for some } c \neq 0 \\
&\iff a_0 = cb_0, a_1 = cb_1 \text{ for some } c \neq 0 \\
&\iff a_0 \colon b_0 = a_1 \colon b_1 \\
&\iff a_0 b_1 = a_1 b_0 \\
&\iff a_0 \colon b_1 = b_0 \colon b_1
\end{aligned}$$

である．

定義 2.2. 次の写像の組を考える． $\mathbf{C}^2 - \{0\} \overset{\mathrm{pr}_1 = X_0}{\underset{\mathrm{pr}_2 = X_1}{\rightrightarrows}} \mathbf{C}$; $(a_0, a_1) \mapsto a_0, a_1$. この組を $\mathbf{C}^2 - \{0\}$ の標準座標，$\mathbf{P}^1$ の同次座標という．

$P \in \mathbf{P}^1$ を代表する $\mathbf{C}^2 - \{0\}$ の点 $\widetilde{P}$ の標準座標の値 (a_0, a_1) が P の同次座標の値である．なお，P に対する $\widetilde{P}$ の取り方，すなわち (a_0, a_1) の取り方には任意性がある．
$\mathbf{P}^1$ は商写像 $\pi \colon \mathbf{C}^2 - \{0\} \longrightarrow \left(\mathbf{C}^2 - \{0\}\right)/\!\sim$ による商位相により位相空間になる．この定義から π の連続性が従う．

[*3] トポロジストは $\mathbf{CP}^1$ 等と書くらしい．

$\mathbf{P}^1$ の位相空間としての性質を調べるために，次の部分集合を定義する．

$$U_0 = \{[a_0 \colon a_1] \in \mathbf{P}^1; a_0 \neq 0\},$$
$$U_1 = \{[a_0 \colon a_1] \in \mathbf{P}^1; a_1 \neq 0\}.$$

このとき次が成り立つ．

$$U_0 \cup U_1 = \mathbf{P}^1, \tag{2.2}$$
$$\begin{aligned} U_0 \cap U_1 &= \{[a_0 \colon a_1] \in \mathbf{P}^1; a_0, a_1 \neq 0\} \\ &= U_0 - \{[1 \colon 0]\} \\ &= U_1 - \{[0 \colon 1]\}. \end{aligned} \tag{2.3}$$

補題 2.3. 1. 商写像 $\pi \colon \mathbf{C}^2 - \{0\} \longrightarrow \bigl(\mathbf{C}^2 - \{0\}\bigr)/\!\sim$ は開写像である．

2. U_0 と U_1 は $\mathbf{P}^1$ の開集合であり，

$$\varphi_0 \colon U_0 \xrightarrow{\sim} \mathbf{C};\ [a_0 \colon a_1] \mapsto a_1/a_0,$$
$$\varphi_1 \colon U_1 \xrightarrow{\sim} \mathbf{C};\ [a_0 \colon a_1] \mapsto a_0/a_1$$

はともに同相写像である．

3. 任意の $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in GL(2, \mathbf{C})$ は自己同相写像

$$p_A \colon \mathbf{P}^1 \xrightarrow{\sim} \mathbf{P}^1; \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix}$$

を引き起こす．

4. $\mathbf{P}^1$ は第 2 可算公理をみたす連結なコンパクトハウスドルフ空間である．

証明. 1. U を $\mathbf{C}^2 - \{0\}$ の開集合とする．$\pi(U)$ が $\mathbf{P}^1$ の開集合であること，すなわち $\pi^{-1}(\pi(U))$ が $\mathbf{C}^2 - \{0\}$ の開集合であることを示す．いま，任意の開集合 $U \subset \mathbf{C}^2 - \{0\}$ に対し，複素数 $c \neq 0$ を用いて

