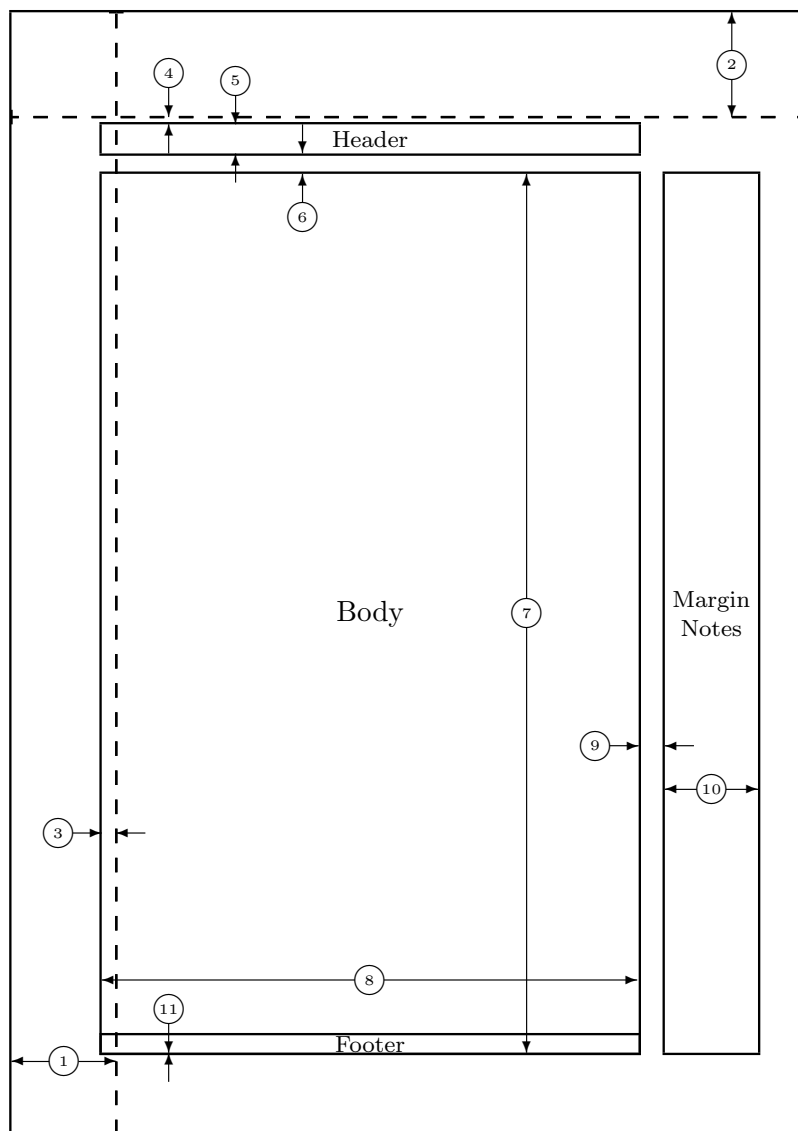
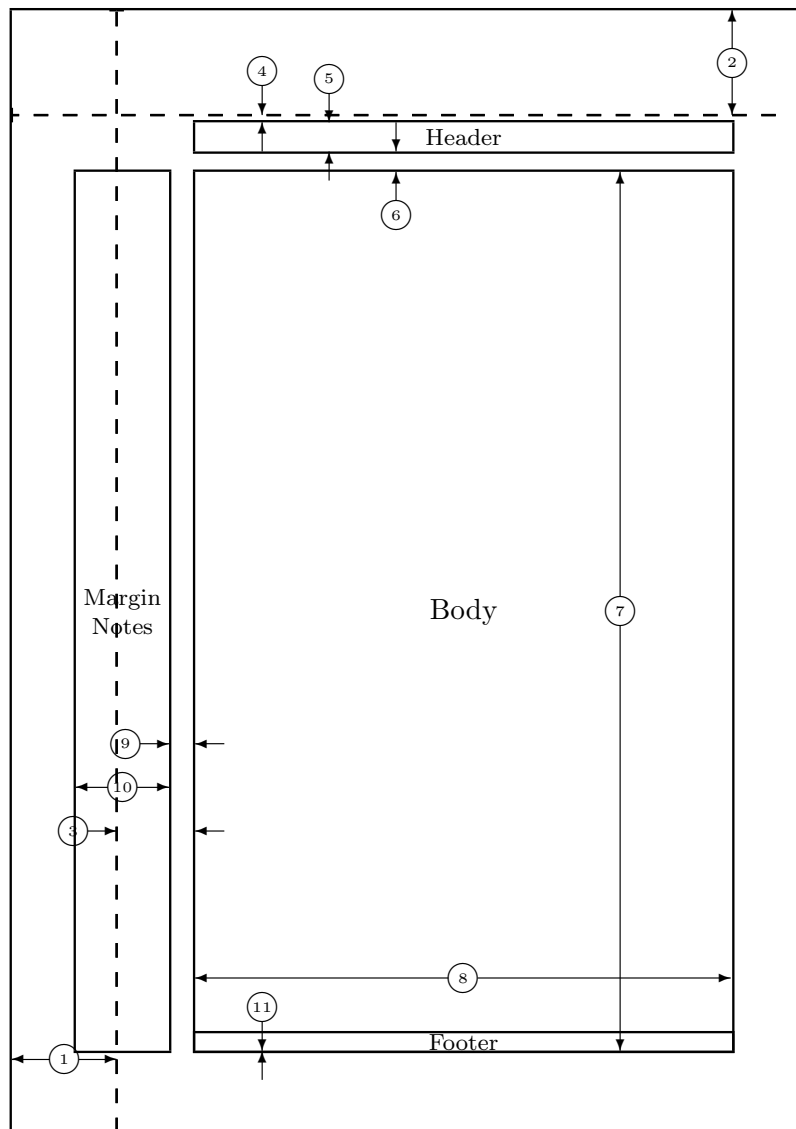


Notes on Sheaves on Manifolds

大柴寿浩



- | | | | |
|----|------------------------|----|-----------------------------------|
| 1 | one inch + \hoffset | 2 | one inch + \voffset |
| 3 | \oddsidemargin = -10pt | 4 | \topmargin = 5pt |
| 5 | \headheight = 20pt | 6 | \headsep = 14pt |
| 7 | \textheight = 604pt | 8 | \textwidth = 369pt |
| 9 | \marginparsep = 18pt | 10 | \marginparwidth = 64pt |
| 11 | \footskip = 0pt | | \marginparpush = 16pt (not shown) |
| | \hoffset = 0pt | | \voffset = 0pt |
| | \paperwidth = 545pt | | \paperheight = 771pt |



1	one inch + \hoffset	2	one inch + \voffset
3	\evensidemargin = 54pt	4	\topmargin = 5pt
5	\headheight = 20pt	6	\headsep = 14pt
7	\textheight = 604pt	8	\textwidth = 369pt
9	\marginparsep = 18pt	10	\marginparwidth = 64pt
11	\footskip = 0pt		\marginparpush = 16pt (not shown)
	\hoffset = 0pt		\voffset = 0pt
	\paperwidth = 545pt		\paperheight = 771pt

はじめに

2023 年度から始めた [KS90] のセミナーのノート.

記号

次の記号は断りなく使う.

- 添字: なんらかの族 $(a_i)_{i \in I}$ を $(a_i)_i$ とか (a_i) と略記することがある.
- 近傍: 位相空間 X の点 x や部分集合 Z に対し, その開近傍系をそれぞれ I_x や I_Z で表す. これらは, 包含関係の逆で有向順序集合をなす.

第 1 章

ホモロジー代数

1.3 複体の圏

\mathcal{C} を加法圏とする.

注意. 加法圏とは次の 3 つの条件 (1)–(3) をみたす圏のことである.

- (1) どの対象 $X, Y \in \mathcal{C}$ に対しても $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ が加法群になり, どの対象 $X, Y, Z \in \mathcal{C}$ に対しても合成 $\circ: \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z)$ が双線型である.
- (2) 零対象 $0 \in \mathcal{C}$ が存在する. さらに $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(0, 0) = 0$ が成り立つ.
- (3) 任意の対象 $X, Y \in \mathcal{C}$ に対して積と余積が存在し, さらにそれらは同型になる. (それらを複積といい $X \oplus Y$ とかく.)

圏 \mathcal{C} から, \mathcal{C} の対象の複体の圏 $C(\mathcal{C})$ を作ることができる. まず複体の定義をする. 圏 \mathcal{C} の対象のと射の列

$$(1.3.1) \quad \cdots \longrightarrow X^{n-1} \xrightarrow{d_X^{n-1}} X^n \xrightarrow{d_X^n} X^{n+1} \longrightarrow \cdots$$

を考える. この列 $X = ((X^n)_{n \in \mathbf{Z}}, (d_X^n)_{n \in \mathbf{Z}})$ が複体 (complex) であるとは, 任意の $n \in \mathbf{Z}$ に対し

$$(1.3.2) \quad d_X^{n+1} \circ d_X^n = 0$$

が成り立つことをいう.

圏 \mathcal{C} の対象の複体 $X = ((X^n), (d_X^n))$, $Y = ((Y^n), (d_Y^n))$ の間の射を, \mathcal{C} の射の族 $(f^n: X^n \rightarrow Y^n)_{n \in \mathbf{Z}}$ で, 図式

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & X^n & \xrightarrow{d_X^n} & X^{n+1} & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow f^n & & \downarrow f^{n+1} & & \\ \cdots & \longrightarrow & Y^n & \xrightarrow{d_Y^n} & Y^{n+1} & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

を可換にする, すなわちどの番号 $n \in \mathbf{Z}$ に対しても

$$(1.3.3) \quad d_Y^n \circ f^n = f^{n+1} \circ d_X^n$$

が成り立つものとして定める.

