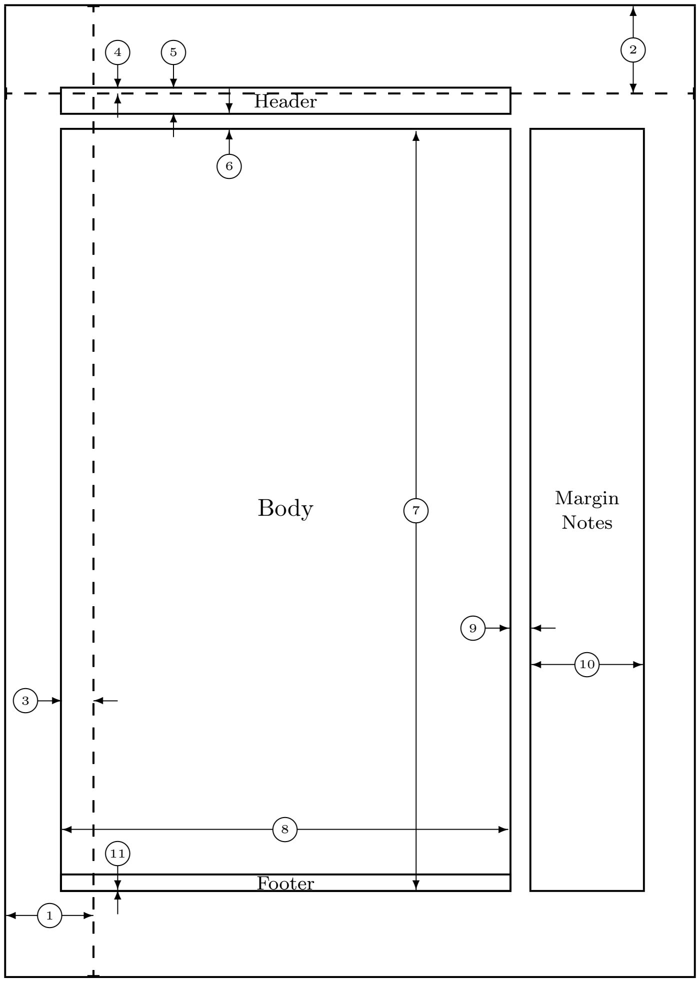
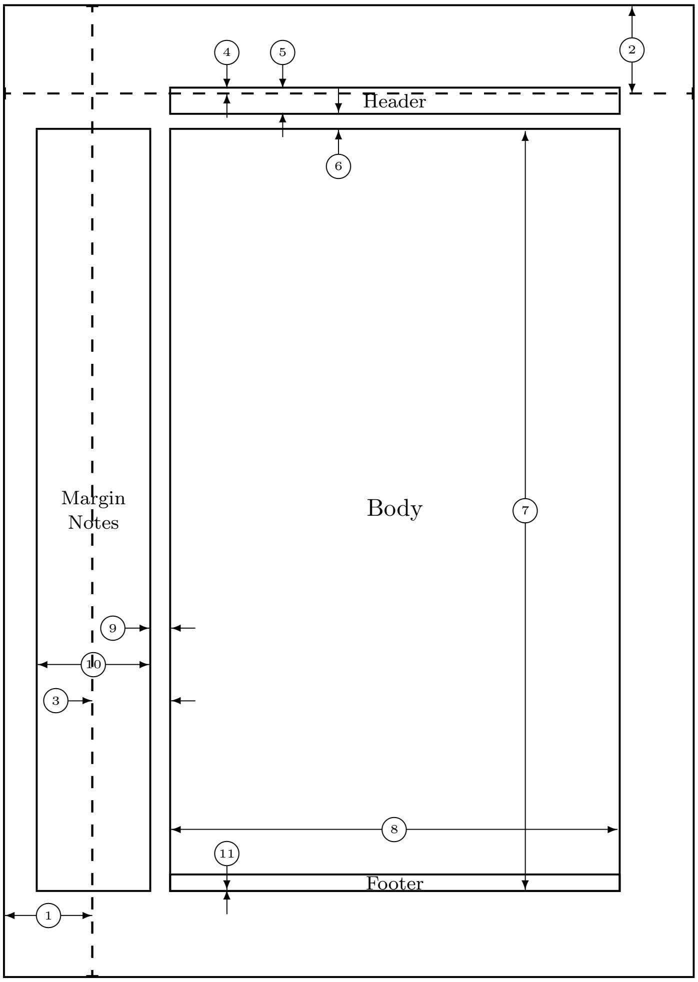
Notes on Sheaves on Manifolds

大柴寿浩



1	one inch + \hoffset	2	one inch + \voffset
3	\oddsidemargin = -26pt	4	\topmargin = -4pt
5	\headheight = 20pt	6	\headsep = 14pt
7	\textheight = 627pt	8	\textwidth = 369pt
9	\marginparsep = 18pt	10	\marginparwidth = 92pt
11	\footskip = 0pt		\marginparpush = 15pt (not shown)
	\hoffset = 0pt		\voffset = 0pt
	\paperwidth = 567pt		\paperheight = 800pt



1	one inch + \hoffset	2	one inch + \voffset
3	\evensidemargin = 65pt	4	\topmargin = -4pt
5	\headheight = 20pt	6	\headsep = 14pt
7	\textheight = 627pt	8	\textwidth = 369pt
9	\marginparsep = 18pt	10	\marginparwidth = 92pt
11	\footskip = 0pt		\marginparpush = 15pt (not shown)
	\hoffset = 0pt		\voffset = 0pt
	\paperwidth = 567pt		\paperheight = 800pt

はじめに

2023 年度から始めた [KS90] のセミナーのノート．

記号

次の記号は断りなく使う．

- 添字：なんらかの族 $(a_i)_{i\in I}$ を $(a_i)_i$ とか (a_i) と略記することがある．
- 近傍：位相空間 X の点 x や部分集合 Z に対し，その開近傍系をそれぞれ I_x や I_Z で表す．これらは，包含関係の逆で有向順序集合をなす．

第 1 章

ホモロジー代数

1.3 複体の圏

$\mathscr{C}$ を加法圏とする．

注意． 加法圏とは次の 3 つの条件 (1)–(3) をみたす圏のことである．

(1) どの対象 $X, Y \in \mathscr{C}$ に対しても $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, Y)$ が加法群になり，どの対象 $X, Y, Z \in \mathscr{C}$ に対しても合成 $\circ\colon \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(Y, Z) \times \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, Z)$ が双線型である．
(2) 零対象 $0 \in \mathscr{C}$ が存在する．さらに $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(0, 0) = 0$ が成り立つ．
(3) 任意の対象 $X, Y \in \mathscr{C}$ に対して積と余積が存在し，さらにそれらは同型になる．（それらを複積といい $X \oplus Y$ とかく．）

圏 $\mathscr{C}$ から，$\mathscr{C}$ の対象の複体の圏 $\mathrm{C}(\mathscr{C})$ を作ることができる．まず複体の定義をする．圏 $\mathscr{C}$ の対象のと射の列

$$\cdots \longrightarrow X^{n-1} \xrightarrow{d_X^{n-1}} X^n \xrightarrow{d_X^n} X^{n+1} \longrightarrow \cdots \tag{1.3.1}$$

を考える．この列 $X = ((X^n)_{n \in \mathbf{Z}}, (d_X^n)_{n \in \mathbf{Z}})$ が**複体** (complex) であるとは，任意の $n \in \mathbf{Z}$ に対し

$$d_X^{n+1} \circ d_X^n = 0 \tag{1.3.2}$$

が成り立つことをいう．

圏 $\mathscr{C}$ の対象の複体 $X = ((X^n), (d_X^n))$, $Y = ((Y^n), (d_Y^n))$ の間の射を，$\mathscr{C}$ の射の族 $(f^n\colon X^n \to Y^n)_{n \in \mathbf{Z}}$ で，図式

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & X^n \arrow[r, "d_X^n"] \arrow[d, "f^n"] & X^{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "f^{n+1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & Y^n \arrow[r, "d_Y^n"] & Y^{n+1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

を可換にする，すなわちどの番号 $n \in \mathbf{Z}$ に対しても

$$d_Y^n \circ f^n = f^{n+1} \circ d_X^n \tag{1.3.3}$$

が成り立つものとして定める．

以上の準備のもとで，$\mathscr{C}$ の複体の圏 $\mathrm{C}(\mathscr{C})$ を次のように定める．

- 対象：$\mathrm{Ob}(\mathrm{C}(\mathscr{C})) = \{\mathscr{C}$ の複体 $\}$
- 射：$\mathrm{Hom}_{\mathrm{C}(\mathscr{C})}(X, Y) = \{\mathscr{C}$ の複体の射 $\}$

このとき，$\mathrm{C}(\mathscr{C})$ は加法圏になる．

圏になることの証明． $f\colon X \to Y$ と $g\colon Y \to Z$ を $\mathrm{C}(\mathscr{C})$ の射とする．f と g の合成 $g \circ f$ は $(g^n \circ f^n)_n$ で与えられる．これがうまくいくことは

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & X^n \arrow[r, "d_X^n"] \arrow[d, "f^n"] & X^{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "f^{n+1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & Y^n \arrow[r, "d_Y^n"] \arrow[d, "g^n"] & Y^{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "g^{n+1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & Z^n \arrow[r, "d_Z^n"] & Z^{n+1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

