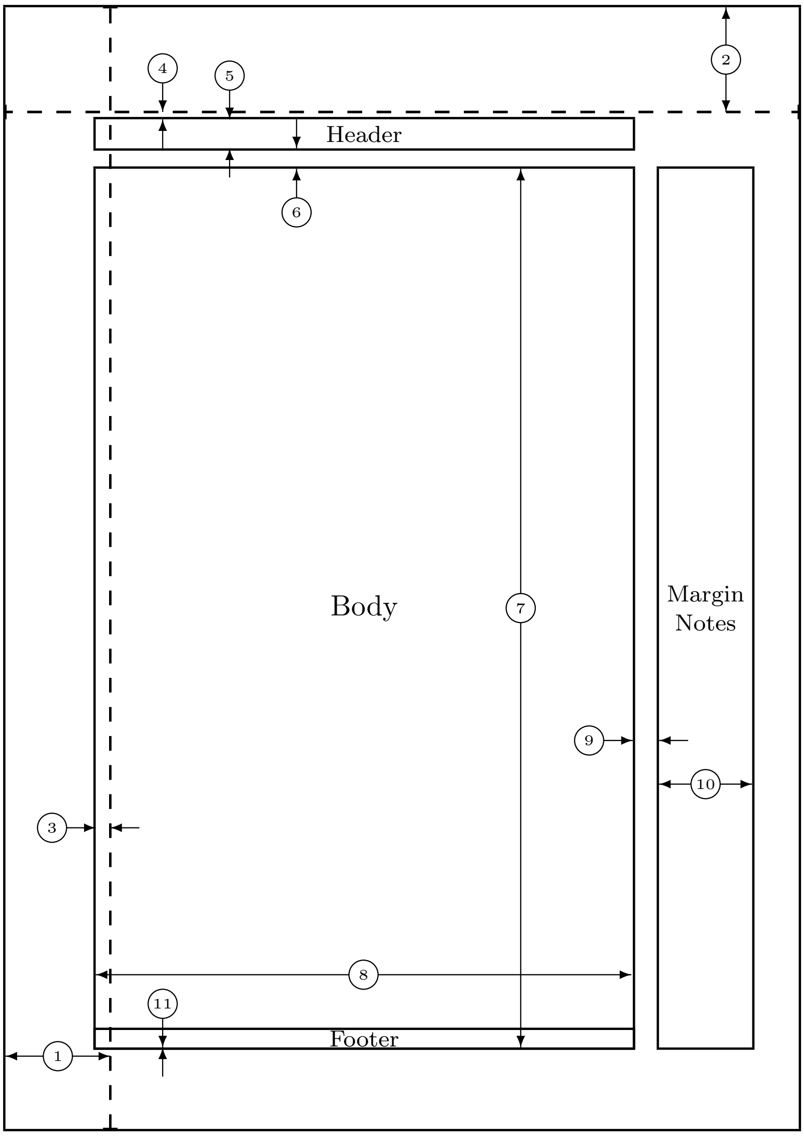
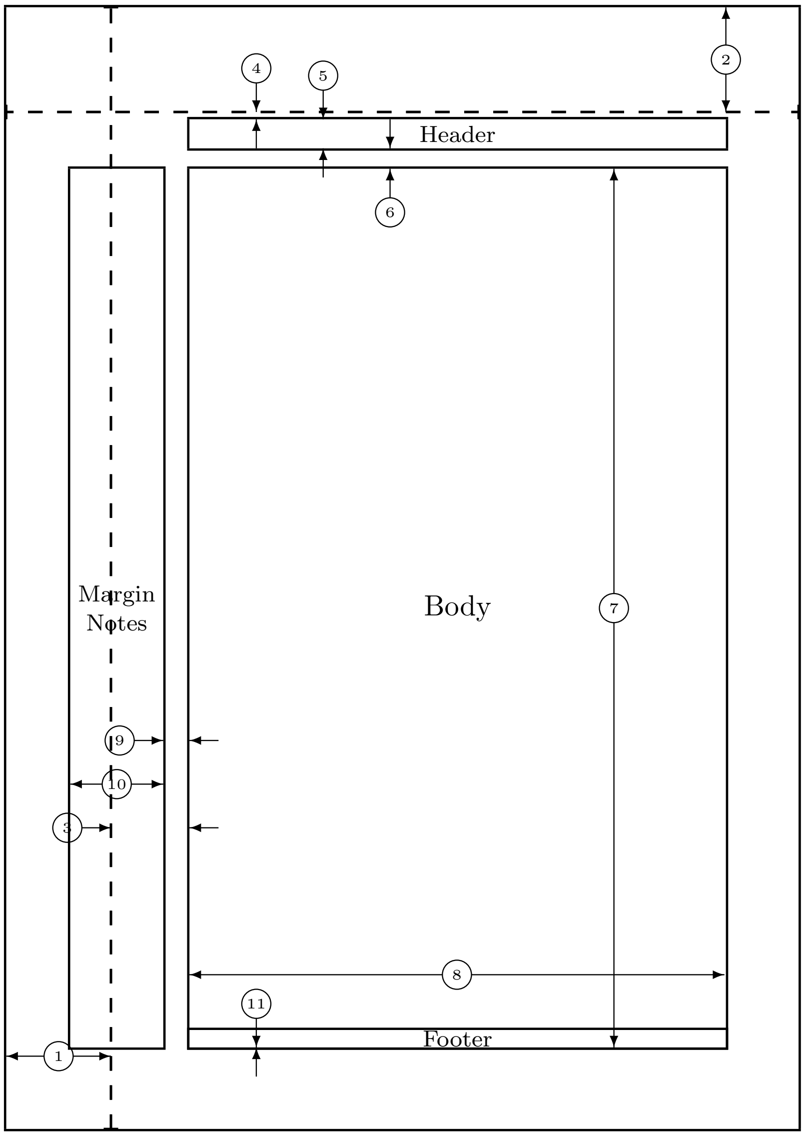
Notes on Sheaves on Manifolds