$$cU = \bigl\{(ca_0, ca_1); (a_0, a_1) \in \mathbf{C}^2 - \{0\}\bigr\}$$

とおくと，cU は $\mathbf{C}^2 - \{0\}$ の開集合であり，

$$\pi^{-1}(\pi(U)) = \bigcup_{c \in \mathbf{C} - \{0\}} cU \tag{$*$}$$

なので，$\pi^{-1}(\pi(U))$ は $\mathbf{C}^2 - \{0\}$ の開集合である．

2. まず U_0, U_1 が $\mathbf{P}^1$ の開集合であることを示す．$U_0 = \{[a_0 : a_1]; a_0 \neq 0\}$ は $V_0 = \{(a_0, a_1); a_0 \neq 0\}$ の π による像であり，V_0 は $\mathbf{C}^2 - \{0\}$ の開集合であるから，U_0 は $\mathbf{P}^1$ の開集合である．同様に U_1 も $\mathbf{P}^1$ の開集合である．

$\varphi_0\colon U_0 \to \mathbf{C}$ が連続であることを示す．V を $\mathbf{C}$ の開集合とする．$V = \varphi_0 \circ \pi(V_0)(= \widetilde{\varphi_0}(V_0)$ とおく）である．$\widetilde{\varphi_0}^{-1}(V) = \pi^{-1}\left(\varphi_0^{-1}(V)\right)$ は V_0 の開集合である．したがって，これは $\mathbf{C}^2 - \{0\}$ の開集合であり，商位相の定義から $\varphi_0^{-1}(V) \subset U_0$ は開集合である．

$$\begin{tikzcd} V_0 \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, "\widetilde{\varphi_0}"] & \\ U_0 \arrow[r, "\varphi_0"'] & V \end{tikzcd}$$

φ_0 が同相であることを示す．$\psi_0\colon \mathbf{C} \to U_0$ を $\psi_0(z) = [1\colon z]$ で定める．このとき $\psi_0 \circ \varphi_0\left([a_0\colon a_1]\right) = \psi_0\left(a_1/a_0\right) = [1\colon a_1/a_0] = [a_0\colon a_1]$ である．また $\varphi_0 \circ \psi_0(z) = \varphi_0([1\colon z]) = z/1 = z$. したがって，$\psi_0 \circ \varphi_0 = \mathrm{id}_{U_0}$ かつ $\varphi_0 \circ \psi_0 = \mathrm{id}_{\mathbf{C}}$ であり，$\psi_0 = \varphi_0^{-1}$ である．$\psi_0 = \varphi_0^{-1}$ は自然な単射 $\mathbf{C} \hookrightarrow \mathbf{C}^2 - \{0\}$ と π の合成であり，これらは連続なので，その合成である ψ_0 も連続である．以上より φ_0 は同相である．

3. $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ を可逆な行列とする．A を自己同形 $\mathbf{C}^2 \to \mathbf{C}^2$ とみたとき，それを $\mathbf{C}^2 - \{0\}$ に制限した $A|_{\mathbf{C}^2-\{0\}}\colon \mathbf{C}^2 - \{0\} \to \mathbf{C}^2 - \{0\}$ は自己同相であり，逆写像は $A^{-1}\big|_{\mathbf{C}^2-\{0\}}$ で与えられる．一般に $A(cx) = cAx$ なので，A から可逆な写像 p_A が不備なく定まり，逆写像は $p_{A^{-1}}$ で与えられる．

p_A が連続であることを示す．V を $\mathbf{P}^1$ の開集合とする．次の図式が可換であり，π と A は連続写像であるから，$\pi^{-1}\left(p_A^{-1}(V)\right) = A^{-1}\left(\pi^{-1}(V)\right)$ は $\mathbf{C}^2 - \{0\}$ の開集合である．

$$\begin{tikzcd} \mathbf{C}^2 - \{0\} \arrow[r, "A"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathbf{C}^2 - \{0\} \arrow[d, "\pi"] \\ \mathbf{P}^1 \arrow[r, "p_A"'] & \mathbf{P}^1 \end{tikzcd}$$

