ゼミノート（2024/10/23 発表分）

大柴寿浩

2024 年 10 月 23 日

1　フーリエ・佐藤変換（復習）[KS90, §3.7]

系 1 ([KS90, Corollary 3.7.3])**.**　U を X の開集合とする．X 内の任意の $\mathbf{R}^+$ 軌道 b に対し，$b \cap U$ が可縮である（よってとくに空でない）とする．さらに，任意の $x \in X$ に対し，集合 $\{t \in \mathbf{R}^+; \mu(x,t) \in U\}$ が可縮であると仮定する．このとき，$F \in \mathsf{D}^+_{\mathbf{R}_{>0}}(X)$ に対し，制限射 $\mathrm{R}\Gamma(X;F) \to \mathrm{R}\Gamma(U;F)$ は同型となる．

コメント 2.　「さらに」から始まる文は Schapira のホームページにある errata による．

定理 1.1 ([KS90, Theorem 3.7.7])**.**　$\mathsf{D}^+_{\mathbf{R}_{>0}}(E)$ から $\mathsf{D}^+_{\mathbf{R}_{>0}}(E^*)$ への関手 $\widetilde{\Phi}_{P'}$ と $\widetilde{\Psi}_P$ は自然に同型である．

証明. $\widetilde{\Phi}_{P'}(F) = \mathrm{R}p_{2!}\left(p_1^{-1}F\right)_{P'}, \widetilde{\Psi}_P(F) = \mathrm{R}p_{2*}\mathrm{R}\Gamma_P(p_1^{-1}F)$ なので，これらを同型で結ぶ．

$$\begin{aligned}\widetilde{\Phi}_{P'}(F) &= \mathrm{R}p_{2!}\left(p_1^{-1}F\right)_{P'}\\ &\cong \mathrm{R}p_{2!}\mathrm{R}\Gamma_P\left(p_1^{-1}F\right)_{P'}\\ &\cong \mathrm{R}p_{2!}\left(\mathrm{R}\Gamma_P\left(p_1^{-1}F\right)_{P'}\right)\\ &\cong \mathrm{R}p_{2*}\left(\mathrm{R}\Gamma_P\left(p_1^{-1}F\right)_{P'}\right)\\ &\cong \mathrm{R}p_{2*}\mathrm{R}\Gamma_P(p_1^{-1}F).\end{aligned}$$

□

定義 1.2 ([KS90, Definition 3.7.8])**.**　$F \in \mathsf{D}^+_{\mathbf{R}_{>0}}(E)$ とする．F の**フーリエ・佐藤変換** (Fourier-Sato transform) $F^\wedge$ を

$$\begin{aligned}F^\wedge &:= \widetilde{\Phi}_{P'}(F)\ \left(= \mathrm{R}p_{2!}\left(p_1^{-1}F\right)_{P'}\right)\\ &\left(\cong \widetilde{\Psi}_P(F) = \mathrm{R}p_{2*}\mathrm{R}\Gamma_P(p_1^{-1}F)\right)\end{aligned}$$

で定める．

$G \in \mathsf{D}^+_{\mathbf{R}_{>0}}(E^*)$ とする．G の**逆フーリエ・佐藤変換** (inverse Fourier-Sato transform) $G^\vee$ を

$$\begin{aligned}G^\vee &:= \widetilde{\Psi}_{P'}(F)\ \left(= \mathrm{R}p_{1*}\mathrm{R}\Gamma_{P'}(p_2^!G)\right)\\ &\left(\cong \widetilde{\Phi}_P(G) = \mathrm{R}p_{1!}\left(p_2^!G\right)_P\right)\end{aligned}$$

で定める．

定理 1.3 ([KS90, Theorem 3.7.9])**.** $\mathsf{D}^+_{\mathbf{R}_{>0}}(E)$ から $\mathsf{D}^+_{\mathbf{R}_{>0}}(E^*)$ への関手 $^\wedge$ と $\mathsf{D}^+_{\mathbf{R}_{>0}}(E^*)$ から $\mathsf{D}^+_{\mathbf{R}_{>0}}(E)$ への関手 $^\vee$ は圏同値であり，互いに準逆である．とくに，F と F' を $\mathsf{D}^+_{\mathbf{R}_{>0}}(E)$ の対象とするとき，

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{D}^+_{\mathbf{R}_{>0}}(E)}(F', F) \cong \mathrm{Hom}_{\mathsf{D}^+_{\mathbf{R}_{>0}}(E)}(F'^\wedge, F^\wedge)$$

が成りたつ．

補題 1.4 ([KS90, Lemma 3.7.10])**.** (i) γ を E の固有閉凸錐で零切断を含むものとする．このとき，次が成り立つ．

$$(A_\gamma)^\wedge \cong A_{\mathrm{Int}\,\gamma^\circ}.$$

(ii) U を E の開凸錐とする．このとき次が成り立つ．

$$(A_U)^\wedge \cong A_{U^{\circ a}} \otimes \mathrm{or}_{E^*/Z}[-n].$$

注意 1.5 ([KS90, Remark 3.7.11])**.** RMK

命題 1.6 ([KS90, Proposition 3.7.12])**.** $F \in \mathsf{D}^+_{\mathbf{R}_{>0}}(E)$ とする．

(i) $F^{\wedge\wedge} \cong F^a \otimes \mathrm{or}_{E/Z}[-n]$.