が可換になることからわかる．

X の恒等射は $(\mathrm{id}_{X^n})_n$ で与えられる． □

加法圏になることの証明． X と Y を $\mathscr{C}$ の複体とする．

(1) 射の集合のアーベル群構造　$f, g \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{C}(\mathscr{C})}(X, Y)$ に対し，$f + g$ が $(f^n + g^n)_n$ で定まる．

(2) 零対象の存在　$\mathrm{C}(\mathscr{C})$ の零対象 0 は

$$\cdots \to 0 \xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{0} 0 \to \cdots$$

で与えられる．

(3) 複積の存在　X と Y の複積 $X \oplus Y$ は

$$\cdots \longrightarrow X^{n-1} \oplus Y^{n-1} \xrightarrow{d_X^{n-1} \oplus d_Y^{n-1}} X^n \oplus Y^n \xrightarrow{d_X^n \oplus d_Y^n} X^{n+1} \oplus Y^{n+1} \longrightarrow \cdots$$

で与えられる． □

さらに $\mathscr{C}$ がアーベル圏ならば，$\mathrm{C}(\mathscr{C})$ もアーベル圏になる．

注意． 加法圏 $\mathscr{C}$ がアーベル圏であるとは次の条件 (4), (5) をみたすことをいう．

(4) 任意の $\mathscr{C}$ の射 $f\colon X \to Y$ に対し，f の核 $\mathrm{Ker}\, f$ と余核 $\mathrm{Coker}\, f$ が存在する．

(5) 任意の $\mathscr{C}$ の射 $f\colon X \to Y$ に対し，自然に定まる射 $\mathrm{Coim}\, f \to \mathrm{Im}\, f$ は同型である．

証明． X と Y を $\mathscr{C}$ の複体とする．

(4) 核と余核の存在　複体の射 $f\colon X \to Y$ に対し，核 $\mathrm{Ker}\, f$ は $(\mathrm{Ker}\, f^n)_n$ で，余核 $\mathrm{Coker}\, f$ は $(\mathrm{Coker}\, f^n)_n$ で与えられる．

コメント (4/24)．「Ker f の differential の構成はどうなっていますか？」
　次の図式を考える．

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \operatorname{Ker} f^n \arrow[r, "\overline{d}_X^n"] \arrow[d, "\iota^n"] & \operatorname{Ker} f^{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "\iota^{n+1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & X^n \arrow[r, "d_X^n"] \arrow[d, "f^n"] & X^{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "f^{n+1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & Y^n \arrow[r, "d_Y^n"] & Y^{n+1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

ここで，ι^n は $\operatorname{Ker} f^n$ の普遍性から自然に定まる射である．$\overline{d}_X^n\colon \operatorname{Ker} f^n \to \operatorname{Ker} f^{n+1}$ が $d_X^n \circ \iota^n$ によって定められることを示せば良い．

$$f^{n+1} \circ d_X^n \circ \iota^n = d_Y^n \circ f^{n+1} \circ \iota^n = d_Y^n \circ 0 = 0$$

より，$d_X^n \circ \iota^n$ は $\operatorname{Ker} f^{n+1}$ に値を取る．したがって，$\overline{d}_X^n\colon \operatorname{Ker} f^n \to \operatorname{Ker} f^{n+1}$ が定まる．

(5) **余像と像が同型になること**　各次数 n ごとに $\operatorname{Coim} f^n \cong \operatorname{Im} f^n$ が成り立つことから従う． □

　圏 $\mathrm{C}(\mathscr{C})$ の充満部分圏 $\mathrm{C}^+(\mathscr{C})$, $\mathrm{C}^-(\mathscr{C})$, $\mathrm{C}^{\mathrm{b}}(\mathscr{C})$ を

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ob}(\mathrm{C}^+(\mathscr{C})) &= \left\{0 \to X^n \xrightarrow{d_X^n} X^{n+1} \to \cdots \quad (n \ll 0)\right\}, \\
\mathrm{Ob}(\mathrm{C}^-(\mathscr{C})) &= \left\{\cdots \to X^{n-1} \xrightarrow{d_X^{n-1}} X^n \to 0 \quad (n \gg 0)\right\}, \\
\mathrm{Ob}(\mathrm{C}^{\mathrm{b}}(\mathscr{C})) &= \{0 \to X^n \to \cdots \to X^m \to 0 \quad (n \ll 0, m \gg 0)\}
\end{aligned}$$

で定める．
　$\mathscr{C}$ の対象 X に対し $\mathrm{C}(\mathscr{C})$ の対象

$$\cdots \to 0 \to X \to 0 \to \cdots$$

を対応させることによって，忠実充満な関手 $\mathscr{C} \hookrightarrow \mathrm{C}(\mathscr{C})$ が定まる．
　k を整数とする．$\mathscr{C}$ の複体

$$X\colon \cdots \longrightarrow X^{n-1} \xrightarrow{d_X^{n-1}} X^n \xrightarrow{d_X^n} X^{n+1} \longrightarrow \cdots$$

に対し，$X[k]$ を $X[k]^n = X^{n+k}$, $d_{X[k]}^n = (-1)^k d_X^{n+k}$ で定める．図式でかくと

$$X[k]\colon \cdots \longrightarrow X^{n+k-1} \xrightarrow{(-1)^k d_X^{n+k-1}} X^{n+k} \xrightarrow{(-1)^k d_X^{n+k}} X^{n+k+1} \longrightarrow \cdots$$

のようになる．X から Y への射 $f\colon X \to Y$ に対し，$f[k]\colon X[k] \to Y[k]$ を $f[k]^n = f^{n+k}$ で定める．X を $X[k]$ に対応させることで関手 $[k]\colon \mathrm{C}(\mathscr{C}) \to \mathrm{C}(\mathscr{C})$ が定まる．この関手を次数 k のシフト関手と呼ぶ．

$[k]$ が関手になることの証明．$X[k]$ が複体になること：

$$(-1)^k d_X^{n+k} \circ (-1)^k d_X^{n+k-1} = (-1)^{2k} d_X^{n+k} \circ d_X^{n+k-1} = 0.$$

$f[k]$ が複体の射になること：

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & X^{n+k} \arrow[r, "(-1)^k d_X^{n+k}"] \arrow[d, "f^{n+k}"] & X^{n+k+1} \arrow[r] \arrow[d, "f^{n+k+1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & Y^{n+k} \arrow[r, "(-1)^k d_Y^{n+k}"] & Y^{n+k+1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

が可換になることを示せばよい．

$$f^{n+k+1} \circ (-1)^k d_X^{n+k+1} = (-1)^k f^{n+k+1} \circ d_X^{n+k+1} = (-1)^k d_Y^{n+k+1} \circ f^{n+k}.$$

$[k]$ が合成を保つこと：$f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$ を複体の射とする．このとき

$$(g[k] \circ f[k])^n = g[k]^n \circ f[k]^n = g^{n+k} \circ f^{n+k} = (g \circ f)^{n+k} = (g \circ f)[k]^n$$

が成り立つ．

$[k]$ が恒等射を保つこと：$\mathrm{id}_X[k]^n = \mathrm{id}_X^{n+k} = \mathrm{id}_{X[k]}^n$. □

■ホモトピー　$\mathscr{C}$ の複体の圏 $\mathrm{C}(\mathscr{C})$ から，ホモトピックな射を同一視することによって，新たな圏 $\mathsf{K}(\mathscr{C})$ が得られる．まず準備．

$\mathrm{C}(\mathscr{C})$ を圏 $\mathscr{C}$ の複体の圏とする．$X, Y \in \mathrm{C}(\mathscr{C})$ とする．$f\colon X \to Y$ が 0 にホモトピックであるとは，$\mathscr{C}$ の射の族 $(s^n\colon X^n \to Y^{n-1})$ で，

(1.3.4) $$f^n = d_Y^{n-1} \circ s^n + s^{n+1} \circ d_X^n \quad (n \in \mathbf{Z})$$

となるものが存在することをいう．

$f, g\colon X \to Y$ に対し，$f - g$ が 0 にホモトピックであるとき，f と g はホモトピックであるといい，$f \simeq g$ とかく．f が 0 とホモトピックであることを $f \simeq 0$ で表す．このとき $s = (s^n)$ を f と g の間のホモトピーという．$\simeq$ は同値関係である．

証明． f, g, h を X から Y への $\mathscr{C}$ の複体の射とする．
反射律　$(s^n = 0)$ が f と f の間のホモトピーを与える．
対称律　f と g の間のホモトピーを s とするとき，$-s$ が g と f の間のホモトピーを与える．
推移律　f と g の間のホモトピーを s, g と h の間のホモトピーを t とする．このとき，$s + t$ が f と h の間のホモトピーを与える． □

命題 1.3.1. $X, Y \in \mathrm{C}(\mathscr{C})$ に対し，$\mathrm{Hom}_{\mathrm{C}(\mathscr{C})}(X, Y)$ の加法部分群 $\mathrm{Ht}(X, Y)$ を

(1.3.5) $$\mathrm{Ht}(X, Y) := \{f \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{C}(\mathscr{C})}(X, Y) \mid f \simeq 0\}$$

で定める．複体の射 $f\colon X \to Y$ と $g\colon Y \to Z$ のどちらかが 0 にホモトピックならば，合成 $g \circ f$ は 0 にホモトピックになる．したがって，射の合成は次の写像をひきおこす．

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{C}(\mathscr{C})}(Y, Z) \times \mathrm{Ht}(X, Y) \to \mathrm{Ht}(X, Z),$$
$$\mathrm{Ht}(Y, Z) \times \mathrm{Hom}_{\mathrm{C}(\mathscr{C})}(X, Y) \to \mathrm{Ht}(X, Z).$$