$\mathbf{P}^1$ の商位相の定義より $\pi^{-1}(V)$ は $\mathbf{P}^1$ の開集合である．したがって p_A で連続である．p_A^{-1} が連続であることも同様である．

4. 第 2 可算公理をみたすこと：

$$\mathbf{Q}(\sqrt{-1}) = \{a + b\sqrt{-1}; a, b \in \mathbf{Q}\}$$

に属する点 z と有理数 p に対し $U_p(z)$ を考えると $\left(U_p(z)\right)_{p\in\mathbf{Q}, z\in\mathbf{C}}$ は $\mathbf{C}$ の位相空間としての基底になる．したがって $\mathbf{C}$ は第 2 可算公理をみたす．直積集合 $\mathbf{C}^2$ も第 2 可算であるから，1 点を除いた $\mathbf{C}^2 - \{0\}$ もそうであり，これに全射 π を適用した $\mathbf{P}^1$ も第 2 可算公理をみたす．

連結かつコンパクトであること：$S^3 = \{P = (a_0, a_1) \in \mathbf{C}^2; |a_0|^2 + |a_1|^2 = 1\} \subset \mathbf{C}^2 - \{0\}$ であり，$\mathbf{C} - \{0\}$ の相対位相により，S^3 は有界閉集合つまりコンパクト集合であり，連結である．全射連続写像 $\pi|_{S^3}\colon S^3 \to \mathbf{P}^1$ により‘ワイもや’で $\mathbf{P}^1$ は連結かつコンパクト．$\pi|_{S^3}$ が全射であることは

$$[a_0 \colon a_1] = \left[\frac{a_0}{\sqrt{a_0^2 + a_1^2}} \colon \frac{a_1}{\sqrt{a_0^2 + a_1^2}} \right]$$

であることからしたがう．

ハウスドルフであること：$P \neq Q$ を $\mathbf{P}^1$ の点とする．$p \colon GL(2, \mathbf{C}) \to \mathrm{Aut}(\mathbf{P}^1)$ は全射．したがって，$U_0 \subset \mathbf{P}^1$ から，任意の $p_A \in \mathrm{Aut}(U_0)$ に対し $A \in GL(2, \mathbf{C})$ が存在する．つまり $p_A(P), p_A(Q) \in U_0$ となる $A \in GL(2, \mathbf{C})$ が存在する．$U_0 \cong \mathbf{C}$ であり $\mathbf{C}$ はハウスドルフなので，$p_A(P)$ の開近傍 U_P と $p_A(Q)$ の開近傍 U_Q で $U_P \cap U_Q = \varnothing$ をみたすものが存在する．U_P と U_Q は $U_0 \subset \mathbf{P}^1$ の開集合であり，p_A が同相なので $p_A^{-1}(U_P)$, $p_A^{-1}(U_Q)$ は $\mathbf{P}^1$ における P, Q の開近傍で $p_A^{-1}(U_P) \cap p_A^{-1}(U_Q) = \varnothing$ をみたす．よって $\mathbf{P}^1$ はハウスドルフである． □

注意 2.4 ((∗) の幾何的イメージ)**.** この等式については次の図 1 を見ると理解しやすい．いま，簡

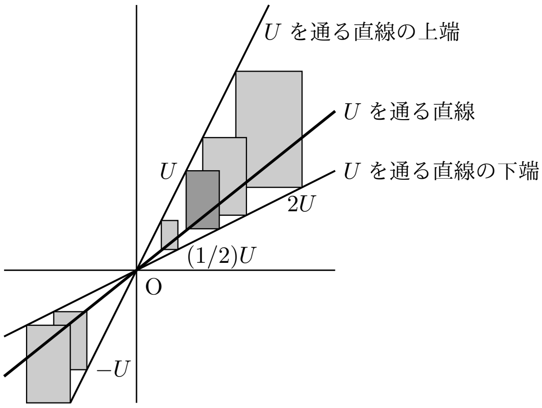

図 1　商写像の逆像 1

単のため $\mathbf{R}^2$ の部分集合 U について考える．$\pi(U)$ は U を通る直線たちの集合である．像が $\pi(U)$ となるようなもの，つまり $\pi^{-1}(\pi(U))$ は U を c 倍に拡大・縮小したもの全体である．したがって