大柴寿浩



1	one inch + \hoffset	2	one inch + \voffset
3	\oddsidemargin = -10pt	4	\topmargin = 5pt
5	\headheight = 20pt	6	\headsep = 14pt
7	\textheight = 604pt	8	\textwidth = 369pt
9	\marginparsep = 18pt	10	\marginparwidth = 64pt
11	\footskip = 0pt		\marginparpush = 16pt (not shown)
	\hoffset = 0pt		\voffset = 0pt
	\paperwidth = 545pt		\paperheight = 771pt



1	one inch + \hoffset	2	one inch + \voffset
3	\evensidemargin = 54pt	4	\topmargin = 5pt
5	\headheight = 20pt	6	\headsep = 14pt
7	\textheight = 604pt	8	\textwidth = 369pt
9	\marginparsep = 18pt	10	\marginparwidth = 64pt
11	\footskip = 0pt		\marginparpush = 16pt (not shown)
	\hoffset = 0pt		\voffset = 0pt
	\paperwidth = 545pt		\paperheight = 771pt

はじめに

2023 年度から始めた [KS90] のセミナーのノート．

記号

次の記号は断りなく使う．

- 添字：なんらかの族 $(a_i)_{i\in I}$ を $(a_i)_i$ とか (a_i) と略記することがある．
- 近傍：位相空間 X の点 x や部分集合 Z に対し，その開近傍系をそれぞれ I_x や I_Z で表す．これらは，包含関係の逆で有向順序集合をなす．

第 1 章

ホモロジー代数

1.3　複体の圏

$\mathcal{C}$ を加法圏とする．

注意． 加法圏とは次の 3 つの条件 (1)–(3) をみたす圏のことである．

(1) どの対象 $X, Y \in \mathcal{C}$ に対しても $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ が加法群になり，どの対象 $X, Y, Z \in \mathcal{C}$ に対しても合成 $\circ\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z)$ が双線型である．

