向きづけ層

toshi2019

2024 年 10 月 15 日

1　局所自由層

1.1　局所的な条件について

以後,「層が局所的に同型」という形の条件をよく用いる．これについては次の 2 つの表現がある．

命題 1.1.　F と G を X 上の層とする．次の条件は同値である．

(i) 各点 x に対し，開近傍 U で $F|_U \cong G|_U$ となるものが存在する．

(ii) X の開被覆 $(U_i)_{i\in I}$ で，各 i に対し $F|_{U_i} \cong G|_{U_i}$ となるものが存在する．

証明. (i)⇒(ii)：X の各点 x に対し開近傍 U_x で $F|_{U_x} \cong G|_{U_x}$ となるものが存在する．$(U_x)_{x\in X}$ は X の開被覆である．

(ii)⇒(i)：$(U_i)_{i\in I}$ を X の開被覆で各 U_i に対し $F|_{U_i} \cong G|_{U_i}$ となるものとする．$x \in X$ とすると $x \in U_i$ となる $i \in I$ が存在する． □

1.2　局所自由層

X を局所コンパクト空間とする．$\mathcal{A}$ を X 上の環とする．まず，局所自由層を定義しよう．

定義 1.2 (局所自由層).　$k \geqq 0$ を整数とし，$\mathcal{L}$ を $\mathcal{A}$ 加群とする．X の開被覆 $X = \bigcup_{i\in I} U_i$ で，どの $i \in I$ に対しても $\mathcal{L}|_{U_i} \cong \mathcal{A}|_{U_i}^{\oplus k}$ となるものが存在するとき，$\mathcal{L}$ は階数 k の**局所自由層** (locally free sheaf) であるという．階数 1 の局所自由層のことを**可逆層** (invertible sheaf) とよぶ．

1.1 節のことばを用いると，$\mathcal{L}$ が局所自由層であるとは，$\mathcal{L}$ が局所的に $\mathcal{A}^{\oplus k}$ と同型であるということである．

$\mathbf{k}$ を大域次元が有限な環とする．$\mathcal{A} = \mathbf{k}_X$ のとき，局所自由層は局所定数層である．可逆層は局所的に $\mathbf{k}_X$ と同型な層である．

$L \in \mathrm{Mod}(\mathbf{k}_X)$ とする．$L^{\otimes -1} := \mathrm{R}\mathscr{H}om_{\mathbf{k}_X}(L, \mathbf{k}_X)$ とおく．$\mathbf{k}$ が体ならば，$\mathbf{k}_X$ は入射的なので，$\mathrm{R}\mathscr{H}om_{\mathbf{k}_X}(L, \mathbf{k}_X) = \mathscr{H}om_{\mathbf{k}_X}(L, \mathbf{k}_X)$ が成り立つ．

2　向きづけ層

2.1　対合律

A_X を A をファイバーとする定数層とする．

$$\mathrm{D}'F \coloneqq \mathrm{R}\mathscr{H}om_{A_X}(F, A_X)$$

とおく．次の公式が成り立つ．

定理 2.1 ([KS90, 演習 III.3])**.**　X を位相空間とする．F を $\mathbb{Z}_X$ と局所的に同型な層とする．このとき，次の同型がある．

$$F \otimes F \cong \mathbb{Z}_X, \quad \mathrm{D}'_X F \cong F.$$

このノートだけの用語で定理 2.1 を F の対合律 (involution law) とよぶことにする．

証明にあたり，次の事実に注意しよう．

補題 2.2.　$\varphi\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ をアーベル群の同型とする．このとき φ は $\pm\mathrm{id}_{\mathbb{Z}}$ のどちらか一方である．

証明. $\varphi(1) = m$ とおくと任意の整数 n に対し $\varphi(n) = n\varphi(1) = nm$ となるので，$\mathbb{Z}$ から $\mathbb{Z}$ への射は m 倍写像である．$\psi\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ を φ の逆射とすると

$$1 = \psi(\varphi(1)) = \psi(m) = m\psi(1)$$

となる．$\mathbb{Z}$ の可逆元は ± 1 のみであるから，

$$m = \pm 1, \quad \psi(1) = \pm 1 \quad （複合同順）$$

である． □

定理 2.1 の証明 1 つ目の主張を示す．X の開被覆 $(U_i)_{i\in I}$ と各 U_i 上の層の射

$$\theta_i\colon F|_{U_i} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}_X|_{U_i}$$

