

# 2024/01/11 セミナー資料

大柴寿浩

2024/01/11

## 1 [KS90, 3.1] の続き

$X$  と  $Y$  を局所コンパクト空間とし,  $X \times Y$  から  $X$  と  $Y$  への射影をそれぞれ  $q_1, q_2$  で表す.

**命題 1.1** ([KS90, Proposition 3.1.15]).  $Y$  の  $c$  柔軟次元は有限であるとする.  $F \in D^+(A_X)$ ,  $G \in D^b(A_X)$  とする. このとき, 次の自然な同型が成り立つ.

$$R\Gamma(X \times Y; R\mathcal{H}om(q_2^{-1}G, q_1^!F)) \cong R\mathcal{H}om(R\Gamma_c(Y; G), R\Gamma(X; F)).$$

**証明.** 次の図式を考える.

$$\begin{array}{ccc} X \times Y & \xrightarrow{q_2} & Y \\ q_1 \downarrow & \square & \downarrow a_Y \\ X & \xrightarrow{a_X} & \{\text{pt}\}. \end{array}$$

このとき,

$$\begin{aligned} & R\Gamma(X \times Y; R\mathcal{H}om(q_2^{-1}G, q_1^!F)) \\ & \cong Ra_{X \times Y*} R\mathcal{H}om(q_2^{-1}G, q_1^!F) && \text{(切断を 1 点への射影で表す.)} \\ & \cong Ra_{X*} Rq_{1*} R\mathcal{H}om(q_2^{-1}G, q_1^!F) && (a_{X \times Y} = a_X \circ q_1.) \\ & \cong Ra_{X*} R\mathcal{H}om(Rq_{1!}q_2^{-1}G, F) && \text{(ポアンカレ・ヴェルディエ双対.)} \\ & \cong Ra_{X*} R\mathcal{H}om(a_X^{-1}Ra_{Y!}G, F) && \text{(固有基底変換.)} \\ & \cong R\mathcal{H}om(Ra_{Y!}G, Ra_{X*}F) && \text{(順像と逆像の随伴.)} \\ & \cong R\mathcal{H}om(R\Gamma_c(Y; G), R\Gamma(X; F)). && \text{(順像を切断で表す.)} \end{aligned}$$

□

**定義 1.2** ([KS90, Definition 3.1.16]). (i)  $f: Y \rightarrow X$  を連続写像とし,  $f_!$  のコホモロジー次元は有限であるとする.

$$\omega_{Y/X} := f^!A_X \in D^+(A_Y)$$

とおき, 相対双対化複体 (relative dualizing complex) という.  $\omega_f$  とおき.  $X = \{\text{pt}\}$  のとき,  $\omega_Y = \omega_{Y/\{\text{pt}\}}$  とおき, 双対化複体とよぶ.  
(ii)  $X$  の c 柔軟次元が有限であるとする.  $F \in D^b(X)$  とする. このとき,

$$\begin{aligned} D_X F &= R\mathcal{H}om(F, \omega_X), \\ D'_X F &= R\mathcal{H}om(F, A_X) \end{aligned}$$

とおく.  $D_X F$  を  $F$  のヴェルディエ双対 (Verdier dual) という.  
次がある.

$$f^{-1}(\cdot) \otimes \omega_{Y/X} \rightarrow f^!(\cdot). \quad (1.1)$$

証明. [KS90, Proposition 3.1.11] の式

$$f^!(\cdot) \otimes_{A_Y}^L f^{-1}(\cdot) \rightarrow f^!(\cdot \otimes_{A_X}^L \cdot)$$

の第 1 引数に  $A_X$  を入れると次の射が得られる.

$$f^! A_X \otimes_{A_Y}^L f^{-1}(\cdot) \rightarrow f^!(A_X \otimes_{A_X}^L \cdot) \cong f^!(\cdot).$$

□

ポアンカレ・ヴェルディエ双対定理から,  $F \in D^b(A_X)$  に対して次が成り立つ.

$$\text{Hom}_{D^b(A_X)}(F, \omega_X) \cong \text{Hom}_{D^b(\text{Mod}(A))}(\text{R}\Gamma_c(X; F), A), \quad (1.2)$$

$$\text{RHom}(F, \omega_X) \cong \text{RHom}(\text{R}\Gamma_c(X; F), A). \quad (1.3)$$

実際,  $\omega_X = a_X^! A$  に対応する  $\text{Ra}_{X!} F$  を切断で表せばよい.

とくに, 局所閉集合  $Z$  に対し  $F = A_Z$  を考えると

$$\begin{aligned} \text{R}\Gamma_Z(X; \omega_X) &\cong \text{RHom}(A_Z, \omega_X) \\ &\cong \text{RHom}(\text{R}\Gamma_c(Z; A_Z), A) \end{aligned}$$

となる.

