偏微分方程式 — 層の超局所台：微分加群への応用 *

柏原正樹　　　ピエール・シャピラ

1982 年 9 月 27 日 提出

概要

C^1 級多様体において，層の超局所台を，余接束内の包合的な錐的閉集合として導入し，その関手的な性質を調べる．その後，確定特異点を持つホロノミー加群から誘導される方程式系の特性多様体の増大度を導出する．

1　法錐

M を C^1 級多様体とし，T^*M をその余法束，π を T^*M から M への射影とする．$\dot{T}^*M$ を T^*M における零切断 $T^*_M M$ の補集合とする．a を T^*M の**対蹠**(たいせき)**写像** (application anti-podale) とし，S^a を T^*M の部分集合 S の像とする．M の 2 つの集合 S と Z に対し，点 $x \in M$ における Z に沿った S の**法錐** (cône normal) $C_x(S,Z)$ とは，接空間 T_xM の閉錐で，局所座標系を用いて次のように定義されるものである．

$$\begin{cases} v \in C_x(S,Z) \Leftrightarrow S \times Z \times \mathbf{R}^+ \text{内の列 } (s_n, z_n, c_n)_n \text{で} \\ s_n \underset{n}{\to} x, z_n \underset{n}{\to} x, c_n(x_n - z_n) \underset{n}{\to} v \text{ をみたすものが存在する．} \end{cases}$$

$C(S,Z) = \bigcup_x C_x(S,Z)$ とおく．Z が M の部分多様体のとき，$C_x(S,Z)$ は T_xZ で安定であり，$C_Z(S)$ で $C(S,Z)$ の法束 T_ZM での像を表す．M の閉部分集合 S に対し，錐 $TM \setminus C(M \setminus S, S)$ を**強い意味での法錐** (cône normal strict) といい $N(S)$ とかく．また $N(S) \cap T_xM$ の双対閉錐体を $N^*_x S$ とかき，x における S の**余法錐** (cône conrmal) という (cf.[4])．

2　超局所台

$\mathrm{D}_+(M)$（$\mathrm{D}_b(M)$）を M 上の A 加群の層の下に有界な（有界な）複体のなす圏の導来圏とする．[*1] ここで A は環である．

命題 1.　—　$F^\bullet \in \mathrm{Ob}(\mathrm{D}_+(M))$ とし ξ を T^*M の点とする．次の条件は同値である．

* M. Kashiwara, P. Schapira, *Micro-support des faisceaux: application aux modules différentiels*, C. R. Acad. Sc. Paris, 295 (8 novembre 1982) の和訳 (2023/10/28).（2024 年 8 月 20 日更新）

[*1] [訳注] D_+ と D_b は現在，上つきの D^+ と D^b でそれぞれ表すのが通例である．

(i) ξ の錐状近傍 U と $\pi(\xi)$ の近傍 V で，V の任意の閉部分集合 Z と任意の点 $x \in \partial Z \cap V$ で $N_x^*(Z) \subset U^a \cup \{0\}$ を満たすものに対し $(\mathrm{R}\Gamma_Z(F^\bullet))_x = 0$ となるものが存在する；

(ii)（M を C^r 級とする．ここで $1 \leqq r \leqq \infty$ または $r = \omega$ とする.）境界が C^r 級超曲面であるような任意の Z に対し，条件 (i) が成り立つ；

(iii)（M が $\mathbf{R}^n$ の開集合であるとし，$\xi = (x_0, \xi_0)$ とする）実数 $\delta > 0, \varepsilon > 0$ で，$|a - x_0| < \varepsilon$ をみたす全ての点 $a \in M$ に対し次が成り立つものが存在する.

$$\begin{aligned}\mathrm{R}\Gamma(\{x; -\delta \leqq \langle x - x_0, \xi_0\rangle, \langle x - a, \xi_0\rangle \leqq -\varepsilon|x - a|\}, F^\bullet)\\ \simeq \mathrm{R}\Gamma(\{x; -\delta = \langle x - x_0, \xi_0\rangle, \langle x - a, \xi_0\rangle \leqq -\varepsilon|x - a|\}, F^\bullet).\end{aligned}$$

この命題は [4, §4] で暗に示されている.