$$\begin{aligned} \pi^{-1}(\pi(U)) &= (U \text{ を射影したものと同じところに行くもの}) \\ &= (U \text{ を } c \text{ 倍に拡大したもの全て}) \\ &= \bigcup_{c \in \mathbf{R} - \{0\}} cU \end{aligned}$$

のようになり，$\mathbf{C}^2$ の場合には (∗) が成り立つ．

次のような場合も見ておくと複素トーラスの導入のときなどに役立つ．

$$\pi \colon \mathbf{R} \twoheadrightarrow \mathbf{R}/\mathbf{Z}; x \mapsto x \mod \mathbf{Z}$$

を考える．これは図 2 の上の直線を螺旋状に巻いて潰し，1 次元トーラスにしたものである．

この場合は次のようになる．

$$
\begin{aligned}
\pi^{-1}\left(\pi(U)\right) &= (U \text{ を射影したものと同じところに行くもの}) \\
&= (U \text{ を整数分だけずらしたもの全て}) \\
&= \bigcup_{n \in \mathbf{Z}} (U+n).
\end{aligned}
$$

2.2 貼りあわせ関数

補題 2.3.2 から $\varphi_0 \colon U_0 \xrightarrow{\sim} \mathbf{C}$, $\varphi_1 \colon U_1 \xrightarrow{\sim} \mathbf{C}$ である．ここで，$\varphi_0(U_0)$ の標準座標を w, $\varphi_1(U_1)$ の標準座標を z で表すことにする[*4]．定義 2.2 のようにかくと

$$
\begin{aligned}
z \colon \varphi_1(U_1) = \mathbf{C} \to \mathbf{C}; (a) \mapsto a \\
w \colon \varphi_0(U_0) = \mathbf{C} \to \mathbf{C}; (b) \mapsto b
\end{aligned}
$$

のようになる．複素数の一つ組に対し第一成分を対応させるということである．これによって点 (a) と座標値 $z(a)$ を同一視し，点を単に z と書いたりする．ガウス平面 $\mathbf{C}$ に，そこでの標準座標をつけて $\mathbf{C}_z$, $\mathbf{C}_w$ のように表すと，$\mathbf{C}_w \subset \mathbf{P}^1$, $\mathbf{C}_z \subset \mathbf{P}^1$ とみなせる．例えば $\mathbf{C}_z$ の点 $1+\sqrt{-1}$ は $\mathbf{P}^1$ では

$$
\varphi_1^{-1}\left(1+\sqrt{-1}\right) = \left[1+\sqrt{-1} \colon 1\right]
$$

であり $\mathbf{C}_w$ の点 $1/(1+\sqrt{-1})$ は $\mathbf{P}^1$ では

$$
\varphi_0^{-1}\left(\frac{1}{1+\sqrt{-1}}\right) = \left[1 \colon \frac{1}{1+\sqrt{-1}}\right] = \left[1+\sqrt{-1} \colon 1\right]
$$

