位相空間まとめノート

Toshi2019

2024 年 1 月 29 日更新版 *

位相空間論について調べたこととかをまとめる．

記号や用語など

- X を集合とする．$\complement_X A$ で X の部分集合 A の補集合を表す．X が明らかなときは $\complement A$ ともかく．$X - A$ とか $X \mathbin{\text{━}} A$ とか $X \setminus A$ ともかく．
- $\mathbf{R}$ は実数全体の集合．
- I_x は x の近傍のなす有向順序集合．$\mathcal{U}_x$ や I_x で表すこともある．
- 小像：$f\colon X \to Y$ を写像とする．$U \subset Y$ に対し，$f_!(U) := \{y \in Y; f^{-1}(y) \subset U\}$ とおき，U の**小像** (small image) とよぶ．*1

X を位相空間とする．A を X の部分集合とする．

1. X における A の**内部** (interier) を $\operatorname{Int}_X A$ で表す．X が明らかなときは $\operatorname{Int} A$ とかく．$\mathring{A}$ とか A° とかくこともある．
2. X における A の**閉包** (closure) を $\operatorname{Cl}_X A$ で表す．X が明らかなときは $\operatorname{Cl} A$ とかく．$\overline{A}$ とかくこともある．
3. X における A の**境界** (boundary) を $\operatorname{Bd}_X A$ で表す．X が明らかなときは $\operatorname{Bd} A$ とかく．フランス語で Frontier ということから $\operatorname{Fr} A$ とかくこともある．∂A や $\dot{A}$ とかくこともある．

■イプシロン・デルタ論法の言い回しについて　[Mori81, p.26] に結構自然な言い回しがあった．

> 実数の数列 $\{a_n\}$ が実数 a に収束するとは，ε を任意の正数とするとき，ε に応じて 1 つの自然数 n_0 を定め
> $$n > n_0 \Longrightarrow |a_n - a| < \varepsilon$$
> となるようにできることをいい，$a_n \to a$ で表わす．

---

* 2023/09/21 作成開始

*1 何に書いてあったか思い出せない．記号はたけしくん．

これは「×× が存在して ××」という言い方よりも自然だと思う．これは n の場合．[Mori81, pp.67–68] に δ の場合も書いてあって

> 実数の閉区間 $[a,b]$ 上の実数値関数 f が，区間の 1 点 x_0 で連続であるとは，任意の $\varepsilon > 0$ に対し，
> $$|x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$
> が成り立つように，$\delta > 0$ を定めることができることをいう．

とか

> (X, ρ_X), (Y, ρ_Y) を距離空間とするとき，X から Y への写像 $f\colon X \to Y$ が，X の点 x_0 で**連続**とは，任意の正数 ε に対し，正数 δ を定めて
> $$\rho_X(x, x_0)| < \delta \Longrightarrow |\rho_Y(f(x), f(x_0))| < \varepsilon$$
> が成り立つようにできることをいう．

とか

> $(X, \mathfrak{T}_X)$, $(Y, \mathfrak{T}_Y)$ を位相空間とし，$\mathscr{U}(x)$ を X の点 x の近傍基，$\mathscr{V}(y)$ を Y の点 y の近傍基とする．写像 $f\colon X \to Y$ が，（位相 $\mathfrak{T}_X$, $\mathfrak{T}_Y$ に関して）X の点 x_0 で**連続**とは，$y_0 = f(x_0)$ の任意の近傍 $V(y_0) \in \mathscr{V}(y_0)$ に対し，
> $$x \in U(x_0) \Longrightarrow f(x) \in V(y_0)$$
> が成り立つように，x_0 の近傍 $U(x_0) \in \mathscr{U}(x_0)$ を定めうることをいう．

といった言い回しがされている．

1　基本的な定義

> **定義 1.1.**　X を位相空間とする．X の部分集合 A に関する次の条件 (1)–(3) は同値である．これらの条件をみたすとき，A は X の**局所閉集合** (locally closed set) であるという．
>
> (1) A は $\bar{A}$ の開集合である．
> (2) X の開集合 U と閉集合 F で $A = U \cap F$ となるものが存在する．
> (3) A の各点 x に対して，x の開近傍 U で，$A \cap U$ が U の閉集合となるものが存在する．

条件 (1)–(3) が同値であることの証明． (1)⇒(2)：仮定より，A は X の開集合 U を用いて，$A = U \cap \bar{A}$ とかける．$\bar{A}$ は X の閉集合である．

(2)⇒(3)：A を X の開集合 U と閉集合 F で $A = U \cap F$ と表す．x を $A = U \cap F$ の点とする．このとき，U は x の開近傍で，$A \cap U = (U \cap F) \cap U = U \cap F \subset U$ は U の閉集合である．実際，$U - F = U \cap (X - F)$ は U の開集合である．