定義 1. — $F^\bullet \in \mathrm{Ob}(\mathrm{D}_+(M))$ とする．$F^\bullet$ の**超局所台** (micro-support) $\mathrm{SS}(F^\bullet)$ とは，次で定義される T^*M の閉錐である．：

(a) $\mathrm{SS}(F^\bullet) \cap T_M^*M = \overline{\bigcup_j \mathrm{supp}(\mathscr{H}^j(F^\bullet))}$;

(b) $\xi \in \dot{T}^*M, \xi \in \mathrm{SS}(F^\bullet) \Leftrightarrow$ 命題 1 の同値な条件をみたす.

例 1. — $M = \mathbf{R}^n$, $Z = \{x \in M, x_1 \geqq 0\}$, $F = \underline{\mathbf{C}}_Z$.*2

このとき $\mathrm{SS}(F) = \{(x,\xi); x_1 \geqq 0, \xi = 0\} \cup \{(x,\xi); \xi_1 \geqq 0, x_1 = \xi_2 = \cdots = \xi_n = 0\}$.

例 2. — $M = \mathbf{R}^n$, $\mathscr{U} = \{x \in M, x_1 > 0\}$, $F = \underline{\mathbf{C}}_{\mathscr{U}}$.

このとき $\mathrm{SS}(F) = \{(x,\xi); x_1 \geqq 0, \xi = 0\} \cup \{(x,\xi); \xi_1 \leqq 0, x_1 = \xi_2 = \cdots = \xi_n = 0\}$.

例 3. — $M = \mathbf{R}^2$, $Z = \{x \in M, x_1^3 \geqq x_2^2\}$, $F = \underline{\mathbf{C}}_Z$.

このとき $\pi^{-1}(0) \cup \mathrm{SS}(F) = \{\xi; \xi_1 \geqq 0\}$.

3 関手的な性質

命題 2. — ω を M 上の双対化複体とする.

このとき，任意の $F^\bullet \in \mathrm{Ob}(\mathrm{D}_b(M))$ に対し，$\mathrm{SS}(\mathrm{R}\mathscr{H}om(F^\bullet, \omega)) \subset \mathrm{SS}(F^\bullet)^a$ が成り立つ.

M と N を C^1 級多様体，f を M から N への C^1 級写像とし，$\bar{\omega}\colon T^*N \underset{N}{\times} M \to T^*N$ と $\rho\colon T^*N \underset{N}{\times} M \to T^*M$ を f から定まる写像とする.

命題 3. — $F^\bullet \in \mathrm{Ob}(\mathrm{D}_+(M))$ を f の $\overline{\bigcup_j \mathrm{supp}(\mathscr{H}^j(F^\bullet))}$ への制限が固有となるものとする．このとき $\mathrm{SS}(\mathrm{R}f_*(F^\bullet)) \subset \rho(T^*N \underset{N}{\times} M)$ が成り立つ.

命題 4. — f が滑らかであるとする.

(i) $G^\bullet \in \mathrm{Ob}(\mathrm{D}_+(N))$ とする．このとき，$\mathrm{SS}(f^{-1}(G^\bullet)) = \rho\bar{\omega}^{-1}(\mathrm{SS}(G^\bullet))$ である.

*2 [訳注] $\underline{\mathbf{C}}_Z$ は Z に台を持つ定数層である．現在は $\mathbf{C}_Z$ で表すのが通例である.

(ii) $F^\bullet \in \mathrm{Ob}(\mathrm{D}_b(M))$ とする．このとき，任意の $\mathscr{H}^j(F^\bullet)$ が f のファイバー上で局所定数層となるのは，$\mathrm{SS}((F^\bullet)) \subset \rho(T^*N \underset{N}{\times} M)$ が成り立つとなるときである．

命題 5. — M と N を C^1 級多様体とし，p_1 と p_2 を $M \times N$ から M と N への射影とする．

(i) $F^\bullet \in \mathrm{Ob}(\mathrm{D}_b(M))$ と $G^\bullet \in \mathrm{Ob}(\mathrm{D}_+(N))$ に対し，

$$\mathrm{SS}(\mathrm{R}\mathscr{H}om_A(p_1^{-1}F^\bullet, p_2^{-1}G^\bullet)) \subset \mathrm{SS}(F^\bullet)^a \times \mathrm{SS}(G^\bullet)$$

が成り立つ．

(ii) A のコホモロジー次元が有限であるとする．このとき，$F^\bullet \in \mathrm{Ob}(\mathrm{D}_b(M))$ と $G^\bullet \in \mathrm{Ob}(\mathrm{D}_+(N))$ に対し，

$$\mathrm{SS}(p_1^{-1}F^\bullet \overset{\mathrm{L}}{\underset{A}{\otimes}} p_2^{-1}G^\bullet) \subset \mathrm{SS}(F^\bullet) \times \mathrm{SS}(G^\bullet)$$