以上の準備のもとで, \mathcal{C} の複体の圏 $C(\mathcal{C})$ を次のように定める.

- 対象: $\text{Ob}(C(\mathcal{C})) = \{\mathcal{C} \text{ の複体} \}$
- 射: $\text{Hom}_{C(\mathcal{C})}(X, Y) = \{\mathcal{C} \text{ の複体の射} \}$

このとき, $C(\mathcal{C})$ は加法圏になる.

圏になることの証明. $f: X \rightarrow Y$ と $g: Y \rightarrow Z$ を $C(\mathcal{C})$ の射とする. f と g の合成 $g \circ f$ は $(g^n \circ f^n)_n$ で与えられる. これがうまくいくことは

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & X^n & \xrightarrow{d_X^n} & X^{n+1} & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow f^n & & \downarrow f^{n+1} & & \\ \cdots & \longrightarrow & Y^n & \xrightarrow{d_Y^n} & Y^{n+1} & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow g^n & & \downarrow g^{n+1} & & \\ \cdots & \longrightarrow & Z^n & \xrightarrow{d_Z^n} & Z^{n+1} & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

が可換になることからわかる.

X の恒等射は $(\text{id}_{X^n})_n$ で与えられる. □

加法圏になることの証明. X と Y を \mathcal{C} の複体とする.

(1) 射の集合のアーベル群構造 $f, g \in \text{Hom}_{C(\mathcal{C})}(X, Y)$ に対し, $f + g$ が $(f^n + g^n)_n$ で定まる.

(2) 零対象の存在 $C(\mathcal{C})$ の零対象 0 は

$$\cdots \rightarrow 0 \xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{0} 0 \rightarrow \cdots$$

で与えられる.

(3) 複積の存在 X と Y の複積 $X \oplus Y$ は

$$\cdots \rightarrow X^{n-1} \oplus Y^{n-1} \xrightarrow{d_X^{n-1} \oplus d_Y^{n-1}} X^n \oplus Y^n \xrightarrow{d_X^n \oplus d_Y^n} X^{n+1} \oplus Y^{n+1} \rightarrow \cdots$$

で与えられる. □

さらに \mathcal{C} がアーベル圏ならば, $C(\mathcal{C})$ もアーベル圏になる.

注意. 加法圏 \mathcal{C} がアーベル圏であるとは次の条件 (4), (5) をみたすことをいう.

(4) 任意の \mathcal{C} の射 $f: X \rightarrow Y$ に対し, f の核 $\text{Ker } f$ と余核 $\text{Coker } f$ が存在する.

(5) 任意の \mathcal{C} の射 $f: X \rightarrow Y$ に対し, 自然に定まる射 $\text{Coim } f \rightarrow \text{Im } f$ は同型である.

証明. X と Y を \mathcal{C} の複体とする.

(4) 核と余核の存在 複体の射 $f: X \rightarrow Y$ に対し, 核 $\text{Ker } f$ は $(\text{Ker } f^n)_n$ で, 余核 $\text{Coker } f$ は $(\text{Coker } f^n)_n$ で与えられる.

コメント (4/24). 「 $\text{Ker } f$ の differential の構成はどうなっていますか？」

次の図式を考える.

$$\begin{array}{ccccccc}
 \cdots & \longrightarrow & \text{Ker } f^n & \xrightarrow{\bar{d}_X^n} & \text{Ker } f^{n+1} & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow \iota^n & & \downarrow \iota^{n+1} & & \\
 \cdots & \longrightarrow & X^n & \xrightarrow{d_X^n} & X^{n+1} & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow f^n & & \downarrow f^{n+1} & & \\
 \cdots & \longrightarrow & Y^n & \xrightarrow{d_Y^n} & Y^{n+1} & \longrightarrow & \cdots
 \end{array}$$

ここで, ι^n は $\text{Ker } f^n$ の普遍性から自然に定まる射である. $\bar{d}_X^n: \text{Ker } f^n \rightarrow \text{Ker } f^{n+1}$ が $d_X^n \circ \iota^n$ によって定められることを示せば良い.

$$f^{n+1} \circ d_X^n \circ \iota^n = d_Y^n \circ f^{n+1} \circ \iota^n = d_Y^n \circ 0 = 0$$

より, $d_X^n \circ \iota^n$ は $\text{Ker } f^{n+1}$ に値を取る. したがって, $\bar{d}_X^n: \text{Ker } f^n \rightarrow \text{Ker } f^{n+1}$ が定まる.

(5) 余像と像が同型になること 各次数 n ごとに $\text{Coim } f^n \cong \text{Im } f^n$ が成り立つことから従う. \square

圏 $\mathbf{C}(\mathcal{C})$ の充満部分圏 $\mathbf{C}^+(\mathcal{C})$, $\mathbf{C}^-(\mathcal{C})$, $\mathbf{C}^b(\mathcal{C})$ を

$$\begin{aligned}
 \text{Ob}(\mathbf{C}^+(\mathcal{C})) &= \left\{ 0 \rightarrow X^n \xrightarrow{d_X^n} X^{n+1} \rightarrow \cdots \quad (n \ll 0) \right\}, \\
 \text{Ob}(\mathbf{C}^-(\mathcal{C})) &= \left\{ \cdots \rightarrow X^{n-1} \xrightarrow{d_X^{n-1}} X^n \rightarrow 0 \quad (n \gg 0) \right\}, \\
 \text{Ob}(\mathbf{C}^b(\mathcal{C})) &= \{ 0 \rightarrow X^n \rightarrow \cdots \rightarrow X^m \rightarrow 0 \quad (n \ll 0, m \gg 0) \}
 \end{aligned}$$

で定める.

\mathcal{C} の対象 X に対し $\mathbf{C}(\mathcal{C})$ の対象

$$\cdots \rightarrow 0 \rightarrow X \rightarrow 0 \rightarrow \cdots$$

を対応させることによって, 忠実充満な関手 $\mathcal{C} \hookrightarrow \mathbf{C}(\mathcal{C})$ が定まる.

k を整数とする. \mathcal{C} の複体

$$X: \cdots \rightarrow X^{n-1} \xrightarrow{d_X^{n-1}} X^n \xrightarrow{d_X^n} X^{n+1} \rightarrow \cdots$$

に対し, $X[k]$ を $X[k]^n = X^{n+k}$, $d_{X[k]}^n = (-1)^k d_X^{n+k}$ で定める. 図式でかくと

$$X[k]: \dots \rightarrow X^{n+k-1} \xrightarrow{(-1)^k d_X^{n+k-1}} X^{n+k} \xrightarrow{(-1)^k d_X^{n+k}} X^{n+k+1} \rightarrow \dots$$

のようになる. X から Y への射 $f: X \rightarrow Y$ に対し, $f[k]: X[k] \rightarrow Y[k]$ を $f[k]^n = f^{n+k}$ で定める. X を $X[k]$ に対応させることで関手 $[k]: C(\mathcal{C}) \rightarrow C(\mathcal{C})$ が定まる. この関手を次数 k のシフト関手と呼ぶ.

$[k]$ が関手になることの証明. $X[k]$ が複体になること:

$$(-1)^k d_X^{n+k} \circ (-1)^k d_X^{n+k-1} = (-1)^{2k} d_X^{n+k} \circ d_X^{n+k-1} = 0.$$

$f[k]$ が複体の射になること:

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & X^{n+k} & \xrightarrow{(-1)^k d_X^{n+k}} & X^{n+k+1} & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow f^{n+k} & & \downarrow f^{n+k+1} & & \\ \dots & \longrightarrow & Y^{n+k} & \xrightarrow{(-1)^k d_Y^{n+k}} & Y^{n+k+1} & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

が可換になることを示せばよい.

$$f^{n+k+1} \circ (-1)^k d_X^{n+k+1} = (-1)^k f^{n+k+1} \circ d_X^{n+k+1} = (-1)^k d_Y^{n+k+1} \circ f^{n+k}.$$

$[k]$ が合成を保つこと: $f: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow Z$ を複体の射とする. このとき

$$(g[k] \circ f[k])^n = g[k]^n \circ f[k]^n = g^{n+k} \circ f^{n+k} = (g \circ f)^{n+k} = (g \circ f)[k]^n$$

が成り立つ.

$[k]$ が恒等射を保つこと: $\text{id}_X[k]^n = \text{id}_X^{n+k} = \text{id}_{X[k]}^n$. □

■ホモトピー \mathcal{C} の複体の圏 $C(\mathcal{C})$ から, ホモトピックな射を同一視することによって, 新たな圏 $K(\mathcal{C})$ が得られる. まず準備.

$C(\mathcal{C})$ を圏 \mathcal{C} の複体の圏とする. $X, Y \in C(\mathcal{C})$ とする. $f: X \rightarrow Y$ が 0 にホモトピックであるとは, \mathcal{C} の射の族 $(s^n: X^n \rightarrow Y^{n-1})$ で,

$$(1.3.4) \quad f^n = d_Y^{n-1} \circ s^n + s^{n+1} \circ d_X^n \quad (n \in \mathbf{Z})$$

となるものが存在することをいう.

$f, g: X \rightarrow Y$ に対し, $f - g$ が 0 にホモトピックであるとき, f と g はホモトピックであるといい, $f \simeq g$ とかく. f が 0 とホモトピックであることを $f \simeq 0$ で表す. このとき $s = (s^n)$ を f と g の間のホモトピーという. \simeq は同値関係である.

