2024/03/15 セミナー資料

大柴寿浩

記号

- 恒等射を id や 1 で表す.
- 集合 U の開近傍系を I_U とかき，点 x の開近傍系を I_x とかく.
- $\mathbf{R}^+$: 正の実数のなす乗法群.

1　フーリエ・佐藤変換 [KS90, section 3.7]

まず錐状層を定義する．そのために作用つきの空間を考える．X を局所コンパクト空間で $\mathbf{R}^+$ の作用 μ が入っているとする．つまり，連続写像 $\mu\colon X\times\mathbf{R}^+\to X$ で

$$\begin{aligned}\mu(x,t_1t_2)&=\mu(\mu(x,t_1),t_2)\\ \mu(x,1)&=x\end{aligned}$$

をみたすものが与えられているとする．

定義 1.1 ([KS90, Definition 3.7.1])**.**
(i) 層 $F\in\mathrm{Mod}(A_X)$ が**錐状** (conic) であるとは，X の各軌道 b への制限 $F|_b$ が局所定数層であることをいう．$\mathrm{Mod}(A_X)$ の充満部分圏 $\mathrm{Mod}_{\mathbf{R}^+}(A_X)$ を錐状層からなるものとして定める．
(ii) $\mathsf{D}^+_{\mathbf{R}^+}(X)$ を，各 $j\in\mathbf{Z}$ に対して $H^j(F)$ が錐状のものからなる $\mathsf{D}^+(X)$ の充満部分圏として定める．

錐状層がどのように特徴づけられるかを調べる．次の連続写像を考える．

$$X \xhookrightarrow{j} X\times\mathbf{R}^+ \overset{\mu}{\underset{p}{\rightrightarrows}} X.$$

$j\colon X\to X\times\mathbf{R}^+$ は $x\in X$ を $X\times\mathbf{R}^+$ に $(x,1)$ として埋め込む写像であり．$p\colon X\times\mathbf{R}^+\to X$ は X への第 1 射影である．これらの連続写像を用いて，$F\in\mathsf{D}^+(X)$ に対し，次の 2 つの射を構成する．

$$\mu^{-1}F \xleftarrow{\alpha} p^{-1}\mathrm{R}p_*\mu^{-1}F \xrightarrow{\beta} p^{-1}F.$$

α は随伴 $(p^{-1}, \mathrm{R}p_*)$ の余単位 $p^{-1}\mathrm{R}p_* \to 1_{\mathsf{D}^+(X)}$ を $\mu^{-1}F$ に適用することで得られる．β は次のように構成される．

$$\begin{aligned} p^{-1}\mathrm{R}p_*\mu^{-1}F &\to p^{-1}\mathrm{R}p_*\mathrm{R}j_*j^{-1}\mu^{-1}F \\ &\cong p^{-1}\mathrm{R}(p \circ j)_*(\mu \circ j)^{-1}F \\ &\cong p^{-1}\mathrm{R}1_{X*}1_X^{-1}F \\ &\cong p^{-1}F. \end{aligned}$$

命題 1.2 ([KS90, Proposition 3.7.2])**.** $F \in \mathsf{D}^+(X)$ に対し次の条件 (i)–(v) は同値である．

(i) $F \in \mathsf{D}^+_{\mathbf{R}^+}(X)$

(ii) α と β はどちらも同型である．

(iii) すべての $j \in \mathbf{Z}$ に対し，$H^j(\mu^{-1}F)$ が p の各ファイバーで局所定数層となる．

(iv) $p^{-1}F \cong \mu^{-1}F$.

(v) $p^!F \cong \mu^!F$.

証明． 次の順に証明する．

$$\begin{tikzcd} (\mathrm{i}) \arrow[r, Leftrightarrow, "1"] & (\mathrm{iii}) \arrow[dr, Rightarrow, "5"'] & & (\mathrm{iv}) \arrow[ll, Rightarrow, "4"'] \arrow[r, Leftrightarrow, "2"] & (\mathrm{v}) \\ & & (\mathrm{ii}) \arrow[ur, Rightarrow, "3"'] & & \end{tikzcd}.$$

1. (i) $\Leftrightarrow$ (iii): まず，$x \in X$ の $\mathbf{R}^+$ 軌道は $\mu\left(p^{-1}(x)\right)$ と表せることに注意する．実際，x の $\mathbf{R}^+$ 軌道 b は
$$b = \left\{\mu(x,t); t \in \mathbf{R}^+\right\}$$
であり，これは x での p のファイバー
$$p^{-1}(x) = \left\{(x,t); t \in \mathbf{R}^+\right\}$$
の μ による像
$$\mu\left(p^{-1}(x)\right) = \left\{\mu(x,t); (x,t) \in p^{-1}(x)\right\}$$
である．
$$\begin{aligned} j_{p^{-1}(x)} &\colon p^{-1}(x) \hookrightarrow X \times \mathbf{R}^+ \\ j_{\mu(p^{-1}(x))} &\colon \mu\left(p^{-1}(x)\right) \hookrightarrow X \end{aligned}$$
をそれぞれ包含写像とすると
$$j_{\mu(p^{-1}(x))} \circ \mu = \mu \circ j_{p^{-1}(x)}$$

