Notes on Sheaves on Manifolds

大柴寿浩

はじめに

2023 年度から始めた [KS90] のセミナーのノート．

記号

次の記号は断りなく使う．

- 添字：なんらかの族 $(a_i)_{i\in I}$ を $(a_i)_i$ とか (a_i) と略記することがある．

1　ホモロジー代数

1.3　複体の圏

$\mathscr{C}$ を加法圏とする．

注意． 加法圏とは次の 3 つの条件 (1)–(3) をみたす圏のことである．

(1) どの対象 $X, Y \in \mathscr{C}$ に対しても $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, Y)$ が加法群になり，どの対象 $X, Y, Z \in \mathscr{C}$ に対しても合成 $\circ$: $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(Y, Z) \times \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, Z)$ が双線型である．

(2) 零対象 $0 \in \mathscr{C}$ が存在する．さらに $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(0, 0) = 0$ が成り立つ．

(3) 任意の対象 $X, Y \in \mathscr{C}$ に対して積と余積が存在し，さらにそれらは同型になる．（それらを複積といい $X \oplus Y$ とかく．）

圏 $\mathscr{C}$ から，$\mathscr{C}$ の対象の複体の圏 $\mathrm{C}\,C(\mathscr{C})$ を作ることができる．まず複体の定義をする．圏 $\mathscr{C}$ の対象のと射の列

$$\cdot s \longrightarrow X^{n-1} \xrightarrow{d_X^{n-1}} X^n \xrightarrow{d_X^n} X^{n+1} \longrightarrow \cdot s \tag{1.3.1}$$

を考える．この列 $X = ((X^n)_{n\in\mathbf{Z}}, (d_X^n)_{n\in\mathbf{Z}})$ が**複体** (complex) であるとは，任意の $n \in \mathbf{Z}$ に対し

$$d_X^{n+1} \circ d_X^n = 0 \tag{1.3.2}$$

が成り立つことをいう．

圏 $\mathscr{C}$ の対象の複体 $X = ((X^n), (d_X^n))$, $Y = ((Y^n), (d_Y^n))$ の間の射を，$\mathscr{C}$ の射の族 $(f^n \colon X^n \to Y^n)_{n \in \mathbf{Z}}$ で，図式

$$\begin{tikzcd}
\cdot s \arrow[r] & X^n \arrow[r, "d_X^n"] \arrow[d, "f^n"] & X^{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "f^{n+1}"] & \cdot s \\
\cdot s \arrow[r] & Y^n \arrow[r, "d_Y^n"] & Y^{n+1} \arrow[r] & \cdot s
\end{tikzcd}$$

を可換にする，すなわちどの番号 $n \in \mathbf{Z}$ に対しても

$$d_Y^n \circ f^n = f^{n+1} \circ d_X^n \tag{1.3.3}$$

が成り立つものとして定める．

以上の準備のもとで，$\mathscr{C}$ の複体の圏 $\mathrm{C}(\mathscr{C})$ を次のように定める．

- 対象：$\mathrm{Ob}(\mathrm{C}(\mathscr{C})) = \{\mathscr{C}$ の複体 $\}$
- 射：$\mathrm{Hom}_{\mathrm{C}(\mathscr{C})}(X, Y) = \{\mathscr{C}$ の複体の射 $\}$

このとき，$\mathrm{C}(\mathscr{C})$ は加法圏になる．

圏になることの証明．$f \colon X \to Y$ と $g \colon Y \to Z$ を $\mathrm{C}(\mathscr{C})$ の射とする．f と g の合成 $g \circ f$ は $(g^n \circ f^n)_n$ で与えられる．これがうまくいくことは

$$\begin{tikzcd}
\cdot s \arrow[r] & X^n \arrow[r, "d_X^n"] \arrow[d, "f^n"] & X^{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "f^{n+1}"] & \cdot s \\
\cdot s \arrow[r] & Y^n \arrow[r, "d_Y^n"] \arrow[d, "g^n"] & Y^{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "g^{n+1}"] & \cdot s \\
\cdot s \arrow[r] & Z^n \arrow[r, "d_Z^n"] & Z^{n+1} \arrow[r] & \cdot s
\end{tikzcd}$$