証明. f, g, h を X から Y への \mathcal{C} の複体の射とする.

反射律 $(s^n = 0)$ が f と f の間のホモトピーを与える.

対称律 f と g の間のホモトピーを s とするとき, $-s$ が g と f の間のホモトピーを与える.

推移律 f と g の間のホモトピーを s , g と h の間のホモトピーを t とする. このとき, $s+t$ が f と h の間のホモトピーを与える. \square

命題 1.3.1. $X, Y \in C(\mathcal{C})$ に対し, $\text{Hom}_{C(\mathcal{C})}(X, Y)$ の加法部分群 $\text{Ht}(X, Y)$ を

$$(1.3.5) \quad \text{Ht}(X, Y) := \{f \in \text{Hom}_{C(\mathcal{C})}(X, Y) \mid f \simeq 0\}$$

で定める. 複体の射 $f: X \rightarrow Y$ と $g: Y \rightarrow Z$ のどちらかが 0 にホモトピックならば, 合成 $g \circ f$ は 0 にホモトピックになる. したがって, 射の合成は次の写像をひきおこす.

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{C(\mathcal{C})}(Y, Z) \times \text{Ht}(X, Y) &\rightarrow \text{Ht}(X, Z), \\ \text{Ht}(Y, Z) \times \text{Hom}_{C(\mathcal{C})}(X, Y) &\rightarrow \text{Ht}(X, Z). \end{aligned}$$

証明. $f \in \text{Hom}_{C(\mathcal{C})}(X, Y)$, $g \in \text{Hom}_{C(\mathcal{C})}(Y, Z)$ とする.

$f \simeq 0$ のとき, s を 0 とのホモトピーとすると, $g \circ f$ と 0 との間のホモトピーは

$$(g^{n-1} \circ s^n: X^n \rightarrow Y^{n-1} \rightarrow Z^{n-1})_n$$

で与えられる.

$g \simeq 0$ のとき, t を 0 とのホモトピーとすると, $g \circ f$ と 0 との間のホモトピーは

$$(t^n \circ f^n: X^n \rightarrow Y^n \rightarrow Z^{n-1})_n$$

で与えられる. \square

以上の準備のもとで, 圏 \mathcal{C} のホモトピー圏 $K(\mathcal{C})$ を次のように定める.

- 対象: $\text{Ob}(K(\mathcal{C})) = \text{Ob}(C(\mathcal{C}))$
- 射: $\text{Hom}_{K(\mathcal{C})}(X, Y) = \text{Hom}_{C(\mathcal{C})}(X, Y) / \text{Ht}(X, Y)$

$K(\mathcal{C})$ は加法圏になる.

$K(\mathcal{C})$ が加法圏になることの証明. 命題 1.3.1 より, 射の合成がきちんと定まる.

各 $X, Y \in K(\mathcal{C})$ に対する $\text{Hom}_{K(\mathcal{C})}(X, Y)$ のアーベル群構造は $\text{Ht}(X, Y)$ による剰余群の構造として得られ, さらに命題 1.3.1 より, 合成の双線型性が得られる.

零対象と複積は $C(\mathcal{C})$ と同様である. \square

圏 $K(\mathcal{C})$ の充満部分圏 $K^+(\mathcal{C})$, $K^-(\mathcal{C})$, $K^b(\mathcal{C})$ を, それぞれ $C^+(\mathcal{C})$, $C^-(\mathcal{C})$, $C^b(\mathcal{C})$ と同じ対象をとって定める.

■コホモロジー \mathcal{C} をアーベル圏とする. $X \in C(\mathcal{C})$ に対し,

$$\begin{aligned} Z^k(X) &:= \text{Ker } d_X^k, \\ B^k(X) &:= \text{Im } d_X^{k-1}, \\ H^k(X) &:= \text{Ker } d_X^k / \text{Im } d_X^{k-1} \end{aligned}$$

とおく. $H^k(X)$ を複体 X の k 次のコホモロジーという.

注意. 完全列 $0 \rightarrow X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow 0$ に対し, Z を Y の商対象といい, Y/X とかく. 一般に単射 $i: X \hookrightarrow Y$ の余核 $\text{Coker } i$ を Y/X とかける.

任意の k に対し H^k は $\mathcal{C}(\mathcal{C})$ から \mathcal{C} への加法関手を定める.

$$(1.3.6) \quad H^k(X) = H^0(X[k])$$

$f: X \rightarrow Y$ が 0 とホモトピックならば, $H^k(f): H^k(X) \rightarrow H^k(Y)$ は 0. よって H^k は $\mathcal{K}(\mathcal{C})$ から \mathcal{C} への関手を定める.

完全列たち

$$\begin{aligned} X^{k-1} &\rightarrow Z^k(X) \rightarrow H^k(X) \rightarrow 0, \\ 0 &\rightarrow H^k(X) \rightarrow \text{Coker } d_X^{k-1} \rightarrow X^{k+1}, \\ 0 &\rightarrow Z^{k-1}(X) \rightarrow X^{k-1} \rightarrow B^k(X) \rightarrow 0, \\ 0 &\rightarrow B^k(X) \rightarrow X^k \rightarrow \text{Coker } d_X^{k-1} \rightarrow 0, \\ 0 &\rightarrow H^k(X) \rightarrow \text{Coker } d_X^{k-1} \xrightarrow{d_X^k} Z^{k+1}(X) \rightarrow H^{k+1}(X) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

命題 1.3.2. $0 \rightarrow X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow 0$ を $\mathcal{C}(\mathcal{C})$ の完全列とする. このとき, \mathcal{C} における次の長完全列が存在する.

$$\cdots \rightarrow H^n(X) \rightarrow H^n(Y) \rightarrow H^n(Z) \xrightarrow{\delta} H^{n+1}(X) \rightarrow \cdots$$

■切り落とし $X \in \mathcal{C}(\mathcal{C})$ と整数 n に対し, $\tau^{\leq n}(X), \tau^{\geq n}(X) \in \mathcal{C}(\mathcal{C})$ を

$$(1.3.7) \quad \tau^{\leq n}(X): \cdots \rightarrow X^{n-2} \rightarrow X^{n-1} \rightarrow \text{Ker } d^n \rightarrow 0 \rightarrow \cdots,$$

$$(1.3.8) \quad \tau^{\geq n}(X): \cdots 0 \rightarrow \text{Coker } d^{n-1} \rightarrow X^{n+1} \rightarrow X^{n+2} \rightarrow \cdots$$

で定める. このとき, $\mathcal{C}(\mathcal{C})$ における次の射が得られる.

$$\tau^{\leq n}(X) \rightarrow X, \quad X \rightarrow \tau^{\geq n}(X),$$

また, $n' \leq n$ ならば

$$\tau^{\leq n'}(X) \rightarrow \tau^{\leq n}(X), \quad \tau^{\geq n'}(X) \rightarrow \tau^{\geq n}(X).$$

命題 1.3.3. 1. 自然な射 $H^k(\tau^{\leq n}(X)) \rightarrow H^k(X)$ は $k \leq n$ ならば同型であり, $k > n$ では $H^k(X) = 0$ である.

2. 自然な射 $H^k(X) \rightarrow H^k(\tau^{\geq n}(X))$ は $k \geq n$ ならば同型であり, $k < n$ では $H^k(X) = 0$ である.

注意 1.3.4. ホモトピー同値

1.4 写像錐

\mathcal{C} を加法圏とし $f: X \rightarrow Y$ を $C(\mathcal{C})$ の射とする.

定義 1.4.1. f の写像錐 $M(f)$ とは次で定まる $C(\mathcal{C})$ の対象である.

$$\begin{cases} M(f)^n = X^{n+1} \oplus Y^n, \\ d_{M(f)}^n = \begin{bmatrix} d_{X[1]}^n & 0 \\ f^{n+1} & d_Y^n \end{bmatrix} \end{cases}$$

射 $\alpha(f): Y \rightarrow M(f)$ と $\beta(f): M(f) \rightarrow X[1]$ を次で定める.

$$(1.4.1) \quad \alpha(f)^n = \begin{bmatrix} 0 \\ \text{id}_{Y^n} \end{bmatrix},$$

$$(1.4.2) \quad \beta(f)^n = [\text{id}_{X^{n+1}} \quad 0].$$

コメント (4/24). 「どうして逆に $X \rightarrow M(f)$ や $M(f) \rightarrow Y$ じゃないんですか？」

例えば, 逆に $\Gamma^n: M(f)^n \rightarrow Y^n$ を $\begin{bmatrix} 0 & \text{id}_{Y^n} \end{bmatrix}$ で定めようとしても,

$$\begin{aligned} \Gamma^{n+1} \circ d_{M(f)}^n &= [0 \quad \text{id}_{Y^n}] \begin{bmatrix} d_{X[1]}^n & 0 \\ f^{n+1} & d_Y^n \end{bmatrix} = [f^{n+1} \quad d_Y^n], \\ d_Y^n \circ \Gamma^n &= d_Y^n \circ [0 \quad \text{id}_{Y^n}] = [0 \quad d_Y^n] \end{aligned}$$

となり, 両者は一致しない. したがって, Γ は複体の射にならない. $X \rightarrow M(f)$ も同様である. したがって, $M(f)$ に対して定まる自然な射は α, β のようにせざるを得ない.

補題 1.4.2. 任意の $C(\mathcal{C})$ の射 $f: N \rightarrow Y$ に対し, $\phi: X[1] \rightarrow M(\alpha(f))$ で次の条件をみたすものが存在する.