が成り立つ．したがって，

$$\begin{aligned}
H^j\left(\mu^{-1}F\right) &\cong H^j\left(\mu^{-1}F\right)|_{p^{-1}(x)}\\
&\cong j_{p^{-1}(x)}^{-1}H^j\left(\mu^{-1}F\right)\\
&\cong j_{p^{-1}(x)}^{-1}\mu^{-1}H^j\left(F\right)\\
&\cong \left(\mu\circ j_{p^{-1}(x)}\right)^{-1}H^j\left(F\right)\\
&\cong \left(j_{\mu(p^{-1}(x))}\circ\mu\right)^{-1}H^j\left(F\right)\\
&\cong \mu^{-1}j_{\mu(p^{-1}(x))}^{-1}H^j\left(F\right)\\
&\cong \mu^{-1}\left(H^j\left(F\right)|_{\mu(p^{-1}(x))}\right)
\end{aligned}$$

である．引き戻しが定数層なら元の層も定数層であり，定数層の引き戻しも定数層[*1]なので，$H^j(\mu^{-1}F)$ が p の各ファイバーで局所定数層となるのは，$H^j\left(F\right)$ が $\mu\left(p^{-1}(x)\right)$ で，すなわち x の $\mathbf{R}^+$ 軌道で局所定数層となるときである．

2. (iv) ⇔ (v): $p^{-1}F \cong p^{-1} \overset{\mathrm{L}}{\otimes}\omega_{X\times\mathbf{R}^+/X}$ と $\mu^{-1}F \cong \mu^{-1}\overset{\mathrm{L}}{\otimes}\omega_{X\times\mathbf{R}^+/X}$ が成り立つ．
3. (ii) ⇔ (iv): α と β が同型なので，互いに逆射となる射

$$\beta\alpha^{-1}\colon \mu^{-1}F\to p^{-1}F,\quad \alpha\beta^{-1}\colon p^{-1}F\to\mu^{-1}F$$

が得られる．したがって，$p^{-1}F\cong\mu^{-1}F$ である．

4. (iv) ⇔ (iii): $\mu^{-1}F\cong p^{-1}F$ とする．$x\in X$ とする．$p^{-1}(x)=\{x\}\times\mathbf{R}^+$ に対し

$$i_{p^{-1}(x)}\colon p^{-1}(x)\hookrightarrow X\times\mathbf{R}^+,\quad i_x\colon\{x\}\hookrightarrow X$$

とおくと次の図式が可換になる．

$$\begin{tikzcd}
p^{-1}(x) \arrow[r, hook, "i_{p^{-1}(x)}"] \arrow[d, "p|_{p^{-1}(x)}"'] & X\times\mathbf{R}^+ \arrow[d, "p"] \\
\{x\} \arrow[r, hook, "i_x"'] & X
\end{tikzcd}.$$

したがって，j を整数とすると

$$\begin{aligned}
H^j\left(p^{-1}F\right)\Big|_{p^{-1}(x)} &\cong p^{-1}\ H^j\left(F\right)\Big|_{p^{-1}(x)}\\
&\cong i_{p^{-1}(x)}^{-1}p^{-1}H^j\left(F\right)\\
&\cong \left(p\circ i_{p^{-1}(x)}\right)^{-1}H^j\left(F\right)\\
&\cong \left(i_x\circ p|_{p^{-1}(x)}\right)^{-1}H^j\left(F\right)\\
&\cong \left(p|_{p^{-1}(x)}\right)^{-1}i_x^{-1}H^j\left(F\right)\\
&\cong \left(p|_{p^{-1}(x)}\right)^{-1}H^j\left(F\right)_x\\
&\cong \left(H^j\left(F\right)_x\right)_{p^{-1}(x)}
\end{aligned}$$

[*1] $f\colon Y\to X$ を位相空間の間の連続写像とし，M を加群とする．X 上の層 F の引き戻し $f^{-1}F$ が Y 上の定数層 M_Y になったとすると，$\mathrm{a}_Y=\mathrm{a}_X\circ f$ より，$f^{-1}F\cong M_Y\cong\mathrm{a}_Y^{-1}M\cong f^{-1}\mathrm{a}_X^{-1}M\cong f^{-1}M_X$ である．逆像関手は conservative なので（ホンマか？）$F\cong M_X$ である．

で，定数層となる（よって特に局所定数層となる）.