で同型であるものが存在する．補題 2.2 より，この $(\theta_i)_i$ は各 i に対し $\theta_i = \pm 1$ とかける．実際，$x \in U_i$ とすると，$s_x \in F_x \cong \mathbb{Z}$ に対し $(\theta_i)_x(s_x) = \pm s_x$ となる．したがって，各 i, j に対して

$$\begin{aligned}\theta_i \otimes \theta_i|_{U_i\cap U_j} &\cong (\pm 1) \otimes (\pm 1)\\ &\cong 1\\ &\cong \theta_j \otimes \theta_j|_{U_i\cap U_j}\end{aligned}$$

となるので $(\theta_i \otimes \theta_i)_i$ から層の射

$$\theta \otimes \theta\colon F \otimes F \to \mathbb{Z}_X \otimes \mathbb{Z}_X$$

がひきおこされる．これと同型

$$\mathbb{Z}_X \otimes \mathbb{Z}_X \to \mathbb{Z}_X$$

の合成を φ で表す．各点 $x \in X$ に対して

$$\varphi_x \colon F_x \otimes F_x \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z} \cong (\mathbb{Z}_X)_x$$

が成り立つので，φ は同型である．

1 つ目の主張から 2 つ目の主張が従うことを示す．随伴 $(\otimes, \mathscr{H}om)$ から

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_X}(F \otimes F, \mathbb{Z}_X) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_X}(F, \mathscr{H}om_{\mathbb{Z}_X}(F, \mathbb{Z}_X))$$

である．同型は同型に送られるので同型 $F \otimes F \to \mathbb{Z}_X$ は同型 $F \to \mathscr{H}om_{\mathbb{Z}_X}(F, \mathbb{Z}_X) = \mathrm{D}'F$ に送られる． □

定理 2.1 によると，$\mathbb{Z}_X$ 上の可逆層は対合律をみたす．

2.2 向きづけ層

A を可換環とし A_X で A をファイバーとする定数層とする．$\mathrm{or}_X^{\mathbb{Z}}$ で $\mathbb{Z}$ 上の向きづけ層，or_X で A 上の向きづけ層を表す．$\mathrm{or}_X \cong \mathrm{or}_X^{\mathbb{Z}} \otimes A_X$ である．

or_X も対合律をみたす．

命題 2.3 ([KS90, 命題 3.3.4])**.** $f \colon Y \to X$ をファイバー次元が l の位相的しずめ込みとする．

(i) $\omega_{Y/X}^{\mathbf{Z}} \in \mathsf{D}^+(\mathbf{Z}_Y)$ と $\mathrm{or}_{Y/X}^{\mathbf{Z}} \in \mathrm{Mod}(\mathbf{Z}_Y)$ を $\mathbf{Z}$ 上の双対化複体と向きづけ層とするとき，次の同型が成り立つ．

$$\omega_{Y/X} \cong A_Y \underset{\mathbf{Z}_Y}{\otimes} \omega_{Y/X}^{\mathbf{Z}}, \quad \mathrm{or}_{Y/X} \cong A_Y \underset{\mathbf{Z}_Y}{\otimes} \mathrm{or}_{Y/X}^{\mathbf{Z}}.$$

(ii) 次の自然な同型が成り立つ．

$$\mathrm{or}_{Y/X} \otimes \mathrm{or}_{Y/X} \cong A_Y,$$
$$\mathscr{H}om(\mathrm{or}_{Y/X}, A_Y) \cong A_Y.$$

(iii) $g \colon Z \to Y$ を連続写像で $f \circ g$ がファイバー次元 m の位相的しずめ込みになるものとする．$F \in \mathsf{D}^+(A_X)$ に対して，

$$g^! \circ f^{-1}F \cong (f \circ g)^{-1}F \otimes \mathrm{or}_{Z/X} \otimes g^{-1}\mathrm{or}_{Y/X}[m-l]$$

が成り立つ．

$$\mathrm{or}_{Y/X} \otimes \mathrm{or}_{Y/X} \cong \left(\mathrm{or}_{Y/X}^{\mathbf{Z}} \otimes \mathrm{or}_{Y/X}^{\mathbf{Z}}\right) \otimes A_Y \cong Z_Y \otimes A_Y \cong A_Y$$