(2) 零対象 $0 \in \mathcal{C}$ が存在する．さらに $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(0, 0) = 0$ が成り立つ．

(3) 任意の対象 $X, Y \in \mathcal{C}$ に対して積と余積が存在し，さらにそれらは同型になる．（それらを複積といい $X \oplus Y$ とかく．）

圏 $\mathcal{C}$ から，$\mathcal{C}$ の対象の複体の圏 $\mathrm{C}(\mathcal{C})$ を作ることができる．まず複体の定義をする．圏 $\mathcal{C}$ の対象のと射の列

$$\cdots \longrightarrow X^{n-1} \xrightarrow{d_X^{n-1}} X^n \xrightarrow{d_X^n} X^{n+1} \longrightarrow \cdots \tag{1.3.1}$$

を考える．この列 $X = ((X^n)_{n\in\mathbf{Z}}, (d_X^n)_{n\in\mathbf{Z}})$ が**複体** (complex) であるとは，任意の $n \in \mathbf{Z}$ に対し

$$d_X^{n+1} \circ d_X^n = 0 \tag{1.3.2}$$

が成り立つことをいう．

圏 $\mathcal{C}$ の対象の複体 $X = ((X^n), (d_X^n))$, $Y = ((Y^n), (d_Y^n))$ の間の射を，$\mathcal{C}$ の射の族 $(f^n\colon X^n \to Y^n)_{n\in\mathbf{Z}}$ で，図式

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & X^n \arrow[r, "d_X^n"] \arrow[d, "f^n"] & X^{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "f^{n+1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & Y^n \arrow[r, "d_Y^n"] & Y^{n+1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

を可換にする，すなわちどの番号 $n \in \mathbf{Z}$ に対しても

$$d_Y^n \circ f^n = f^{n+1} \circ d_X^n \tag{1.3.3}$$

が成り立つものとして定める．

以上の準備のもとで，$\mathcal{C}$ の複体の圏 $\mathrm{C}(\mathcal{C})$ を次のように定める．

- 対象：$\mathrm{Ob}(\mathrm{C}(\mathcal{C})) = \{\mathcal{C}$ の複体 $\}$
- 射：$\mathrm{Hom}_{\mathrm{C}(\mathcal{C})}(X, Y) = \{\mathcal{C}$ の複体の射 $\}$

このとき，$\mathrm{C}(\mathcal{C})$ は加法圏になる．

圏になることの証明． $f\colon X \to Y$ と $g\colon Y \to Z$ を $\mathrm{C}(\mathcal{C})$ の射とする．f と g の合成 $g \circ f$ は $(g^n \circ f^n)_n$ で与えられる．これがうまくいくことは

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & X^n \arrow[r, "d_X^n"] \arrow[d, "f^n"] & X^{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "f^{n+1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & Y^n \arrow[r, "d_Y^n"] \arrow[d, "g^n"] & Y^{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "g^{n+1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & Z^n \arrow[r, "d_Z^n"] & Z^{n+1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

が可換になることからわかる．

X の恒等射は $(\mathrm{id}_{X^n})_n$ で与えられる．　□

加法圏になることの証明． X と Y を $\mathcal{C}$ の複体とする．

(1) 射の集合のアーベル群構造　$f, g \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{C}(\mathcal{C})}(X, Y)$ に対し，$f + g$ が $(f^n + g^n)_n$ で定まる．

(2) 零対象の存在　$\mathrm{C}(\mathcal{C})$ の零対象 0 は

$$\cdots \to 0 \xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{0} 0 \to \cdots$$

で与えられる．

(3) 複積の存在　X と Y の複積 $X \oplus Y$ は

$$\cdots \longrightarrow X^{n-1} \oplus Y^{n-1} \xrightarrow{d_X^{n-1} \oplus d_Y^{n-1}} X^n \oplus Y^n \xrightarrow{d_X^n \oplus d_Y^n} X^{n+1} \oplus Y^{n+1} \longrightarrow \cdots$$