証明． $f \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}(\mathscr{C})}(X, Y)$, $g \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}(\mathscr{C})}(Y, Z)$ とする．

$f \simeq 0$ のとき，s を 0 とのホモトピーとすると，$g \circ f$ と 0 との間のホモトピーは

$$(g^{n-1} \circ s^n \colon X^n \to Y^{n-1} \to Z^{n-1})_n$$

で与えられる．

$g \simeq 0$ のとき，t を 0 とのホモトピーとすると，$g \circ f$ と 0 との間のホモトピーは

$$(t^n \circ f^n \colon X^n \to Y^n \to Z^{n-1})_n$$

で与えられる． □

以上の準備のもとで，圏 $\mathscr{C}$ のホモトピー圏 $\mathsf{K}(\mathscr{C})$ を次のように定める．

- 対象：$\mathrm{Ob}(\mathsf{K}(\mathscr{C})) = \mathrm{Ob}(\mathsf{C}(\mathscr{C}))$
- 射：$\mathrm{Hom}_{\mathsf{K}(\mathscr{C})}(X, Y) = \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}(\mathscr{C})}(X, Y) / \mathrm{Ht}(X, Y)$

$\mathsf{K}(\mathscr{C})$ は加法圏になる．

$\mathsf{K}(\mathscr{C})$ が加法圏になることの証明． 命題 1.3.1 より，射の合成がきちんと定まる．

各 $X, Y \in \mathsf{K}(\mathscr{C})$ に対する $\mathrm{Hom}_{\mathsf{K}(\mathscr{C})}(X, Y)$ のアーベル群構造は $\mathrm{Ht}(X, Y)$ による剰余群の構造として得られ，さらに命題 1.3.1 より，合成の双線型性が得られる．

零対象と複積は $\mathsf{C}(\mathscr{C})$ と同様である． □

圏 $\mathsf{K}(\mathscr{C})$ の充満部分圏 $\mathsf{K}^+(\mathscr{C})$, $\mathsf{K}^-(\mathscr{C})$, $\mathsf{K}^{\mathrm{b}}(\mathscr{C})$ を，それぞれ $\mathsf{C}^+(\mathscr{C})$, $\mathsf{C}^-(\mathscr{C})$, $\mathsf{C}^{\mathrm{b}}(\mathscr{C})$ と同じ対象をとって定める．

■コホモロジー　$\mathscr{C}$ をアーベル圏とする．$X \in \mathsf{C}(\mathscr{C})$ に対し，

$$\begin{aligned} Z^k(X) &\coloneqq \mathrm{Ker}\, d_X^k, \\ B^k(X) &\coloneqq \mathrm{Im}\, d_X^{k-1}, \\ H^k(X) &\coloneqq \mathrm{Ker}\, d_X^k / \mathrm{Im}\, d_X^{k-1} \end{aligned}$$

とおく．$H^k(X)$ を複体 X の k 次のコホモロジーという．

注意． 完全列 $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ に対し，Z を Y の商対象といい，Y/X とかく．一般に単射 $i \colon X \hookrightarrow Y$ の余核 $\mathrm{Coker}\, i$ を Y/X とかける．

任意の k に対し H^k は $\mathsf{C}(\mathscr{C})$ から $\mathscr{C}$ への加法関手を定める．

$$H^k(X) = H^0(X[k]) \tag{1.3.6}$$

$f \colon X \to Y$ が 0 とホモトピックならば，$H^k(f) \colon H^k(X) \to H^k(Y)$ は 0．よって H^k は $\mathsf{K}(\mathscr{C})$ から $\mathscr{C}$ への関手を定める．

完全列たち

$$\begin{aligned} &X^{k-1} \to Z^k(X) \to H^k(X) \to 0, \\ &0 \to H^k(X) \to \mathrm{Coker}\, d_X^{k-1} \to X^{k+1}, \\ &0 \to Z^{k-1}(X) \to X^{k-1} \to B^k(X) \to 0, \\ &0 \to B^k(X) \to X^k \to \mathrm{Coker}\, d_X^{k-1} \to 0, \\ &0 \to H^k(X) \to \mathrm{Coker}\, d_X^{k-1} \xrightarrow{d_X^k} Z^{k+1}(X) \to H^{k+1}(X) \to 0. \end{aligned}$$

命題 1.3.2. $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ を $\mathrm{C}(\mathscr{C})$ の完全列とする．このとき，$\mathscr{C}$ における次の長完全列が存在する．

$$\cdots \to H^n(X) \to H^n(Y) \to H^n(Z) \xrightarrow{\delta} H^{n+1}(X) \to \cdots.$$

■切り落とし　$X \in \mathrm{C}(\mathscr{C})$ と整数 n に対し，$\tau^{\leqq n}(X), \tau^{\geqq n}(X) \in \mathrm{C}(\mathscr{C})$ を

$$\tau^{\leqq n}(X)\colon\ \cdots \to X^{n-2} \to X^{n-1} \to \operatorname{Ker} d^n \to 0 \to \cdots, \tag{1.3.7}$$

$$\tau^{\geqq n}(X)\colon\ \cdots 0 \to \operatorname{Coker} d^{n-1} \to X^{n+1} \to X^{n+2} \to \cdots \tag{1.3.8}$$

で定める．このとき，$\mathrm{C}(\mathscr{C})$ における次の射が得られる．

$$\tau^{\leqq n}(X) \to X, \quad X \to \tau^{\geqq n}(X),$$

また，$n' \leqq n$ ならば

$$\tau^{\leqq n'}(X) \to \tau^{\leqq n}(X), \quad \tau^{\geqq n'}(X) \to \tau^{\geqq n}(X).$$

命題 1.3.3.

1. 自然な射 $H^k(\tau^{\leqq n}(X)) \to H^k(X)$ は $k \leqq n$ ならば同型であり，$k > n$ では $H^k(X) = 0$ である．
2. 自然な射 $H^k(X) \to H^k(\tau^{\geqq n}(X))$ は $k \geqq n$ ならば同型であり，$k < n$ では $H^k(X) = 0$ である．

注意 1.3.4. ホモトピー同値

1.4　写像錐

$\mathscr{C}$ を加法圏とし $f\colon X \to Y$ を $\mathrm{C}(\mathscr{C})$ の射とする．

定義 1.4.1. f の写像錐 $M(f)$ とは次で定まる $\mathrm{C}(\mathscr{C})$ の対象である．

$$\begin{cases} M(f)^n = X^{n+1} \oplus Y^n, \\ d^n_{M(f)} = \begin{bmatrix} d^n_{X[1]} & 0 \\ f^{n+1} & d^n_Y \end{bmatrix} \end{cases}$$

射 $\alpha(f)\colon Y \to M(f)$ と $\beta(f)\colon M(f) \to X[1]$ を次で定める．

$$\alpha(f)^n = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathrm{id}_{Y^n} \end{bmatrix}, \tag{1.4.1}$$

$$\beta(f)^n = \begin{bmatrix} \mathrm{id}_{X^{n+1}} & 0 \end{bmatrix}. \tag{1.4.2}$$

コメント (4/24). 「どうして逆に $X \to M(f)$ や $M(f) \to Y$ じゃないんですか？」

例えば，逆に $\Gamma^n\colon M(f)^n \to Y^n$ を $\begin{bmatrix} 0 & \mathrm{id}_{Y^n} \end{bmatrix}$ で定めようとしても，

$$\Gamma^{n+1} \circ d^n_{M(f)} = \begin{bmatrix} 0 & \mathrm{id}_{Y^n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d^n_{X[1]} & 0 \\ f^{n+1} & d^n_Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f^{n+1} & d^n_Y \end{bmatrix},$$
$$d^n_Y \circ \Gamma^n = d^n_Y \circ \begin{bmatrix} 0 & \mathrm{id}_{Y^n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & d^n_Y \end{bmatrix}$$

となり，両者は一致しない．したがって，Γ は複体の射にならない．$X \to M(f)$ も同様である．したがって，$M(f)$ に対して定まる自然な射は α, β のようにせざるを得ない．

補題 1.4.2. 任意の $\mathrm{C}(\mathscr{C})$ の射 $f\colon N \to Y$ に対し，$\phi\colon X[1] \to M(\alpha(f))$ で次の条件をみたすものが存在する．

1. ϕ は $\mathsf{K}(\mathscr{C})$ で同型である，
2. 次の図式は $\mathsf{K}(\mathscr{C})$ で可換になる：

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "\alpha(f)"] \arrow[d, "\mathrm{id}_Y"] & M(f) \arrow[r, "\beta(f)"] \arrow[d, "\mathrm{id}_{M(f)}"] & X[1] \arrow[r, "-f[1]"] \arrow[d, "\phi"] & Y[1] \arrow[d, "\mathrm{id}_{Y[1]}"] \\
Y \arrow[r, "\alpha(f)"] & M(f) \arrow[r, "\alpha(\alpha(f))"] & M(\alpha(f)) \arrow[r, "\beta(\alpha(f))"] & Y[1].
\end{tikzcd}$$

2023/05/01

1.5　三角圏

$\mathscr{C}$ を加法圏とし，$T\colon \mathscr{C} \to \mathscr{C}$ を自己関手とする．$\mathscr{C}$ の三角とは射の列

$$X \to Y \to Z \to T(X)$$

のことである．

定義 1.5.1. 三角圏 $\mathscr{C}$ は次のデータ (1.5.1), (1.5.2) と規則 (TR0)–(TR5) からなる．
1.5.1

データ

(1.5.1)　　加法圏 $\mathscr{C}$ と自己関手 $T\colon \mathscr{C} \to \mathscr{C}$ の組,

(1.5.2)　　特三角 (distinguished triangle) の族.