(ii) U を E^* の開凸集合とすると

$$\mathrm{R}\Gamma(U; F^\wedge) \cong \mathrm{R}\Gamma_{U^\circ}(\tau^{-1}\pi(U); F) \cong \mathrm{R}\Gamma_{U^\circ}(E; F).$$

(iii) γ を E^* の固有閉凸錐で零切断を含むものとすると

$$\mathrm{R}\Gamma_\gamma(E^*; F^\wedge) \cong \mathrm{R}\Gamma(\mathrm{Int}\,\gamma^{\circ a}; F \otimes \mathrm{or}_{E/Z}[-n]).$$

(iv) 次が成り立つ．

$$(\mathrm{D}'F)^\vee \cong \mathrm{D}'(F^\wedge), \quad (\mathrm{D}F)^\vee \cong \mathrm{D}(F^\wedge).$$

証明. (ii)

$$\begin{aligned} \mathrm{R}\Gamma(U; F^\wedge) &\cong \mathrm{RHom}_{A_{E^*}}(A_U, F^\wedge) \\ &\cong \dots \\ &\cong \mathrm{R}\Gamma_{U^\circ}(\tau^{-1}(\pi(U)); F) \\ &\cong \mathrm{R}\Gamma_{U^\circ}(E; F) \end{aligned}$$

後半の

$$\mathrm{R}\Gamma_{U^\circ}(\tau^{-1}(\pi(U)); F) \cong \mathrm{R}\Gamma_{U^\circ}(E; F)$$

について，$\tau^{-1}(\pi(U))$ は次の 2 条件

- 各 $\mathbf{R}_{>0}$ 軌道 b に対し，$b \cap \tau^{-1}(\pi(U))$ が可縮である

- 任意の $v \in E$ に対し，集合 $\{t \in \mathbf{R}_{>0}; \mu(v,t) \in \tau^{-1}(\pi(U))\}$ が可縮である

をみたす．したがって，系 1 から，制限射が同型であることが従う．

(iii)

$$\begin{aligned}
\mathrm{R}\Gamma_\gamma(E^*; F^\wedge) &\cong \mathrm{RHom}(A_\gamma, F^\wedge) \\
&\underset{\text{Thm.3.7.9}}{\cong} \mathrm{RHom}((A_\gamma)^\wedge, F^{\wedge\wedge}) \\
&\underset{\text{Thm.3.7.10(i);(i)}}{\cong} \mathrm{RHom}(A_{\mathrm{Int}\,\gamma^\circ}, F^a \otimes \mathrm{or}_{E/Z}[-n]) \\
&\cong \mathrm{RHom}(A_{\mathrm{Int}\,\gamma^{\circ a}}, F \otimes \mathrm{or}_{E/Z}[-n]) \\
&\cong \mathrm{R}\Gamma(\mathrm{Int}\,\gamma^{\circ a}; F \otimes \mathrm{or}_{E/Z}[-n]).
\end{aligned}$$

(iv) D の方について示す．

$$\begin{aligned}
\mathrm{R}\mathcal{H}om_{A_E}(F^\wedge, \omega_{E^*/Z}) &= \mathrm{R}\mathcal{H}om_{A_E}(\mathrm{R}p_{2!}(p_1^{-1}F)_{P'}, \omega_{E^*/Z}) \\
&= \mathrm{R}p_{2*}\,\mathrm{R}\mathcal{H}om_{A_E}((p_1^{-1}F)_{P'}, p_2^!\omega_{E^*/Z}) \\
&= \mathrm{R}p_{2*}\,\mathrm{R}\Gamma_{P'}\,\mathrm{R}\mathcal{H}om_{A_E}(p_1^{-1}F, p_2^!\omega_{E^*/Z}) \\
&= \mathrm{R}p_{2*}\,\mathrm{R}\Gamma_{P'}\,\mathrm{R}\mathcal{H}om_{A_E}(p_1^{-1}F, p_1^!\omega_{E/Z}) \\
&= \mathrm{R}p_{2*}\,\mathrm{R}\Gamma_{P'}\,p_1^!\,\mathrm{R}\mathcal{H}om_{A_E}(F, \omega_{E/Z}) \\
&= (\mathrm{D}F)^\vee
\end{aligned}$$

□

命題 1.7 ([KS90, Proposition 3.7.13])**.** (i) $F \in \mathsf{D}^+_{\mathbf{R}_{>0}}(E)$ とする．このとき次が成り立つ．

$$(f_\tau^! F)^\wedge \cong f_\pi^!(F^\wedge), \quad (f_\tau^{-1}F)^\wedge \cong f_\pi^{-1}(F^\wedge).$$