が成り立つ．

4 超局所化

以降，N は M の部分多様体であるとし，M と N は C^2 級であるとする．$M \setminus N \cup T_N M$ ($M \setminus N \cup T_N^* M$) にはブローアップ (éclaté) の（余ブローアップ (co-éclaté) の）自然な位相を入れる (cf.[6])．j を M から $M \setminus N \cup T_N M$ への包含とし π を $M \setminus N \cup T_N^* M$ から M への射影とする．$F^\bullet \in \mathrm{Ob}(\mathrm{D}_+(M))$ に対し，$\lambda(F^\bullet)$ で（[7] と同様に）$\mathrm{D}_+(T_N M)$ の対象 $\mathrm{R}j_*(F^\bullet)|_{T_N M}$ を表し，$\mu_N(F^\bullet)$ で $F^\bullet$ に対する N での佐藤の超局所化，すなわち，$\mathrm{D}_+(T_N^* M)$ の対象 $\mathrm{R}\Gamma_{T_N^* M}(\pi^{-1}(F^\bullet))^a$ を表す．Λ で M の N に対する余法束 $T_N^* M$ を表す．ハミルトン同相写像 $T^*(T^*M) \simeq T(T^*M)$ によって，束 $T^*\Lambda$ と $T_\Lambda T^* M$ を同一視することができ，それによって $T^*(T_N M)$ と $T_\Lambda T^* M$ も同一視することができる．他方，滑らかな写像 $T_N M \to N$ から埋め込み $T^*N \underset{N}{\times} T_N M \to T^*(T_N M) \simeq T_\Lambda T^* M$ が定まる．したがって，T^*N を（$T_N M$ の零切断を通して）$T_\Lambda T^* M$ の部分多様体と同一視することができる．とくに（M を T^*M に，N を M に取り替えることで）T^*M が TT^*M の部分多様体と同一視されることがわかる．

定理 1. — $F^\bullet \in \mathrm{Ob}(\mathrm{D}_+(M))$ とする，次の包含関係が成り立つ．

(i) $\mathrm{SS}(\mu_N(F^*)) \subset C_\Lambda(\mathrm{SS}(F^\bullet))$,

(ii) $\mathrm{SS}(\lambda_N(F^*)) \subset C_\Lambda(\mathrm{SS}(F^\bullet))$,

(iii) $\mathrm{SS}(\mathrm{R}\Gamma_N(F^*)) \subset T^*N \cap C_\Lambda(\mathrm{SS}(F^\bullet))$,

(iv) $\mathrm{SS}(F^*|_N) \subset T^*N \cap C_\Lambda(\mathrm{SS}(F^\bullet))$.

証明は [4] の主張の繰り返しである（[1] も参照）．(iii) と (iv) は一般に真の包含である．

系 6. — $\mathrm{SS}(F^*) \cap T^*_N M \subset T^*_M M$ とする．このとき，

$$\mathrm{R}\Gamma_N(F^\bullet) \simeq F^\bullet \otimes \mathrm{R}\Gamma_N(\mathbf{Z}_M) \quad \text{かつ} \quad \mathrm{SS}(F^*|_N) \subset \bar{\omega}\rho^{-1}(\mathrm{SS}(F^*))$$

が成り立つ．

（[6, 1 章] の 命題 1.2.5 を用いる．）

系 7. — (i) $F^\bullet \in \mathrm{Ob}(\mathrm{D}_b(M)), G^\bullet \in \mathrm{Ob}(\mathrm{D}_+(M))$ とする．このとき

$$\mathrm{SS}(\mathrm{R}\mathscr{H}om_A(F^\bullet, G^\bullet)) \subset T^*M \cap C(\mathrm{SS}(G^\bullet), \mathrm{SS}(F^\bullet))$$

が成り立つ．

(ii) A のコホモロジー次元が有限であるとする．このとき $F^\bullet, G^\bullet \in \mathrm{Ob}(\mathrm{D}_+(M))$ に対し，

$$\mathrm{SS}(F^\bullet \overset{\mathrm{L}}{\underset{A}{\otimes}} G^\bullet) \subset T^*M \cap C(\mathrm{SS}(F^\bullet), \mathrm{SS}(G^\bullet)^a)$$