## 2 多様体における消滅定理 [KS90, 3.2]

$V$  を  $n$  次元実ベクトル空間とする.\*<sup>1</sup>

補題 2.1.  $F \in \text{Sh}(V)$  とすると,

$$H_c^j(V; F) = 0. \quad (j > n)$$

---

\*<sup>1</sup>ユークリッド空間の意味で言っている?

証明. まず  $n = 1$  の場合に示す.  $i: V \rightarrow [0, 1]$  を  $V$  から  $]0, 1[ \subset [0, 1]$  への同相写像とする.  
 $\tilde{F} := i_! F$  とおくと,

$$H_c^j(V; F) \xrightarrow{\sim} H^j([0, 1]; \tilde{F})$$

が成り立つ.

同型のチェック

$$\begin{aligned} H_c^j(V; F) &\cong H^j \mathrm{R}\Gamma_c(V; F) \\ &\cong H^j \mathrm{Ra}_{V!} F \end{aligned}$$

と

$$\begin{aligned} H^j([0, 1]; \tilde{F}) &\cong H^j \mathrm{R}\Gamma([0, 1]; \mathrm{R}i_! F) \\ &\cong H^j \mathrm{Ra}_{[0, 1]*} \mathrm{R}i_! F \end{aligned}$$

より,  $\mathrm{Ra}_{V!} \cong \mathrm{Ra}_{[0, 1]*} \mathrm{R}i_!$  であればよいが<sup>\*</sup>, これは  $\mathrm{a}_{[0, 1]}$  が固有ならば成り立つ.  
 $\mathrm{a}_{[0, 1]}$  は固有なので, 同型.

よって, [KS90, Proposition 2.7.3 (i)]<sup>\*2</sup>より,

$$0 = H^j([0, 1]; \tilde{F}) \cong H_c^j(V; F)$$

である.

次に, 一般の場合に示す.  $V'$  を  $(n - 1)$  次元ベクトル空間とし,  $f: V \rightarrow V'$  を全射線形写像とする. 先の結果から  $\mathrm{R}^j f_! F = 0$ . ( $j \neq 0, 1$ )

いま,

$$\begin{aligned} \mathrm{R}^0 f_! F &\cong \tau^{\leq 0} \mathrm{R}f_! F, \\ \tau^{\geq 1} \mathrm{R}f_! F &\cong \mathrm{R}^1 f_! F[-1] \end{aligned}$$

である.

前半のチェック

$$\cdots \rightarrow 0 \rightarrow (\mathrm{R}f_! F)^0 \rightarrow (\mathrm{R}f_! F)^1 \rightarrow 0 \rightarrow \cdots \quad \text{in } \mathrm{D}^+(V')$$

の切り落とし  $\tau^{\leq 0} \mathrm{R}f_! F$  は,

$$\cdots \rightarrow 0 \rightarrow \mathrm{Ker } d^0 \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow \cdots \quad \text{in } \mathrm{D}^+(V')$$

である. 他方,  $\mathrm{R}^0 f_! F$  は

$$\mathrm{R}^0 f_! F \cong H^0(\mathrm{R}f_! F) \cong \mathrm{Ker } d^0 / 0 = \mathrm{Ker } d^0$$

である. これを 0 次に集中した複体と見れば  $\tau^{\leq 0} \mathrm{R}f_! F$  と一致する.

---

<sup>\*2</sup> $I = [0, 1] \subset \mathbf{R}$  とする.  $F \in \mathrm{Sh}(I)$  に対し,  $H^j(I; F) = 0$ . ( $j > 1$ )

後半のチェック

$$\cdots \rightarrow 0 \rightarrow (Rf_!F)^0 \rightarrow (Rf_!F)^1 \rightarrow 0 \rightarrow \cdots \quad \text{in } D^+(V')$$

の切り落とし  $\tau^{\geq 1}Rf_!F$  は

$$\cdots \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow \text{Coker } d^0 \rightarrow 0 \rightarrow \cdots \quad \text{in } D^+(V')$$

である。他方,  $R^1f_!F$  は

$$R^1f_!F \cong H^1(Rf_!F) \cong \text{Ker } d^1 / \text{Im } d^0 \cong (Rf_!F)^1 / \text{Im } d^0 \cong \text{Coker } d^0$$

である。これを 0 次に集中した複体と見ると

$$\cdots \rightarrow 0^{(-1)} \rightarrow \text{Coker } d^0 \rightarrow 0^{(1)} \rightarrow 0^{(2)} \rightarrow \cdots \quad \text{in } D^+(V')$$

となる。この複体に  $[-1]$  を適用すると  $\tau^{\geq 1}Rf_!F$  に一致する。

よって, 特三角

$$R^0f_!F \rightarrow Rf_!F \rightarrow R^1f_!F[-1] \xrightarrow{+1}$$

を得る。(cf. [KS90, (1.7.2)]) この特三角に  $R\Gamma_c(V'; \cdot)$  を適用すると, 長完全列

$$\cdots \rightarrow H^j(V'; R^0f_!F) \rightarrow H^j(V; F) \rightarrow H^{j-1}(V'; R^1f_!F) \rightarrow \cdots$$