(ii) $G \in \mathsf{D}^+_{\mathbf{R}_{>0}}(E')$ とする．このとき次が成り立つ．

$$(\mathrm{R}f_{\tau *}G)^\wedge \cong \mathrm{R}f_{\pi *}(G^\wedge), \quad (\mathrm{R}f_{\tau !}G)^\wedge \cong \mathrm{R}f_{\pi !}(G^\wedge),$$

命題 1.8 ([KS90, Proposition 3.7.14])**.** (i) $F \in \mathsf{D}^+_{\mathbf{R}_{>0}}(E_1)$ とする．このとき次が成り立つ．

$$\begin{aligned}
{}^t f^{-1}(F^\wedge) &\cong (\mathrm{R}f_! F)^\wedge, \\
{}^t f^!(F^\vee) &\cong (\mathrm{R}f_* F)^\vee, \\
{}^t f^!(F^\wedge) &\cong (\mathrm{R}f_* F)^\wedge \otimes \omega_{E_2^*/E_1^*}, \\
{}^t f^!(F^\vee) &\cong (\mathrm{R}f_! F)^\vee \otimes \omega_{E_2^*/E_1^*}.
\end{aligned}$$

(ii) $G \in \mathsf{D}^+_{\mathbf{R}_{>0}}(E_2)$ とする．このとき次が成り立つ．

$$\begin{aligned}
(f^{-1}F)^\vee &\cong \mathrm{R}{}^t f_!(G^\vee), \\
(f^! F)^\wedge &\cong \mathrm{R}{}^t f_*(G^\wedge), \\
(\omega_{E_1/E_2} \otimes f^! G)^\vee &\cong \mathrm{R}{}^t f_*(G^\vee), \\
(\omega_{E_1/E_2} \otimes f^{-1} G)^\wedge &\cong \mathrm{R}{}^t f_!(G^\wedge).
\end{aligned}$$

命題 1.9 ([KS90, Proposition 3.7.15]). $F_i \in \mathsf{D}^+_{\mathbf{R}_{>0}}(E_i)$, $i=1,2$ とする．このとき次が成り立つ．

$$F_1^\wedge \overset{\mathrm{L}}{\underset{Z}{\boxtimes}} F_2^\wedge \cong \left(F_1 \overset{\mathrm{L}}{\underset{Z}{\boxtimes}} F_2\right)^\wedge .$$

2 特殊化（復習）[KS90, §4.2]

定理 2.1 ([KS90, Thm 4.2.3]). $F \in \mathsf{D}^{\mathrm{b}}(X)$ とする．

(i) $\nu_M(F) \in \mathsf{D}^{\mathrm{b}}_{\mathbf{R}^+}(T_M X)$ であり，$\mathrm{supp}(\nu_M(F)) \subset C_M(\mathrm{supp}(F))$ である．

(ii) V を $T_M X$ の錐状開集合とする．このとき

$$H^j(V;\nu_M(F)) \cong \varinjlim_U H^j(U;F)$$

である．ただし U は $C_M(X-U)\cap V = \varnothing$ となる X の開集合の族を走る．とくに $v \in T_M X$ ならば，

$$H^j(\nu_M(F))_v \cong \varinjlim_U H^j(U;F)$$

である．ただし U は $v \notin C_M(X-U)$ となる X の開集合の族を走る．

(iii) A を $T_M X$ の錐状閉集合とする．このとき

$$H^j_A(T_M X;\nu_M(F)) \cong \varinjlim_{Z,U} H^j_{Z\cap U}(U;F)$$

である．ただし U は M の X における開近傍の族を走り，Z は $C_M(Z) \subset A$ となる X の閉集合を走る．

(iv) 次の同型が成り立つ．

$$\begin{aligned}\nu_M(F)|_M &\cong \mathrm{R}\tau_*(\nu_M(F)) \cong F|_M,\\ (\mathrm{R}\Gamma_M(\nu_M(F)))|_M &\cong \mathrm{R}\tau_!(\nu_M(F)) \cong \mathrm{R}\Gamma_M(F)|_M.\end{aligned}$$

(v) $\mathrm{R}\dot{\tau}_*(\nu_M(F)|_{\dot{T}_M X}) \cong \mathrm{R}\Gamma_{X-M}(F)|_M$ である．

証明. (i)：$\tilde{p}^{-1}F$ が錐状層であることを示せば，$\mathrm{R}j_*$ と s^{-1} が錐状層を錐状層に送ることから結果が従う．各次数 $j \in \mathbf{Z}$ に対し，$H^j(\tilde{p}^{-1}F)$ が各ファイバー $(x',x'',t) \in \Omega$ の $\mathbf{R}^+$ 軌道 $b = \mathbf{R}^+(x',x'',t)$ 上で局所定数であることを示す．$(cx',x'',c^{-1}t) \in b$ とする．このとき

$$\begin{aligned}\left(H^j(\tilde{p}^{-1}F)|_b\right)_{(cx',x'',c^{-1}t)} &\cong \left(H^j(\tilde{p}^{-1}F)\right)_{(cx',x'',c^{-1}t)}\\ &\cong \left(\tilde{p}^{-1}H^j(F)\right)_{(cx',x'',c^{-1}t)}\\ &\cong \left(H^j(F)\right)_{\tilde{p}(cx',x'',c^{-1}t)}\\ &\cong H^j(F)_{\tilde{p}(x',x'')}\end{aligned}$$