(3)⇒(1)：

□

例 1.2. 複素平面 $\mathbb{C}$ において，実数の開区間 $]a,b[$ は局所閉集合である．3 つの条件について見てみる．

条件 (1)：閉包 $[a,b]$ の中で $]a,b[$ が開集合となることから従う．（図 1 参照）

図 1　開区間は閉区間の開集合

条件 (2)：例えば $]a,b[$ を直径とする開円盤 U を

$$U \coloneqq \left\{ z \in \mathbb{C};\ \left| z - \frac{a+b}{2} \right| < \frac{b-a}{2} \right\}$$

で定義し，閉集合 F として閉区間 $[a,b]$ をとれば，$]a,b[= U \cap F$ とかける．（図 2 参照）

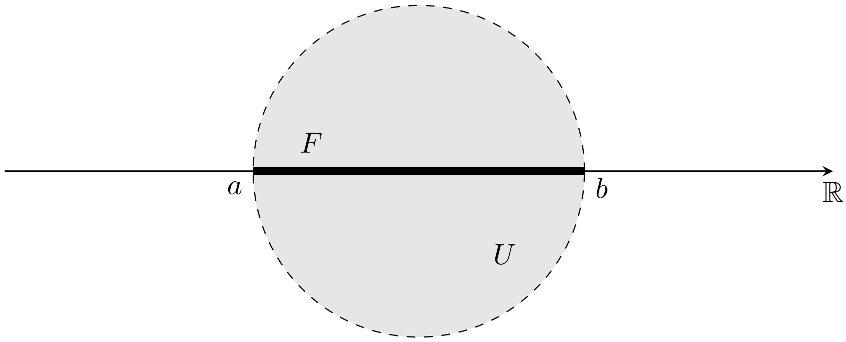

図 2　開区間は円盤と閉区間の合併

条件 (3)：実数 $a < x < b$ に対して，条件 (2) のときと同様に，

$$U \coloneqq \left\{ z \in \mathbb{C};\ \left| z - \frac{a+b}{2} \right| < \frac{b-a}{2} \right\}$$

とすれば，U は x の開近傍で $]a,b[\cap U$ は U の閉集合となる．もう少し小さい近傍として，例えば x を中心とする開円盤

$$U \coloneqq \{ z \in \mathbb{C};\ |z - x| < \min(x-a, b-x, 1) \}$$

をとることもできる．（図 3 参照）

2　局所コンパクト

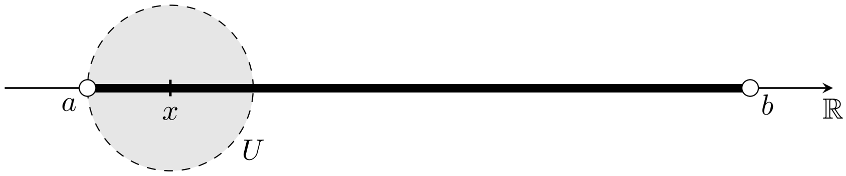

図 3　各点まわりで開区間と円盤の共通部分は円盤の閉集合

定義 2.1.　X をハウスドルフ空間とする．

1. X の部分集合 $A \subset X$ について，閉包 $\bar{A}$ がコンパクトであるとき，A は**相対コンパクト**であるという．
2. 任意の点 $x \in X$ に対して，x の相対コンパクトな開近傍が存在するとき，X は**局所コンパクト空間**であるという．

例 2.2.　位相多様体 X は局所コンパクトである．

証明． $x \in X$ の近傍 U_x でユークリッド空間の開集合 U'_x と同相なものが存在する．U_x と U'_x の間の同相写像を $\varphi\colon U_x \to U'_x$ とする．$\varphi(x)$ を中心とする開球 B_x で U'_x に含まれるものが存在する．この B_x に対し，$\overline{B_x}$ はコンパクトである．したがって，$\varphi^{-1}\left(\overline{B_x}\right) = \overline{\varphi^{-1}(B_x)}$ はコンパクトである．すなわち $\varphi^{-1}(B_x)$ は x の相対コンパクトな開近傍である．□

次の命題から，局所コンパクト空間においては，部分集合が局所コンパクトであることと局所閉であることは同じである．

命題 2.3.　X をハウスドルフ空間とする．X の部分空間 A に関する次の条件 (1) と (2) について，一般に (1)⇒(2) がなりたつ．X が局所コンパクトなら (2)⇒(1) もなりたつ．

(1) A は局所コンパクト空間である．
(2) A は X の局所閉集合である．

2.1　局所コンパクトノルム空間の有限次元性

有限次元ノルム空間 X は局所コンパクト．実際，実数 $r > 0$ に対し，開球 $D_r(0)$ は有界閉集合なのでコンパクトである．したがって，$x \in X$ に対し，$D_{\|x\|+1}(0)$ はコンパクト近傍である．

無限次元ノルム空間は局所コンパクトにはならない．[Shw67]

2.2　関数列の局所的な一様収束概念

関数列の収束には各点収束と一様収束，その間の収束概念として広義一様収束があった．関数列が定義される空間が局所コンパクトなら，広義一様収束と局所一様収束の概念は一致する．この辺

