

Poincaré-Verdier 双対性

大柴寿浩

はじめに

X, Y を局所コンパクト空間とし, $f: Y \rightarrow X$ を連続写像とする. A を大域次元が有限な可換環とする. $F \in D^+(A_X), G \in D^+(A_Y)$ とする.

$Rf_!: D^+(A_Y) \rightarrow D^+(A_X)$ の右随伴関手 $f^!: D^+(A_X) \rightarrow D^+(A_Y)$ を構成するのが目標.

1 例

随伴を仮定した場合, 層を具体的に設定するとどのような結果が従うか見てみる. $X = \{\text{pt}\}$, $F = A_{\{\text{pt}\}}, G = A_Y$ のとき,

$$\begin{aligned} R\text{Hom}_{A_X}(Ra_{Y!}A_Y, A) &= R\text{Hom}_{A_Y}(A_Y, a_Y^!A) \\ &= R\Gamma(Y; R\mathcal{H}om_{A_Y}(A_Y, a_Y^!A)) \\ &= R\Gamma(Y; a_Y^!A) \end{aligned}$$

である. $\omega_Y: a_Y^!A$ とおく. 開集合 $U \subset Y$ に対し,

$$\begin{aligned} R\Gamma(U; \omega_Y) &\cong R\Gamma(U; R\mathcal{H}om_A(A_U, a_Y^!A)) \\ &\cong R\text{Hom}_{A_U}(A_U, A) \end{aligned}$$

なので,

$$\begin{aligned} R\text{Hom}_{A_U}(A_U, a_Y^!A) &\cong R\text{Hom}_A(R\Gamma_c(Y; A_U), A) \\ &\cong R\text{Hom}_A(R\Gamma_c(U; A_U), A). \end{aligned}$$

ここで, U が \mathbf{R}^n と同相であるとする,

$$R\Gamma_c(U; A_U) \cong A[-n]$$

したがって,

$$\cong R\text{Hom}_A(R\Gamma_c(U; A_U), A) \cong A[n]$$

である. つまり, $\omega_Y = a_Y^!A$ は

$$H^k(\omega_Y) = \begin{cases} 0 & (k \neq -n) \\ \text{rank} = 1 \text{ の局所定数層} & (k = -n) \end{cases}$$

2 構成

2.1 構成

X, Y を局所コンパクト空間とし, $f: Y \rightarrow X$ を連続写像とする. A を大域次元が有限な可換環とする. $F \in D^+(A_X), G \in D^+(A_Y)$ とする.

$Rf_!: D^+(A_Y) \rightarrow D^+(A_X)$ の右随伴関手 $f^!: D^+(A_X) \rightarrow D^+(A_Y)$ を構成する. まず, 開集合 $V \subset Y$ に対し, $f^!F$ の V 上の切断に関する条件を見てみる.

$$R\Gamma(V; f^!F) = R\mathrm{Hom}_{A_Y}(A_V, f^!F) = R\mathrm{Hom}_{A_X}(Rf_!A_V, F)$$

となることから, $f^!F$ は $V \mapsto R\mathrm{Hom}_{A_X}(Rf_!A_V, F)$ という対応でなければならない. $Rf_!$ を計算するには c 柔軟分解 $A_V \sim K$ を取ればよく, さらに F が入射的であれば,

$$R\mathrm{Hom}_{A_X}(Rf_!A_V, F) = \mathrm{Hom}_{A_X}(f_!K_V, F)$$

となって, 結局

$$R\Gamma(V; f^!F) = \mathrm{Hom}_{A_X}(f_!K_V, F)$$

とできる.

■ f に関する仮定

定義 2.1. Y 上の層 G が f 柔軟であるとは, 各点 $x \in X$ に対し, $G|_{f^{-1}(x)}$ が c 柔軟であることをいう.

G が f 柔軟であることと, 任意の開部分集合 $V \subset Y$ と $j \neq 0$ に対し, $R^j f_!G_V = 0$ となることと同値である.