が可換になることからわかる．

X の恒等射は $(\mathrm{id}_{X^n})_n$ で与えられる． □

加法圏になることの証明．X と Y を $\mathscr{C}$ の複体とする．

(1) **射の集合のアーベル群構造**　$f, g \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{C}(\mathscr{C})}(X, Y)$ に対し，$f + g$ が $(f^n + g^n)_n$ で定まる．

(2) **零対象の存在**　$\mathrm{C}(\mathscr{C})$ の零対象 0 は

$$\cdot s \longrightarrow 0 \xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{0} 0 \longrightarrow \cdot s$$

で与えられる．

(3) **複積の存在**　X と Y の複積 $X \oplus Y$ は

$$\cdot s \longrightarrow X^{n-1} \oplus Y^{n-1} \xrightarrow{d_X^{n-1} \oplus d_Y^{n-1}} X^n \oplus Y^n \xrightarrow{d_X^n \oplus d_Y^n} X^{n+1} \oplus Y^{n+1} \longrightarrow \cdot s$$

で与えられる． □

さらに $\mathscr{C}$ がアーベル圏ならば，$\mathrm{C}(\mathscr{C})$ もアーベル圏になる．

注意． 加法圏 $\mathscr{C}$ がアーベル圏であるとは次の条件 (4), (5) をみたすことをいう．

(4) 任意の $\mathscr{C}$ の射 $f\colon X \to Y$ に対し，f の核 $\operatorname{Ker} f$ と余核 $\operatorname{Coker} f$ が存在する．
(5) 任意の $\mathscr{C}$ の射 $f\colon X \to Y$ に対し，自然に定まる射 $\operatorname{Coim} f \to \operatorname{Im} f$ は同型である．

証明． X と Y を $\mathscr{C}$ の複体とする．
(4) **核と余核の存在**　複体の射 $f\colon X \to Y$ に対し，核 $\operatorname{Ker} f$ は $(\operatorname{Ker} f^n)_n$ で，余核 $\operatorname{Coker} f$ は $(\operatorname{Coker} f^n)_n$ で与えられる．

コメント (4/24). 「$\operatorname{Ker} f$ の differential の構成はどうなっていますか？」
次の図式を考える．

$$\begin{tikzcd}
\cdot s \arrow[r] & \operatorname{Ker} f^n \arrow[r, "\overline{d}_X^n"] \arrow[d, "\iota^n"] & \operatorname{Ker} f^{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "\iota^{n+1}"] & \cdot s \\
\cdot s \arrow[r] & X^n \arrow[r, "d_X^n"] \arrow[d, "f^n"] & X^{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "f^{n+1}"] & \cdot s \\
\cdot s \arrow[r] & Y^n \arrow[r, "d_Y^n"] & Y^{n+1} \arrow[r] & \cdot s
\end{tikzcd}$$

ここで，ι^n は $\operatorname{Ker} f^n$ の普遍性から自然に定まる射である．$\overline{d}_X^n\colon \operatorname{Ker} f^n \to \operatorname{Ker} f^{n+1}$ が $d_X^n \circ \iota^n$ によって定められることを示せば良い．

$$f^{n+1} \circ d_X^n \circ \iota^n = d_Y^n \circ f^{n+1} \circ \iota^n = d_Y^n \circ 0 = 0$$

より，$d_X^n \circ \iota^n$ は $\operatorname{Ker} f^{n+1}$ に値を取る．したがって，$\overline{d}_X^n\colon \operatorname{Ker} f^n \to \operatorname{Ker} f^{n+1}$ が定まる．

(5) **余像と像が同型になること**　各次数 n ごとに $\operatorname{Coim} f^n \cong \operatorname{Im} f^n$ が成り立つことから従う． □

圏 $\mathrm{C}(\mathscr{C})$ の充満部分圏 $\mathrm{C}^+(\mathscr{C})$, $\mathrm{C}^-(\mathscr{C})$, $\mathrm{C}^{\mathrm{b}}(\mathscr{C})$ を

$$\begin{aligned}
\operatorname{Ob}(\mathrm{C}^+(\mathscr{C})) &= \left\{ 0 \to X^n \xrightarrow{d_X^n} X^{n+1} \to \cdot s \quad (n \ll 0) \right\}, \\
\operatorname{Ob}(\mathrm{C}^-(\mathscr{C})) &= \left\{ \cdot s \to X^{n-1} \xrightarrow{d_X^{n-1}} X^n \to 0 \quad (n \gg 0) \right\}, \\
\operatorname{Ob}(\mathrm{C}^{\mathrm{b}}(\mathscr{C})) &= \{ 0 \to X^n \to \cdot s \to X^m \to 0 \quad (n \ll 0, m \gg 0) \}
\end{aligned}$$