であり，b の全ての点での茎が同型となる．よって各実数 $c > 0$ に対し，$(cx',x'',c^{-1}t)$ の十分小さい近傍

$B_c \subset \Omega$ で $H^j(\tilde{p}^{-1}F)\big|_{b\cap B_c}$ が定数層 $\big(H^j(F)_{\tilde{p}(x',x'')}\big)_{b\cap B_c}$ となるものが存在する．$b = \bigcup_{c\in\mathbf{R}^+} B_c \cap b$ である．よって $H^j(\tilde{p}^{-1}F)$ は錐状層である．

$(x'';v) \in T_M X - C_M(\mathrm{supp}(F))$ とする．各 $j \in \mathbf{Z}$ に対し

$$H^j(F)_{(x'';v)} = 0$$

であるから $(x,0) = (x'';v) \in T_M X = t^{-1}(0)$ として，

$$\big(H^j(s^{-1}\mathrm{R}j_*\tilde{p}^{-1}F)\big)_{(x,0)} = s^{-1}\mathrm{R}j_*\tilde{p}^{-1}H^j(F)_{(x'';v)} = 0$$

である．したがって $(x'';v) \in T_M X - \mathrm{supp}(\nu_M(F))$ である．

(ii)：U を X の開集合で $C_M(X-U)\cap V = \varnothing$ となるものとする．次の射がある．

$$\begin{cases} \mathrm{R}\Gamma(U;F) & \underset{(1)}{\to} \mathrm{R}\Gamma(p^{-1}(U);p^{-1}F) \\ & \underset{(2)}{\to} \mathrm{R}\Gamma(p^{-1}(U)\cap\Omega;p^{-1}F) \\ & \underset{(3)}{\to} \mathrm{R}\Gamma(\tilde{p}^{-1}(U)\cup V;\mathrm{R}j_*j^{-1}p^{-1}F) \\ & \underset{(4)}{\to} \mathrm{R}\Gamma(V;\nu_M(F)). \end{cases} \tag{2.1}$$

ただし，それぞれの射は次のように定まる．

(1) $F \to \mathrm{R}p_*p^{-1}F$ から定まる．
(2) 制限射．もっというと $A_{p^{-1}(U)\cap\Omega} \to A_{p^{-1}(U)}$ から定まる．
(3) まず $p^{-1}F \to \mathrm{R}j_*j^{-1}p^{-1}F$ から $\mathrm{R}\Gamma(\tilde{p}^{-1}(U);\mathrm{R}j_*j^{-1}p^{-1}F)$ への射が定まる．Ω で台を切り落としているので $\mathrm{R}\Gamma(\tilde{p}^{-1}(U);\mathrm{R}j_*j^{-1}p^{-1}F)$ を V の $\bar{\Omega}$ での開近傍 $\tilde{p}^{-1}(U)\cup V$ に広げてもよい．
(4) $\mathrm{R}j_*j^{-1}p^{-1}F \to \mathrm{R}s_*s^{-1}\mathrm{R}j_*j^{-1}p^{-1}F$ と $s^{-1}A_{\tilde{p}^{-1}(U)\cup V} = A_{s^{-1}(\tilde{p}^{-1}(U)\cup V)} = A_V$ から定まる．

コホモロジーをとって，帰納極限の普遍性を考えると次の射が定まる．

$$\varinjlim_U H^k(U;F) \to H^k(V;\nu_M(F)).$$

この射が同型であることを示す．いま

$$\begin{aligned} H^k(V;\nu_M(F)) &\cong \varinjlim_{W\in I_V} H^k(W,\mathrm{R}j_*j^{-1}p^{-1}F) \quad (\because \text{注意 2.6.9}) \\ &\cong \varinjlim_{W\in I_V} H^k(W\cap\Omega,p^{-1}F) \quad (\because j^{-1}\dashv \mathrm{R}j_*,\ j_!\dashv j^{-1}) \end{aligned}$$

である．命題**??**より，$p\colon W\cap\Omega \to p(W\cap\Omega)$ の各ファイバーは連結，すなわち $\mathbf{R}$ と同相としてよい．このとき，

(i) p は位相的沈めこみである．
(ii) $\mathrm{R}p_!p^!\mathbf{Z}_{p(W\cap\Omega)} \to \mathbf{Z}_{W\cap\Omega}$ は同型である．実際，ファイバーが $\mathbf{R}$ と同相であることから，注意 3.3.10 の式 (3.3.13)

$$\mathbf{Z} \xrightarrow{\sim} \mathrm{R}\Gamma(p^{-1}(x);\mathbf{Z}_{p^{-1}(x)})$$

が成り立つ．

したがって命題 3.3.9 を p に適用すると $F \to \mathrm{R}p_!p^!F$ となることから

$$H^k(W \cap \Omega; p^{-1}F) \cong H^k(p(W \cap \Omega); F)$$

である．命題**??** (i) より，W を走らせたときの $U = p(W \cap \Omega)$ は $C_M(X - U) \cap V = \varnothing$ となる X の開集合を走る．したがって上の同型が示された．