次を仮定する.

$$f_!: \mathrm{Mod}(\mathbf{Z}_Y) \rightarrow \mathrm{Mod}(\mathbf{Z}_X) \text{ のコホモロジー次元は有限である.} \quad (2.1)$$

つまり, 整数 $r \geq 0$ で, 全ての $j > r$ に対し $R^j f_! = 0$ となるものが存在する. (2.1) は次の条件と同値である.

$$\begin{cases} \text{任意の } G \in \mathrm{Sh}(Y) \text{ に対し, 完全列} \\ 0 \rightarrow G \rightarrow G^0 \rightarrow \cdots \rightarrow G^r \rightarrow 0 \\ \text{で, どの } G^j \text{ も } f \text{ 柔軟であるものが存在する.} \end{cases} \quad (2.2)$$

$$\begin{cases} \text{完全列 } G^0 \rightarrow \cdots \rightarrow G^r \rightarrow 0 \\ \text{において, } j < r \text{ に対し } G^j \text{ が } f \text{ 柔軟ならば,} \\ G^r \text{ が } f \text{ 柔軟となる.} \end{cases} \quad (2.3)$$

$f_!$ のコホモロジー次元が $\leq r$ となるのは, 任意の $x \in X$ に対し, $\Gamma_c(f^{-1}(x); \cdot)$ のコホモロジー次元が $\leq r$ となるときである. 実際, $f_!|_{f^{-1}(x)}F = \Gamma_c(f^{-1}(x); F) = 0$ となるので.

■構成 以上の仮定は,

$$\mathrm{R}\Gamma(V; f^!F) = \mathrm{Hom}_{A_X}(f_!K_V, F)$$

の構成をするためだった. $f_!K_V$ の分解をしたくて, その長さが有限になるという仮定である.

さて, K を \mathbf{Z}_Y 加群, F を A_X 加群とする. このとき, A 加群の前層 $f_K^!F$ を次で定める.
 $V \in \mathrm{Open}(Y)$ に対し,

$$(f_K^!F)(V) := \mathrm{Hom}_{A_X} \left(f_! \left(A_Y \otimes_{\mathbf{Z}_Y} K_V \right), F \right)$$

とする. 制限射は $K_{V'} \rightarrow K_V$ から引き起こされるもの.

補題 2.2. K を平坦かつ f 柔軟な \mathbf{Z}_Y 加群とする.

- (i) Y 上の任意の層 G に対し $G \otimes_{\mathbf{Z}_Y} K$ は f 柔軟である.
- (ii) $G \mapsto f_!(G \otimes_{\mathbf{Z}_Y} K)$ は $\mathrm{Mod}(\mathbf{Z}_Y)$ から $\mathrm{Mod}(\mathbf{Z}_X)$ への完全関手である.

証明. (i) Y 上の任意の層 G に対し, [KS90, Prop.2.4.12] の証明から, 分解

$$\rightarrow G^{-r} \rightarrow \cdots \rightarrow G^0 \rightarrow G \rightarrow 0$$

で, 各 G^j が \mathbf{Z}_V の直和となるものが存在する.

復習: $G \in \mathrm{Mod}(\mathbf{Z}_Y)$ に対し,

$$\mathfrak{S} := \{(V, s); V \in \mathrm{Open}(Y), s \in \Gamma(V; G)\}$$

とし, 各 $(V, s) \in \mathfrak{S}$ に対し, $\mathbf{Z}_Y(V, s) := \mathbf{Z}_V \in \mathrm{Mod}(\mathbf{Z}_Y)$ とおき, $P := \bigoplus_{(V, s) \in \mathfrak{S}} \mathbf{Z}_Y(V, s)$ とおく. $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}_Y}(\mathbf{Z}_V, G) \cong \Gamma(V; G)$ より, 各 $\varphi: \mathbf{Z}_V \rightarrow G$ に対し, $s \in G(V)$ がただ一つある. これにより全射 $P \twoheadrightarrow G$ が得られる. 各 $y \in Y$ に対し, $P_y = \bigoplus_{(V, s), y \in V} \mathbf{Z}$ である.
(復習終わり)