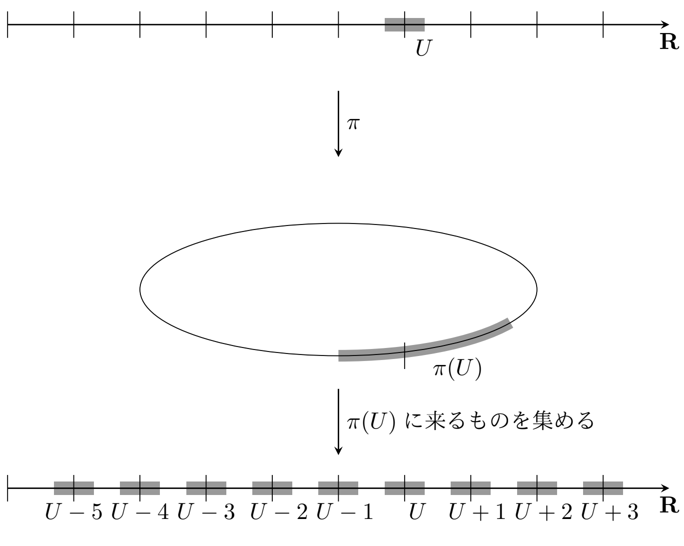

図 2　商写像の逆像 2

*4 全くの余談だが w を ‘オメガ’ と見間違える人が多いので 2 つとも並べておく．w が ‘ダブリュー’ で，ω が ‘オメガ’ である．ちなみに ϖ は ‘オメガバー’ ではなく ‘パイ’ である（TEX では \varpi と入力する）．

である．本節では，$\mathbf{C}_z$ と $\mathbf{C}_w$ の間の関係を調べる．

いまの $1+\sqrt{-1}$ の例を見ると

$$z=\frac{1}{w} \tag{2.4}$$

の関係が成り立っているようである．他の例も見る．例えば点 $[2\colon 1]$ と点 $[1\colon 1/2]$ は $\mathbf{P}^1$ では同じものである．これらをそれぞれ φ_1, φ_0 で $\mathbf{C}_z$, $\mathbf{C}_w$ の点とみなすと座標値は $z=2$ と $w=1/2$ である．したがって $z=1/w$ が成り立つ．

$z=0$ のときはうまくいかない．$[z\colon 1]=[1\colon 1/z]=[1\colon w]$ のようにして $w=1/z$ となるものを見つけたいが $w=1/0$ となってしまい不合理である．$w=0$ のときも同様である．そもそも φ_0 は U_0 上で定義されており，$z=0$ となる $[0\colon 1]$ のような点に対しては w の値は定まっていない．つまり，関係式 (2.4) が成り立つためには z も w も 0 でないことが必要である．逆に z と w のどちらも 0 でなければ，関係式 (2.4) が成り立つ．

$z,w\neq 0$ は (2.3) より $[z\colon w]\in U_0\cap U_1$ ということである．$[z\colon w]\in U_0\cap U_1$ のとき z は w の正則関数になっている．$\varphi_0(U_0\cap U_1)=\mathbf{C}_w-\{0\}=\mathbf{C}_w\cap\mathbf{C}_z=\mathbf{C}_z-\{0\}=\varphi_1(U_0\cap U_1)$ なので，この正則関数を $\varphi_{10}\colon \mathbf{C}_w-\{0\}=\varphi_0(U_0\cap U_1)\to\mathbf{C}_z-\{0\}=\varphi_1(U_0\cap U_1)$ とかくことにすると，次の図式が可換になる．

$$\begin{tikzcd}
U_0\cap U_1 \arrow[r, equal, "{[1\colon w]=[z\colon 1]}"] & U_0\cap U_1 \arrow[d, "\varphi_1"] \\
\mathbf{C}_w-\{0\} \arrow[u, "\varphi_0^{-1}"] \arrow[r, "\varphi_{10}"'] & \mathbf{C}_z-\{0\}
\end{tikzcd}$$

つまり，$\varphi_{10}=\varphi_1\circ\varphi_0^{-1}$ である．この正則関数を貼りあわせ関数と呼ぶ．また，$\varphi_{01}=\varphi_0\circ\varphi_1^{-1}\colon \varphi_1(U_0\cap U_1)\to\varphi_0(U_0\cap U_1)$ も $w=1/z$ として同様に定まる．これは正則であり φ_{10} の逆関数でもある．