(iii)：U を M の X における開近傍，Z を $C_M(Z) \subset A$ となる X の閉集合とする．次の射の列がある．

$$\begin{aligned}
\mathrm{R}\Gamma_{Z \cap U}(U; F) &\underset{(1)}{\to} \mathrm{R}\Gamma_{p^{-1}(Z \cap U)}(p^{-1}(U); p^{-1}F) \\
&\underset{(2)}{\to} \mathrm{R}\Gamma_{p^{-1}(Z \cap U) \cap \Omega}(p^{-1}(U) \cap \Omega; p^{-1}F) \\
&\underset{(3)}{\to} \mathrm{R}\Gamma_{(p^{-1}(Z \cap U) \cap \Omega) \cup A}(p^{-1}(U); \mathrm{R}j_*j^{-1}p^{-1}F) \\
&\underset{(4)}{\to} \mathrm{R}\Gamma_A(T_MX; \nu_M(F)).
\end{aligned}$$

ただし，それぞれの射は次のように定まる．

(1) $F \to \mathrm{R}p_*p^{-1}F$ に $\mathrm{R}\Gamma_{Z \cap U}(U;\ \cdot\ )$ を適用．
(2) $p^{-1}F \to \mathrm{R}j_*j^{-1}p^{-1}F$ に $\mathrm{R}\Gamma_{p^{-1}(Z \cap U)}(p^{-1}(U);\ \cdot\ )$ を適用．
(3) 切り落としと台の随伴と微妙なやつ．
(4) s^{-1} を当てる．T_MX 上の切断は A に台を持つことから．

以上の合成と切除の三角を考えると，次の可換図式が得られる．

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \varinjlim_U H^{k-1}(U - Z; F) \arrow[r] \arrow[d, "\gamma_{k-1}"] & \varinjlim_U H^k_{U-Z}(U; F) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_k"] & \varinjlim_U H^k(U; F) \arrow[r] \arrow[d, "\beta_k"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & H^{k-1}(T_MX - A; \nu_MF) \arrow[r] & H^k_A(T_MX; \nu_MF) \arrow[r] & H^k(T_MX; \nu_MF) \arrow[r] & \cdots .
\end{tikzcd}$$

各行は完全であり，γ_k と β_k は (ii) より同型である．したがって，α_k も同型である．

(iv)：$k \colon M \hookrightarrow T_MX$ を零切断とみなす閉埋め込みとする．このとき，

$$\begin{aligned}
F|_M = i^{-1}F &\cong k^{-1}s^{-1}p^{-1}F \\
&\to k^{-1}s^{-1}\mathrm{R}j_*j^{-1}p^{-1}F \\
&\cong k^{-1}\nu_MF \\
&= \nu_MF|_M
\end{aligned}$$

と

$$\begin{aligned}
k^!\nu_MF &= k^!s^!j_!j^!p^!F \\
&\to k^!s^!p^!F \\
&= i^!F = i^{-1}\,\mathrm{R}\Gamma_M\,F
\end{aligned}$$

という射が得られる．これらは (ii), (iii) から同型である．($v \in T_MX$ として 0 を取ればよい．) 残りの同型は $i^{-1} \cong \mathrm{R}\tau_*$ と $i^! \cong \mathrm{R}\tau_!$ から従う．

(v)：次の三角の射がある．

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{R}\Gamma_M(F)|_M \arrow[r] \arrow[d] & F|_M \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{R}\Gamma_{X-M}(F)|_M \arrow[r] \arrow[d] & +1 \\
\mathrm{R}\Gamma_M(\nu_M F)|_M \arrow[r] & \mathrm{R}\tau_*\nu_M F \arrow[r] & \mathrm{R}\dot{\tau}_*(\nu_M F|_{\dot{T}_M X}) \arrow[r] & +1.
\end{tikzcd}$$

左と真ん中が同型なので右も同型である． □

命題 2.2 ([KS90, Prop.4.2.4])**．** $G \in \mathsf{D}^{\mathrm{b}}(Y)$ とする．

(i) 標準的な射による可換図式

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{R}(T_N f)_! \nu_N(G) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{R}(f_! G) \arrow[d] \\
\mathrm{R}(T_N f)_* \nu_N(G) & \mathrm{R}(f_* G) \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

が存在する．

(ii) さらに，$\mathrm{supp}(G) \to X$ と $C_N(\mathrm{supp}(G)) \to T_M X$ が固有かつ $\mathrm{supp}(G) \cap f^{-1}(M) \subset N$ ならば，以上の射はすべて同型である．
とくに $f^{-1}(M) = N$ かつ，f が M に関して斉かつ $\mathrm{supp}(G)$ 上固有のとき，以上の射はすべて同型である．