$\mathrm{Ker}(P \rightarrow G)$ に対し, 同様に \mathbf{Z}_Y の直和からの全射が構成できる. これを繰り返して, 分解

$$\rightarrow G^{-r} \rightarrow \cdots \rightarrow G^0 \rightarrow G \rightarrow 0$$

で, \mathbf{Z}_V の直和となるものが得られる. よって, どの j についても, $G^j \otimes_{\mathbf{Z}_Y} K$ は f 柔軟である. 実際, $(\bigoplus \mathbf{Z}_V) \otimes_{\mathbf{Z}_Y} K \cong \bigoplus (\mathbf{Z}_V \otimes_{\mathbf{Z}_Y} K) \cong \bigoplus K_V$ であり, 茎ごとに c 柔軟なので. この分解に $- \otimes_{\mathbf{Z}_Y} K$ をあてた

$$\rightarrow G^{-r} \otimes_{\mathbf{Z}_Y} K \rightarrow \cdots \rightarrow G^0 \otimes_{\mathbf{Z}_Y} K \rightarrow G \otimes_{\mathbf{Z}_Y} K \rightarrow 0$$

は K が平坦なので完全である. したがって, r を十分大きくとれば, $f_!$ のコホモロジー次元が有限であるという仮定から, (2.3) を用いて, $G \otimes_{\mathbf{Z}_Y} K$ も f 柔軟であることが従う.

(ii) $\mathrm{Sh}(Y)$ の完全列

$$0 \rightarrow G_1 \rightarrow G_2 \rightarrow G_3 \rightarrow 0$$

に対し,

$$0 \rightarrow G_1 \otimes_{\mathbf{Z}_Y} K \rightarrow G_2 \otimes_{\mathbf{Z}_Y} K \rightarrow G_3 \otimes_{\mathbf{Z}_Y} K \rightarrow 0$$

は f 柔軟である. いま,

$$0 \rightarrow f_!(G_1 \otimes_{\mathbf{Z}_Y} K) \rightarrow f_!(G_2 \otimes_{\mathbf{Z}_Y} K) \rightarrow f_!(G_3 \otimes_{\mathbf{Z}_Y} K) \rightarrow 0$$

のストーク

$$0 \rightarrow (f_!(G_1 \otimes_{\mathbf{Z}_Y} K))_x \rightarrow (f_!(G_2 \otimes_{\mathbf{Z}_Y} K))_x \rightarrow (f_!(G_3 \otimes_{\mathbf{Z}_Y} K))_x \rightarrow 0 \quad (\natural)$$

を考えると, これらは, $W = f^{-1}(x)$ とおくとき

$$0 \rightarrow \Gamma_c(W; (G_1 \otimes_{\mathbf{Z}_Y} K)|_W) \rightarrow \Gamma_c(W; (G_2 \otimes_{\mathbf{Z}_Y} K)|_W) \rightarrow \Gamma_c(W; (G_3 \otimes_{\mathbf{Z}_Y} K)|_W) \rightarrow 0$$

である. $G_j \otimes_{\mathbf{Z}_Y} K$ たちは f 柔軟なので, これらは W で c 柔軟であり, $f_!$ が完全であることから, (\natural) は完全である. よって, もとの層の系列も完全である. \square

補題 2.3. K を平坦かつ f 柔軟な \mathbf{Z}_Y 加群とし, F を A_X 入射加群とする.

(i) 前層 $f_K^! F$ は層である.

(ii) $G \in \text{Mod}(A_Y)$ に関して関手的な自然同型

$$\text{Hom}_{A_X}(f_!(G \otimes_{\mathbf{Z}_Y} K), F) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{A_Y}(G, f_K^! F)$$

が存在する. また, $f_K^! F$ は A_Y 入射加群である.