2.3　複素多様体とリーマン面

$\mathbf{C}^n$ での座標が $z=(z^1,\ldots,z^n)$ であるとき複素数空間 $\mathbf{C}^n$ を $\mathbf{C}^n_z$ とか $\mathbf{C}^n_{(z^1,\ldots,z^n)}$ とかく．$\mathcal{U}$ を $\mathbf{C}^n$ の空でない開集合とする．このとき，$\mathcal{U}$ で定義された複素数値関数 f は標準座標を用いて $f(z)=f(z^1,\ldots,z^n)$ とかける．

f が $\mathcal{U}$ で**正則**であるとは，次の条件 (1), (2) のどちらかをみたすことをいう．（これらは同値．）

(1) $f(z)$ は $\mathcal{U}$ で連続であり，各変数 z^j $(j=1,\ldots,n)$ について正則である．

(2) $\mathcal{U}$ の各点 $a=(a^1,\ldots,a^n)$ に対して，関数 $f(z)$ は a の近傍で収束巾級数

$$f(z)=\sum_{|\alpha|=0}^{\infty}c_{\alpha_1\ldots\alpha_n}(z^1-a^1)^{\alpha_1}\ldots(z^n-a^n)^{\alpha_n}$$

で表される．

定義 2.5 (n 次元複素多様体 [3, 定義 4.1])**.** X を位相空間とする．$(\varphi_i\colon U_i \to \mathcal{U}_i)_{i\in I}$ を写像の族とする．このとき，対 $(X, (\varphi_i)_i)$ が次の条件 (1)–(4) をみたすとき，X を台集合とし $(\varphi_i)_i$ を座標近傍系とする n **次元複素多様体** (n-dimensional complex manifold) という．

(1) X は空集合でなく，第 2 可算公理を満たす連結なハウスドルフ空間である[*5]．

(2) すべての $i \in I$ に対して U_i は X の空でない開集合であり，$(U_i)_i$ は X の開披覆である．

(3) すべての $i \in I$ に対して，$\mathcal{U}_i$ は $\mathbf{C}^n_{(z^1,\dots,z^n)}$ の空でない開集合であり $\varphi_i\colon U_i \to \mathcal{U}_i$ は同相である．

(4) 任意の $i \neq j \in I$ で $U_i \cap U_j \neq \varnothing$ をみたすものに対して $\mathcal{U}_{ij} \coloneqq \varphi_j(U_i \cap U_j) \subset \mathcal{U}_j$ とおくとき，$\varphi_{ij} \coloneqq \varphi_i \circ \varphi_j^{-1}\big|_{\mathcal{U}_{ij}} \colon \mathcal{U}_{ij} \to \mathcal{U}_{ji}$ は正則である．

例 2.6. $X = (X, (\varphi_i\colon U_i \to \mathcal{U}_i)_{i\in I})$ を n 次元複素多様体とし，U を X の領域とする．$J \coloneqq \{i \in I; U \cap U_i \neq \varnothing\}$ とおく．U は $(\varphi_j|_{U\cap U_j})_{j\in J}$ を座標近傍系とする n 次元複素多様体になる．この多様体 U を開部分（複素）多様体という．

1 次元複素多様体を**リーマン面** (Riemann surface) という．

命題 2.7. リーマン球面 $\mathbf{P}^1$ はリーマン面である．

証明. (1) 補題 2.3.4 からしたがう．

(2) (2.2) と (2.3) からしたがう．

(3) 補題 2.3.2 からしたがう．

(4) 2.2 節で説明した． □

$\mathbf{P}^1$ のような，台空間がコンパクトなリーマン面をとくにコンパクトリーマン面という．例 2.6 のように，リーマン面 X の領域 U はリーマン面になる．この U を X 開リーマン面という．

定義 2.8. X を n 次元複素多様体, Y を m 次元複素多様体とする．$f\colon X \to Y$ を X から Y への連続写像とする．

1. P を X の点とする．$P, f(P)$ の近傍での f のある座標表示 $w_j = f_{ij}(z_i)$, きちんと書くと $(w_j^1, \dots, w_j^m) = \big(f_{ij}^1(z_i^1, \dots, z_i^n), \dots, f_{ij}^m(z_i^1, \dots, z_i^n)\big)$ が $z_i(P) = (z_i^1(P), \dots, z_i^n(P))$ で正則であるとき，f は P で**正則**であるという．