証明． (ii) $\overline{\tilde{p}_Y^{-1}(\mathrm{supp}(G))}$ が $\tilde{X}_M$ 上固有ならば，$\mathrm{R}\tilde{f}'_*$ と $\mathrm{R}(T_N f)_*$ をそれぞれ $\mathrm{R}\tilde{f}'_!$ と $\mathrm{R}(T_N f)_!$ に置き換えることができるので，射はすべて同型となる．したがって，Y の閉部分集合 Z に対し，Z が X 上固有であること，$C_N(Z)$ が $T_M X$ 上固有であること，そして $Z \cap f^{-1}(M) \subset N$ であることを仮定したとき，$\overline{\tilde{p}_Y^{-1}(Z)}$ が $\tilde{X}_M$ 上固有であることを示せばよい．$\overline{\tilde{p}_Y^{-1}(Z)} \to \tilde{X}_M$ のファイバーはコンパクトなので，閉写像であることを示せば十分である．$\{u_n\}_n$ を $\overline{\tilde{p}_Y^{-1}(Z)}$ の点列で $\{\tilde{f}'(u_n)\}_n$ が収束するものとする．$\{u_n\}_n$ の部分列で収束するものが存在することを示せばよい．$\{\tilde{p}_Y(u_n)\}_n$ が収束すると仮定してよい．$\tilde{p}_Y^{-1}(Z) - T_N Y \to \tilde{X}_M - T_M X$ は固有なので，$\{\tilde{f}'(u_n)\}_n$ は $T_M X$ の点に収束するとしてよい．このとき，$\{\tilde{p}_Y(u_n)\}_n$ の極限点は $Z \cap f^{-1}(M)$ に含まれるので N に含まれる．

X と Y の局所座標系を (4.1.10) のようにとり，$u_n = (y'_n, y''_n, t_n)$ とおく．このとき，$t_n \underset{n}{\to} 0$, $t_n y'_n \underset{n}{\to} 0$ である．さらに $t_n > 0$（すなわち $u_n \in \tilde{p}_Y^{-1}(z)$）としてよい．$\{y''_n\}_n$ は収束するので，$\{|y'_n|\}_n$ が有界であることを示せばよい．いま，$|y'_n| \underset{n}{\to} \infty$ だったと仮定して矛盾を導く．部分列を取り出すことで，$\{y'_n/|y'_n|\}_n$ は 0 でないベクトル v に収束する．このとき $\{(y'_n/|y'_n|, y''_n, t_n|y'_n|)\}_n$ は $\tilde{p}_Y^{-1}(Z)$ に属し，点 $p \in T_N Y$ で零切断に属さないものに収束する．他方，$\tilde{f}'(u_n) = \left(\dfrac{1}{t_n} f_1(t_n, y'_n, y''_n), f_2(t_n, y'_n, y''_n)\right)$ は収束し $\left\{\dfrac{1}{t_n|y'_n|} f_1(t_n, y'_n, y''_n)\right\}_n$ は 0 に収束する．これより $T_N f(p)$ は $T_M X$ の零切断に属することが従う．したがって $C_N(Z) \cap (T_N f)^{-1}(T_N f(p)) \supset \mathbf{R}_{\geqq 0} p$ となる．これは $C_N(Z) \to T_M X$ が固有であるという事実にムジュンする． □

命題 2.3 ([KS90, Prop.4.2.5])**.**　$F \in \mathsf{D}^{\mathrm{b}}(X)$ とする．このとき，標準的な射

$$\alpha\colon (T_N f)^{-1}\nu_M(F) \to \nu_N(f^{-1}F),$$
$$\beta\colon \nu_N(f^!F) \to (T_N f)^!\nu_M(F)$$

で次の図式を可換にするものが存在する．

$$\begin{tikzcd}
\omega_{T_NY/T_MX} \otimes (T_N f)^{-1}\nu_M(F) \arrow[rr, "\omega_{Y/X}\otimes\alpha"'] \arrow[d, "\gamma"] & & \nu_N(\omega_{Y/X} \otimes f^{-1}F) \arrow[d] \\
(T_N f)^!\nu_N(F) & & \nu_N(f^!F) \arrow[ll, "\beta"']
\end{tikzcd}$$

ここで縦向きの矢印は (3.1.6) から導かれるものである．
$T_Nf\colon T_NY \to T_MX$ が平滑となる開集合上では，これらの射はすべて同型である．
とくに，$f\colon Y \to X$ と $f|_N\colon N \to M$ が平滑ならばこれらの射はすべて同型となる．

3　超局所化 [KS90, §4.3]

§1 と同様に，M を X の，余次元 l の閉部分多様体とする．T^*_MX で，M の X における余法束，すなわち写像 $M \times_X T^*X \to T^*M$ の核を表す．π で射影 $T^*X \to X$ あるいはその制限 $T^*_MX \to M$ を表す．$i\colon M \to X$ を包含とするとき，$i \circ \pi$ をたんに π とかくことがある．
$\dot{\pi}$ で π の $\dot{T}^*X = T^*X - X$ への制限を表す．