1. ϕ は $K(\mathcal{C})$ で同型である,
2. 次の図式は $K(\mathcal{C})$ で可換になる :

$$\begin{array}{ccccccc} Y & \xrightarrow{\alpha(f)} & M(f) & \xrightarrow{\beta(f)} & X[1] & \xrightarrow{-f[1]} & Y[1] \\ \downarrow \text{id}_Y & & \downarrow \text{id}_{M(f)} & & \downarrow \phi & & \downarrow \text{id}_{Y[1]} \\ Y & \xrightarrow{\alpha(f)} & M(f) & \xrightarrow{\alpha(\alpha(f))} & M(\alpha(f)) & \xrightarrow{\beta(\alpha(f))} & Y[1]. \end{array}$$

2023/05/01

1.5 三角圏

\mathcal{C} を加法圏とし, $T: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ を自己関手とする. \mathcal{C} の三角とは射の列

$$X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow T(X)$$

のことである.

定義 1.5.1. 三角圏 \mathcal{C} は次のデータ (1.5.1), (1.5.2) と規則 (TR0)–(TR5) からなる.
1.5.1

データ

(1.5.1) 加法圏 \mathcal{C} と自己関手 $T: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ の組,

(1.5.2) 特三角 (distinguished triangle) の族.

規則 (TR0) 特三角に同形な三角は特三角である.

(TR1) 任意の対象 $X \in \mathcal{C}$ に対し, $X \xrightarrow{\text{id}_X} X \rightarrow 0 \rightarrow T(X)$ は特三角である.

(TR2) \mathcal{C} の任意の射 $f: X \rightarrow Y$ は特三角 $X \xrightarrow{f} Y \rightarrow Z \rightarrow T(X)$ に埋め込める.
つまり $Z \in \mathcal{C}$ で $X \xrightarrow{f} Y \rightarrow Z \rightarrow T(X)$ が特三角となるものが存在する.

(TR3) $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} T(X)$ が特三角であることと $Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} T(X) \xrightarrow{-T(f)} T(Y)$ が特三角であることは同値である.

(TR4) 2つの特三角 $X \xrightarrow{f} Y \rightarrow Z \rightarrow T(X)$, $X' \xrightarrow{f'} Y' \rightarrow Z' \rightarrow T(X')$ に対し,
可換図式

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow u & & \downarrow v \\ X' & \xrightarrow{f'} & Y' \end{array}$$

は特三角の射に埋め込める.

(TR5) (八面体公理). 3つの特三角

$$X \xrightarrow{f} Y \rightarrow Z' \rightarrow T(X),$$

$$Y \xrightarrow{g} Z \rightarrow X' \rightarrow T(Y),$$

$$X \xrightarrow{g \circ f} Z \rightarrow Y' \rightarrow T(X)$$

に対し,

1.6 圏の局所化

第 2 章

層

2.1 層の演算

2.1.1 部分集合から定まる関手

X を位相空間とする． Z を X の部分集合とし， $j: Z \hookrightarrow X$ を包含写像とする．

■制限の一般的な定義 $F \in \text{Sh}(X)$ に対し，

$$(2.1.1) \quad F|_Z := j^{-1}F,$$

$$(2.1.2) \quad \Gamma(Z; F) := \Gamma(Z; j^{-1}F)$$

とおく． Z が開集合のとき，元の定義に一致する．

元の定義に一致することのチェック． $U \subset Z$ を開集合とすると，

$$\begin{aligned} \Gamma(U; j^{-1}F) &= \varinjlim_{j(U) \subset V} F(V) \\ &= F(j(U)) = F(U) = F|_Z(U) \end{aligned}$$

となる．

□

■順像を用いた閉集合での定義 Z が閉集合であるときを考える．このとき， $F \in \text{Sh}(X)$ に対し，

$$F_Z := j_*j^{-1}F$$

とおく．

コメント 2.1.1. 池ノート [Ike21] や竹内 [Tak17] だと，固有順像 (2.1.2 項) を定義してから， $j_*j^{-1}F$ で切り落としを定義している．閉集合からの包含写像に対しては $j_! = j_*$ であり，これらの定義は一致する．

2.1.2 固有順像

$f_! : \mathrm{Sh}(X) \rightarrow \mathrm{Sh}(Y)$ について, f がプロパーなら $f_! \cong f_*$ である. つまり, コメント 2.1.1 の主張はもっと一般に f がプロパーなら成り立つ.

2.2 弱大域次元

アーベル層の圏はアーベル圏になる. したがって層の導来圏が考えられる.

$\cdot \otimes \cdot$ の導来関手を考えたいが, テンソルに関する複体が有界になるとは限らないので, 平坦分解の長さが有限になるという仮定をおく.

命題 2.2.1. A を環とする.

1. 自由加群は射影加群である.
2. 射影加群は自由加群の自由加群の直和因子である.
3. 射影加群は平坦加群である.
4. $n \geq 0$ を整数とする. 次の条件 (a)–(b)^{op} は同値である.
 - (a) 任意の $j > n$, $N \in \mathrm{Mod}(A^{\mathrm{op}})$, $M \in \mathrm{Mod}(A)$ に対し, $\mathrm{Tor}_j^A(N, M) = 0$
 - (b) 任意の $M \in \mathrm{Mod}(A)$ に対し, 分解

$$0 \rightarrow P^n \rightarrow \cdots \rightarrow P^0 \rightarrow M \rightarrow 0 \quad (P^j \text{ は平坦})$$

が存在する.

(b)^{op} 任意の $M \in \mathrm{Mod}(A^{\mathrm{op}})$ に対し, 分解

$$0 \rightarrow P^n \rightarrow \cdots \rightarrow P^0 \rightarrow M \rightarrow 0 \quad (P^j \text{ は平坦})$$

が存在する.

証明. 1. M を自由加群とする. 左 A 加群の全射 $g: N \twoheadrightarrow N'$ に対し,

$$g_*: \mathrm{Hom}_A(M, N) \rightarrow \mathrm{Hom}_A(M, N') \quad \text{in } \mathrm{Mod}(\mathbf{Z})$$

が全射であることを示す. $\psi: M \rightarrow N'$ を A 加群の射とする. I を $M \cong A^{\oplus I}$ となる添字集合とすると任意の $m \in M$ は, M の生成系 (m_i) と $(a_i)_i \in A^{\oplus I}$ を用いて, $m = \sum_{i \in I} a_i m_i$ とかける. このとき,

$$\psi(m) = \sum_i a_i \psi(m_i) \in N'$$

であり, g が全射なので, $n \in N$ で

$$g(n) = \psi(m) = \sum_i a_i \psi(m_i), \quad \psi(m_i) = g(n_i)$$

となるものがある. この $(n_i)_i$ に対して, $\phi: M \rightarrow N$ を

$$\phi(m_i) = n_i$$

で定めると,

$$(g_*(\phi))(m_i) = g \circ \phi(m_i) = g(n_i) = \psi(m_i)$$

となる.

2. P を射影加群とする. 自由加群 $A^{\oplus I}$ と全射 $p: A^{\oplus I} \twoheadrightarrow P$ が存在する. 実際, $I = P$ として, p を $p((a_x)_{x \in P}) = \sum_{x \in P} a_x x$ と定めればよい. $Q = \text{Ker } p$ とすると,

$$0 \rightarrow Q \hookrightarrow A^{\oplus I} \twoheadrightarrow P \rightarrow 0$$

は完全列である. このとき, P が射影加群であることから, id_P に対して, $u: P \rightarrow A^{\oplus I}$ で

$$p_*(u) = p \circ u = \text{id}_P$$

となる者が存在する. したがって, 上の完全列は分裂し, $A^{\oplus I} \cong P \oplus Q$ となる.

3. まず「自由 \Rightarrow 平坦」を示す. $F = A^{\oplus I}$ を自由加群とし,

$$0 \rightarrow N_1 \rightarrow N_2 \rightarrow N_3 \rightarrow 0$$

を右 A 加群の完全系列とする.

$$0 \rightarrow N_1 \otimes A^{\oplus I} \rightarrow N_2 \otimes A^{\oplus I} \rightarrow N_3 \otimes A^{\oplus I} \rightarrow 0$$

において,

$$N_1 \otimes A^{\oplus I} \cong N_1^{\oplus I}, \quad N_2 \otimes A^{\oplus I} \cong N_2^{\oplus I}$$

であり, $j: N_1 \rightarrow N_2$ は単射なので,

$$\bigoplus_{i \in I} j_i: N_1^{\oplus I} \rightarrow N_2^{\oplus I}$$

で

□

2.3 非特性変形補題

命題 2.3.1 ([KS90, Prop. 2.5.1]). X を位相空間とし, Z を部分空間とする. F を X 上の層とし, 自然な射

$$\psi: \varinjlim_{U \in I_Z} \Gamma(U; F) \rightarrow \Gamma(Z; F)$$

を考える.

- (i) ψ は単射である.
- (ii) X がハウスドルフで Z がコンパクトならば, ψ は同型である.

命題 2.3.2 ([KS90, Prop. 1.12.4]).

$$\phi_k: H^k(\varinjlim X) \rightarrow \varprojlim H^k(X_n)$$

について, $H^{i-1}(X_n)$ が ML 条件を満たすならば, ϕ_k は一対一対応である.

命題 2.3.3 ([KS90, Prop. 1.12.6]). $(X_s, \rho_{s,t})$ を実数を添字とする射影系とする.

$$\lambda_s: X_s \rightarrow \varprojlim_{r < s} X_r, \quad \mu_s: \varinjlim_{t > s} X_t \rightarrow X_s$$

がどちらも単射 (全射) ならば, すべての実数 $s_0 \leq s_1$ に対し, $\rho_{s_0, s_1}: X_{s_1} \rightarrow X_{s_0}$ は単射 (全射) となる.