規則 (TR0)　特三角に同形な三角は特三角である．

(TR1)　任意の対象 $X \in \mathscr{C}$ に対し，$X \xrightarrow{\mathrm{id}_X} X \longrightarrow 0 \longrightarrow T(X)$ は特三角である．

(TR2)　$\mathscr{C}$ の任意の射 $f\colon X \to Y$ は特三角 $X \xrightarrow{f} Y \to Z \to T(X)$ に埋め込める．つまり $Z \in \mathscr{C}$ で $X \xrightarrow{f} Y \to Z \to T(X)$ が特三角となるものが存在する．

(TR3)　$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} T(X)$ が特三角であることと $Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} T(X) \xrightarrow{-T(f)} T(Y)$ が特三角であることは同値である．

(TR4)　２つの特三角 $X \xrightarrow{f} Y \to Z \to T(X)$, $X' \xrightarrow{f'} Y' \to Z' \to T(X')$ に対し，可換図式

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"] & Y \arrow[d, "v"] \\ X' \arrow[r, "f'"] & Y' \end{tikzcd}$$

は特三角の射に埋め込める．

(TR5)　（八面体公理）．３つの特三角

$$X \xrightarrow{f} Y \to Z' \to T(X),$$
$$Y \xrightarrow{g} Z \to X' \to T(Y),$$
$$X \xrightarrow{g\circ f} Z \to Y' \to T(X)$$

に対し，

1.6　圏の局所化

第 2 章

層

2.1 層の演算

2.1.1 部分集合から定まる関手

X を位相空間とする．Z を X の部分集合とし，$j\colon Z \hookrightarrow X$ を包含写像とする．

■制限の一般的な定義　$F \in \mathrm{Sh}(X)$ に対し，

$$F|_Z \coloneqq j^{-1}F, \tag{2.1.1}$$
$$\Gamma(Z;F) \coloneqq \Gamma\left(Z; j^{-1}F\right) \tag{2.1.2}$$

とおく．Z が開集合のとき，元の定義に一致する．

元の定義に一致することのチェック．$U \subset Z$ を開集合とすると，

$$\begin{aligned}\Gamma\left(U; j^{-1}F\right) &= \varinjlim_{j(U)\subset V} F(V) \\ &= F(j(U)) = F(U) = F|_Z(U)\end{aligned}$$

となる．□

■順像を用いた閉集合での定義　Z が閉集合であるときを考える．このとき，$F \in \mathrm{Sh}(X)$ に対し，

$$F_Z \coloneqq j_* j^{-1}F$$

とおく．

コメント 2.1.1.　池ノート [Ike21] や竹内 [Tak17] だと，固有順像 (2.1.2 項) を定義してから，$j_! j^{-1}F$ で切り落としを定義している．閉集合からの包含写像に対しては $j_! = j_*$ であり，これらの定義は一致する．

2.1.2 固有順像

$f_!\colon \mathrm{Sh}(X) \to \mathrm{Sh}(Y)$ について，f がプロパーなら $f_! \cong f_*$ である．つまり，コメント 2.1.1 の主張はもっと一般に f がプロパーなら成り立つ．

2.2　弱大域次元

アーベル層の圏はアーベル圏になる．したがって層の導来圏が考えられる．

$\cdot \otimes \cdot$ の導来関手を考えたいが，テンソルに関する複体が有界になるとは限らないので，平坦分解の長さが有限になるという仮定をおく．

命題 2.2.1.　A を環とする．

1. 自由加群は射影加群である．
2. 射影加群は自由加群の自由加群の直和因子である．
3. 射影加群は平坦加群である．
4. $n \geqq 0$ を整数とする．次の条件 (a)–(b)$^{\mathrm{op}}$ は同値である．
   (a) 任意の $j > n$, $N \in \mathrm{Mod}(A^{\mathrm{op}})$, $M \in \mathrm{Mod}(A)$ に対し，$\mathrm{Tor}_j^A(N, M) = 0$
   (b) 任意の $M \in \mathrm{Mod}(A)$ に対し，分解
   $$0 \to P^n \to \cdots \to P^0 \to M \to 0 \quad (P^j \text{ は平坦})$$
   が存在する．
   (b)$^{\mathrm{op}}$ 任意の $M \in \mathrm{Mod}(A^{\mathrm{op}})$ に対し，分解
   $$0 \to P^n \to \cdots \to P^0 \to M \to 0 \quad (P^j \text{ は平坦})$$
   が存在する．

証明.　1. M を自由加群とする．左 A 加群の全射 $g\colon N \twoheadrightarrow N'$ に対し，

$$g_*\colon \mathrm{Hom}_A(M, N) \to \mathrm{Hom}_A(M, N') \quad \text{in } \mathrm{Mod}(\mathbf{Z})$$

が全射であることを示す．$\psi\colon M \to N'$ を A 加群の射とする．I を $M \cong A^{\oplus I}$ となる添字集合とすると任意の $m \in M$ は，M の生成系 (m_i) と $(a_i)_i \in A^{\oplus I}$ を用いて，$m = \sum_{i \in I} a_i m_i$ とかける．このとき，

$$\psi(m) = \sum_i a_i \psi(m_i) \in N'$$

であり，g が全射なので，$n \in N$ で

$$g(n) = \psi(m) = \sum_i a_i \psi(m_i), \quad \psi(m_i) = g(n_i)$$

となるものがある．この $(n_i)_i$ に対して，$\phi\colon M \to N$ を

$$\phi(m_i) = n_i$$

で定めると，

$$(g_*(\phi))(m_i) = g \circ \phi(m_i) = g(n_i) = \psi(m_i)$$

となる．

2. P を射影加群とする．自由加群 $A^{\oplus I}$ と全射 $p\colon A^{\oplus I} \twoheadrightarrow P$ が存在する．実際，$I = P$ として，p を $p((a_x)_{x\in P}) = \sum_{x\in P} a_x x$ と定めればよい．$Q = \operatorname{Ker} p$ とすると，
$$0 \to Q \hookrightarrow A^{\oplus I} \twoheadrightarrow P \to 0$$
は完全列である．このとき，P が射影加群であることから，id_P に対して，$u\colon P \to A^{\oplus I}$ で
$$p_*(u) = p \circ u = \mathrm{id}_P$$
となる者が存在する．したがって，上の完全列は分裂し，$A^{\oplus I} \cong P \oplus Q$ となる．
3. まず「自由 $\Rightarrow$ 平坦」を示す．$F = A^{\bigoplus I}$ を自由加群とし，
$$0 \to N_1 \to N_2 \to N_3 \to 0$$
を右 A 加群の完全系列とする．
$$0 \to N_1 \otimes A^{\bigoplus I} \to N_2 \otimes A^{\bigoplus I} \to N_3 \otimes A^{\bigoplus I} \to 0$$
において，
$$N_1 \otimes A^{\bigoplus I} \cong N_1^{\bigoplus I}, \quad N_2 \otimes A^{\bigoplus I} \cong N_2^{\bigoplus I}$$
であり，$j\colon N_1 \to N_2$ は単射なので，
$$\bigoplus_{i\in I} j_i\colon N_1^{\bigoplus I} \to N_2^{\bigoplus I}$$
で

□

2.3 非特性変形補題

命題 2.3.1 ([KS90, Prop. 2.5.1])**.**　X を位相空間とし，Z を部分空間とする．F を X 上の層とし，自然な射

$$\psi\colon \varinjlim_{U\in I_Z} \Gamma(U;F) \to \Gamma(Z;F)$$

を考える．

(i) ψ は単射である．

(ii) X がハウスドルフで Z がコンパクトならば，ψ は同型である．

命題 2.3.2 ([KS90, Prop. 1.12.4])**.**

$$\phi_k\colon H^k(\varinjlim X) \to \varprojlim H^k(X_n)$$

について，$H^{i-1}(X_n)$ が ML 条件を満たすならば，ϕ_k は一対一対応である．

命題 2.3.3 ([KS90, Prop. 1.12.6])**.**　$(X_s, \rho_{s,t})$ を実数を添字とする射影系とする．

$$\lambda_s\colon X_s \to \varprojlim_{r<s} X_r, \quad \mu_s\colon \varinjlim_{t>s} X_t \to X_s$$

がどちらも単射（全射）ならば，すべての実数 $s_0 \leqq s_1$ に対し，$\rho_{s_0,s_1}\colon X_{s_1} \to X_{s_0}$ は単射（全射）となる．

命題 2.3.4 ([KS90, Prop. 2.7.2, 非特性変形補題])**.**　X をハウスドルフ空間とし，$F \in \mathsf{D}^+(\mathbf{Z}_X)$ とする．また，$(U_t)_{t\in\mathbf{R}}$ を X の開集合の族で次の条件 (i)–(iii) をみたすものとする．

(i) 任意の実数 t に対し，$\bigcup_{s<t} U_s = U_t$ が成り立つ．

(ii) 任意の実数 $s \leqq t$ に対し，$\overline{U_t - U_s} \cap \operatorname{supp} F$ はコンパクト集合である．

(iii) 実数 s に対して $Z_s = \bigcap_{t>s} \overline{U_t - U_s}$ とおくとき，任意の実数 $s \leqq t$ と任意の点 $x \in Z_s - U_t$ に対して $(\mathrm{R}\Gamma_{X-U_t}(F))_x = 0$ が成り立つ．