2. f がすべての点 $\in X$ で正則であるとき f を**正則写像** (holomorphic mapping) とか**正則射** (holomorphism) という．また $\mathbf{C}$ への正則写像を**正則関数** (holomorphic function) という．

3. U を X の空でない開集合とする．U 上の関数 f は U の各連結成分上正則であるとき U 上の正則関数という．ここで，複素多様体の領域は例 2.6 の方法で複素多様体とみなしている．

定義 2.9. X と Y を n 次元複素多様体とする．$f\colon X \to Y$ を正則写像とする．正則写像 $g\colon Y \to X$ で $g \circ f = \mathrm{id}_X$ かつ $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ をみたすものが存在するとき，f を**双正則写像** (biholomorphic mapping) とか**双正則射** (biholomorphism) という．X から Y への双正則写像が

[*5] 条件 (1) のうち第 2 可算と連結を課さないことも多い ([5] など)．

存在するとき，X と Y は**同形** (isomorphic) とか**双正則同値** (biholomorphically equivalent)，またはたんに**双正則** (biholomorhic) であるという．

3　1 次元における諸結果

3.1　リーマン球面の等質性

有理形関数と有理関数体の一対一対応

補題 3.1. z の有理関数 $t = g(z)$ は $\mathbf{P}^1$ 上の正則関数

3.2　リーマンロッホの定理

次はリーマンロッホの定理の特殊な場合である．

定理 3.2 ([3, 命題 1.14])**.** $P_1, \ldots, P_m$ を $\mathbf{P}^1$ の互いに相異なる点とする．$\mathbf{P}^1$ 上の有理形関数で各 P_i のみで高々 n_i の極をもつもの全体

$$\Gamma\left(\mathbf{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}\left(\sum_{i=1}^{m} n_i P_i\right)\right)$$

は関数の和とスカラー倍によって $\mathbf{C}$ ベクトル空間を成す．さらにその空間の次元は次で与えられる．

$$\dim \Gamma\left(\mathbf{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}\left(\sum_{i=1}^{m} n_i P_i\right)\right) = 1 + \sum_{i=1}^{m} n_i.$$

証明. 関数の和は局所的に $\sum_j a_j(z-p_i)^j + \sum_j b_j(z-p_i)^j = \sum_j (a_j+b_j)(z-p_i)^j$ と表示すればよく，スカラー倍も $c\left(\sum_j a_j(z-p_i)^j\right) = \sum_j ca_j(z-p_i)^j$ とすればよい．零元は恒等的に 0 である関数である．

次元についての等式を示す．$N = \sum_{i=1}^{m} n_i$ とおく．$\mathbf{P}^1$ の等質性から，どの $i = 1, \ldots, m$ に対しても $P_i \in \mathbf{C}_z$ であるとしてよい．このとき P_i を z 座標を用いて $a_i = z(P_i)$ と表示する．$f \in \Gamma\left(\mathbf{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}\left(\sum_{i=1}^{m} n_i P_i\right)\right) - \{0\}$ とすると f は z の有理関数 $f(z) \in \mathbf{C}(z)$ を延長したものである．$\left(\Gamma\left(\mathbf{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}\left(\sum_{i=1}^{m} n_i P_i\right)\right) - \{0\} \subset \mathcal{M}_{\mathbf{P}^1}(\mathbf{P}^1) \cong \mathbf{C}(z).\right)$ f は a_i で高々 n_i の極しか持たないから $g(z) \coloneqq (z-a_1)^{n_1} \ldots (z-a_m)^{n_m} f(z)$ は $\mathbf{C}_z$ で正則である．g は有理関数 f の分数を払ったものなので多項式関数である．したがって，

$$f(z) = \frac{b_0 z^l + \cdots + b_l}{(z-a_1)^{n_1} \ldots (z-a_m)^{n_m}}, \quad b_0 \neq 0 \tag{3.1}$$