命題 2.3.4 ([KS90, Prop. 2.7.2, 非特性変形補題]). X をハウスドルフ空間とし, $F \in \mathbf{D}^+(\mathbf{Z}_X)$ とする. また, $(U_t)_{t \in \mathbf{R}}$ を X の開集合の族で次の条件 (i)–(iii) をみたすものとする.

- (i) 任意の実数 t に対し, $\bigcup_{s < t} U_s = U_t$ が成り立つ.
- (ii) 任意の実数 $s \leq t$ に対し, $\overline{U_t - U_s} \cap \text{supp } F$ はコンパクト集合である.
- (iii) 実数 s に対して $Z_s = \bigcap_{t > s} \overline{U_t - U_s}$ とおくとき, 任意の実数 $s \leq t$ と任意の点 $x \in Z_s - U_t$ に対して $(\text{R}\Gamma_{X - U_t}(F))_x = 0$ が成り立つ.

このとき, 任意の実数 t に対して, 次の同型が成り立つ.

$$\text{R}\Gamma\left(\bigcup_{s \in \mathbf{R}} U_s; F\right) \xrightarrow{\sim} \text{R}\Gamma(U_t; F)$$

証明. 次の条件を考える.

$$(a)_k^s: \varinjlim_{t>s} H^k(U_t; F) \xrightarrow{\sim} H^k(U_s; F)$$

$$(b)_k^t: \varprojlim_{s<t} H^k(U_s; F) \xleftarrow{\sim} H^k(U_t; F)$$

任意の実数 s と任意の整数 k に対して $(a)_k^s$ が, 任意の実数 t と任意の整数 $k < k_0$ に対して $(b)_k^t$ が成り立つとする. このとき, k_0 に対し, $(b)_{k_0}^t$ が成り立つことを示す. 命題 2.3.3 より, $((a)_k^s$ の方が μ_s , $(b)_k^t$ の方が λ_t として) 各次数 $k < k_0$ と各実数 $s \leq t$ に対し,

$$(2.3.1) \quad H^k(U_t; F) \xrightarrow{\sim} H^k(U_s; F)$$

が成り立つ. このとき, t を固定して, 射影系 $\left(H^{k_0-1} \left(U_{t-\frac{1}{n}}; F \right) \right)_{n \in \mathbf{N}}$ を考えると, これは ML 条件をみたす.

∴) 任意の $n \in \mathbf{N}$ に対し,

$$\rho_{n,p} \left(H^{k_0-1} \left(U_{t-\frac{1}{p}}; F \right) \rightarrow H^{k_0-1} \left(U_{t-\frac{1}{n}}; F \right) \right)$$

はすべて同形なので, 当然安定.

よって, 命題 2.3.2 より $(b)_{k_0}^t$ が従う. k に関する帰納法により, どの $t \in \mathbf{R}$ と $k \in \mathbf{Z}$ に対しても $(b)_k^t$ が成り立つ.

命題 2.7.1 を $(H^k(U_n; F))_{n \in \mathbf{N}}$ に用いると←わかってない

k に関する帰納法で, 定理の結論

$$\mathrm{R}\Gamma \left(\bigcup_{s \in \mathbf{R}} U_s; F \right) \xrightarrow{\sim} \mathrm{R}\Gamma(U_t; F)$$

が従う.

$(a)_k^s$ の証明 X を $\mathrm{supp} F$ におきかえて, どの実数 $s \leq t$ に対しても $\overline{U_t - U_s}$ はコンパクトとしてよい. 次の d.t. を考える^{*1}.

$$\mathrm{R}\Gamma_{(X-U_t)}(F)|_{Z_s} \rightarrow \mathrm{R}\Gamma_{(X-U_s)}(F)|_{Z_s} \rightarrow \mathrm{R}\Gamma_{(U_t-U_s)}(F)|_{Z_s} \xrightarrow{+1}.$$

仮定 (iii) より, 左と真ん中の 2 つは 0 なので, d.t. の性質から, $\mathrm{R}\Gamma_{(U_t-U_s)}(F)|_{Z_s} = 0$ となる. したがって, 任意の $k \in \mathbf{Z}$ と $t \geq s$ に対し,

$$\begin{aligned} 0 &= H^k(Z_s; \mathrm{R}\Gamma_{(U_t-U_s)}(F)) \\ &= \varinjlim_{U \supset Z_s} H^k(U \cap U_t; \mathrm{R}\Gamma_{X-U_s}(F)) \end{aligned}$$

^{*1} [KS90, (2.6.32)] の d.t.

$$\mathrm{R}\Gamma_{Z'}(F) \rightarrow \mathrm{R}\Gamma_Z(F) \rightarrow \mathrm{R}\Gamma_{Z-Z'}(F) \xrightarrow{+1}$$

を用いる. 但し, Z は X の局所閉集合, Z' は Z の閉集合である.

となる.

$R\Gamma_{U_t-U_s}(F)$ は X 上の層で, それを Z_s に制限した $R\Gamma_{U_t-U_s}(F)|_{Z_s}$ は Z_s 上の層である. Z_s での大域切断 $R\Gamma(Z_s; R\Gamma_{U_t-U_s}(F)|_{Z_s})$ のコホモロジーをとっているので, [KS90, Notations 2.6.8] の2番目の記号を用いることになる.

Z_s はハウスドルフ空間 X のコンパクト集合 $\overline{U_t - U_s}$ の共通部分として表されているので, コンパクトである (X の置き換えがここに効いている). したがって, [KS90, Remark 2.6.9 (ii)] の場合に当てはまり, そこでの記号を用いて書くと

$$H^j(Z; F) \simeq \varinjlim_{U \in I_Z} H^j(U; F)$$

が成り立つ. これが上の式の2つ目の変形. 詳しく書くと,

$$\begin{aligned} H^k(Z_s; R\Gamma_{U_t-U_s}(F)) &= \varinjlim_{U \in I_Z} H^k(U; R\Gamma_{U_t-U_s}(F)) \\ &= \varinjlim_{U \in I_Z} H^k(U \cap U_t; R\Gamma_{X-U_s}(F)) \end{aligned}$$

ここで, 2つ目の変形は次のように考える. $U_t - U_s$ に台を持つ層の U 上の切断は $U \cap U_t$ 上で切断を考えても同じ. 台の方も, U が Z_s に十分近ければ $X - U_s$ で考えても同じ.

□

2.9 実・複素多様体上の層の例

ここで層の例をいくつか挙げる. そのうちの大部分については11章で詳しい説明を与えることにする.

2.9.1 層 \mathcal{C}_X^0

位相空間 X において, X の開集合 U に対し複素数値連続関数の空間 $C^0(U)$ を対応させ, 制限射を通常関数の制限で定めた前層は明らかに層になる. この層を \mathcal{C}_X^0 で表す. 定数層 \mathbf{Z}_X は \mathbf{Z} 値関数のなす \mathcal{C}_X^0 の部分層とみなせる.

2.9.2 層 $\mathcal{L}_{\text{loc}, dx}^1$

U をユークリッド空間 \mathbf{R}^n の開集合とし, $L^1(U; dx)$ を \mathbf{R}^n 上のルベグ測度 dx に関する U 上の可積分関数の空間とする. 前層 $U \mapsto L^1(U; dx)$ は層ではない. この前層から誘導された \mathbf{R}^n 上の層を $\mathcal{L}_{\text{loc}, dx}^1$ で表す.

2.9.3 環付き空間

環付き空間 (X, \mathcal{A}_X) とは位相空間 X に環の層 \mathcal{A}_X をあわせたものをいう。環付き空間の射 $f: (Y, \mathcal{A}_Y) \rightarrow (X, \mathcal{A}_X)$ は連続写像 $f: X \rightarrow Y$ に環の層の射 $f^{-1}\mathcal{A}_X \rightarrow \mathcal{A}_Y$ をあわせたものをいう。 A が環で \mathcal{A}_X が A 代数の層である（すなわち層の射 $A_X \rightarrow \mathcal{A}_X$ が存在する）とき、 (X, \mathcal{A}_X) を A 環付き空間と呼ぶ。

2.9.4 C^α 多様体

α を整数 $0 \leq \alpha < \infty$ または $\alpha = \omega$ とする。 \mathbf{R}^n 上の複素数値 C^α 級関数（ C^ω のとき実解析的関数）の層を $C_{\mathbf{R}^n}^\alpha$ で表す。 n 次元実 C^α 多様体 M とは、無限遠点で可算な局所コンパクト空間 M と環の層 C_M^α の組で、 \mathbf{C} 環付き空間として $(\mathbf{R}^n, C_{\mathbf{R}^n}^\alpha)$ と局所的に同型であるものをいう。

$\dim X$ （または $\dim_{\mathbf{R}} X$ ）で実多様体 X の次元を表す。文献によっては層 C_M^ω を \mathcal{A}_M で表すことも多い。

微分幾何学の基礎的な課程として Guillemin-Pollack[GP74] を挙げる。

2.9.5 向きづけ、微分形式、密度

C^0 多様体 M 上の層として、向きづけ層 or_M を考えることも必要になってくる。 or_M は \mathbf{Z}_M と局所的に同型な層であり、 M の向きが存在する場合、その向きを選ぶことと同型 $\text{or}_M \cong \mathbf{Z}_M$ を選ぶことが同義となるようなものである。 or_M については次章で詳しくしらべる。

いま、 $\alpha = \infty$ または $\alpha = \omega$ とし、 p を整数とする。 C_M^α を係数にもつ p 次微分形式の層を $C_M^{\alpha, (p)}$ とおく。また外微分を $d: C_M^{\alpha, (p)} \rightarrow C_M^{\alpha, (p+1)}$ で表す。

(x_1, \dots, x_n) が M 上の局所座標系であるとする。このとき、 p 形式 f は次の形にただ一通りに表されるのであった。

$$f = \sum_{|I|=p} f_I dx_I,$$

ここに、 $I = \{i_1, \dots, i_p\} \subset \{1, \dots, n\}$, $(i_1 < i_2 < \dots < i_p)$, $dx_I = dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$ で、 f_I は C_M^α の切断である。このとき、

$$df = \sum_{i=1}^n \sum_{|I|=p} \frac{\partial f_I}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_I$$

となるのであった。もうひとつ層を導入する。

$$\mathcal{V}_M^\alpha := C_M^{\alpha, (n)} \otimes \text{or}_M$$

$(\alpha = \infty$ または $\alpha = \omega)$ とおき、 M 上の C^α 密度の層とよぶ。

コンパクト台をもつ C^∞ 密度は積分することができる. $\int_M \cdot$ で積分写像

$$(2.9.1) \quad \int_M \cdot : \Gamma_c(M; \mathcal{V}_M^\infty) \rightarrow \mathbf{C}$$

を表す. $C_M^{\alpha, (p)}$ と \mathcal{V}_M^α は C_M^α 加群の層である.