このとき，任意の実数 t に対して，次の同型が成り立つ．

$$\mathrm{R}\Gamma\left(\bigcup_{s\in\mathbf{R}} U_s; F\right) \xrightarrow{\sim} \mathrm{R}\Gamma(U_t;F)$$

証明． 次の条件を考える．

$$(a)_k^s: \quad \varinjlim_{t>s} H^k(U_t;F) \xrightarrow{\sim} H^k(U_s;F)$$
$$(b)_k^t: \quad \varprojlim_{s<t} H^k(U_s;F) \xleftarrow{\sim} H^k(U_t;F)$$

任意の実数 s と任意の整数 k に対して $(a)_k^s$ が，任意の実数 t と任意の整数 $k<k_0$ に対して $(b)_k^t$ が成り立つとする．このとき，k_0 に対し，$(b)_{k_0}^t$ が成り立つことを示す．命題 2.3.3 より，($(a)_k^s$ の方が μ_s，$(b)_k^t$ の方が λ_t として）各次数 $k<k_0$ と各実数 $s \leqq t$ に対し，

$$H^k(U_t;F) \xrightarrow{\sim} H^k(U_s;F) \tag{2.3.1}$$

が成り立つ．このとき，t を固定して，射影系 $\left(H^{k_0-1}\left(U_{t-\frac{1}{n}};F\right)\right)_{n\in\mathbf{N}}$ を考えると，これは ML 条件をみたす．

∵) 任意の $n \in \mathbf{N}$ に対し，

$$\rho_{n,p}\left(H^{k_0-1}\left(U_{t-\frac{1}{p}};F\right) \to H^{k_0-1}\left(U_{t-\frac{1}{n}};F\right)\right)$$

はすべて同形なので，当然安定．

よって，命題 2.3.2 より $(b)_{k_0}^t$ が従う．k に関する帰納法により，どの $t\in\mathbf{R}$ と $k\in\mathbf{Z}$ に対しても $(b)_k^t$ が成り立つ．

命題 2.7.1 を $\left(H^k\left(U_n;F\right)\right)_{n\in\mathbf{N}}$ に用いると←わかってない

k に関する帰納法で，定理の結論

$$\mathrm{R}\Gamma\left(\bigcup_{s\in\mathbf{R}} U_s;F\right) \xrightarrow{\sim} \mathrm{R}\Gamma(U_t;F)$$

が従う．

$(a)_k^s$ の証明　X を $\operatorname{supp} F$ におきかえて，どの実数 $s \leqq t$ に対しても $\overline{U_t - U_s}$ はコンパクトとしてよい．次の d.t. を考える[*1]．

$$\mathrm{R}\Gamma_{(X-U_t)}(F)|_{Z_s} \to \mathrm{R}\Gamma_{(X-U_s)}(F)|_{Z_s} \to \mathrm{R}\Gamma_{(U_t-U_s)}(F)|_{Z_s} \xrightarrow{+1}.$$

仮定 (iii) より，左と真ん中の 2 つは 0 なので，d.t. の性質から，$\mathrm{R}\Gamma_{(U_t-U_s)}(F)|_{Z_s}=0$ となる．したがって，任意の $k\in\mathbf{Z}$ と $t \geqq s$ に対し，

$$\begin{aligned} 0 &= H^k(Z_s;\mathrm{R}\Gamma_{(U_t-U_s)}(F)) \\ &= \varinjlim_{U\supset Z_s} H^k(U\cap U_t;\mathrm{R}\Gamma_{X-U_s}(F)) \end{aligned}$$

となる．

---

*1 [KS90, (2.6.32)] の d.t.

$$\mathrm{R}\Gamma_{Z'}(F) \to \mathrm{R}\Gamma_Z(F) \to \mathrm{R}\Gamma_{Z-Z'}(F) \xrightarrow[+1]{}$$

を用いる．但し，Z は X の局所閉集合，Z' は Z の閉集合である．

$\mathrm{R}\Gamma_{U_t-U_s}(F)$ は X 上の層で，それを Z_s に制限した $\mathrm{R}\Gamma_{U_t-U_s}(F)|_{Z_s}$ は Z_s 上の層である．Z_s での大域切断 $\mathrm{R}\Gamma(Z_s; \mathrm{R}\Gamma_{U_t-U_s}(F)|_{Z_s})$ のコホモロジーをとっているので，[KS90, Notations 2.6.8] の 2 番目の記号を用いることになる．

Z_s はハウスドルフ空間 X のコンパクト集合 $\overline{U_t - U_s}$ の共通部分として表されているので，コンパクトである（X の置き換えがここに効いている）．したがって，[KS90, Remark 2.6.9 (ii)] の場合に当てはまり，そこでの記号を用いて書くと

$$H^j(Z; F) \simeq \varinjlim_{U \in I_Z} H^j(U; F)$$

が成り立つ．これが上の式の 2 つ目の変形．詳しく書くと，

$$\begin{aligned} H^k(Z_s; \mathrm{R}\Gamma_{U_t-U_s}(F)) &= \varinjlim_{U \in I_Z} H^k(U; \mathrm{R}\Gamma_{U_t-U_s}(F)) \\ &= \varinjlim_{U \in I_Z} H^k(U \cap U_t; \mathrm{R}\Gamma_{X-U_s}(F)) \end{aligned}$$

ここで，2 つ目の変形は次のように考える．$U_t - U_s$ に台を持つ層の U 上の切断は $U \cap U_t$ 上で切断を考えても同じ．台の方も，U が Z_s に十分近ければ $X - U_s$ で考えても同じ．

□

2.9　実・複素多様体上の層の例

ここで層の例をいくつか挙げる．そのうちの大部分については 11 章で詳しい説明を与えることにする．

2.9.1　層 $\mathscr{C}_X^0$

位相空間 X において，X の開集合 U に対し複素数値連続関数の空間 $C^0(U)$ を対応させ，制限射を通常の関数の制限で定めた前層は明らかに層になる．この層を $\mathscr{C}_X^0$ で表す．定数層 $\mathbf{Z}_X$ は $\mathbf{Z}$ 値関数のなす $\mathscr{C}_X^0$ の部分層とみなせる．

2.9.2　層 $\mathcal{L}^1_{\mathrm{loc},dx}$

U をユークリッド空間 $\mathbf{R}^n$ の開集合とし，$L^1(U; dx)$ を $\mathbf{R}^n$ 上のルベーグ測度 dx に関する U 上の可積分関数の空間とする．前層 $U \mapsto L^1(U; dx)$ は層ではない．この前層から誘導された $\mathbf{R}^n$ 上の層を $\mathcal{L}^1_{\mathrm{loc},dx}$ で表す．

2.9.3　環付き空間

環付き空間 $(X, \mathscr{A}_X)$ とは位相空間 X に環の層 $\mathscr{A}_X$ をあわせたものをいう．環付き空間の射 $f\colon (Y, \mathscr{A}_Y) \to (X, \mathscr{A}_X)$ は連続写像 $f\colon X \to Y$ に環の層の射 $f^{-1}\mathscr{A}_X \to \mathscr{A}_Y$ をあわせたものをいう．A が環で $\mathscr{A}_X$ が A 代数の層である（すなわち層の射 $A_X \to \mathscr{A}_X$ が存在する）とき，$(X, \mathscr{A}_X)$ を A 環付き空間と呼ぶ．

2.9.4　C^α 多様体

α を整数 $0 \leqq \alpha < \infty$ または $\alpha = \omega$ とする．$\mathbf{R}^n$ 上の複素数値 C^α 級関数（C^ω のとき実解析的関数）の層を $C^\alpha_{\mathbf{R}^n}$ で表す．n 次元実 C^α 多様体 M とは，無限遠点で可算な局所コンパクト空間 M と環の層 C^α_M の組で，$\mathbf{C}$ 環付き空間として $(\mathbf{R}^n, C^\alpha_{\mathbf{R}^n})$ と局所的に同型であるものをいう．

$\dim X$（または $\dim_{\mathbf{R}} X$）で実多様体 X の次元を表す．文献によっては層 C^ω_M を $\mathscr{A}_M$ で表すことも多い．

微分幾何学の基礎的な課程として Guillemin-Pollack[GP74] を挙げる．

2.9.5　向きづけ，微分形式，密度

C^0 多様体 M 上の層として，向きづけ層 or_M を考えることも必要になってくる．or_M は $\mathbf{Z}_M$ と局所的に同型な層であり，M の向きが存在する場合，その向きを選ぶことと同型 $\mathrm{or}_M \cong \mathbf{Z}_M$ を選ぶことが同義となるようなものである．or_M については次章で詳しくしらべる．

いま，$\alpha = \infty$ または $\alpha = \omega$ とし，p を整数とする．C^α_M を係数にもつ p 次微分形式の層を $C^{\alpha,(p)}_M$ とおく．また外微分を $d\colon C^{\alpha,(p)}_M \to C^{\alpha,(p+1)}_M$ で表す．

$(x_1, \dots, x_n)$ が M 上の局所座標系であるとする．このとき，p 形式 f は次の形にただ一通りに表されるのであった．

$$f = \sum_{|I|=p} f_I dx_I,$$

ここに，$I = \{i_1, \dots, i_p\} \subset \{1, \dots, n\}$, $(i_1 < i_2 < \cdots < i_p)$, $dx_I = dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}$ で，f_I は C^α_M の切断である．このとき，

$$df = \sum_{i=1}^n \sum_{|I|=p} \frac{\partial f_I}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_I$$