で定める．

$\mathscr{C}$ の対象 X に対し $\mathrm{C}(\mathscr{C})$ の対象

$$\cdot s \to 0 \to X \to 0 \to \cdot s$$

を対応させることによって，忠実充満な関手 $\mathscr{C} \hookrightarrow \mathrm{C}(\mathscr{C})$ が定まる．

k を整数とする．$\mathscr{C}$ の複体

$$X\colon\ \cdot s \longrightarrow X^{n-1} \xrightarrow{d_X^{n-1}} X^n \xrightarrow{d_X^n} X^{n+1} \longrightarrow \cdot s$$

に対し，$X[k]$ を $X[k]^n = X^{n+k}$, $d^n_{X[k]} = (-1)^k d_X^{n+k}$ で定める．図式でかくと

$$X[k]\colon\ \cdot s \longrightarrow X^{n+k-1} \xrightarrow{(-1)^k d_X^{n+k-1}} X^{n+k} \xrightarrow{(-1)^k d_X^{n+k}} X^{n+k+1} \longrightarrow \cdot s$$

のようになる．X から Y への射 $f\colon X \to Y$ に対し，$f[k]\colon X[k] \to Y[k]$ を $f[k]^n = f^{n+k}$ で定める．X を $X[k]$ に対応させることで関手 $[k]\colon \mathrm{C}(\mathscr{C}) \to \mathrm{C}(\mathscr{C})$ が定まる．この関手を次数 k のシフト関手と呼ぶ．

$[k]$ が関手になることの証明． $X[k]$ が複体になること：

$$(-1)^k d_X^{n+k} \circ (-1)^k d_X^{n+k-1} = (-1)^{2k} d_X^{n+k} \circ d_X^{n+k-1} = 0.$$

$f[k]$ が複体の射になること：

$$\begin{tikzcd}
\cdot s \arrow[r] & X^{n+k} \arrow[r, "(-1)^k d_X^{n+k}"] \arrow[d, "f^{n+k}"] & X^{n+k+1} \arrow[r] \arrow[d, "f^{n+k+1}"] & \cdot s \\
\cdot s \arrow[r] & Y^{n+k} \arrow[r, "(-1)^k d_Y^{n+k}"] & Y^{n+k+1} \arrow[r] & \cdot s
\end{tikzcd}$$

が可換になることを示せばよい．

$$f^{n+k+1} \circ (-1)^k d_X^{n+k+1} = (-1)^k f^{n+k+1} \circ d_X^{n+k+1} = (-1)^k d_Y^{n+k+1} \circ f^{n+k}.$$

$[k]$ が合成を保つこと：$f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$ を複体の射とする．このとき

$$(g[k] \circ f[k])^n = g[k]^n \circ f[k]^n = g^{n+k} \circ f^{n+k} = (g \circ f)^{n+k} = (g \circ f)[k]^n$$

が成り立つ．

$[k]$ が恒等射を保つこと：$\mathrm{id}_X[k]^n = \mathrm{id}_X^{n+k} = \mathrm{id}^n_{X[k]}$. □

■ホモトピー　$\mathscr{C}$ の複体の圏 $\mathrm{C}(\mathscr{C})$ から，ホモトピックな射を同一視することによって，新たな圏 $\mathrm{K}(\mathscr{C})$ が得られる．まず準備．

$\mathrm{C}(\mathscr{C})$ を圏 $\mathscr{C}$ の複体の圏とする．$X, Y \in \mathrm{C}(\mathscr{C})$ とする．$f\colon X \to Y$ が 0 にホモトピックであるとは，$\mathscr{C}$ の射の族 $(s^n\colon X^n \to Y^{n-1})$ で，

(1.3.4) $$f^n = d_Y^{n-1} \circ s^n + s^{n+1} \circ d_X^n \quad (n \in \mathbf{Z})$$

