

Morse 理論

Toshi2019

2022 年 9 月 28 日

概要

Morse 理論の勉強ノート．実質 [M01] の読書ノート．

はじめに

個人的なモチベはシンプレクティック幾何．どうやら Morse 理論はシンプレクティック幾何の原型になっているらしいので，本格的に勉強する前に，Morse 理論をかじっておこうというモチベ．なので低次元トポロジーにはそこまで興味があるわけではない．

凡例

- 関数：断りがなければ関数は実数値の写像とする．

1 曲面上の Morse 理論

1.1 1 変数

以下，関数はすべて滑らか (C^∞ 級) であるとする． $u < v$ を実数とし， $y = f(x)$ を开区間 (u, v) で定義された C^∞ 級関数とする． (u, v) の点 a が $y = f(x)$ の臨界点であるとは，

$$f'(a) = 0 \tag{1.1}$$

であることをいう．

例 1.1. 1. $f(x) = x^2$ とおく． $f'(x) = 2x$ なので， $f'(0) = 0$ である．よって $x = 0$ は x^2 の臨界点である．

2. $f(x) = x^3$ とおく． $f'(x) = 3x^2$ なので， $f'(0) = 0$ である．よって $x = 0$ は x^3 の臨界点である．

$u < v$ を実数とし， $y = f(x)$ を开区間 (u, v) で定義された C^∞ 級関数とし， (u, v) の点 a を $y = f(x)$ の臨界点とする．このとき，臨界点 $x = a$ が退化しているとは

$$f''(a) = 0 \quad (1.2)$$

であることをいう． $x = a$ が退化していないとき，非退化な臨界点であるという．

1.2 2 変数

2 変数のときの臨界点は

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0 \quad (1.3)$$

で定義する．

定義 1.2 . $(x, y) = p_0 = (a, b)$ を f の臨界点とする． f のヘッセ行列

$$H_f(p_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(p_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(p_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(p_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(p_0) \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

の行列式（ヘッシアン） $\det H_f(p_0)$ が 0 のとき， p_0 は退化しているという．

参考文献

[M01] 松本幸夫, Morse 理論の基礎, 岩波講座 現代数学の基礎 **27**, 岩波書店 (2001).