「1 の分割」の存在から, 層 C_M^α , $C_M^{\alpha, (p)}$, \mathcal{V}_M^α は $\alpha \neq \omega$ に対しては c 柔軟であることが従う. 層 C_M^ω , $C_M^{\omega, (p)}$, \mathcal{V}_M^ω は関手 $\Gamma(M; \cdot)$ に対し非輪状, すなわち $j > 0$ に対し $H^j(M; C_M^\omega) = 0$ である. Grauert[G58] を参照.

2.9.6 分布と超関数

C^∞ 多様体 M 上にはシュワルツ分布の層 $\mathcal{D}b_M$ が自然に定まる (Schwartz[S66], de Rham[R55] を参照). $\mathcal{D}b_M$ は c 柔軟層であり, $\Gamma_c(M; \mathcal{D}b_M)$ は $\Gamma(M; \mathcal{V}_M^\infty)$ の双対位相線形空間である. ただし, $\Gamma(M; \mathcal{V}_M^\infty)$ にはフレシェ空間としての自然な位相を入れている.

C^ω 多様体 M 上にも同様に佐藤超関数の層 \mathcal{B}_M が自然に定まる (佐藤 [Sa59] を参照). \mathcal{B}_M は脆弱層であり, $\Gamma_c(M; \mathcal{B}_M)$ は $\Gamma(M; \mathcal{V}_M^\omega)$ の双対位相線形空間である. ただし, $\Gamma(M; \mathcal{V}_M^\omega)$ には DFS 空間としての自然な位相を入れている (Martineau と Schapira に詳細な解説がある). しかし, 佐藤による構成は純粋にコホモロジーによるものである. 後ほど 2.9.13 項で復習する.

積分写像 (2.9.1) はペアリング

$$(2.9.2) \quad \begin{array}{ccc} \Gamma(M; C_M^\infty) \times \Gamma_c(M; \mathcal{V}_M^\infty) & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ \downarrow \Psi & & \downarrow \Psi \\ (f, g) & \longmapsto & \int_M fg \end{array}$$

を定める. このペアリングから C_M^∞ から $\mathcal{D}b_M$ への層の射がひきおこされ, この射が単射であることも示せる. さらに, 実解析多様体 M の上では, 単射 $\Gamma(M; \mathcal{V}_M^\omega) \rightarrow \Gamma(M; \mathcal{V}_M^\infty)$ から射 $\mathcal{D}b_M \rightarrow \mathcal{B}_M$ が引き起こされ, こちらも単射であることがわかる.

分布係数の p 形式の層 $\mathcal{D}b_M^{(p)} := C_M^{\infty, (p)} \otimes_{C_M^\infty} \mathcal{D}b_M$ や超関数係数の p 形式の層 $\mathcal{B}_M^{(p)} := C_M^{\omega, (p)} \otimes_{C_M^\omega} \mathcal{B}_M$ も定義することができる. $\mathcal{D}b_M^{(p)}$ は c 柔軟層, $\mathcal{B}_M^{(p)}$ は脆弱層である.

2.9.7 ド・ラーム複体

M を C^∞ 多様体とする. ポアンカレの補題より, 系列

$$(2.9.3) \quad 0 \rightarrow \mathbf{C}_M \rightarrow C_M^{\infty, (0)} \xrightarrow{d} \cdots \rightarrow C_M^{\infty, (n)} \rightarrow 0$$

は完全である. したがって, \mathbf{C}_M は c 柔軟層のなす複体と擬同形である.

$$(2.9.4) \quad \mathbf{C}_M \xrightarrow{\text{qis}} \left(0 \rightarrow C_M^{\infty, (0)} \xrightarrow{d} \cdots \rightarrow C_M^{\infty, (n)} \rightarrow 0 \right).$$

これによってコホモロジー群 $H^j(M; \mathbf{C}_M)$ や $H_c^j(M; \mathbf{C}_M)$ を具体的に計算することができる。例えば, (2.9.4) に $\mathrm{R}\Gamma(M; \cdot)$ を適用することで, 同型

$$(2.9.5) \quad \mathrm{R}\Gamma(M; \mathbf{C}_M) \cong \left(0 \rightarrow \Gamma(M; C_M^{\infty, (0)}) \xrightarrow{d} \cdots \rightarrow \Gamma(M; C_M^{\infty, (n)}) \rightarrow 0 \right)$$

が得られる。 C_M^{∞} を $\mathcal{D}b_M$ に取り替えても同じ結果が得られる。 M が実解析的なら, C_M^{∞} を C_M^{ω} や \mathcal{B}_M に取り替えることで同じ結果が従う。しかし, C_M^{ω} は c 柔軟ではなく $\Gamma(M; \cdot)$ 非輪状でしかないので注意が必要である。他方, \mathcal{B}_M は c 柔軟であるのみならず脆弱でもあるので, これを用いて M の局所閉集合 Z に対する相対コホモロジー群 $H_Z^j(M; \mathbf{C}_M)$ を具体的に計算することができる。

複体 (2.9.3) を M のド・ラーム複体と呼ぶ。

2.9.8 複素多様体

$\mathcal{O}_{\mathbf{C}^n}$ で \mathbf{C}^n 上の正則関数のなす層を表す。 n 次元複素多様体 X は \mathbf{C} 環付き空間 (X, \mathcal{O}_X) で $(\mathbf{C}^n, \mathcal{O}_{\mathbf{C}^n})$ と局所的に同型であるものをいう。

複素多様体 X の次元を $\dim_{\mathbf{C}} X$ で表す。複素微分幾何学の基本的な概念についての参考文献として Wells を挙げる。解析幾何学のさらなる展開については Banica-Stanasila の本を勧める。

$\mathcal{O}_X^{(p)}$ で X 上の正則 p 形式のなす層を表し, ∂ で正則微分を表す。 Ω_X を次のように定めることも多い。

$$(2.9.6) \quad \Omega_X := \mathcal{O}_X^{(p)} \otimes \mathrm{or}_X$$

ただし or_X は X 上の向きづけ層である。ポアンカレの補題は正則関数係数の場合にも成り立ったので層 \mathbf{C}_M は複体

$$(2.9.7) \quad 0 \rightarrow \mathcal{O}_X^{(0)} \xrightarrow{\partial} \cdots \rightarrow \mathcal{O}_X^{(n)} \rightarrow 0$$

と擬同形である。

2.9.9 ドルボー複体

(X, \mathcal{O}_X) を複素多様体とする。 $(\overline{X}, \mathcal{O}_{\overline{X}})$ で位相空間 X に X 上の反正則関数のなす層 $\mathcal{O}_{\overline{X}}$ をあわせたものを表す。(ただし $f: X \rightarrow \mathbf{C}$ が反正則であるとは, \mathbf{C} 上の複素共役写像との合成が正則であることであつた。) 従って $(\overline{X}, \mathcal{O}_{\overline{X}})$ も複素多様体となる。

$X^{\mathbf{R}}$ で X を実解析多様体とみなしたものを表す。 $X^{\mathbf{R}}$ を $X \times \overline{X}$ の対角集合と同一視すれば, $X \times \overline{X}$ は $X^{\mathbf{R}}$ の複素化であるといえる。実際,

$$(2.9.8) \quad \mathcal{O}_{X \times \overline{X}}|_{X^{\mathbf{R}}} \cong C_{X^{\mathbf{R}}}^{\omega}$$

である。 $X \times \overline{X}$ 上で X の正則微分 ∂ と \overline{X} の $\bar{\partial}$ を考えることができる。よって, $X \times \overline{X}$ 上の微分 d は $d = \partial + \bar{\partial}$ と分解できる。この分解から層 $C_{X^{\mathbf{R}}}^{\alpha, (r)}$ ($\alpha = \infty$ または $\alpha = \omega$)

とする) の分解

$$C_{X^{\mathbf{R}}}^{\alpha,(r)} = \bigoplus_{p+q=r} C_X^{\alpha,(p,q)}$$

が引き起こされる. ただし, $C_X^{\alpha,(p,q)}$ は X 上の (p,q) 形式のなす層である. X の局所正則座標系 (z_1, \dots, z_n) において, $C_X^{\alpha,(p,q)}$ の切断 f は次の形にただ一通りに表される.