証明. (i) $- \otimes_{\mathbf{Z}_Y} K$ をたんに $- \otimes K$ で表す. V を Y の開集合とし, $(V_j)_j$ を V の開被覆とする.

$$\bigoplus_{j,k} A_{V_j \cap V_k} \rightarrow \bigoplus_j A_{V_j} \rightarrow A_V \rightarrow 0$$

は完全である.*¹これに完全関手 $f_!(- \otimes K)$ をあてて完全列

$$\bigoplus_{j,k} f_!(A_{V_j \cap V_k} \otimes K) \rightarrow \bigoplus_j f_!(A_{V_j} \otimes K) \rightarrow f_!(A_V \otimes K) \rightarrow 0$$

を得る. さらに左完全な反変関手 $\text{Hom}_{A_X}(-, F)$ をあてて, 完全列

$$0 \rightarrow \text{Hom}_{A_X}(f_!(A_V \otimes K), F) \rightarrow \text{Hom}_{A_X}\left(\bigoplus_j f_!(A_{V_j} \otimes K), F\right) \rightarrow \text{Hom}_{A_X}\left(\bigoplus_{j,k} f_!(A_{V_j \cap V_k} \otimes K), F\right)$$

を得る. これは極限を交換すれば

$$0 \rightarrow f_K^! F(V) \rightarrow \prod_j f_K^! F(V_j) \rightarrow \prod_{j,k} f_K^! F(V_j \cap V_k)$$

*¹開集合は小さい方から大きい方へ随伴射が生える. $A_{jk} \rightarrow A_j, A_k$ はそれぞれ $s_{jk} \mapsto s_{jk}$ と $s_{jk} \mapsto -s_{jk}$ で定める. A_{V_j} の台は V に含まれるので, 各切断の和の台も被覆の条件から V に含まれるので全射の方も成り立つ.

であり, $f_K^! F$ が層であることが示された.

(ii) アーベル群の射

$$\alpha(G): \operatorname{Hom}_{A_X}(f_!(G \otimes K), F) \rightarrow \operatorname{Hom}_{A_Y}(G, f_K^! F)$$

を定める. $\phi \in \operatorname{Hom}_{A_X}(f_!(G \otimes K), F)$ とする. $V \in \operatorname{Open}(Y)$ に対し, 次 A_X 加群の射がある.

$$\begin{aligned} G(V) \otimes f_!(A_Y \otimes K_V) &\xrightarrow{?} f_!(G \otimes K_V) \\ &\xrightarrow{\operatorname{adj.}} f_!(G \otimes K) \\ &\xrightarrow{\phi} F. \end{aligned}$$

よって, $\operatorname{Hom} \cdot$ テンソル随伴から, $G(V)$ から $f_K^! F(V) = \operatorname{Hom}(f_!(A_Y \otimes K_V), F)$ への射を得る. この射は $V \in \operatorname{Open}(Y)$ について関手的. よって, $\alpha(G)(\phi) \in \operatorname{Hom}_{A_Y}(G, f_K^! F)$.

$\alpha(G)$ が同型であることを

- (a) $G = A_V$ の場合,
- (b) $G = \bigoplus_j A_{V_j}$ の場合,
- (c) 一般の場合

の 3 段階で示す.

(a) $G = A_V$ のとき,

$$\begin{aligned} \operatorname{Hom}_{A_X}(f_!(G \otimes K), F) &\cong \operatorname{Hom}_{A_X}(f_!(A_V \otimes K), F) \\ &\cong (f_K^! F)(V) \\ &\cong \operatorname{Hom}_{A_Y}(A_V, f_K^! F) \\ &= \operatorname{Hom}_{A_Y}(G, f_K^! F) \end{aligned}$$

なので同型.

(b) $G = \bigoplus_j A_{V_j}$ のとき, $\alpha(G) = \prod_j \alpha(A_{V_j})$ なので, (a) の結果からこれも同型.