となるものが存在することをいう．

$f,g\colon X\to Y$ に対し，$f-g$ が 0 にホモトピックであるとき，f と g はホモトピックであるといい，$f\simeq g$ とかく．f が 0 とホモトピックであることを $f\simeq 0$ で表す．このとき $s=(s^n)$ を f と g の間のホモトピーという．$\simeq$ は同値関係である．

証明． f,g,h を X から Y への $\mathscr{C}$ の複体の射とする．

反射律　$(s^n=0)$ が f と f の間のホモトピーを与える．

対称律　f と g の間のホモトピーを s とするとき，$-s$ が g と f の間のホモトピーを与える．

推移律　f と g の間のホモトピーを s, g と h の間のホモトピーを t とする．このとき，$s+t$ が f と h の間のホモトピーを与える．□

命題 1.1． $X,Y\in\mathrm{C}(\mathscr{C})$ に対し，$\mathrm{Hom}_{\mathrm{C}(\mathscr{C})}(X,Y)$ の加法部分群 $\mathrm{Ht}(X,Y)$ を

$$\mathrm{Ht}(X,Y)\coloneqq\{f\in\mathrm{Hom}_{\mathrm{C}(\mathscr{C})}(X,Y)\mid f\simeq 0\} \tag{1.3.5}$$

で定める．複体の射 $f\colon X\to Y$ と $g\colon Y\to Z$ のどちらかが 0 にホモトピックならば，合成 $g\circ f$ は 0 にホモトピックになる．したがって，射の合成は次の写像をひきおこす．

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathrm{C}(\mathscr{C})}(Y,Z)\times\mathrm{Ht}(X,Y)\to\mathrm{Ht}(X,Z),\\ \mathrm{Ht}(Y,Z)\times\mathrm{Hom}_{\mathrm{C}(\mathscr{C})}(X,Y)\to\mathrm{Ht}(X,Z).\end{aligned}$$

証明． $f\in\mathrm{Hom}_{\mathrm{C}(\mathscr{C})}(X,Y)$, $g\in\mathrm{Hom}_{\mathrm{C}(\mathscr{C})}(Y,Z)$ とする．

$f\simeq 0$ のとき，s を 0 とのホモトピーとすると，$g\circ f$ と 0 との間のホモトピーは

$$(g^{n-1}\circ s^n\colon X^n\to Y^{n-1}\to Z^{n-1})_n$$

で与えられる．

$g\simeq 0$ のとき，t を 0 とのホモトピーとすると，$g\circ f$ と 0 との間のホモトピーは

$$(t^n\circ f^n\colon X^n\to Y^n\to Z^{n-1})_n$$

で与えられる．□

以上の準備のもとで，圏 $\mathscr{C}$ のホモトピー圏 $\mathrm{K}(\mathscr{C})$ を次のように定める．

- 対象：$\mathrm{Ob}(\mathrm{K}(\mathscr{C}))=\mathrm{Ob}(\mathrm{C}(\mathscr{C}))$
- 射：$\mathrm{Hom}_{\mathrm{K}(\mathscr{C})}(X,Y)=\mathrm{Hom}_{\mathrm{C}(\mathscr{C})}(X,Y)/\mathrm{Ht}(X,Y)$

$\mathrm{K}(\mathscr{C})$ は加法圏になる．

$\mathrm{K}(\mathscr{C})$ が加法圏になることの証明． 命題 1.1 より，射の合成がきちんと定まる．

各 $X,Y\in\mathrm{K}(\mathscr{C})$ に対する $\mathrm{Hom}_{\mathrm{K}(\mathscr{C})}(X,Y)$ のアーベル群構造は $\mathrm{Ht}(X,Y)$ による剰余群の構造として得られ，さらに命題 1.1 より，合成の双線型性が得られる．

零対象と複積は $\mathrm{C}(\mathscr{C})$ と同様である．□

圏 $\mathrm{K}(\mathscr{C})$ の充満部分圏 $\mathrm{K}^+(\mathscr{C})$, $\mathrm{K}^-(\mathscr{C})$, $\mathrm{K}^{\mathrm{b}}(\mathscr{C})$ を，それぞれ $\mathrm{C}^+(\mathscr{C})$, $\mathrm{C}^-(\mathscr{C})$, $\mathrm{C}^{\mathrm{b}}(\mathscr{C})$ と同じ対象をとって定める．