はシュヴァルツ解析学 1 を参考にした．金子関数論講義にも書いてある．

定義 2.4. X を集合，Y を距離空間とする．$(f_n\colon X \to Y)_{n\in\mathbb{N}}$ を X から Y への写像の列とし，$f\colon X \to Y$ を X から Y への写像とする．

1. 列 $(f_n(x))$ が X 上で $f(x)$ に**一様収束** (uniform conbergent) するとは，任意の実数 $q > 0$ に対し，$m \in \mathbb{N}$ で $n \geqq m$ をみたすすべての自然数 n に対し X で

$$\mathrm{dist}(f_n(x), f(x)) < q$$

をみたすものが存在することをいう．

2. X を位相空間とする．列 (f_n) が X 上で f に**広義一様収束**[*1]するとは，X の任意のコンパクト集合 K 上で (f_n) が f に一様収束することをいう．

3. X を位相空間とする．列 $(f_n\colon X \to Y)_{n\in\mathbb{N}}$ が X 上で $f\colon X \to Y$ に**局所一様** (locally uniform) に収束するとは，X の各点 x に対して，x の開近傍 $U \in I_x$ で，(f_n) が U 上で $n \to \infty$ で f に一様収束するものが存在することをいう．

局所コンパクト空間 X は各点がコンパクトな近傍を持つ．

命題 2.5. X が局所コンパクト空間であるとする．Y を距離空間とする．このとき，列 $(f_n\colon X \to Y)_{n\in\mathbb{N}}$ が X 上で $f\colon X \to Y$ に局所一様に収束することと，広義一様収束することは同値である．

証明． f_n が広義一様収束するとする．$x \in X$ とする．X が局所コンパクトなので，x に対しコンパクトな近傍 $K \in I_x$ が存在する．この K に対し，f_n は K 上一様収束する．よって，f_n は局所一様に収束する．

f_n が局所一様に収束するとする．K を X のコンパクト集合とする．$q > 0$ を実数とする．各 $a \in K$ に対し，a の近傍 $U_a \in I_a$ で，(f_n) が U_a 上 f に一様収束するものが存在する．この $(U_a)_{a\in K}$ に対し，有限個の添え字を選んで，$K \subset U_{a_1} \cup \cdots \cup U_{a_n}$ とすることができる．m_i を $n \geqq m_i$ となるすべての自然数 n に対し，U_{a_i} 上

$$\mathrm{dist}(f_n(x), f(x)) < q$$

をみたすものとする．$m = \max_i m_i$ とすると，$n \geqq m$ となるすべての自然数 n に対し，K 上

$$\mathrm{dist}(f_n(x), f(x)) < q$$

がなりたつ．よって，K 上一様収束する． □

[*1] 海外では，広義一様収束にあたる言葉はなく，いちいち，任意のコンパクト集合上で一様収束するというらしい．（金子）広義一様収束のことをコンパクト一様収束ということもある．

2.3 無限遠点で可算な局所コンパクト空間

> **定義 2.6.** X を局所コンパクト空間とする．X の 1 点コンパクト化を Y とし，$b \in Y$ を無限遠点とする．X が**無限遠点で可算** (countable at infinity) であるとは，b の近傍系で可算なものが存在することをいう．

命題 2.7. X を局所コンパクト空間とする．X が無限遠点で可算であることと，σ コンパクトであることは同値である．

3 パラコンパクト性

定義 3.1 (パラコンパクト)**.** ハウスドルフ空間 X がパラコンパクトであるとは，任意の開被覆が局所有限な細分をもつことをいう．

定義 3.2 (第 2 可算)**.** 位相空間 X が第 2 可算であるとは，開集合の基底で可算集合であるものが存在することをいう．

定義 3.3 (σ コンパクト)**.** 位相空間 X が σ コンパクトであるとは，コンパクト集合の列 $(U_n)_{n\in\mathbf{N}}$ で X の被覆であるものが存在することをいう．

命題 3.4. 位相多様体に対して次の条件 (1)–(3) は同値である．

(1) 第 2 可算である．
(2) リンデレーフである．
(3) σ コンパクトである．

参考文献

[Bou1] ブルバキ 位相 1.

[Kan21] 金子晃, 関数論講義, サイエンス社, 2021.

[KS90] Masaki Kashiwara, Pierre Schapira, *Sheaves on Manifolds*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 292, Springer, 1990.

[KS06] Masaki Kashiwara, Pierre Schapira, *Categories and Sheaves*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 332, Springer, 2006.

[Mat65] 松島与三, 多様体入門, 裳華房, 1965.

[Mori81] 森田紀一, 位相空間論, 岩波書店, 1981.

[Sai09] 斎藤毅, 集合と位相, 東京大学出版会, 2009.
第 2 可算，σ コンパクトの定義と，無限遠点で可算との同値性について．

[Shw67] シュヴァルツ解析学 1, 東京図書, 1970.
[Sh16] 志甫淳, 層とホモロジー代数, 共立出版, 2016.