本永翔也さんへの質問 (2024 年 7 月 15 日)

■前提　まず，私の持っている知識について前提を述べます．私の専門は代数解析で，とくに超局所層理論と呼ばれている分野の本 [KS90] を M1 からセミナーで読んでいます．とりわけ興味があるのは超局所層理論のシンプレクティック幾何への応用です．シンプレクティック幾何については基本的なところを [MS17] で 3 章くらいまで（かいつまんで）勉強しました．力学系については全くの門外漢で，KAM 理論についても全く知りません．後ほど述べる劣微分に関しては，凸解析や最適化に関する本を二，三手にとって，古典的な定義と滑らかとは限らない関数に対しての例を幾つか見ました．劣微分の定義は色々あるそうなので，何を古典的な劣微分と思っているかを明確にしておきます．

定義 1.　x_0 を $\mathbf{R}^n$ の点とし，$f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ を関数とする．このとき f の x_0 における劣微分 ∂f を

$$\partial f \coloneqq \{\alpha \in \mathbf{R}^n; f(x) > f(x_0) + \langle \alpha, x - x_0 \rangle\}$$

で定める．

■質問に至った経緯　以上の興味から応用が書いてある論文をいろいろ漁っていたところ，Viterbo の学生であった Vichery の論文 [Vic1] を見つけました．そこでは，C^∞ 多様体上の実数値関数に対する劣微分の定義を超局所層理論を用いて与えており，筆者はこれを homological subdifferential と呼んでいます．

homological subdifferential の応用として [Vic1, sec.1] に挙げられているのが Aubry-Mather 理論（以下，AM 理論）でした．筆者の別の論文 [Vic2] において，homological subdifferential を用いると AM 理論の non-convex な場合への拡張が可能になる，というようなことが述べられているようです．

■質問　そこで，本永さんに伺いたいのが以下のことです．

質問 1.　KAM 理論と AM 理論自体のモチベーションは何であり，どんな理論なのでしょうか．
質問 2.　あるいは，それについて簡単に述べてあるような文献等をご教示いただけますでしょうか．
質問 3.　AM 理論の文脈で，劣微分はどのように用いられているのでしょうか．

以上．お忙しいところ恐縮ですがよろしくお願いします．

参考文献

[J1] Benoit, Jubin, *A Microlocal Characterization of Lipschitz Continuity*, https://doi.org/10.4171/PRIMS/54-4-2. 質問に直接は関係ありませんが [Vic1] の応用の一つとして読んでいる論文です．

[KS90] Masaki Kashiwara, Pierre Schapira, *Sheaves on Manifolds*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 292, Springer, 1990.

[MS17] Dusa McDuff, Dietmar Salamon, *Introduction to Symplectic Topology*, 3rd ed., Oxford University Press, 2017.

[Vic1] Nicolas Vichery, *Homological Differential Calculus*, https://doi.org/10.48550/arXiv.1310.4845.

[Vic2] Nicolas Vichery, *Spectral Invariants towards a Non-Convex Aubry-Mather theory* , https://doi.org/10.48550/arXiv.1403.2058.