■**コホモロジー**　$\mathscr{C}$ をアーベル圏とする．$X \in \mathrm{C}(\mathscr{C})$ に対し，

$$
\begin{aligned}
Z^k(X) &\coloneqq \operatorname{Ker} d_X^k,\\
B^k(X) &\coloneqq \operatorname{Im} d_X^{k-1},\\
H^k(X) &\coloneqq \operatorname{Ker} d_X^k / \operatorname{Im} d_X^{k-1}
\end{aligned}
$$

とおく．$H^k(X)$ を複体 X の k 次のコホモロジーという．

注意． 完全列 $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ に対し，Z を Y の商対象といい，Y/X とかく．一般に単射 $i\colon X \hookrightarrow Y$ の余核 $\operatorname{Coker} i$ を Y/X とかける．

任意の k に対し H^k は $\mathrm{C}(\mathscr{C})$ から $\mathscr{C}$ への加法関手を定める．

$$H^k(X) = H^0(X[k]) \tag{1.3.6}$$

$f\colon X \to Y$ が 0 とホモトピックならば，$H^k(f)\colon H^k(X) \to H^k(Y)$ は 0．よって H^k は $\mathrm{K}(\mathscr{C})$ から $\mathscr{C}$ への関手を定める．

完全列たち

$$
\begin{aligned}
&X^{k-1} \to Z^k(X) \to H^k(X) \to 0,\\
&0 \to H^k(X) \to \operatorname{Coker} d_X^{k-1} \to X^{k+1},\\
&0 \to Z^{k-1}(X) \to X^{k-1} \to B^k(X) \to 0,\\
&0 \to B^k(X) \to X^k \to \operatorname{Coker} d_X^{k-1} \to 0,\\
&0 \to H^k(X) \to \operatorname{Coker} d_X^{k-1} \xrightarrow{d_X^k} Z^{k+1}(X) \to H^{k+1}(X) \to 0.
\end{aligned}
$$

命題 1.2. $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ を $\mathrm{C}(\mathscr{C})$ の完全列とする．このとき，$\mathscr{C}$ における次の長完全列が存在する．

$$\cdot s \to H^n(X) \to H^n(Y) \to H^n(Z) \xrightarrow{\delta} H^{n+1}(X) \to \cdot s.$$

■**切り落とし**　$X \in \mathrm{C}(\mathscr{C})$ と整数 n に対し，$\tau^{\leqq n}(X), \tau^{\geqq n}(X) \in \mathrm{C}(\mathscr{C})$ を

$$\tau^{\leqq n}(X)\colon \ \cdot s \to X^{n-2} \to X^{n-1} \to \operatorname{Ker} d^n \to 0 \to \cdot s, \tag{1.3.7}$$

$$\tau^{\geqq n}(X)\colon \ \cdot s0 \to \operatorname{Coker} d^{n-1} \to X^{n+1} \to X^{n+2} \to \cdot s \tag{1.3.8}$$

で定める．このとき，$\mathrm{C}(\mathscr{C})$ における次の射が得られる．

$$\tau^{\leqq n}(X) \to X, \quad X \to \tau^{\geqq n}(X),$$

また，$n' \leqq n$ ならば

$$\tau^{\leqq n'}(X) \to \tau^{\leqq n}(X), \quad \tau^{\geqq n'}(X) \to \tau^{\geqq n}(X).$$

命題 1.3. 1. 自然な射 $H^k(\tau^{\leqq n}(X)) \to H^k(X)$ は $k \leqq n$ ならば同型であり，$k > n$ では $H^k(X) = 0$ である．

2. 自然な射 $H^k(X) \to H^k(\tau^{\geqq n}(X))$ は $k \geqq n$ ならば同型であり，$k < n$ では $H^k(X) = 0$ である．

注意 1.4. ホモトピー同値

1.4　写像錐

$\mathscr{C}$ を加法圏とし $f\colon X \to Y$ を $\mathrm{C}(\mathscr{C})$ の射とする．

定義 1.5. f の写像錐 $M(f)$ とは次で定まる $\mathrm{C}(\mathscr{C})$ の対象である．

$$\begin{cases} M(f)^n = X^{n+1} \oplus Y^n, \\ d^n_{M(f)} = \begin{bmatrix} d^n_{X[1]} & 0 \\ f^{n+1} & d^n_Y \end{bmatrix} \end{cases}$$