で与えられる．　□

さらに $\mathcal{C}$ がアーベル圏ならば，$\mathrm{C}(\mathcal{C})$ もアーベル圏になる．

注意． 加法圏 $\mathcal{C}$ がアーベル圏であるとは次の条件 (4), (5) をみたすことをいう．

(4) 任意の $\mathcal{C}$ の射 $f\colon X \to Y$ に対し，f の核 $\mathrm{Ker}\, f$ と余核 $\mathrm{Coker}\, f$ が存在する．

(5) 任意の $\mathcal{C}$ の射 $f\colon X \to Y$ に対し，自然に定まる射 $\mathrm{Coim}\, f \to \mathrm{Im}\, f$ は同型である．

証明． X と Y を $\mathcal{C}$ の複体とする．

(4) **核と余核の存在**　複体の射 $f\colon X \to Y$ に対し, 核 $\operatorname{Ker} f$ は $(\operatorname{Ker} f^n)_n$ で, 余核 $\operatorname{Coker} f$ は $(\operatorname{Coker} f^n)_n$ で与えられる.

コメント (4/24)．「$\operatorname{Ker} f$ の differential の構成はどうなっていますか？」

次の図式を考える.

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \operatorname{Ker} f^n \arrow[r, "\overline{d}_X^n"] \arrow[d, "\iota^n"] & \operatorname{Ker} f^{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "\iota^{n+1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & X^n \arrow[r, "d_X^n"] \arrow[d, "f^n"] & X^{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "f^{n+1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & Y^n \arrow[r, "d_Y^n"] & Y^{n+1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

ここで，ι^n は $\operatorname{Ker} f^n$ の普遍性から自然に定まる射である．$\overline{d}_X^n\colon \operatorname{Ker} f^n \to \operatorname{Ker} f^{n+1}$ が $d_X^n \circ \iota^n$ によって定められることを示せば良い.

$$f^{n+1} \circ d_X^n \circ \iota^n = d_Y^n \circ f^{n+1} \circ \iota^n = d_Y^n \circ 0 = 0$$

より，$d_X^n \circ \iota^n$ は $\operatorname{Ker} f^{n+1}$ に値を取る．したがって，$\overline{d}_X^n\colon \operatorname{Ker} f^n \to \operatorname{Ker} f^{n+1}$ が定まる.

(5) **余像と像が同型になること**　各次数 n ごとに $\operatorname{Coim} f^n \cong \operatorname{Im} f^n$ が成り立つことから従う. □

圏 $\mathrm{C}(\mathcal{C})$ の充満部分圏 $\mathrm{C}^+(\mathcal{C})$, $\mathrm{C}^-(\mathcal{C})$, $\mathrm{C}^{\mathrm{b}}(\mathcal{C})$ を

$$\begin{aligned}
\operatorname{Ob}(\mathrm{C}^+(\mathcal{C})) &= \left\{0 \to X^n \xrightarrow{d_X^n} X^{n+1} \to \cdots \quad (n \ll 0)\right\}, \\
\operatorname{Ob}(\mathrm{C}^-(\mathcal{C})) &= \left\{\cdots \to X^{n-1} \xrightarrow{d_X^{n-1}} X^n \to 0 \quad (n \gg 0)\right\}, \\
\operatorname{Ob}(\mathrm{C}^{\mathrm{b}}(\mathcal{C})) &= \{0 \to X^n \to \cdots \to X^m \to 0 \quad (n \ll 0, m \gg 0)\}
\end{aligned}$$

で定める.