$$f = \sum_{|I|=p, |J|=q} f_{I,J} dz_I \wedge d\bar{z}_J$$

ただし, 2.9.5 項と同様に, $dz_I = dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_p}$, $d\bar{z}_J = d\bar{z}_{j_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{j_q}$ である. とくに

$$\partial f = \sum_I \sum_J \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_{I,J}}{\partial z_i} dz_i \wedge dz_I \wedge d\bar{z}_J$$

である. ドルボアの補題によれば, 複体

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_X^{(p)} \rightarrow C_X^{\infty,(p,0)} \xrightarrow{\bar{\partial}} C_X^{\infty,(p,1)} \rightarrow \dots \rightarrow C_X^{\infty,(p,n)} \rightarrow 0$$

は完全である. $C_X^{\infty,(p,q)}$ を $C_X^{\omega,(p,q)}$ や $\mathcal{D}_X^{(p,q)}$, 或いは $\mathcal{B}_X^{(p,q)}$ に取り替えた場合にも同様の結果がある. 特に $\mathcal{O}_X^{(p)}$ は脆弱層の複体

$$(2.9.9) \quad 0 \rightarrow \mathcal{B}_X^{(p,0)} \xrightarrow{\bar{\partial}} \dots \rightarrow \mathcal{B}_X^{(p,n)} \rightarrow 0$$

と擬同形である (Komatsu, Schapira を参照). この複体 (2.9.9) は入射 \mathcal{O}_X 加群の複体であることが Golovin によって示されている.

2.9.10 \mathcal{O}_X 上の演算

$f: Y \rightarrow X$ を複素多様体の間の射とする. 環付き空間の射の定義より, f は層の射 $f^{-1}\mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_Y$ をひきおこす. もうひとつ, 導来圏 $D^+(\mathbf{C}_X)$ では射

$$(2.9.10) \quad Rf_! \Omega_Y[\dim_{\mathbf{C}} Y] \rightarrow \Omega_X[\dim_{\mathbf{C}} X]$$

が定義される. この射は以下のように表される.

$n = \dim_{\mathbf{C}} X$, $m = \dim_{\mathbf{C}} Y$, $l = m - n$ とおく. 射 $f^{-1}C_X^{\infty,(m-p,m-q)} \rightarrow C_Y^{\infty,(m-p,m-q)}$ から双対性より射

$$(2.9.11) \quad f_! \mathcal{D}_Y^{(p,q)} \otimes \text{or}_Y \rightarrow \mathcal{D}_X^{(p-l,q-l)} \otimes \text{or}_X$$

が定まる. よって, (2.9.11) と Ω_Y , Ω_X のドルボア分解から (2.9.10) が誘導される.

2.9.11 \mathcal{O}_X のコホモロジー

Hörmander が \mathcal{O}_X のコホモロジーについて詳しく調べている． Ω が \mathbf{C}^n の開集合であるとする．任意の $j > 0$ に対し $H^j(\Omega; \mathcal{O}_X) = 0$ であるとき， Ω は擬凸であるという．たとえば，凸領域は擬凸であり， $n = 1$ なら，任意の領域が擬凸となる．最後の主張は次のように一般化できる．

$$(2.9.12) \quad \begin{cases} \Omega \text{ が } \mathbf{C}^n \text{ の開集合ならば, 任意の } j \geq n \text{ に対し,} \\ H^j(\Omega; \mathcal{O}_{\mathbf{C}^n}) = 0 \\ \text{が成り立つ.} \end{cases}$$

ドルボー分解と，方程式 $\sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial z_j} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} f = g$ が $\Gamma(\Omega; C_{\mathbf{R}^{2n}}^\infty)$ でいつでも解けるという事実とを用いた (2.9.12) の証明が Malgrange[1] で述べられている．

X を n 次元複素多様体とし， Z を X の局所閉部分集合とする． $x \in Z - \text{Int } Z$ ならば， $j \notin [1, n]$ に対し

$$(2.9.13) \quad H_Z^j(\mathcal{O}_X)_x = 0$$

となる．実際， $j = 0$ の場合，これは「解析接続の原理」そのものであり， $j > n$ の場合は，(2.9.12) から，或いは (2.9.9) から従う（すなわち \mathcal{O}_X の脆弱次元は n である）．

Martineau と柏原による $H_Z^j(\mathcal{O}_X)$ が消滅するための規準がある (SKK も参照)． $X = \mathbf{C}^n$ とし Z を X の部分閉凸集合とする． $x \in Z$ のとき，

$$(2.9.14) \quad \begin{cases} x \text{ を通る } d \text{ 次元アフィン空間 } L \text{ で, } L \cap Z \text{ が} \\ L \text{ における } x \text{ の近傍となるものが存在しないとき} \\ H_Z^j(\mathcal{O}_X)_x = 0 \quad \text{for } j \leq n - d. \end{cases}$$

2.9.12 正則関数の境界値

Ω を C^2 境界をもつ \mathbf{C}^n の強擬凸開部分集合とする． $\partial\Omega$ 上で局所的には，正則座標変換で Ω を \mathbf{C}^n の強凸開集合にうつすものが存在する．

$j: \Omega \hookrightarrow \bar{\Omega}$ をうめこみとする． $\bar{\Omega}$ 上で次の特三角を得る．

$$(2.9.15) \quad \mathcal{O}_X|_{\bar{\Omega}} \rightarrow \text{R}j_*\mathcal{O}_\Omega \xrightarrow{+1} \text{R}\Gamma_{\partial\Omega}(\mathcal{O}_X|_{\bar{\Omega}}) \rightarrow .$$

$H_{\partial\Omega}^0(\mathcal{O}_X|_{\bar{\Omega}}) = 0$ なので，前層 $U \mapsto H_{U \cap \partial\Omega}^1(U \cap \bar{\Omega}; \mathcal{O}_X|_{\bar{\Omega}})$ は層 $H_{\partial\Omega}^1(\mathcal{O}_X|_{\bar{\Omega}})$ と同じである．(Ex II.13) さらに， $k > 0$ に対し $\text{R}^k j_*\mathcal{O}_\Omega = 0$ なので， $k > 1$ に対し $H_{\partial\Omega}^k(\mathcal{O}_X|_{\bar{\Omega}}) = 0$ である．また，次の (2.9.16) も成り立つ．

$$(2.9.16) \quad H_{\partial\Omega}^1(\mathcal{O}_X|_{\bar{\Omega}}) \text{ は脆弱層である.}$$

(2.9.16) を証明するために、命題 2.4.10 から Ω が強凸であると仮定してよい。 U を \mathbf{C}^n の凸開部分集合とする。特三角 (2.9.15) に関し $R\Gamma(U; \cdot)$ を適用することで、

$$\Gamma(U \cap \bar{\Omega}; H_{\partial\Omega}^1(\mathcal{O}_X|_{\bar{\Omega}})) \cong \mathcal{O}_X(\Omega \cap U) / \mathcal{O}_X(\bar{\Omega} \cap U)$$

であることがわかる。実際、 $U \cap \bar{\Omega}$ が U の凸開近傍の基本系をもつことから、 $k > 0$ に対し $H^k(U \cap \bar{\Omega}; \mathcal{O}_X) = 0$ である。

ω を $\partial\Omega$ の開部分集合とする。 \mathbf{C}^n の凸開部分集合 U で、 $U \cap \bar{\Omega} = \omega$ かつ $U \cup \Omega$ が凸となるものが存在する。このとき、マイヤー・ヴィートリス列

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_X(U \cup \Omega) \rightarrow \mathcal{O}_X(U) \oplus \mathcal{O}_X(\Omega) \rightarrow \mathcal{O}_X(U \cap \Omega) \rightarrow 0$$

は完全であり、写像 $\mathcal{O}_X(\Omega) / \mathcal{O}_X(\bar{\Omega}) \rightarrow \mathcal{O}_X(\Omega \cap U) / \mathcal{O}_X(\bar{\Omega} \cap U)$ は全射である。以上で (2.9.16) が示せた。

2.9.13 佐藤超関数

M を n 次元実解析多様体とし、 X を M の複素化とする。 (X は M の近傍として一意に定まるのであった。) 佐藤超関数の層 \mathcal{B}_M を

$$(2.9.17) \quad \mathcal{B}_M := H_M^n(\mathcal{O}_X) \otimes \text{or}_{M/X}$$

で定める。ただし、 $\text{or}_{M/X} = \text{or}_M \otimes \text{or}_X$ である。 (2.9.14) により、複体 $R\Gamma_M(\mathcal{O}_X)[n]$ は次数 0 に集中しているので、

$$\mathcal{B}_M \cong R\Gamma_M(\mathcal{O}_X)[n] \otimes \text{or}_{M/X}$$

が成り立つ。層 $H_M^j(\mathcal{O}_X)$ は $j < n$ で 0 なので、 (Exercise II.13 より) 前層 $U \mapsto H_{U \cap M}^j(U; \mathcal{O}_X)$ は層になり、これは \mathcal{B}_M と等しくなる。 (\mathcal{B}_M は X 上の層であるが、これを M に制限したものと同一視することが多い。) さらに、 (2.9.12) より、 \mathcal{B}_M が脆弱層であることも従う。この層は 2.9.6 項で述べたものと一致する。 (XI 章でさらに詳しく述べる。)

2.9.14 局所定数層の例

$X = \mathbf{C}$ とし、 z を X の正則座標とする。 α を複素数とし、 P を正則微分作用素 $z \frac{\partial}{\partial z} - \alpha$ とする。 X 上の層の複体

$$(2.9.18) \quad F := 0 \rightarrow \mathcal{O}_X \xrightarrow{P} \mathcal{O}_X \rightarrow 0$$