となるのであった．もうひとつ層を導入する．

$$\mathscr{V}^\alpha_M \coloneqq C^{\alpha,(n)}_M \otimes \mathrm{or}_M$$

（$\alpha = \infty$ または $\alpha = \omega$）とおき，M 上の C^α 密度の層とよぶ．

コンパクト台をもつ C^∞ 密度は積分することができる．$\int_M \cdot$ で積分写像

$$\int_M \cdot \colon \Gamma_c(M; \mathscr{V}^\infty_M) \to \mathbf{C} \tag{2.9.1}$$

を表す．$C^{\alpha,(p)}_M$ と $\mathscr{V}^\alpha_M$ は C^α_M 加群の層である．

「1 の分割」の存在から，層 C^α_M，$C^{\alpha,(p)}$，$\mathscr{V}^\alpha_M$ は $\alpha \neq \omega$ に対しては c 柔軟であることが従う．層 C^ω_M，$C^{\omega,(p)}$，$\mathscr{V}^\omega_M$ は関手 $\Gamma(M; \cdot)$ に対し非輪状，すなわち $j > 0$ に対し $H^j(M; C^\omega_M) = 0$ である．Grauert[G58] を参照．

2.9.6　分布と超関数

C^∞ 多様体 M 上にはシュワルツ分布の層 $\mathscr{D}b_M$ が自然に定まる（Schwartz[S66]，de Rham[R55] を参照）．$\mathscr{D}b_M$ は c 柔軟層であり，$\Gamma_c(M;\mathscr{D}b_M)$ は $\Gamma(M;\mathscr{V}_M^\infty)$ の双対位相線形空間である．ただし，$\Gamma(M;\mathscr{V}_M^\infty)$ にはフレシェ空間としての自然な位相を入れている．

C^ω 多様体 M 上にも同様に佐藤超関数の層 $\mathscr{B}_M$ が自然に定まる（佐藤 [Sa59] を参照）．$\mathscr{B}_M$ は脆弱層であり，$\Gamma_c(M;\mathscr{B}_M)$ は $\Gamma(M;\mathscr{V}_M^\omega)$ の双対位相線形空間である．ただし，$\Gamma(M;\mathscr{V}_M^\omega)$ には DFS 空間としての自然な位相を入れている（Martineau と Schapira に詳細な解説がある）．しかし，佐藤による構成は純粋にコホモロジーによるものである．後ほど 2.9.13 項で復習する．

積分写像 (2.9.1) はペアリング

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(M;C_M^\infty)\times\Gamma_c(M;\mathscr{V}_M^\infty) & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ \Psi & & \Psi \\ (f,g) & \longmapsto & \displaystyle\int_M fg \end{array} \tag{2.9.2}$$

を定める．このペアリングから C_M^∞ から $\mathscr{D}b_M$ への層の射がひきおこされ，この射が単射であることも示せる．さらに，実解析多様体 M の上では，単射 $\Gamma(M;\mathscr{V}_M^\omega)\to\Gamma(M;\mathscr{V}_M^\infty)$ から射 $\mathscr{D}b_M\to\mathscr{B}_M$ が引き起こされ，こちらも単射であることがわかる．

分布係数の p 形式の層 $\mathscr{D}b_M^{(p)} := C_M^{\infty,(p)}\otimes_{C_M^\infty}\mathscr{D}b_M$ や超関数係数の p 形式の層 $\mathscr{B}_M^{(p)} := C_M^{\omega,(p)}\otimes_{C_M^\omega}\mathscr{B}_M$ も定義することができる．$\mathscr{D}b_M^{(p)}$ は c 柔軟層，$\mathscr{B}_M^{(p)}$ は脆弱層である．

2.9.7　ド・ラーム複体

M を C^∞ 多様体とする．ポアンカレの補題より，系列

$$0\to\mathbf{C}_M\to C_M^{\infty,(0)}\underset{d}{\to}\cdots\to C_M^{\infty,(n)}\to 0 \tag{2.9.3}$$

は完全である．したがって，$\mathbf{C}_M$ は c 柔軟層のなす複体と擬同形である．

$$\mathbf{C}_M\underset{\text{qis}}{\longrightarrow}\left(0\to C_M^{\infty,(0)}\underset{d}{\to}\cdots\to C_M^{\infty,(n)}\to 0\right). \tag{2.9.4}$$

これによってコホモロジー群 $H^j(M;\mathbf{C}_M)$ や $H_c^j(M;\mathbf{C}_M)$ を具体的に計算することができる．例えば，(2.9.4) に $\mathrm{R}\Gamma(M;\cdot)$ を適用することで，同型

$$\mathrm{R}\Gamma(M;\mathbf{C}_M)\cong\left(0\to\Gamma\left(M;C_M^{\infty,(0)}\right)\underset{d}{\to}\cdots\to\Gamma\left(M;C_M^{\infty,(n)}\right)\to 0\right) \tag{2.9.5}$$

が得られる．C_M^∞ を $\mathscr{D}b_M$ に取り替えても同じ結果が得られる．M が実解析的なら，C_M^∞ を C_M^ω や $\mathscr{B}_M$ に取り替えることで同じ結果が従う．しかし，C_M^ω は c 柔軟ではなく $\Gamma(M;\cdot)$ 非輪状でしかないので注意が必要である．他方，$\mathscr{B}_M$ は c 柔軟であるのみならず脆弱でもあるので，これを用いて M の局所閉集合 Z に対する相対コホモロジー群 $H_Z^j(M;\mathbf{C}_M)$ を具体的に計算することができる．

複体 (2.9.3) を M のド・ラーム複体と呼ぶ．

2.9.8 複素多様体

$\mathscr{O}_{\mathbf{C}^n}$ で $\mathbf{C}^n$ 上の正則関数のなす層を表す．n 次元複素多様体 X は $\mathbf{C}$ 環付き空間 $(X, \mathscr{O}_X)$ で $(\mathbf{C}^n, \mathscr{O}_{\mathbf{C}^n})$ と局所的に同型であるものをいう．

複素多様体 X の次元を $\dim_{\mathbf{C}} X$ で表す．複素微分幾何学の基本的な概念についての参考文献として Wells を挙げる．解析幾何学のさらなる展開については Banica-Stanasila の本を勧める．

$\mathscr{O}_X^{(p)}$ で X 上の正則 p 形式のなす層を表し，∂ で正則微分を表す．Ω_X を次のように定めることも多い．

$$\Omega_X \coloneqq \mathscr{O}_X^{(p)} \otimes \mathrm{or}_X \tag{2.9.6}$$

ただし or_X は X 上の向きづけ層である．ポアンカレの補題は正則関数係数の場合にも成り立ったので層 $\mathbf{C}_M$ は複体

$$0 \to \mathscr{O}_X^{(0)} \underset{\partial}{\to} \cdots \to \mathscr{O}_X^{(n)} \to 0 \tag{2.9.7}$$

と擬同形である．

2.9.9 ドルボー複体

$(X, \mathscr{O}_X)$ を複素多様体とする．$\left(\overline{X}, \mathscr{O}_{\overline{X}}\right)$ で位相空間 X に X 上の反正則関数のなす層 $\mathscr{O}_{\overline{X}}$ をあわせたものを表す．（ただし $f\colon X \to \mathbf{C}$ が反正則であるとは，$\mathbf{C}$ 上の複素共役写像との合成が正則であることであった．）従って $\left(\overline{X}, \mathscr{O}_{\overline{X}}\right)$ も複素多様体となる．

$X^{\mathbf{R}}$ で X を実解析多様体とみなしたものを表す．$X^{\mathbf{R}}$ を $X \times \overline{X}$ の対角集合と同一視すれば，$X \times \overline{X}$ は $X^{\mathbf{R}}$ の複素化であるといえる．実際，

$$\mathscr{O}_{X \times \overline{X}}\big|_{X^{\mathbf{R}}} \cong C^{\omega}_{X^{\mathbf{R}}} \tag{2.9.8}$$

である．$X \times \overline{X}$ 上で X の正則微分 ∂ と $\overline{X}$ の $\overline{\partial}$ を考えることができる．よって，$X \times \overline{X}$ 上の微分 d は $d = \partial + \overline{\partial}$ と分解できる．この分解から層 $C^{\alpha,(r)}_{X^{\mathbf{R}}}$ （$\alpha = \infty$ または $\alpha = \omega$ とする）の分解

$$C^{\alpha,(r)}_{X^{\mathbf{R}}} = \bigoplus_{p+q=r} C^{\alpha,(p,q)}_X$$

が引き起こされる．ただし，$C^{\alpha,(p,q)}_X$ は X 上の (p,q) 形式のなす層である．X の局所正則座標系 $(z_1, \ldots, z_n)$ において，$C^{\alpha,(p,q)}_X$ の切断 f は次の形にただ一通りに表される．

$$f = \sum_{|I|=p, |J|=q} f_{I,J} dz_I \wedge d\overline{z}_J$$

ただし，2.9.5 項と同様に，$dz_I = dz_{i_1} \wedge \cdots \wedge dz_{i_p}$，$d\overline{z}_J = d\overline{z}_{j_1} \wedge \cdots \wedge d\overline{z}_{j_q}$ である．とくに

$$\partial f = \sum_I \sum_J \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_{I,J}}{\partial z_i} dz_i \wedge dz_I \wedge d\overline{z}_J$$

である．ドルボーの補題によれば，複体

$$0 \to \mathscr{O}_X^{(p)} \to C_X^{\infty,(p,0)} \underset{\bar\partial}{\to} C_X^{\infty,(p,1)} \to \cdots \to C_X^{\infty,(p,n)} \to 0$$