射 $\alpha(f)\colon Y \to M(f)$ と $\beta(f)\colon M(f) \to X[1]$ を次で定める．

$$\alpha(f)^n = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathrm{id}_{Y^n} \end{bmatrix}, \tag{1.4.1}$$

$$\beta(f)^n = \begin{bmatrix} \mathrm{id}_{X^{n+1}} & 0 \end{bmatrix}. \tag{1.4.2}$$

コメント (4/24). 「どうして逆に $X \to M(f)$ や $M(f) \to Y$ じゃないんですか？」
例えば，逆に $\gamma^n\colon M(f)^n \to Y^n$ を $\begin{bmatrix} 0 & \mathrm{id}_{Y^n} \end{bmatrix}$ で定めようとしても，

$$\gamma^{n+1} \circ d^n_{M(f)} = \begin{bmatrix} 0 & \mathrm{id}_{Y^n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d^n_{X[1]} & 0 \\ f^{n+1} & d^n_Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f^{n+1} & d^n_Y \end{bmatrix},$$
$$d^n_Y \circ \gamma^n = d^n_Y \circ \begin{bmatrix} 0 & \mathrm{id}_{Y^n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & d^n_Y \end{bmatrix}$$

となり，両者は一致しない．したがって，γ は複体の射にならない．$X \to M(f)$ も同様である．したがって，$M(f)$ に対して定まる自然な射は α, β のようにせざるを得ない．

補題 1.6. 任意の $\mathrm{C}(\mathscr{C})$ の射 $f\colon N \to Y$ に対し，$\phi\colon X[1] \to M(\alpha(f))$ で次の条件をみたすものが存在する．

1. ϕ は $\mathrm{K}(\mathscr{C})$ で同型である，
2. 次の図式は $\mathrm{K}(\mathscr{C})$ で可換になる：

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "\alpha(f)"] \arrow[d, "\mathrm{id}_Y"] & M(f) \arrow[r, "\beta(f)"] \arrow[d, "\mathrm{id}_{M(f)}"] & X[1] \arrow[r, "-f[1]"] \arrow[d, "\phi"] & Y[1] \arrow[d, "\mathrm{id}_{Y[1]}"] \\ Y \arrow[r, "\alpha(f)"] & M(f) \arrow[r, "\alpha(\alpha(f))"] & M(\alpha(f)) \arrow[r, "\beta(\alpha(f))"] & Y[1]. \end{tikzcd}$$

2023/05/01

1.5　三角圏

$\mathscr{C}$ を加法圏とし，$T\colon \mathscr{C} \to \mathscr{C}$ を自己関手とする．$\mathscr{C}$ の三角とは射の列

$$X \to Y \to Z \to T(X)$$

のことである．

定義 1.7. 三角圏 $\mathscr{C}$ は次のデータ (1.5.1), (1.5.2) と規則 (TR0)–(TR5) からなる．1.7

データ

(1.5.1)　加法圏 $\mathscr{C}$ と自己関手 $T\colon \mathscr{C} \to \mathscr{C}$ の組,

(1.5.2)　特三角 (distinguished triangle) の族.

規則

(TR0)　特三角に同形な三角は特三角である．

(TR1)　任意の対象 $X \in \mathscr{C}$ に対し，$X \xrightarrow{\mathrm{id}_X} X \longrightarrow 0 \longrightarrow T(X)$ は特三角である．

(TR2)　$\mathscr{C}$ の任意の射 $f\colon X \to Y$ は特三角 $X \xrightarrow{f} Y \to Z \to T(X)$ に埋め込める．つまり $Z \in \mathscr{C}$ で $X \xrightarrow{f} Y \to Z \to T(X)$ が特三角となるものが存在する．

(TR3)　$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} T(X)$ が特三角であることと $Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} T(X) \xrightarrow{-T(f)} T(Y)$ が特三角であることは同値である．

(TR4)　2 つの特三角 $X \xrightarrow{f} Y \to Z \to T(X)$, $X' \xrightarrow{f'} Y' \to Z' \to T(X')$ に対し，可換図式