が得られる。よって,  $n$  に関する帰納法から,  $H_c^j(V; F) = 0$  が  $j > n$  に対して成り立つ。  $\square$

### 3 向きづけと双対性 [KS90, 3.3]

(1.1) が同型になるための十分条件を調べる。

**定義 3.1.**  $f: Y \rightarrow X$  を局所コンパクト空間の間の連続写像とする。  $f$  がファイバー次元  $l$  の位相的沈めこみ (topological submersion) であるとは,  $Y$  の各点  $y$  に対して,  $y$  の開近傍  $V \in I_y$  で,  $U = f(V)$  が  $X$  の開集合であり, 次の図式が可換になることをいう。

$$\begin{array}{ccc} U \times \mathbf{R}^l & \xrightarrow{\sim} & V \\ & \searrow \text{pr}_1 & \downarrow f|_V \\ & & U. \end{array}$$

例.  $X, Y$  が  $C^1$  級多様体で  $f$  を  $C^1$  沈めこみとすると,  $f$  は位相的沈めこみである。

**命題 3.2.**  $f: Y \rightarrow X$  をファイバー次元  $l$  の位相的沈めこみとする。

- (i)  $k \neq -l$  に対し  $H^k(f^!A_X) = 0$  であり, 局所的に  $H^{-l}(f^!A_X) \cong A_Y$  である。
- (ii)  $f^{-1}(\cdot) \otimes \omega_{Y/X} \rightarrow f^!(\cdot)$  は同型である。

証明. まず  $Y = \mathbf{R}^l$ ,  $X = \{\text{pt}\}$  の場合に (i) を示す. (1.3) より任意の開集合  $U \subset Y$  に対し,

$$\mathrm{R}\Gamma(U; f^! A_X) \cong \mathrm{RHom}(\mathrm{R}\Gamma_c(U; A_Y), A)$$

である. さらに,  $U \approx \mathbf{R}^l$  なら

$$\mathrm{R}\Gamma_c(U; A_Y) \cong A[-l]$$

であり,

$$\begin{aligned} H^j(U; f^! A_X) &\cong 0 \quad (j \neq -l) \\ \Gamma(U; H^{-l}(f^! A_X)) &\cong \mathrm{Hom}(H_c^l(U; A_Y), A) \end{aligned}$$

である.

一般の場合, 局所的に考えて  $Y = \mathbf{R}^l \times X$  とし,  $f = \mathrm{pr}_2$  とする.  $p = \mathrm{pr}_1: Y \rightarrow \mathbf{R}^l$  とおく.

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{R}^l \times X & \xrightarrow{f} & Y \\ p \downarrow & \square & \downarrow a_X \\ X & \xrightarrow{a_{\mathbf{R}^l}} & \{\text{pt}\}. \end{array}$$

固有基底変換から  $p^{-1}a_{\mathbf{R}^l}^! = p^{-1}\omega_{\mathbf{R}^l} \rightarrow f^! A_X = f^! a_X^{-1} A$  がある. 任意の  $F \in \mathrm{D}^+(A_X)$  に対し次の射がある.

$$p^{-1}\omega_{\mathbf{R}^l} A \otimes f^{-1} F \rightarrow f^! A_X \otimes f^{-1} F \rightarrow f^{-1} F. \quad (3.1)$$

これが同型になることを示す.  $U \subset \mathbf{R}^l$ ,  $V \subset X$  とする.  $h: U \approx \mathbf{R}^l$  のとき, 位相的沈めこみの図式は

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{R}^l \times V & \xrightarrow[h \times \mathrm{id}_X]{\sim} & U \times V \\ & \searrow \mathrm{pr}_2 & \downarrow f|_{U \times V} \\ & & V \end{array}$$

となっている.

$$\begin{aligned} &\mathrm{R}\Gamma(U \times V; f^! F) \\ &\cong \mathrm{RHom}_Y(A_{U \times V}, f^! F) && \Gamma \text{ の定義} \\ &\cong \mathrm{RHom}_X(\mathrm{R}f_! A_{U \times V}, F) && \text{ポアンカレ・ヴェルディエ双対} \\ &\cong \mathrm{RHom}_X(\mathrm{R}\Gamma_c(U; A_U) \otimes^{\mathrm{L}} A_V, F) \\ &\cong \mathrm{RHom}(\mathrm{R}\Gamma_c(U; A_U), A) \otimes^{\mathrm{L}} \mathrm{R}\mathcal{H}om(A_V, F) \\ &\cong \mathrm{R}\Gamma(U; \omega_{\mathbf{R}^l}) \otimes^{\mathrm{L}} \mathrm{R}\Gamma(V; F) && \text{上で示した} \end{aligned}$$

となる. よって同型. (ii) から (i) が従う. □

## 参考文献

- [KS90] Masaki Kashiwara, Pierre Schapira, *Sheaves on Manifolds*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 292, Springer, 1990.