は完全である．$C_X^{\infty,(p,q)}$ を $C_X^{\omega,(p,q)}$ や $\mathscr{D}b_X^{(p,q)}$，或いは $\mathscr{B}_X^{(p,q)}$ に取り替えた場合にも同様の結果がある．特に $\mathscr{O}_X^{(p)}$ は脆弱層の複体

$$0 \to \mathscr{B}_X^{(p,0)} \underset{\bar\partial}{\to} \cdots \to \mathscr{B}_X^{(p,n)} \to 0 \tag{2.9.9}$$

と擬同形である（Komatsu, Schapira を参照）．この複体 (2.9.9) は入射 $\mathscr{O}_X$ 加群の複体であることが Golovin によって示されている．

2.9.10　$\mathscr{O}_X$ 上の演算

$f\colon Y \to X$ を複素多様体の間の射とする．環付き空間の射の定義より，f は層の射 $f^{-1}\mathscr{O}_X \to \mathscr{O}_Y$ をひきおこす．もうひとつ，導来圏 $\mathsf{D}^+(\mathbf{C}_X)$ では射

$$\mathrm{R}f_!\Omega_Y[\dim_{\mathbf{C}} Y] \to \Omega_X[\dim_{\mathbf{C}} X] \tag{2.9.10}$$

が定義される．この射は以下のように表される．

$n = \dim_{\mathbf{C}} X$，$m = \dim_{\mathbf{C}} Y$，$l = m-n$ とおく．射 $f^{-1}C_X^{\infty,(m-p,m-q)} \to C_Y^{\infty,(m-p,m-q)}$ から双対性より射

$$f_!\mathscr{D}b_Y^{(p,q)} \otimes \mathrm{or}_Y \to \mathscr{D}b_X^{(p-l,q-l)} \otimes \mathrm{or}_X \tag{2.9.11}$$

が定まる．よって，(2.9.11) と Ω_Y，Ω_X のドルボー分解から (2.9.10) が誘導される．

2.9.11　$\mathscr{O}_X$ のコホモロジー

Hörmander が $\mathscr{O}_X$ のコホモロジーについて詳しく調べている．Ω が $\mathbf{C}^n$ の開集合であるとする．任意の $j>0$ に対し $H^j(\Omega;\mathscr{O}_X)=0$ であるとき，Ω は擬凸であるという．たとえば，凸領域は擬凸であり，$n=1$ なら，任意の領域が擬凸となる．最後の主張は次のように一般化できる．

$$\begin{cases} \Omega \text{ が } \mathbf{C}^n \text{ の開集合ならば，任意の } j \geqq n \text{ に対し，} \\ \quad H^j(\Omega;\mathscr{O}_{\mathbf{C}^n}) = 0 \\ \text{が成り立つ．} \end{cases} \tag{2.9.12}$$

ドルボー分解と，方程式 $\displaystyle\sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial z_j}\frac{\partial}{\partial \bar z_j} f = g$ が $\Gamma(\Omega; C^\infty_{\mathbf{R}^{2n}})$ でいつでも解けるという事実とを用いた (2.9.12) の証明が Malgrange[1] で述べられている．

X を n 次元複素多様体とし，Z を X の局所閉部分集合とする．$x \in Z - \mathrm{Int}\, Z$ ならば，$j \notin [1,n]$ に対し

$$H_Z^j(\mathscr{O}_X)_x = 0 \tag{2.9.13}$$

となる．実際，$j=0$ の場合，これは「解析接続の原理」そのものであり，$j>n$ の場合は，(2.9.12) から，或いは (2.9.9) から従う（すなわち $\mathscr{O}_X$ の脆弱次元は n である）．

Martineau と柏原による $H^j_Z(\mathscr{O}_X)$ が消滅するための規準がある (SKK も参照)．$X = \mathbf{C}^n$ とし Z を X の部分閉凸集合とする．$x \in Z$ のとき，

$$(2.9.14)\qquad \begin{cases} x \text{ を通る } d \text{ 次元アフィン空間 } L \text{ で，} L \cap Z \text{ が} \\ L \text{ における } x \text{ の近傍となるものが存在しないとき} \\ \quad H^j_Z(\mathscr{O}_X)_x = 0 \quad \text{for } j \leqq n-d. \end{cases}$$

2.9.12 正則関数の境界値

Ω を C^2 境界をもつ $\mathbf{C}^n$ の強擬凸開部分集合とする．$\partial\Omega$ 上で局所的には，正則座標変換で Ω を $\mathbf{C}^n$ の強凸開集合にうつすものが存在する．

$j\colon \Omega \hookrightarrow \bar{\Omega}$ をうめこみとする．$\bar{\Omega}$ 上で次の特三角を得る．

$$(2.9.15)\qquad \mathscr{O}_X|_{\bar{\Omega}} \to \mathrm{R}j_*\mathscr{O}_\Omega \underset{+1}{\to} \mathrm{R}\Gamma_{\partial\Omega}(\mathscr{O}_X|_{\bar{\Omega}}) \to .$$

$H^0_{\partial\Omega}(\mathscr{O}_X|_{\bar{\Omega}}) = 0$ なので，前層 $U \mapsto H^1_{U\cap\partial\Omega}(U\cap\bar{\Omega}; \mathscr{O}_X|_{\bar{\Omega}})$ は層 $H^1_{\partial\Omega}(\mathscr{O}_X|_{\bar{\Omega}})$ と同じである．（Ex II.13）さらに，$k>0$ に対し $\mathrm{R}^k j_*\mathscr{O}_\Omega = 0$ なので，$k>1$ に対し $H^k_{\partial\Omega}(\mathscr{O}_X|_{\bar{\Omega}}) = 0$ である．また，次の (2.9.16) も成り立つ．

$$(2.9.16)\qquad H^1_{\partial\Omega}(\mathscr{O}_X|_{\bar{\Omega}}) \text{ は脆弱層である．}$$

(2.9.16) を証明するために，命題 2.4.10 から Ω が強凸であると仮定してよい．U を $\mathbf{C}^n$ の凸開部分集合とする．特三角 (2.9.15) に関手 $\mathrm{R}\Gamma(U;\cdot)$ を適用することで，

$$\Gamma(U\cap\bar{\Omega}; H^1_{\partial\Omega}(\mathscr{O}_X|_{\bar{\Omega}})) \cong \mathscr{O}_X(\Omega\cap U)/\mathscr{O}_X(\bar{\Omega}\cap U)$$

であることがわかる．実際，$U\cap\bar{\Omega}$ が U の凸開近傍の基本系をもつことから，$k>0$ に対し $H^k(U\cap\bar{\Omega}; \mathscr{O}_X) = 0$ である．

ω を $\partial\Omega$ の開部分集合とする．$\mathbf{C}^n$ の凸開部分集合 U で，$U\cap\bar{\Omega} = \omega$ かつ $U\cup\Omega$ が凸となるものが存在する．このとき，マイヤー・ヴィートリス列

$$0 \to \mathscr{O}_X(U\cup\Omega) \to \mathscr{O}_X(U)\oplus\mathscr{O}_X(\Omega) \to \mathscr{O}_X(U\cap\Omega) \to 0$$

は完全であり，写像 $\mathscr{O}_X(\Omega)/\mathscr{O}_X(\bar{\Omega}) \to \mathscr{O}_X(\Omega\cap U)/\mathscr{O}_X(\bar{\Omega}\cap U)$ は全射である．以上で (2.9.16) が示せた．

2.9.13 佐藤超関数

M を n 次元実解析多様体とし，X を M の複素化とする．（X は M の近傍として一意に定まるのであった．）佐藤超関数の層 $\mathscr{B}_M$ を

$$(2.9.17)\qquad \mathscr{B}_M := H^n_M(\mathscr{O}_X)\otimes \mathrm{or}_{M/X}$$

で定める．ただし，$\mathrm{or}_{M/X} = \mathrm{or}_M \otimes \mathrm{or}_X$ である．(2.9.14) により，複体 $\mathrm{R}\Gamma_M(\mathscr{O}_X)[n]$ は次数 0 に集中しているので，

$$\mathscr{B}_M \cong \mathrm{R}\Gamma_M(\mathscr{O}_X)[n]\otimes\mathrm{or}_{M/X}$$

が成り立つ．層 $H^j_M(\mathscr{O}_X)$ は $j < n$ で 0 なので，（Exercise II.13 より）前層 $U \mapsto H^j_{U\cap M}(U;\mathscr{O}_X)$ は層になり，これは $\mathscr{B}_M$ と等しくなる．（$\mathscr{B}_M$ は X 上の層であるが，これを M に制限したものと同一視することが多い．）さらに，(2.9.12) より，$\mathscr{B}_M$ が脆弱層であることも従う．この層は 2.9.6 項で述べたものと一致する．（XI 章でさらに詳しく述べる．）

