代数まとめノート

Toshi2019

2024 年 10 月 12 日更新版*1

*1 2024/03/16 作成

第 1 章

線形代数

代数について調べたこととかをまとめる．

1.1　双対空間

V を体 $\mathbf{k}$ 上のベクトル空間とする．V に対して，ベクトル空間 V^* を

$$V^* \coloneqq \mathrm{Hom}_{\mathbf{k}}(V, \mathbf{k})$$

として定める．V^* を V の**双対空間** (dual space) という．

零化空間

V を体 $\mathbf{k}$ 上のベクトル空間とし，W を V の部分空間とする．W に対し，

$$\{u \in V^* \mid u(w) = 0 \ (w \in W)\} \quad (= \{u \in V^* \mid \langle u, w \rangle = 0 \ \ (w \in W)\})$$

は V^* の部分空間となる．この空間を W の**零化空間** (annihilator) とよび，記号 $\overset{\text{ダブリューボトム}}{W^{\perp}}$ で表す．

V^* の部分空間 W に対し，

$$\{v \in V \mid w(v) = 0 \ (w \in W)\} \quad (= \{v \in V \mid \langle w, v \rangle = 0 \ \ (w \in W)\})$$

は V の部分空間となる．この空間を W の**被零化空間** (annihilated space) とよび，記号 $\overset{\text{ダブリュートップ}}{W^{\top}}$ で表す．

第 2 章

環上の加群

2.1　準同型加群

自身との同型

　A を環とする．A は自分自身 (A, A) 両側加群と見なせるので，$\mathrm{Hom}_A(A, M)$ は左 A 加群の構造を持つ．

命題 2.1.1.　M を左 A 加群とする．次の射 $\mathrm{ev}_1\colon \mathrm{Hom}_A(A, M) \to M$ は同型である．

$$\mathrm{ev}_1(\varphi) = \varphi(1).$$

証明. A 加群の射 $h\colon M \to \mathrm{Hom}_A(A, M)$ を

$$h(x) \coloneqq (a \mapsto a \cdot x)$$

で定める．h が ev_1 の逆射になることを示せばよい．

　$\varphi \in \mathrm{Hom}_A(A, M)$ とする．

$$\begin{aligned}(h \circ \mathrm{ev}_1)(\varphi) &= h(\varphi(1)) \\ &= h(\varphi(1))\end{aligned}$$

である．任意の $b \in A$ に対して，

$$\begin{aligned}h(\varphi(1))(b) &= b \cdot \varphi(1) \\ &= \varphi(b)\end{aligned}$$

が成り立つので

$$h(\varphi(1)) = \varphi$$

である．したがって $h \circ \mathrm{ev}_1 = \mathrm{id}_{\mathrm{Hom}_A(A,M)}$ となる．

$x \in M$ とする.

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{ev}_1 \circ h)(x) &= \mathrm{ev}_1(h(x)) \\
&= h(x)(1) \\
&= 1 \cdot x \\
&= x \\
&= \mathrm{id}_M(x)
\end{aligned}
$$

である. □

参考文献

[I22] 池田岳, テンソル代数と表現論, 東京大学出版会, 2022.

[Sa15] 佐武一郎, 線型代数学 (新装版), 数学選書 1, 裳華房, 2015.

[Sai07] 斎藤毅, 線形代数と表現論, 東京大学出版会, 2007.

[Sh16] 志甫淳, 層とホモロジー代数, 共立出版, 2016.