5. (iii) $\Leftrightarrow$ (ii):

$\square$

X を位相空間とする．$\mathsf{Op}(X) \coloneqq \{X \text{ の開集合}\}$ とおく．$\mathsf{Op}(X)$ に包含で順序構造を入れ，自然に圏とみなす．

定義 1.3 (前層)．　X を位相空間とする．$\mathsf{Op}(X)$ から圏 $\mathscr{C}$ への反変関手 $\mathscr{F}\colon \mathsf{Op}(X)^{\mathrm{op}} \to \mathscr{C}$ を X 上の $\mathscr{C}$ に値を取る**前層** (presheaf) という．包含 $V \hookrightarrow U$ の行き先 $\mathscr{F}(V \hookrightarrow U)\colon \mathscr{F}(U) \to \mathscr{F}(V)$ を制限射といい，ρ_{VU} とかく．

X 上の $\mathscr{C}$ に値を取る前層の圏を関手圏 $\mathrm{PSh}(X, \mathscr{C}) = \mathsf{Op}(X)^\wedge = \mathsf{Fct}(\mathsf{Op}(X)^{\mathrm{op}}, \mathscr{C})$ として定める．値に取る圏 $\mathscr{C}$ が明らかなときは，たんに X 上の前層ともいう．

定義 1.4 (層)．　X を位相空間とする．$\mathscr{F}\colon \mathsf{Op}(X)^{\mathrm{op}} \to \mathscr{C}$ を X 上の前層とする．$\mathscr{F}$ が**層** (sheaf) であるとは，任意の開集合 $U \in \mathsf{Op}(X)$ とその開被覆 $(U_i)_{i\in I}$ に対して次の条件をみたすことをいう．

(S0) $\mathscr{F}(\varnothing) = 0$.

(S1) 列

$$0 \longrightarrow \mathscr{F}(U) \xrightarrow{\prod_i \rho_{U_i U}} \prod_{i\in I} \mathscr{F}(U_i)$$

が完全である．すなわち，$s \in \mathscr{F}(U)$ が各 $i \in I$ に対して U_i 上 $s|_{U_i} = 0$ ならば，$s = 0$ である．

(S2) 列

$$\mathscr{F}(U) \xrightarrow{\prod_i \rho_{U_i U}} \prod_{i\in I} \mathscr{F}(U_i) \xrightarrow{\prod_{i,j} \varphi_{ij}} \prod_{i,j\in I} \mathscr{F}(U_i \cap U_j)$$

が完全である．ただし，$\varphi_{ij} = \rho_{U_i\cap U_j, U_i} - \rho_{U_i\cap U_j, U_j}$．すなわち，$(s_i)_i \in \prod_i \mathscr{F}(U_i)$ が各 $i, j \in I$ で $U_i \cap U_j \neq \varnothing$ となるものに対して $U_i \cap U_j$ 上 $s_i|_{U_i\cap U_j} - s_j|_{U_i\cap U_j} = 0$ ならば，$s \in \mathscr{F}(U)$ で各 U_i 上 $s|_i = s_i$ となるものが存在する．

$\mathbf{C}$ 上の前層 $\mathscr{F}$ を次で定める．

$$\mathscr{F}(U) = \begin{cases} \mathbf{C} & U = \mathbf{C} \text{ のとき}, \\ 0 & U \neq \mathbf{C} \text{ のとき}. \end{cases}$$

$\mathscr{F}$ は層の条件

参考文献

[BouTVS] ブルバキ, 位相線形空間 1, 東京図書, 1968.

[B+84] Borel, *Intersection Cohomology*, Progress in Mathematics, 50, Birkhäuser, 1984.

[G58] Grauert, *On Levi's problem and the embedding of real analytic manifolds*, Ann. Math. 68, 460–472 (1958).

[GP74] Victor Guillemin, Alan Pollack, *Differential Topology*, Prentice-Hall, 1974.

[HS23] Andreas Hohl, Pierre Schapira, *Unusual Functorialities for weakly constructible sheaves*, 2023.

[KS90] Masaki Kashiwara, Pierre Schapira, *Sheaves on Manifolds*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 292, Springer, 1990.

[KS06] Masaki Kashiwara, Pierre Schapira, *Categories and Sheaves*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 332, Springer, 2006.

[Le13] John M. Lee, *Introduction to Smooth Manifolds*, Second Edition, Graduate Texts in Mathematics, **218**, Springer, 2013.

[Mo76] 森本光生, 佐藤超函数入門, 共立出版, 1976.

[R55] de Rham, *Variétés différentiables*, Hermann, Paris, 1955.

[Sa59] Mikio Sato, *Theory of Hyperfunctions*, 1959–60.

[S66] Schwartz, *Théorie de distributions*, Hermann, Paris, 1966.

[Sh16] 志甫淳, 層とホモロジー代数, 共立出版, 2016.

[SP] The Stacks Project.

[Sp65] Michael Spivak, *Calculus on Manifolds*, Benjamin, 1965.

[Ike21] 池祐一, 超局所層理論概説, 2021.

[Tak17] 竹内潔, $\mathcal{D}$ 加群, 共立出版, 2017.

[Ue] 植田一石, ホモロジー的ミラー対称性, `https://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~kazushi/course/hms.pdf` 2024/02/04 最終閲覧.