定義 3.1 ([KS90, Def 4.3.1])**.**　$F \in \mathsf{D}^{\mathrm{b}}(X)$ とする．$\nu_M(F)$ のフーリエ佐藤変換

$$\mu_M(F) \coloneqq \nu_M(F)^\wedge$$

を F の M に沿った**超局所化** (microlocalization) という．

定理 4.2.3 と III §7 の結果を適用することで次が得られる．

定理 3.2 ([KS90, Thm 4.3.2])**.**　$F \in \mathsf{D}^{\mathrm{b}}(X)$ とする．

(i) $\mu_M(F) \in \mathsf{D}^{\mathrm{b}}_{\mathbf{R}^+}(T_MX)$ である．
(ii) V を T^*_MX の錐状開集合とする．このとき

$$H^j(V; \mu_M(F)) \cong \varinjlim_{U,Z} H^j_{Z\cap U}(U; F)$$

である．ただし U は $U \cap M = \pi(V)$ となる X の開集合の族を走り，Z は X の閉集合で $C_M(Z)_{\pi(p)} \subset \{v \in (T_MX)_{\pi(p)}; \langle v, p\rangle > 0\} \cup \{0\}$ となるものの族を走る．

(iii) Z を $T_M X$ の固有閉凸錐で零切断を含むものとする．このとき

$$H^j_Z(T^*_M X; \mu_M(F) \otimes \mathrm{or}_{M/X}) \cong \varinjlim_{U} H^{j-l}(U; F)$$

である．ただし U は X の開集合で $C_M(X-U) \cap \mathrm{Int}\, Z^{\circ a} = \varnothing$ となるものの族を走る．

(iv) 次の同型が成り立つ．

$$\mu_M(F)|_M \cong \mathrm{R}\pi_*(\mu_M(F)) \cong \mathrm{R}\Gamma_M(F)|_M \cong i^! F,$$
$$\mathrm{R}\Gamma_M(\mu_M(F)) \cong \mathrm{R}\pi_!(\mu_M(F)) \cong i^{-1} F \otimes \omega_{M/X}.$$

次が成り立つ．

$$i^{-1} F \otimes \omega_{M/X} = F|_M \otimes \mathrm{or}_{M/X}[-l].$$

最後の結果を完全三角

$$\mathrm{R}\Gamma_M(\mu_M(F)) \to \mathrm{R}\pi_* \mu_M(F) \to \mathrm{R}\dot{\pi}_* \mu_M(F) \to +1$$

に適用することで，完全三角

$$F|_M \otimes \omega_{M/X} \to \mathrm{R}\Gamma_M(F)|_M \to \mathrm{R}\dot{\pi}_* \mu_M(F) \to +1 \tag{3.1}$$

を得る．いま，$f\colon Y \to X$ を多様体の射とし，N を Y の，余次元 k の閉部分多様体で $f(N) \subset M$ をみたすものとする．写像 Tf (cf. 4.1.8) から写像

$$T^*Y \underset{{}^t f'}{\longleftarrow} Y \times_X T^*X \underset{f_\pi}{\longrightarrow} T^*X \tag{3.2}$$

が定まり，これらから

$$T^*_N Y \underset{{}^t f'_N}{\longleftarrow} N \times_M T^*_M X \underset{f_{N\pi}}{\longrightarrow} T^*_M X \tag{3.3}$$

がひきおこされる．混乱の恐れのないときは，$f_{N\pi}$ のかわりに f_π とかき，${}^t f'_N$ のかわりに ${}^t f'$ とかく．

$$T^*_Y X \coloneqq \mathrm{Ker}({}^t f'\colon Y \times_X T^*X \to T^*Y) = {}^t f'(T^*_Y Y) \tag{3.4}$$

とおく．

注意 3.3. 文献によっては，${}^t f'$ と f_π をそれぞれ ρ_f と $\bar{\omega}_f$ や，たんに ρ と $\bar{\omega}$ で表すものもある．ここではこれらの表記は用いない．

コメント 3. 最近は ${}^t f'$ を f_d とかくことが多い．（GKS とか．）

順像との関係

フーリエ・佐藤関手を命題 4.2.4 と命題 4.2.5 の射に適用する．

命題 3.4. $G \in \mathsf{D}^{\mathrm{b}}(Y)$ とする．このとき，標準的な射による可換図式

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{R}f_{N_\pi !}{}^t f_N'^{-1}\mu_N(G) \arrow[r] \arrow[d] & \mu_M(\mathrm{R}f_! G) \arrow[d] \\
\mathrm{R}f_{N_\pi *}({}^t f_N'^{!}\mu_N(G) \otimes \omega_{Y/X} \otimes \omega_{N/M}^{\otimes -1}) & \mu_M(\mathrm{R}f_* G) \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

が存在する．さらに，$\mathrm{supp}(G) \to X$ と $C_N(\mathrm{supp}(G)) \to T_M X$ が固有かつ $\mathrm{supp}(G) \cap f^{-1}(M) \subset N$ ならば，以上の射はすべて同型である．
とくに $f^{-1}(M) = N$ かつ，f が M に関して斉かつ $\mathrm{supp}(G)$ 上固有のとき，以上の射はすべて同型である．