$\mathcal{C}$ の対象 X に対し $\mathrm{C}(\mathcal{C})$ の対象

$$\cdots \to 0 \to X \to 0 \to \cdots$$

を対応させることによって，忠実充満な関手 $\mathcal{C} \hookrightarrow \mathrm{C}(\mathcal{C})$ が定まる.

k を整数とする．$\mathcal{C}$ の複体

$$X\colon \cdots \longrightarrow X^{n-1} \xrightarrow{d_X^{n-1}} X^n \xrightarrow{d_X^n} X^{n+1} \longrightarrow \cdots$$

に対し，$X[k]$ を $X[k]^n = X^{n+k}$, $d_{X[k]}^n = (-1)^k d_X^{n+k}$ で定める．図式でかくと

$$X[k]\colon \cdots \longrightarrow X^{n+k-1} \xrightarrow{(-1)^k d_X^{n+k-1}} X^{n+k} \xrightarrow{(-1)^k d_X^{n+k}} X^{n+k+1} \longrightarrow \cdots$$

のようになる．X から Y への射 $f\colon X \to Y$ に対し，$f[k]\colon X[k] \to Y[k]$ を $f[k]^n = f^{n+k}$ で定める．X を $X[k]$ に対応させることで関手 $[k]\colon \mathrm{C}(\mathcal{C}) \to \mathrm{C}(\mathcal{C})$ が定まる．この関手を次数 k のシフト関手と呼ぶ.

$[k]$ **が関手になることの証明.** $X[k]$ が複体になること：

$$(-1)^k d_X^{n+k} \circ (-1)^k d_X^{n+k-1} = (-1)^{2k} d_X^{n+k} \circ d_X^{n+k-1} = 0.$$

$f[k]$ が複体の射になること：

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & X^{n+k} \arrow[r, "(-1)^k d_X^{n+k}"] \arrow[d, "f^{n+k}"] & X^{n+k+1} \arrow[r] \arrow[d, "f^{n+k+1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & Y^{n+k} \arrow[r, "(-1)^k d_Y^{n+k}"] & Y^{n+k+1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

が可換になることを示せばよい.

$$f^{n+k+1} \circ (-1)^k d_X^{n+k+1} = (-1)^k f^{n+k+1} \circ d_X^{n+k+1} = (-1)^k d_Y^{n+k+1} \circ f^{n+k}.$$

$[k]$ が合成を保つこと：$f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$ を複体の射とする．このとき

$$(g[k] \circ f[k])^n = g[k]^n \circ f[k]^n = g^{n+k} \circ f^{n+k} = (g \circ f)^{n+k} = (g \circ f)[k]^n$$

が成り立つ.

$[k]$ が恒等射を保つこと：$\mathrm{id}_X[k]^n = \mathrm{id}_X^{n+k} = \mathrm{id}_{X[k]}^n$. □

■ホモトピー　$\mathcal{C}$ の複体の圏 $\mathrm{C}(\mathcal{C})$ から，ホモトピックな射を同一視することによって，新たな圏 $\mathrm{K}(\mathcal{C})$ が得られる．まず準備.

$\mathrm{C}(\mathcal{C})$ を圏 $\mathcal{C}$ の複体の圏とする．$X, Y \in \mathrm{C}(\mathcal{C})$ とする．$f\colon X \to Y$ が 0 にホモトピックであるとは，$\mathcal{C}$ の射の族 $(s^n\colon X^n \to Y^{n-1})$ で，

$$f^n = d_Y^{n-1} \circ s^n + s^{n+1} \circ d_X^n \quad (n \in \mathbf{Z}) \tag{1.3.4}$$

となるものが存在することをいう.

$f, g\colon X \to Y$ に対し，$f - g$ が 0 にホモトピックであるとき，f と g はホモトピックであるといい，$f \simeq g$ とかく．f が 0 とホモトピックであることを $f \simeq 0$ で表す．このとき $s = (s^n)$ を f と g の間のホモトピーという．$\simeq$ は同値関係である.

証明. f, g, h を X から Y への $\mathcal{C}$ の複体の射とする.

反射律　$(s^n = 0)$ が f と f の間のホモトピーを与える.

対称律　f と g の間のホモトピーを s とするとき，$-s$ が g と f の間のホモトピーを与える.