が成り立つ．

5 包合性

定理 2. — $F^\bullet \in \mathrm{Ob}(\mathrm{D}_b(M))$ とする．このとき $\mathrm{SS}(F^\bullet)$ は包合的である（関数 f が $\mathrm{SS}(F^\bullet)$ で 0 になるとき，$\mathrm{SS}(F^\bullet)$ はハミルトンベクトル場 H_f で不変である）．

（M は C^2 級であるとし，C^1 級関数 f は T^*M の開集合でしか定義されないと仮定する．）

6 応用

以下では $(X, \mathcal{O}_X)$ を複素解析多様体とし，$\mathscr{D}_X$ で有限階の（$\mathscr{D}_X^\infty$ で無限階の）正則関数係数の微分作用素のなす X 上の層を表す．連接 $\mathscr{D}$ 加群 $\mathscr{M}$ に対し，$\mathrm{car}(\mathscr{M})$ で T^*X における $\mathscr{M}$ の特性多様体を表す．Z を別の複素解析多様体とするとき，π_Z で射影 $T^*(X \times Z) \to T^*X$ を表す．

命題 8. — (i)

$$\mathrm{car}(\mathscr{M}) = \bigcup_Z \pi_Z(\mathrm{SS}(\mathrm{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}}(\mathscr{M}, \mathcal{O}_{X\times Z})))$$

である（Z は複素解析多様体である）．

(ii) $\mathscr{M}$ がホロノミー加群であるとき，

$$\mathrm{car}(\mathscr{M}) = \mathrm{SS}(\mathrm{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}}(\mathscr{M}, \mathcal{O}_X))$$

である．

包含の片側は古典的な結果 [2] であり，反対の包含は層 $\mathscr{E}_X^{\mathbf{R}}$ (cf.[6, 2]) のコホモロジーを用いた定義と，$\mathscr{E}_X^{\mathbf{R}}$ が超局所微分作用素の環 $\mathscr{E}_X$ の上で忠実平坦であることから従う．

系 **9.** — Y を X の部分多様体とし，

(a) $\mathscr{D}_X^\infty \otimes \mathrm{R}\Gamma_{[Y]}(\mathscr{M}) = \mathrm{R}\Gamma_Y(\mathscr{D}_X^\infty \otimes \mathscr{M})$,
(b) $\mathscr{D}_Y$ 加群 $\mathscr{T}or_j^{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_Y, \mathscr{M})$ は連接的である

と仮定する．このとき，任意の j に対し次の包含関係が成り立つ．

$$\mathrm{car}(\mathscr{T}or_j^{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_Y, \mathscr{M})) \subset T^*Y \cap C_{T_Y X}(\mathrm{car}(\mathscr{M})).$$

仮定 (a), (b) は確定特異点型ホロノミー加群ならば任意の部分多様体 Y に対して成り立つ [3]．系 9 は [3] の結果を補完し，例えば，$\prod_j f_j^{\lambda_j}$ 型の分布の解析的波面集合の上からの評価を得ることができる．

本稿の主要結果は著者の一人が [8] において発表している．

参考文献

[1] J. M. Bony, P. Schapira, *Solutions Hyperfonction du Problem de Cauchy*, Springer Lecare Noles in Math., 287, 1973, p. 82–98.

[2] [*3] M. Kashiwara, Cours Université Paris-Nord redige par T. Monteiro-Fernandes, 1977.

[3] M. Kashiwara, T. Kawai, *On Holonomic Systems of Microdifferential equations III*, Publ. Rims. Kyoto Univ., 17, 1981, p. 813–979.

[4] M. Kashiwara, P. Schapira, *Micro-hyperbolic Systems*, Acta Math., 142, 1979, p. 1-55.

[5] M. Kashiwara, P. Schapira, *Micro-support des faisceaux: application aux modules différentiels*, Journees E.D.P. Saint-Jean-de-Monts, 1981, publ. Ecole Polytechnique, Palaiseau.

[6] Sato, T. Kawai, M. Kashiwara, *Microfunctions and Pseudo-differential Equations*, Springer Lecture Notes in Math., 287, 1973, p. 265-529.

[7] B. Malgrange, Transformation de Fourier cohomologique, Expose a Nancy, mai 1982.

[8] Schapira, *Micro-support des faisceaux*, Expose a Nancy, mai 1982.

[*3] [訳注] M. Kashiwara, *Systems of Microdifferential Equations*, Birkhäuser, 1983. として単行本化されている．