証明. $H = \nu_N(G)$ とする．命題 3.7.13 と命題 3.7.14 を $f' = f_\tau \circ f_N'$ に用いることで

AAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAA

を得る．このとき命題 4.2.4 と式 (4.2.4) から主張が従う． □

逆像との関係

命題 3.5 ([KS90, Prop.4.3.5])**.** $F \in \mathsf{D}^{\mathrm{b}}(X)$ とする．

(i) 標準的な射で次の図式を可換にするものが存在する．

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{R}{}^t f'_{N!}(\omega_{N/M} \otimes f_{N_\pi}^{-1}\mu_M(F)) \arrow[r] \arrow[d] & \mu_N(\omega_{Y/X} \otimes f^{-1}F) \arrow[d] \\
\mathrm{R}{}^t f'_{N*} f_{N_\pi}^{!}\mu_M(F) & \mu_N(f^! F) \arrow[l, "\beta"']
\end{tikzcd}$$

ここで縦向きの矢印は (3.1.6) から導かれるものである．

(ii) $f\colon Y \to X$ と $f|_N\colon N \to M$ が平滑ならばこれらの射はすべて同型となる．

(iii) f が M に横断的かつ $f^{-1}(M) = N$ ならば，自然な射

$$\mathrm{R}{}^t f'_{N*} f_{N_\pi}{}^{-1}\mu_M(F) \to \mu_N(f^{-1}F)$$

が存在する．

証明. $H = \nu_M(F)$ とおく．命題 3.7.13 と命題 3.7.14 を用いよう．

AAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAA

である．したがって，命題 4.2.5 から (i) と (ii) が従う．

f が M に横断的かつ $f^{-1}(M)=N$ のとき，${}^t f'_N\colon T^*_N Y \to N\times_M T^*_M X$ は同型であり，$\omega_{N/M}\cong \omega_{Y/X}\big|_N$ である． □

f と $f|_N$ が平滑ならば, $Y\times_X T^*X$ は T^*Y の部分束であり，f_π は同型 $(Y\times_X T^*X)\cap T^*_N Y \xrightarrow{\sim} Y\times_X T^*_M X$ を引き起こす.

テンソル積との関係

最後にテンソル積について調べる.

命題 3.6. 命題 4.2.6 の状況で，次の自然な射が存在する.

$$\mu_M(F)\overset{\mathrm{L}}{\boxtimes}\mu_N(G)\to\mu_{M\times N}\left(F\overset{\mathrm{L}}{\boxtimes}G\right).$$

証明. 命題 4.2.6 と命題 3.7.15 を適用すればよい. □

命題 3.7. M を X の部分多様体とし $\gamma\colon T^*_M X\times_M T^*_M X\to T^*_M X$ を加法で定まる射とする．このとき，任意の $F,G\in\mathsf{D}^{\mathrm{b}}(X)$ に対し，自然な射

$$\mathrm{R}\gamma_!\left(\mu_M(F)\underset{M}{\overset{\mathrm{L}}{\boxtimes}}\mu_N(G)\right)\to\mu_M\left(F\overset{\mathrm{L}}{\otimes}G\right)\otimes\omega_{M/X} \tag{3.5}$$

が存在する.

注意 3.8. 命題 4.3.4 と 4.3.5 の射の関係は以下の通りである.

(a) $\mathsf{D}^{\mathrm{b}}(Y)$ の任意の射 $\varphi\colon G\to f^!F$ に対し，次の図式は可換である.

$$\begin{CD}
\mathrm{R}f_{N_\pi !}{}^t f'_N{}^{-1}\mu_N(G) @>>{\alpha}> \mu_M(\mathrm{R}f_!G)\\
@V{\varphi}VV @VV{\varphi}V\\
\mathrm{R}f_{N_\pi !}{}^t f'_N{}^{-1}\mu_N(f^!F) @>>{\beta}> \mu_M(F)
\end{CD}$$

ここで α は命題 4.3.4 の初めの横向きの矢印で，β は命題 4.3.5 の二つ目の横向きの矢印で与えられる.

(b) 同様に，$\mathsf{D}^{\mathrm{b}}(Y)$ の任意の射 $\psi\colon F\to\mathrm{R}f_*G$ に対し，次の図式は可換である.

$$\begin{CD}
\mu_M(F) @>>{\alpha'}> \mathrm{R}f_{N_\pi *}({}^t f'_N{}^!\mu_N(f^{-1}F)\otimes\omega_{Y/X}\otimes\omega_{N/M}^{\otimes -1})\\
@V{\psi}VV @VV{\psi}V\\
\mu_M(\mathrm{R}f_*F) @>>{\beta'}> \mathrm{R}f_{N_\pi *}({}^t f'_N{}^!\mu_N(G)\otimes\omega_{Y/X}\otimes\omega_{N/M}^{\otimes -1})
\end{CD}$$

ここで α' は命題 4.3.5 の初めの横向きの矢印で，β' は命題 4.3.4 の二つ目の横向きの矢印で与えられる.

参考文献

[KS90] Masaki Kashiwara, Pierre Schapira, *Sheaves on Manifolds*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 292, Springer, 1990.

[Sch04] Pierre Schapira, *Sheaves: from Leray to Grothendieck and Sato*, Séminaires et Congres 9, Soc. Math. France, pp.173–181, 2004.