(c) G が一般のとき, [KS90, Prop.2.4.12] より, 完全列

$$0 \rightarrow G'' \rightarrow G' \rightarrow G \rightarrow 0$$

で, $G' \cong \bigoplus_j A_{V_j}$ となるものがある. (G'' は全射 $G' \rightarrow G$ の核として得られる.) よって, (b) より $\alpha(G')$ は同型. 次の可換図式を考える.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \operatorname{Hom}(f_!(G \otimes K), F) & \longrightarrow & \operatorname{Hom}(f_!(G' \otimes K), F) & \longrightarrow & \operatorname{Hom}(f_!(G'' \otimes K), F) \\ & & \downarrow \alpha(G) & & \downarrow \alpha(G') & & \downarrow \alpha(G'') \\ 0 & \longrightarrow & \operatorname{Hom}(G, f_K^! F) & \longrightarrow & \operatorname{Hom}(G', f_K^! F) & \longrightarrow & \operatorname{Hom}(G'', f_K^! F). \end{array}$$

補題 2.2 より, 2 つの行はどちらも完全. $\alpha(G')$ は同型なので, 左の可換性から $\alpha(G)$ は単射. 同じことを $\alpha(G'')$ にやれば $\alpha(G'')$ は単射. よって, 五項補題から $\alpha(G)$ は同型. (左に 0 の同型を追加する.)

$\mathrm{Hom}_{A_Y}(-, f_K^! F)$ が完全関手であることから, $f_K^! F$ が入射加群であることもわかる. \square

$f_!$ のコホモロジー次元を $\leq r$ とする.

補題 2.4. \mathbf{Z}_Y に対し, 分解 $0 \rightarrow \mathbf{Z}_Y \rightarrow K^0 \rightarrow \cdots \rightarrow K^r \rightarrow 0$ で, 各 K^j が平坦かつ f 柔軟な \mathbf{Z}_Y 加群となるものが存在する.

証明. 入射分解と同じように分解を構成する.

入射分解の復習 $\hat{Y} := (Y, P(Y))$ を Y に離散位相を入れた空間とし, $p: \hat{Y} \rightarrow Y$ を自然な連続写像とする. F を \mathbf{Z}_Y 加群とする. $p^{-1}F \in \mathrm{Mod}(\mathbf{Z}_{\hat{Y}})$ に対し, 入射加群 $I \in \mathrm{Mod}(\mathbf{Z}_{\hat{Y}})$ への単射

$$0 \rightarrow p^{-1}F \rightarrow I$$

があったとする. この I と単射に対し, 左完全関手 p_* を適用すると, $0 \rightarrow F \rightarrow p_*I$ は $\mathrm{Mod}(\mathbf{Z}_Y)$ における完全列である. (ここに $p_*p^{-1}F = (\mathrm{id}_Y)_*(\mathrm{id}_Y)^{-1} = F$ である.) p_* は入射的対象を保つので, p_*I は入射加群である.

最初の完全列を構成する. $F' \in \mathrm{Mod}(\mathbf{Z}_{\hat{Y}})$ とすると, 各点 $y \in Y$ に対し, $\mathrm{Mod}(\mathbf{Z}_{\hat{Y}, y}) = \mathrm{Mod}(\mathbf{Z})$ における完全列

$$0 \rightarrow F'_y \rightarrow I_y$$

が存在する. ($\mathrm{Mod}(\mathbf{Z})$ は充分入射的対象を持つのだった.) 単射の積は単射なので, Y 全体で積を取った

$$0 \rightarrow \prod_{y \in Y} F'_y \rightarrow \prod_{y \in Y} I_y$$

も完全である. したがって, $\mathrm{Mod}(\mathbf{Z}_{\hat{Y}})$ での入射加群 $I = \prod_{y \in Y} I_y$ への単射 $F \rightarrow I$ が得られた.

この操作を余核に対して繰り返し行えば, $F \in \mathrm{Mod}(\mathbf{Z}_Y)$ の入射分解が得られる.

(復習終わり)

\mathbf{Z}_Y の入射分解を

$$0 \rightarrow \mathbf{Z}_Y \rightarrow K^0 \rightarrow \cdots \rightarrow K^r \rightarrow 0$$

とする. 入射加群は c 柔軟であり, したがって f 柔軟である. したがって, この分解は c 柔軟分解である.

各項の平坦性を見る. \square

参考文献

[KS90] Masaki Kashiwara, Pierre Schapira, *Sheaves on Manifolds*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 292, Springer, 1990.