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"] & Y \arrow[d, "v"] \\ X' \arrow[r, "f'"] & Y' \end{tikzcd}$$

は特三角の射に埋め込める．

(TR5)　(八面体公理)．3 つの特三角

$$X \xrightarrow{f} Y \to Z' \to T(X),$$
$$Y \xrightarrow{g} Z \to X' \to T(Y),$$
$$X \xrightarrow{g \circ f} Z \to Y' \to T(X)$$

に対し，

1.6　圏の局所化

2　層コホモロジー

アーベル層の圏はアーベル圏になる．したがって層の導来圏が考えられる．

$\cdot \otimes \cdot$ の導来関手を考えたいが，テンソルに関する複体が有界になるとは限らないので，平坦分解の長さが有限になるという仮定をおく．

2.1　弱大域次元

命題 2.1.　A を環とする．

1. 自由加群は射影加群である．
2. 射影加群は自由加群の自由加群の直和因子である．
3. 射影加群は平坦加群である．
4. $n \geqq 0$ を整数とする．次の条件 (a)–(b)$^{\mathrm{op}}$ は同値である．
   (a) 任意の $j > n$, $N \in \mathrm{Mod}(A^{\mathrm{op}})$, $M \in \mathrm{Mod}(A)$ に対し，$\mathrm{Tor}_j^A(N, M) = 0$
   (b) 任意の $M \in \mathrm{Mod}(A)$ に対し，分解
   $$0 \to P^n \to \cdots \to P^0 \to M \to 0 \quad (P^j \text{ は平坦})$$
   が存在する．
   (b)$^{\mathrm{op}}$ 任意の $M \in \mathrm{Mod}(A^{\mathrm{op}})$ に対し，分解
   $$0 \to P^n \to \cdots \to P^0 \to M \to 0 \quad (P^j \text{ は平坦})$$
   が存在する．

証明.　1. M を自由加群とする．左 A 加群の全射 $g\colon N \twoheadrightarrow N'$ に対し，

$$g_*\colon \mathrm{Hom}_A(M, N) \to \mathrm{Hom}_A(M, N') \quad \text{in } \mathrm{Mod}(\mathbf{Z})$$

が全射であることを示す．$\psi\colon M \to N'$ を A 加群の射とする．I を $M \cong A^{\oplus I}$ となる添字集合とすると任意の $m \in M$ は，M の生成系 (m_i) と $(a_i)_i \in A^{\oplus I}$ を用いて，$m = \sum_{i \in I} a_i m_i$ とかける．このとき，

$$\psi(m) = \sum_i a_i \psi(m_i) \in N'$$

であり，g が全射なので，$n \in N$ で

$$g(n) = \psi(m) = \sum_i a_i \psi(m_i), \quad \psi(m_i) = g(n_i)$$

となるものがある．この $(n_i)_i$ に対して，$\phi\colon M \to N$ を

$$\phi(m_i) = n_i$$

で定めると，

$$(g_*(\phi))\,(m_i) = g \circ \phi(m_i) = g(n_i) = \psi(m_i)$$

となる．

2. P を射影加群とする．自由加群 $A^{\oplus I}$ と全射 $p\colon A^{\oplus I} \twoheadrightarrow P$ が存在する．実際，$I = P$ として，p を $p((a_x)_{x\in P}) = \sum_{x\in P} a_x x$ と定めればよい．$Q = \operatorname{Ker} p$ とすると，

$$0 \to Q \hookrightarrow A^{\oplus I} \twoheadrightarrow P \to 0$$

は完全列である．このとき，P が射影加群であることから，id_P に対して，$u\colon P \to A^{\oplus I}$ で

$$p_*(u) = p \circ u = \mathrm{id}_P$$

となる者が存在する．したがって，上の完全列は分裂し，$A^{\oplus I} \cong P \oplus Q$ となる．

3.

□

参考文献

[KS90] Masaki Kashiwara, Pierre Schapira, *Sheaves on Manifolds*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 292, Springer, 1990.

[KS06] Masaki Kashiwara, Pierre Schapira, *Categories and Sheaves*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 332, Springer, 2006.

[Sh16] 志甫淳, 層とホモロジー代数, 共立出版, 2016.