を考える。層 $H^0(F)|_{X-\{0\}} \cong \text{Ker}(P)|_{X-\{0\}}$ は局所定数層である。実際、 $X - \{0\}$ の任意の連結かつ単連結な開集合 U の上で、 $H^0(F)|_U$ は、 z^α (の分枝) で生成される定数層 \mathbf{C}_U と同型である。しかし、 $\alpha \notin \mathbf{Z}$ の場合、 $X - \{0\}$ 上の 0 でない正則関数 f で $Pf = 0$ をみたすものは存在しないので、 $\Gamma(X - \{0\}; H^0(F)) = 0$ である。 $\alpha \in \mathbf{Z}$ に対しては以下のようなになる。

$H^0(F)|_{X-\{0\}}$: 階数 1 の局所定数層.

$$H^0(F)|_{\{0\}} = 0,$$

$$H^1(F) = 0.$$

$\alpha = 0, 1, 2, \dots$ のとき,

$$H^0(F) \cong \mathbf{C}_X,$$

$$H^1(F) = \mathbf{C}_{\{0\}}.$$

$\alpha = -1, -2, \dots$ のとき,

$$H^0(F) \cong \mathbf{C}_{X-\{0\}},$$

$$H^1(F) = 0.$$

複体 F は「偏屈層」と呼ばれるものの簡単な例になっている. このような複体については VIII 章と X 章で調べる.

第 3 章

Poincaré-Verdier 双対性

3.1 上付きびっくり

[B+84, V, 6.1] A に対し, 全射 $P \rightarrow A$ で, P が零で延長した層 R_U の直和であるものが存在する.

補題 3.1.1. [B+84, V. Proposition 6.5] $S, A \in \text{Sh}(X)$ とする. S が c 柔軟であり, S, A のどちらかは平坦であるとする. このとき, $A \otimes S$ は c 柔軟である.

証明. 完全列

$$(3.1.1) \quad 0 \rightarrow P_n \rightarrow P_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow P_0 \rightarrow A \rightarrow 0$$

で $0 \leq j \leq n-1$ に対し, P_j が層 R_U の直和となり, したがって平坦となるものがある. 系列

$$(3.1.2) \quad 0 \rightarrow P_n \otimes S \rightarrow P_{n-1} \otimes S \rightarrow \cdots \rightarrow P_0 \otimes S \rightarrow A \otimes S \rightarrow 0$$

についても, S が平坦であることから, あるいは, A が平坦であれば系列 (3.1.1) の各項が平坦となることから完全になる.

□

補題 3.1.2. [B+84, VI. Théorème 3.5] G が $K^+(Y)$ の対象ならば, $f_K^!(G)$ は $K^+(X)$ の対象である.

証明. $(U_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ を X の開集合族とする. $U = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha$, $U_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta$ とおき, 系列

$$0 \rightarrow f_K^!(G)(U) \xrightarrow{\varphi} \prod_{\alpha \in \Lambda} f_K^!(G)(U_\alpha) \xrightarrow{\psi} \prod_{(\alpha, \beta) \in \Lambda \times \Lambda} f_K^!(G)(U_{\alpha\beta})$$

を考える. ここに,

$$\begin{aligned} \varphi(s) &= (\rho_{U_\alpha, U}(s))_{\alpha \in \Lambda}, \\ \psi((s_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}) &= (\rho_{U_{\alpha\beta}, U_\alpha}(s_\alpha) - \rho_{U_{\alpha\beta}, U_\beta}(s_\beta))_{(\alpha, \beta) \in \Lambda \times \Lambda} \end{aligned}$$

である. この系列が完全であることを示す.

□

3.1.1 構成

X, Y を局所コンパクト空間とし, $f: Y \rightarrow X$ を連続写像とする. A を大域次元が有限な可換環とする. $F \in \mathbf{D}^+(A_X), G \in \mathbf{D}^+(A_Y)$ とする.

$Rf_!: \mathbf{D}^+(A_Y) \rightarrow \mathbf{D}^+(A_X)$ の右随伴関手 $f^!: \mathbf{D}^+(A_X) \rightarrow \mathbf{D}^+(A_Y)$ を構成する. まず, 開集合 $V \subset Y$ に対し, $f^!F$ の V 上の切断に関する条件を見てみる.

$$R\Gamma(V; f^!F) = R\mathrm{Hom}_{A_Y}(A_V, f^!F) = R\mathrm{Hom}_{A_X}(Rf_!A_V, F)$$

となることから, $f^!F$ は $V \mapsto R\mathrm{Hom}_{A_X}(Rf_!A_V, F)$ という対応でなければならない. $Rf_!$ を計算するには c 柔軟分解 $A_V \sim K$ を取ればよく, さらに F が入射的であれば,

$$R\mathrm{Hom}_{A_X}(Rf_!A_V, F) = \mathrm{Hom}_{A_X}(f_!K_V, F)$$

となって, 結局

$$R\Gamma(V; f^!F) = \mathrm{Hom}_{A_X}(f_!K_V, F)$$

とできる.

■ f に関する仮定

定義 3.1.3. Y 上の層 G が f 柔軟であるとは, 各点 $x \in X$ に対し, $G|_{f^{-1}(x)}$ が c 柔軟であることをいう.

G が f 柔軟であることと, 任意の開部分集合 $V \subset Y$ と $j \neq 0$ に対し, $R^j f_! G_V = 0$ となることと同値である.

次を仮定する.

$$(3.1.3) \quad f_!: \mathrm{Mod}(\mathbf{Z}_Y) \rightarrow \mathrm{Mod}(\mathbf{Z}_X) \text{ のコホモロジー次元は有限である.}$$

つまり, 整数 $r \geq 0$ で, 全ての $j > r$ に対し $R^j f_! = 0$ となるものが存在する. (3.1.3) は次の条件と同値である.

$$(3.1.4) \quad \begin{cases} \text{任意の } G \in \mathrm{Sh}(Y) \text{ に対し, 完全列} \\ 0 \rightarrow G \rightarrow G^0 \rightarrow \cdots \rightarrow G^r \rightarrow 0 \\ \text{で, どの } G^j \text{ も } f \text{ 柔軟であるものが存在する.} \end{cases}$$

$$(3.1.4') \quad \begin{cases} \text{完全列 } G^0 \rightarrow \cdots \rightarrow G^r \rightarrow 0 \\ \text{において, } j < r \text{ に対し } G^j \text{ が } f \text{ 柔軟ならば,} \\ G^r \text{ が } f \text{ 柔軟となる.} \end{cases}$$

$f_!$ のコホモロジー次元が $\leq r$ となるのは, 任意の $x \in X$ に対し, $\Gamma_c(f^{-1}(x); \cdot)$ のコホモロジー次元が $\leq r$ となるときである. 実際, $f_!|_{f^{-1}(x)} F = \Gamma_c(f^{-1}(x); F) = 0$ となるので.

■構成 以上の仮定は,

$$\mathrm{R}\Gamma(V; f^!F) = \mathrm{Hom}_{A_X}(f_!K_V, F)$$

の構成をするためだった. $f_!K_V$ の分解をしたくて, その長さが有限になるという仮定である.

さて, K を \mathbf{Z}_Y 加群, F を A_X 加群とする. このとき, A 加群の前層 $f_K^!F$ を次で定める. $V \in \mathrm{Open}(Y)$ に対し,

$$(f_K^!F)(V) := \mathrm{Hom}_{A_X} \left(f_! \left(A_Y \otimes_{\mathbf{Z}_Y} K_V \right), F \right)$$

とする. 制限射は $K_{V'} \rightarrow K_V$ から引き起こされるもの.

補題 3.1.4. K を平坦かつ f 柔軟な \mathbf{Z}_Y 加群とする.

- (i) Y 上の任意の層 G に対し $G \otimes_{\mathbf{Z}_Y} K$ は f 柔軟である.
- (ii) $G \mapsto f_!(G \otimes_{\mathbf{Z}_Y} K)$ は $\mathrm{Mod}(\mathbf{Z}_Y)$ から $\mathrm{Mod}(\mathbf{Z}_X)$ への完全関手である.

証明. (i) Y 上の任意の層 G は分解

$$\rightarrow G^{-r} \rightarrow \cdots \rightarrow G^0 \rightarrow G \rightarrow 0$$

で, 各 G^j が \mathbf{Z}_Y の直和となるものが存在する. □

aa

参考文献

- [B+84] Borel, *Intersection Cohomology*, Progress in Mathematics, 50, Birkhäuser, 1984.
- [G58] Grauert, *On Levi's problem and the embedding of real analytic manifolds*, Ann. Math. 68, 460–472 (1958).
- [GP74] Victor Guillemin, Alan Pollack, *Differential Topology*, Prentice-Hall, 1974.
- [KS90] Masaki Kashiwara, Pierre Schapira, *Sheaves on Manifolds*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 292, Springer, 1990.
- [KS06] Masaki Kashiwara, Pierre Schapira, *Categories and Sheaves*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 332, Springer, 2006.
- [R55] de Rham, *Variétés différentiables*, Hermann, Paris, 1955.
- [Sa59] Mikio Sato, *Theory of Hyperfunctions*, 1959–60.
- [S66] Schwartz, *Théorie de distributions*, Hermann, Paris, 1966.
- [Sh16] 志甫淳, 層とホモロジー代数, 共立出版, 2016.
- [Ike21] 池祐一, 超局所層理論概説, 2021.
- [Tak17] 竹内潔, \mathcal{D} 加群, 共立出版, 2017.