2024/02/22 セミナー資料

大柴寿浩

記号

- $\overline{\mathbf{R}} \coloneqq [-\infty, +\infty] = \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$
- 集合 U の開近傍系を I_U とかき，点 x の開近傍系を I_x とかく．

1　核

X, Y を局所コンパクト空間で c 柔軟次元が有限であるものとする．積空間 $X \times Y$ から X, Y への射影をそれぞれ q_1, q_2 とする．$K \in \mathsf{D}^{\mathrm{b}}(X \times Y)$ とする．（基礎環は大域次元が有限な可換環 A とする．）

定義 1.1 ([KS90, Definition 3.6.1])**.**　関手 $\Phi_K \colon \mathsf{D}^+(Y) \to \mathsf{D}^+(X)$ と $\Psi_K \colon \mathsf{D}^+(X) \to \mathsf{D}^+(Y)$ を次で定める．$G \in \mathsf{D}^+(Y)$, $F \in \mathsf{D}^+(X)$ に対し，

$$\Phi_K(G) \coloneqq \mathrm{R}q_{1!}\left(K \overset{\mathrm{L}}{\otimes} q_2^{-1}G\right),$$
$$\Psi_K(F) \coloneqq \mathrm{R}q_{2*}\,\mathrm{R}\mathscr{H}om\left(K, q_1^{!}F\right).$$

命題 1.2 ([KS90, Proposition 3.6.2])**.**　$\Phi_K \dashv \Psi_K$ である．すなわち

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{D}^+(X)}(\Phi_K(\,\cdot\,), \,\cdot\,) \cong \mathrm{Hom}_{\mathsf{D}^+(Y)}(\,\cdot\,, \Psi_K(\,\cdot\,))$$

が成り立つ．

$$\begin{tikzcd} \mathsf{D}^+(Y) \arrow[r, bend left, "\Phi_K"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathsf{D}^+(X) \arrow[l, bend left, "\Psi_K"] \end{tikzcd}$$

コメント．　$(\otimes, \mathscr{H}om)$ や $\left(\mathrm{R}f_!, f^!\right)$ と同じ向き．

証明． $F \in \mathsf{D}^+(X)$, $G \in \mathsf{D}^+(Y)$ に対し，

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Hom}_{\mathsf{D}^+(X)}(\varPhi_K(G), F) \\
&= \mathrm{Hom}_{\mathsf{D}^+(X)}\left(\mathrm{R}q_{1!}\left(K \overset{\mathrm{L}}{\otimes} q_2^{-1}G\right), F\right) && (\text{定義}) \\
&\cong \mathrm{Hom}_{\mathsf{D}^+(X\times Y)}\left(K \overset{\mathrm{L}}{\otimes} q_2^{-1}G, q_1^!F\right) && (\mathrm{R}q_{2!} \dashv q_2^!) \\
&\cong \mathrm{Hom}_{\mathsf{D}^+(X\times Y)}\left(q_2^{-1}G, \mathrm{R}\mathscr{H}om\left(K, q_1^!F\right)\right) && (\overset{\mathrm{L}}{\otimes} \dashv \mathrm{R}\mathscr{H}om) \\
&\cong \mathrm{Hom}_{\mathsf{D}^+(X\times Y)}\left(G, \mathrm{R}q_{2*}\,\mathrm{R}\mathscr{H}om\left(K, q_1^!F\right)\right) && (q_2^{-1} \dashv \mathrm{R}q_{2*}) \\
&= \mathrm{Hom}_{\mathsf{D}^+(X\times Y)}\left(G, \varPsi_K(F)\right)
\end{aligned}$$

である． □

命題 1.3 ([KS90, Proposition 3.6.3])**．** $X = Y$ であり，$K = A_\Delta$ のとき，$\varPhi_K$ と $\varPsi_K$ は $\mathsf{D}^+(X)$ の恒等関手と同型になる．ただし Δ は X の対角集合である．

次の補題を用いる．

補題 1.4 ([KS90, Proposition 3.1.14])**．** X を c 柔軟次元が有限な局所コンパクト空間とする．$F \in \mathsf{D}^+(A_X)$ と $G \in \mathsf{D}^{\mathrm{b}}(A_X)$ に対し，次が成り立つ．

$$\mathrm{R}\mathscr{H}om(G, F) \cong \mathrm{R}q_{1*}\,\mathrm{R}\Gamma_\Delta\,\mathrm{R}\mathscr{H}om(q_2^{-1}G, q_1^!F).$$

命題 1.3 の証明． $F \in \mathsf{D}^+(X)$ に対し，

$$\begin{aligned}
F &\underset{\text{定数層の台}}{\cong} \mathrm{R}\mathscr{H}om(A_X, F) \\
&\underset{\text{補題 } 1.4}{\cong} \mathrm{R}q_{2*}\,\mathrm{R}\Gamma_\Delta\,\mathrm{R}\mathscr{H}om(q_2^{-1}A_X, q_1^!F) \\
&\underset{[\text{KS90, (2.6.9)}]}{\cong} \mathrm{R}q_{2*}\,\mathrm{R}\mathscr{H}om(q_2^{-1}A_\Delta, q_1^!F) \\
&= \varPsi_K(F).
\end{aligned}$$

また，$G \in \mathsf{D}^+(X)$ に対し，

$$\begin{aligned}
\varPhi_K(F) &= \mathrm{R}q_{1!}\left(A_\Delta \overset{\mathrm{L}}{\otimes} q_2^{-1}G\right) \\
&\cong \mathrm{R}q_{1!}\left(q_2^{-1}G\right)_\Delta && (\text{複体に対する台の切り落としの定義}) \\
&\cong G. && (q_1|_\Delta = q_2|_\Delta \text{ は固有なので } (q_1|_\Delta)_! = (q_2|_\Delta)_! \cong (q_2|_\Delta)_*)
\end{aligned}$$

□

参考文献

[BouTVS] ブルバキ, 位相線形空間 1, 東京図書, 1968.

[B+84] Borel, *Intersection Cohomology*, Progress in Mathematics, 50, Birkhäuser, 1984.
[G58] Grauert, *On Levi's problem and the embedding of real analytic manifolds*, Ann. Math. 68, 460–472 (1958).
[GP74] Victor Guillemin, Alan Pollack, *Differential Topology*, Prentice-Hall, 1974.
[KS90] Masaki Kashiwara, Pierre Schapira, *Sheaves on Manifolds*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 292, Springer, 1990.
[KS06] Masaki Kashiwara, Pierre Schapira, *Categories and Sheaves*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 332, Springer, 2006.
[Le13] John M. Lee, *Introduction to Smooth Manifolds*, Second Edition, Graduate Texts in Mathematics, **218**, Springer, 2013.
[Mo76] 森本光生, 佐藤超函数入門, 共立出版, 1976.
[R55] de Rham, *Variétés différentiables*, Hermann, Paris, 1955.
[Sa59] Mikio Sato, *Theory of Hyperfunctions*, 1959–60.
[S66] Schwartz, *Théorie de distributions*, Hermann, Paris, 1966.
[Sh16] 志甫淳, 層とホモロジー代数, 共立出版, 2016.
[SP] The Stacks Project.
[Sp65] Michael Spivak, *Calculus on Manifolds*, Benjamin, 1965.
[Ike21] 池祐一, 超局所層理論概説, 2021.
[Tak17] 竹内潔, $\mathcal{D}$ 加群, 共立出版, 2017.
[Ue] 植田一石, ホモロジー的ミラー対称性, https://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~kazushi/course/hms.pdf 2024/02/04 最終閲覧.