とかける．$P_i \in \mathbf{C}_z$ としたので，$z = \infty$ で f は極を持たない．よって $w = 0$ で

$$
\begin{aligned}
f_w(w) = f\left(\frac{1}{w}\right) &= \frac{b_0/w^l + \dots + b_l}{(1/w - a_1)^{n_1} \dots (1/w - a_m)^{n_m}} \\
&= \frac{b_0 w^{N-l} + \dots + b_l w^N}{(1 - a_1 w)^{n_1} \dots (1 - a_m w)^{n_m}} \\
&= w^{N-l} \frac{b_0 + \dots + b_l w^l}{(1 - a_1 w)^{n_1} \dots (1 - a_m w)^{n_m}}
\end{aligned}
$$

となる．右の分数は $w = 0$ で正則であり $b_0 \neq 0$ なので，$w = 0$ で $f_w(w) \neq 0$．f が $w = 0$ で極でないのは $l \leqq N$ のときである．

逆に $l \leqq N$ のとき，f で (3.1) の形になるものは $\Gamma\left(\mathbf{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}\left(\sum_{i=1}^m n_i P_i\right)\right)$ の元で $w = 0$ で極でないものである．よって，$\Gamma\left(\mathbf{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}\left(\sum_{i=1}^m n_i P_i\right)\right)$ の元は

$$
f_k(z) = \frac{z^k}{(z - a_1)^{n_1} \dots (z - a_m)^{n_m}}
$$

の 1 次結合でかける．$f_0, \dots f_m$ は 1 次独立であるから

$$
\dim \Gamma\left(\mathbf{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}\left(\sum_{i=1}^m n_i P_i\right)\right) = 1 + N = 1 + \sum_{i=1}^m n_i.
$$

□

4 コンパクトリーマン面

定理 4.1 (代数学の基本定理 [3, 系 2.24])**.** $n \geqq 1$ を自然数とする．複素数を係数とする n 次方程式

$$
a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n = 0, \quad a_0 \neq 0
$$

に対し，複素数解 α が存在する．

5 それから

ここはかくか微妙

6 結語

本稿はセミナーの予習ノートと板書（後述）を元に書いた．この辺りの経緯について述べる．2021 年度は対面での課外活動が制限されていた．そのため，Zoom を用いた遠隔でのセミナーを行うのが主であった．板書には Microsoft OneNote を利用した．Whiteboard Fox と異なり，14 日間で板書が削除されることもないので便利である．ただし，時々動作が重くなることがあったの

で，発表者の画面共有もしながらセミナーを行った．この発表の際に書いた板書と予習ノートが本稿の下書きに当たる．清書するにあたって行ったのは，叙述の順序を変更したことと，セミナー中に気付いたことなどのコメントを加えたことである．

参考文献

[1] 上野健爾, 代数幾何, 岩波書店, 2005.
[2] 梅村浩, 楕円関数論 楕円曲線の解析学 [増補新装版], 東京大学出版会, 2020.
[3] 小木曽啓示, 代数曲線論, 朝倉書店, 2002.
[4] 金子晃, 関数論講義 (ライブラリ数理・情報系の数学講義, 5), サイエンス社, 2021.
[5] 小林昭七, 複素幾何 1 (岩波講座現代数学の基礎, 29), 岩波書店, 1997.
[6] 神保道夫, 複素関数論 (岩波講座現代数学への入門, 4), 岩波書店, 1995.
[7] 武部尚志, 楕円積分と楕円関数 おとぎの国の歩き方, 日本評論社, 2019.
[8] 藤本坦孝, 複素解析 (岩波講座現代数学の基礎, 3), 岩波書店, 1996.
[9] 吉田洋一, 函数論 第 2 版 (岩波全書, 141), 岩波書店, 1973.