位相空間まとめノート

Toshi2019

2024 年 1 月 28 日更新版 [*]

位相空間論について調べたこととかをまとめる．

記号など

- X を集合とする．$\complement_X A$ で X の部分集合 A の補集合を表す．X が明らかなときは $\complement A$ ともかく．$X - A$ とか $X \smallsetminus A$ とか $X \setminus A$ ともかく．

X を位相空間とする．A を X の部分集合とする．

1. X における A の**内部** (interier) を $\operatorname{Int}_X A$ で表す．X が明らかなときは $\operatorname{Int} A$ とかく．$\mathring{A}$ とか A° とかくこともある．
2. X における A の**閉包** (closure) を $\operatorname{Cl}_X A$ で表す．X が明らかなときは $\operatorname{Cl} A$ とかく．$\overline{A}$ とかくこともある．
3. X における A の**閉包** (boundary) を $\operatorname{Bd}_X A$ で表す．X が明らかなときは $\operatorname{Bd} A$ とかく．フランス語で Frontier ということから $\operatorname{Fr} A$ とかくこともある．∂A や $\dot{A}$ とかくこともある．

1　基本的な定義

定義 1.1.　X を位相空間とする．X の部分集合 A に関する次の条件 (1)–(3) は同値である．これらの条件をみたすとき，A は X の**局所閉集合** (locally closed set) であるという．

(1) A は $\bar{A}$ の開集合である．
(2) X の開集合 U と閉集合 F で $A = U \cap F$ となるものが存在する．
(3) A の各点 x に対して，x の開近傍 U で，$A \cap U$ が U の閉集合となるものが存在する．

[*] 2023/09/21 作成開始

条件 (1)–(3) が同値であることの証明． (1)⇒(2)：仮定より，A は X の開集合 U を用いて，$A = U \cap \bar{A}$ とかける．$\bar{A}$ は X の閉集合である．

(2)⇒(3)：A を X の開集合 U と閉集合 F で $A = U \cap F$ と表す．x を $A = U \cap F$ の点とする．このとき，U は x の開近傍で，$A \cap U = (U \cap F) \cap U = U \cap F \subset U$ は U の閉集合である．実際，$U - F = U \cap (X - F)$ は U の開集合である．

(3)⇒(1)：

$\square$

例 1.2. 複素平面 $\mathbb{C}$ において，実数の開区間 $]a, b[$ は局所閉集合である．3 つの条件について見てみる．

条件 (1)：閉包 $[a, b]$ の中で $]a, b[$ が開集合となることから従う．（図 1 参照）

図 1　各点まわりで開区間と円盤の共通部分は円盤の閉集合

条件 (2)：例えば $]a, b[$ を直径とする開円盤 U を

$$U \coloneqq \left\{ z \in \mathbb{C};\ \left| z - \frac{a+b}{2} \right| < \frac{b-a}{2} \right\}$$

で定義し，閉集合 F として閉区間 $[a, b]$ をとれば，$]a, b[= U \cap F$ とかける．（図 2 参照）

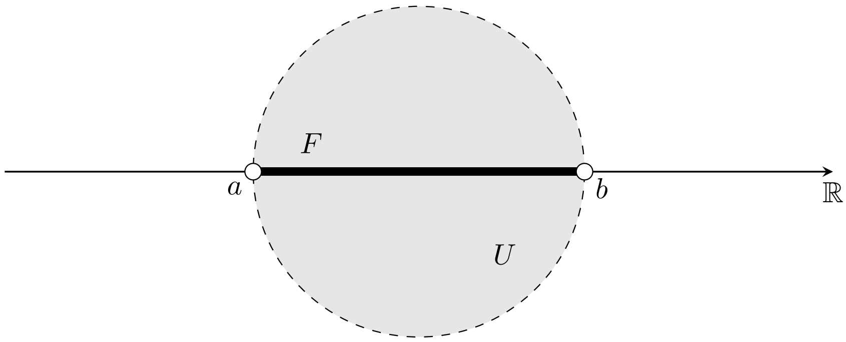

図 2　開区間は円盤と閉区間の合併

条件 (3)：実数 $a < x < b$ に対して，条件 (2) のときと同様に，

$$U \coloneqq \left\{ z \in \mathbb{C};\ \left| z - \frac{a+b}{2} \right| < \frac{b-a}{2} \right\}$$