2.9.14　局所定数層の例

$X = \mathbf{C}$ とし，z を X の正則座標とする．α を複素数とし，P を正則微分作用素 $z\dfrac{\partial}{\partial z} - \alpha$ とする．X 上の層の複体

$$F :- 0 \to \mathscr{O}_X \underset{P}{\to} \mathscr{O}_X \to 0 \tag{2.9.18}$$

を考える．層 $H^0(F)|_{X-\{0\}} \cong \mathrm{Ker}(P)|_{X-\{0\}}$ は局所定数層である．実際，$X - \{0\}$ の任意の連結かつ単連結な開集合 U の上で，$H^0(F)|_U$ は，z^α（の分枝）で生成される定数層 $\mathbf{C}_U$ と同型である．しかし，$\alpha \notin \mathbf{Z}$ の場合，$X - \{0\}$ 上の 0 でない正則関数 f で $Pf = 0$ をみたすものは存在しないので，$\Gamma(X - \{0\}; H^0(F)) = 0$ である．$\alpha \in \mathbf{Z}$ に対しては以下のようになる．

$$\begin{aligned} H^0(F)|_{X-\{0\}} &: \text{階数 1 の局所定数層}. \\ H^0(F)|_{\{0\}} &= 0, \\ H^1(F) &= 0. \end{aligned}$$

$\alpha = 0, 1, 2, \ldots$ のとき，

$$\begin{aligned} H^0(F) &\cong \mathbf{C}_X, \\ H^1(F) &= \mathbf{C}_{\{0\}}. \end{aligned}$$

$\alpha = -1, -2, \ldots$ のとき，

$$\begin{aligned} H^0(F) &\cong \mathbf{C}_{X-\{0\}}, \\ H^1(F) &= 0. \end{aligned}$$

複体 F は「偏屈層」と呼ばれるものの簡単な例になっている．このような複体については VIII 章と X 章で調べる．

第 3 章

Poincaré-Verdier 双対性

3.1 上付きびっくり

[B+84, V, 6.1]　A に対し，全射 $P \to A$ で，P が零で延長した層 R_U の直和であるものが存在する．

補題 3.1.1.　[B+84, V. Proposition 6.5] $S, A \in \mathrm{Sh}(X)$ とする．S が c 柔軟であり，S, A のどちらかは平坦であるとする．このとき，$A \otimes S$ は c 柔軟である．

証明． 完全列

$$0 \to P_n \to P_{n-1} \to \cdots \to P_0 \to A \to 0 \tag{3.1.1}$$

で $0 \leqq j \leqq n-1$ に対し，P_j が層 R_U の直和となり，したがって平坦となるものがある．系列

$$0 \to P_n \otimes S \to P_{n-1} \otimes S \to \cdots \to P_0 \otimes S \to A \otimes S \to 0 \tag{3.1.2}$$

についても，S が平坦であることから，あるいは，A が平坦であれば系列 (3.1.1) の各項が平坦となることから完全になる．

□

補題 3.1.2.　[B+84, VI. Théorème 3.5] G が $\mathsf{K}^+(Y)$ の対象ならば，$f_K^!(G)$ は $\mathsf{K}^+(X)$ の対象である．

証明． $(U_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ を X の開集合族とする．$U = \bigcup_{\alpha\in\Lambda} U_\alpha$，$U_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta$ とおき，系列

$$0 \to f_K^!(G)(U) \xrightarrow{\varphi} \prod_{\alpha\in\Lambda} f_K^!(G)(U_\alpha) \xrightarrow{\psi} \prod_{(\alpha,\beta)\in\Lambda\times\Lambda} f_K^!(G)(U_{\alpha\beta})$$

を考える．ここに，

$$\begin{aligned}\varphi(s) &= \left(\rho_{U_\alpha,U}(s)\right)_{\alpha\in\Lambda},\\ \psi\left((s_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}\right) &= \left(\rho_{U_{\alpha\beta},U_\alpha}(s_\alpha) - \rho_{U_{\alpha\beta},U_\beta}(s_\beta)\right)_{(\alpha,\beta)\in\Lambda\times\Lambda}\end{aligned}$$

である．この系列が完全であることを示す．

□

3.1.1　構成

X, Y を局所コンパクト空間とし，$f\colon Y \to X$ を連続写像とする．A を大域次元が有限な可換環とする．$F \in \mathsf{D}^+(A_X)$, $G \in \mathsf{D}^+(A_Y)$ とする．

$\mathrm{R}f_!\colon \mathsf{D}^+(A_Y) \to \mathsf{D}^+(A_X)$ の右随伴関手 $f^!\colon \mathsf{D}^+(A_X) \to \mathsf{D}^+(A_Y)$ を構成する．まず，開集合 $V \subset Y$ に対し，$f^!F$ の V 上の切断に関する条件を見てみる．

$$\mathrm{R}\Gamma(V; f^!F) = \mathrm{R}\operatorname{Hom}_{A_Y}(A_V, f^!F) = \mathrm{R}\operatorname{Hom}_{A_X}(\mathrm{R}f_!A_V, F)$$

となることから，$f^!F$ は $V \mapsto \mathrm{R}\operatorname{Hom}_{A_X}(\mathrm{R}f_!A_V, F)$ という対応でなければならない．$\mathrm{R}f_!$ を計算するには c 柔軟分解 $A_V \sim K$ を取ればよく，さらに F が入射的であれば，

$$\mathrm{R}\operatorname{Hom}_{A_X}(\mathrm{R}f_!A_V, F) = \operatorname{Hom}_{A_X}(f_!K_V, F)$$

となって，結局

$$\mathrm{R}\Gamma(V; f^!F) = \operatorname{Hom}_{A_X}(f_!K_V, F)$$

とできる．

■f に関する仮定

定義 3.1.3.　Y 上の層 G が f 柔軟であるとは，各点 $x \in X$ に対し，$G|_{f^{-1}(x)}$ が c 柔軟であることをいう．

G が f 柔軟であることと，任意の開部分集合 $V \subset Y$ と $j \neq 0$ に対し，$\mathrm{R}^j f_! G_V = 0$ となることと同値である．

次を仮定する．

(3.1.3)　　$f_!\colon \operatorname{Mod}(\mathbf{Z}_Y) \to \operatorname{Mod}(\mathbf{Z}_X)$ のコホモロジー次元は有限である．

つまり，整数 $r \geqq 0$ で，全ての $j > r$ に対し $\mathrm{R}^j f_! = 0$ となるものが存在する．(3.1.3) は次の条件と同値である．

(3.1.4)
$$\begin{cases} \text{任意の } G \in \mathrm{Sh}(Y) \text{ に対し，完全列} \\ 0 \to G \to G^0 \to \cdots \to G^r \to 0 \\ \text{で，どの } G^j \text{ も } f \text{ 柔軟であるものが存在する．} \end{cases}$$

(3.1.4′)
$$\begin{cases} \text{完全列 } G^0 \to \cdots \to G^r \to 0 \\ \text{において，} j < r \text{ に対し } G^j \text{ が } f \text{ 柔軟ならば，} \\ G^r \text{ が } f \text{ 柔軟となる．} \end{cases}$$

$f_!$ のコホモロジー次元が $\leqq r$ となるのは，任意の $x \in X$ に対し，$\Gamma_c(f^{-1}(x); \cdot)$ のコホモロジー次元が $\leqq r$ となるときである．実際，$f_!|_{f^{-1}(x)}F = \Gamma_c(f^{-1}(x); F) = 0$ となるので．

■構成　以上の仮定は，

$$\mathrm{R}\Gamma(V; f^! F) = \mathrm{Hom}_{A_X}(f_! K_V, F)$$

の構成をするためだった．$f_! K_V$ の分解をしたくて，その長さが有限になるという仮定である．

　さて，K を $\mathbf{Z}_Y$ 加群，F を A_X 加群とする．このとき，A 加群の前層 $f^!_K F$ を次で定める．$V \in \mathsf{Open}(Y)$ に対し，

$$(f^!_K F)(V) \coloneqq \mathrm{Hom}_{A_X}\left(f_!\left(A_Y \underset{\mathbf{Z}_Y}{\otimes} K_V\right), F\right)$$

とする．制限射は $K_{V'} \to K_V$ から引き起こされるもの．

補題 3.1.4.　K を平坦かつ f 柔軟な $\mathbf{Z}_Y$ 加群とする．

(i) Y 上の任意の層 G に対し $G \otimes_{\mathbf{Z}_Y} K$ は f 柔軟である．
(ii) $G \mapsto f_!(G \otimes_{\mathbf{Z}_Y} K)$ は $\mathrm{Mod}(\mathbf{Z}_Y)$ から $\mathrm{Mod}(\mathbf{Z}_X)$ への完全関手である．

証明. (i) Y 上の任意の層 G は分解

$$\to G^{-r} \to \cdots \to G^0 \to G \to 0$$

で，各 G^j が $\mathbf{Z}_V$ の直和となるものが存在する． □

aa

参考文献

[B+84] Borel, *Intersection Cohomology*, Progress in Mathematics, 50, Birkhäuser, 1984.

[G58] Grauert, *On Levi's problem and the embedding of real analytic manifolds*, Ann. Math. 68, 460–472 (1958).

[GP74] Victor Guillemin, Alan Pollack, *Differential Topology*, Prentice-Hall, 1974.

[KS90] Masaki Kashiwara, Pierre Schapira, *Sheaves on Manifolds*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 292, Springer, 1990.

[KS06] Masaki Kashiwara, Pierre Schapira, *Categories and Sheaves*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 332, Springer, 2006.

[R55] de Rham, *Variétés différentiables*, Hermann, Paris, 1955.

[Sa59] Mikio Sato, *Theory of Hyperfunctions*, 1959–60.

[S66] Schwartz, *Théorie de distributions*, Hermann, Paris, 1966.

[Sh16] 志甫淳, 層とホモロジー代数, 共立出版, 2016.

[Ike21] 池祐一, 超局所層理論概説, 2021.

[Tak17] 竹内潔, $\mathcal{D}$ 加群, 共立出版, 2017.