である．

■**うめこみについて**　以降，$A = \mathbf{C}$ とし $\mathbf{C}$ 上の向きづけ層を考える．$i\colon M \hookrightarrow X$ を閉埋め込みとし，$a_M\colon M \to \{\mathrm{pt}\}$ と $a_X\colon X \to \{\mathrm{pt}\}$ を一点への射とすると

$$\begin{aligned}
\mathrm{or}_{M/X}[-n] &\cong \omega_{M/X} \cong i^! \mathbf{C}_X \\
&\cong i^! a_X^{-1} \mathbf{C} \\
&\cong (a_X \circ i)^{-1} \mathbf{C} \underset{\mathbf{C}_M}{\otimes} \mathrm{or}_M \underset{\mathbf{C}_M}{\otimes} i^{-1} \mathrm{or}_X [n-2n] \\
&\cong a_M^{-1} \mathbf{C} \underset{\mathbf{C}_M}{\otimes} \mathrm{or}_M \underset{\mathbf{C}_M}{\otimes} i^{-1} \mathrm{or}_X [-n] \\
&\cong \mathbf{C}_M \underset{\mathbf{C}_M}{\otimes} \mathrm{or}_M \underset{\mathbf{C}_M}{\otimes} i^{-1} \mathrm{or}_X [-n] \\
&\cong \mathrm{or}_M \underset{\mathbf{C}_M}{\otimes} i^{-1} \mathrm{or}_X [-n]
\end{aligned}$$

が成り立つ．$\omega_{M/X} \cong \mathrm{or}_{M/X}[-n]$ なので，

$$\mathrm{or}_{M/X} \cong \mathrm{or}_M \underset{\mathbf{C}_M}{\otimes} i^{-1} \mathrm{or}_X \tag{2.1}$$

である．X 上の層 or_X と制限 $\mathrm{or}_X|_M = i^{-1}\mathrm{or}_X$ を M 上で同一視すると，上の式は

$$\mathrm{or}_{M/X} \cong \mathrm{or}_M \otimes \mathrm{or}_X \tag{2.2}$$

とも書ける．（[KS90, p.130] の記法.）

3　超関数

$$\mathrm{R}\Gamma_M(\mathcal{O}_X) \otimes \mathrm{or}_M[n] \cong \mathrm{R}\mathscr{H}om_{\mathbf{C}_X}(\mathrm{D}'_M \mathbf{C}_{XM}, \mathcal{O}_X). \tag{3.1}$$

証明. まず $\mathrm{D}'_X \mathbf{C}_{XM} \cong \mathrm{or}_M[-n]$ より，右辺は

$$\mathrm{R}\mathscr{H}om_{\mathbf{C}_X}(\mathrm{D}'_M \mathbf{C}_{XM}, \mathcal{O}_X) \cong \mathrm{R}\mathscr{H}om_{\mathbf{C}_X}(\mathrm{or}_M, \mathcal{O}_X)[n]$$

である．一方左辺は

$$\mathrm{R}\Gamma_M(\mathcal{O}_X) \otimes \mathrm{or}_M \cong \mathrm{R}\mathscr{H}om(\mathbf{C}_{XM}, \mathcal{O}_X) \otimes \mathrm{or}_M$$

である．よって (3.1) が成り立つのは

$$\mathrm{R}\mathscr{H}om(\mathbf{C}_{XM}, \mathcal{O}_X) \otimes \mathrm{or}_M \cong \mathrm{R}\mathscr{H}om_{\mathbf{C}_X}(\mathrm{or}_M, \mathcal{O}_X) \tag{$*$}$$

となるときである．□

■**質問について**　可逆層で同型が ± 1 なので，$\mathrm{or}_M \cong \mathrm{or}_M^{\otimes -1}$

$(*)$ は

$$\mathrm{R}\mathscr{H}om_{\mathbf{C}_X}(\mathrm{or}_M^{\otimes -1}, \mathcal{O}_X) \to \mathrm{R}\mathscr{H}om(\mathbf{C}_{XM}, \mathcal{O}_X) \otimes \mathrm{or}_M$$

右は

$$\begin{aligned}
\mathrm{R}\mathscr{H}om(\mathbf{C}_{X\,M}, \mathcal{O}_X) \otimes \mathrm{or}_M &\to \mathrm{R}\mathscr{H}om(\mathbf{C}_{X\,M}, \mathcal{O}_X \otimes \mathrm{or}_M^{\otimes -1}) \\
&\to \mathrm{R}\mathscr{H}om(\mathbf{C}_{X\,M}, \mathrm{R}\mathscr{H}om(\mathrm{or}_M, \mathcal{O}_X)) \\
&\cong \mathrm{R}\mathscr{H}om(\mathbf{C}_{X\,M} \otimes \mathrm{or}_M^{\otimes -1}, \mathcal{O}_X)
\end{aligned}$$

参考文献

[KS90] Masaki Kashiwara, Pierre Schapira, *Sheaves on Manifolds*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 292, Springer, 1990.

[Sch04] Pierre Schapira, *Sheaves: from Leray to Grothendieck and Sato*, Séminaires et Congres 9, Soc. Math. France, pp.173–181, 2004.