とすれば，U は x の開近傍で $]a, b[\cap U$ は U の閉集合となる．もう少し小さい近傍として，例えば x を中心とする開円盤

$$U \coloneqq \{ z \in \mathbb{C}; |z - x| < \min(x-a, b-x, 1) \}$$

をとることもできる．（図 3 参照）

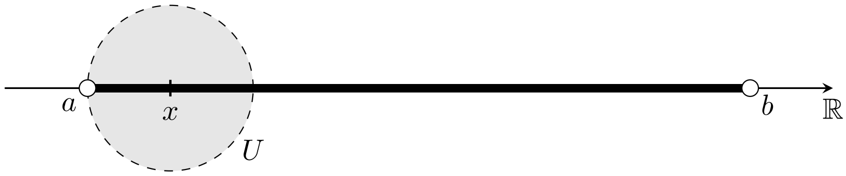

図 3　各点まわりで開区間と円盤の共通部分は円盤の閉集合

2　局所コンパクト

定義 2.1.　X をハウスドルフ空間とする．

1. X の部分集合 $A \subset X$ について，閉包 $\bar{A}$ がコンパクトであるとき，A は**相対コンパクト**であるという．
2. 任意の点 $x \in X$ に対して，x の相対コンパクトな開近傍が存在するとき，X は**局所コンパクト空間**であるという．

次の命題から，局所コンパクト空間においては，部分集合が局所コンパクトであることと局所閉であることは同じである．

命題 2.2.　X をハウスドルフ空間とする．X の部分空間 A に関する次の条件 (1) と (2) について，一般に (1)⇒(2) がなりたつ．X が局所コンパクトなら (2)⇒(1) もなりたつ．

(1) A は局所コンパクト空間である．
(2) A は X の局所閉集合である．

定義 2.3.　X を局所コンパクト空間とする．X が**無限遠点で可算** (countable at infinity) であるとは，X が可算個のコンパクト集合の合併であることをいう．

例 2.4.　位相多様体 X は局所コンパクトである．

証明. $x \in X$ の近傍 U_x でユークリッド空間の開集合 U'_x と同相なものが存在する．U_x と U'_x の間の同相写像を $\varphi\colon U_x \to U'_x$ とする．$\varphi(x)$ を中心とする開球 B_x で U'_x に含まれるものが存在する．この B_x に対し，$\overline{B_x}$ はコンパクトである．したがって，$\varphi^{-1}\left(\overline{B_x}\right) = \overline{\varphi^{-1}(B_x)}$ はコンパクトである．すなわち $\varphi^{-1}(B_x)$ は x の相対コンパクトな開近傍である．　□

3　パラコンパクト性

定義 3.1 (パラコンパクト)**.**　ハウスドルフ空間 X がパラコンパクトであるとは，任意の開被覆が局所有限な細分をもつことをいう．

定義 3.2 (第 2 可算)**.**　位相空間 X が第 2 可算であるとは，開集合の基底で可算集合であるものが存在することをいう．

定義 3.3 (σ コンパクト)**.**　位相空間 X が σ コンパクトであるとは，コンパクト集合の列 $(U_n)_{n\in\mathbf{N}}$ で X の被覆であるものが存在することをいう．

命題 3.4.　位相多様体に対して次の条件 (1)–(3) は同値である．

(1) 第 2 可算である．

(2) リンデレーフである．

(3) σ コンパクトである．

参考文献

[KS90] Masaki Kashiwara, Pierre Schapira, *Sheaves on Manifolds*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 292, Springer, 1990.

[KS06] Masaki Kashiwara, Pierre Schapira, *Categories and Sheaves*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 332, Springer, 2006.

[Mat65] 松島与三, 多様体入門, 裳華房, 1965.

[Sai09] 斎藤毅, 集合と位相, 東京大学出版会, 2009.
第 2 可算，σ コンパクトの定義と，無限遠点で可算との同値性について．

[Sh16] 志甫淳, 層とホモロジー代数, 共立出版, 2016.