推移律　f と g の間のホモトピーを s, g と h の間のホモトピーを t とする．このとき，$s + t$ が f と h の間のホモトピーを与える. □

命題 1.3.1. $X, Y \in \mathrm{C}(\mathcal{C})$ に対し，$\mathrm{Hom}_{\mathrm{C}(\mathcal{C})}(X, Y)$ の加法部分群 $\mathrm{Ht}(X, Y)$ を

$$\mathrm{Ht}(X, Y) \coloneqq \{ f \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{C}(\mathcal{C})}(X, Y) \mid f \simeq 0 \} \tag{1.3.5}$$

で定める．複体の射 $f\colon X \to Y$ と $g\colon Y \to Z$ のどちらかが 0 にホモトピックならば，合成 $g \circ f$ は 0 にホモトピックになる．したがって，射の合成は次の写像をひきおこす．

$$\begin{aligned}&\mathrm{Hom}_{\mathrm{C}(\mathcal{C})}(Y,Z) \times \mathrm{Ht}(X,Y) \to \mathrm{Ht}(X,Z),\\&\mathrm{Ht}(Y,Z) \times \mathrm{Hom}_{\mathrm{C}(\mathcal{C})}(X,Y) \to \mathrm{Ht}(X,Z).\end{aligned}$$

証明． $f \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{C}(\mathcal{C})}(X,Y)$, $g \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{C}(\mathcal{C})}(Y,Z)$ とする．

$f \simeq 0$ のとき，s を 0 とのホモトピーとすると，$g \circ f$ と 0 との間のホモトピーは

$$(g^{n-1} \circ s^n\colon X^n \to Y^{n-1} \to Z^{n-1})_n$$

で与えられる．

$g \simeq 0$ のとき，t を 0 とのホモトピーとすると，$g \circ f$ と 0 との間のホモトピーは

$$(t^n \circ f^n\colon X^n \to Y^n \to Z^{n-1})_n$$

で与えられる．□

以上の準備のもとで，圏 $\mathcal{C}$ のホモトピー圏 $\mathrm{K}(\mathcal{C})$ を次のように定める．

- 対象：$\mathrm{Ob}(\mathrm{K}(\mathcal{C})) = \mathrm{Ob}(\mathrm{C}(\mathcal{C}))$
- 射：$\mathrm{Hom}_{\mathrm{K}(\mathcal{C})}(X,Y) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{C}(\mathcal{C})}(X,Y)/\,\mathrm{Ht}(X,Y)$

$\mathrm{K}(\mathcal{C})$ は加法圏になる．

$\mathrm{K}(\mathcal{C})$ が加法圏になることの証明． 命題 1.3.1 より，射の合成がきちんと定まる．

各 $X, Y \in \mathrm{K}(\mathcal{C})$ に対する $\mathrm{Hom}_{\mathrm{K}(\mathcal{C})}(X,Y)$ のアーベル群構造は $\mathrm{Ht}(X,Y)$ による剰余群の構造として得られ，さらに命題 1.3.1 より，合成の双線型性が得られる．

零対象と複積は $\mathrm{C}(\mathcal{C})$ と同様である．□

圏 $\mathrm{K}(\mathcal{C})$ の充満部分圏 $\mathrm{K}^+(\mathcal{C})$, $\mathrm{K}^-(\mathcal{C})$, $\mathrm{K}^{\mathrm{b}}(\mathcal{C})$ を，それぞれ $\mathrm{C}^+(\mathcal{C})$, $\mathrm{C}^-(\mathcal{C})$, $\mathrm{C}^{\mathrm{b}}(\mathcal{C})$ と同じ対象をとって定める．

■コホモロジー　$\mathcal{C}$ をアーベル圏とする．$X \in \mathrm{C}(\mathcal{C})$ に対し，

$$\begin{aligned}Z^k(X) &\coloneqq \mathrm{Ker}\, d_X^k,\\B^k(X) &\coloneqq \mathrm{Im}\, d_X^{k-1},\\H^k(X) &\coloneqq \mathrm{Ker}\, d_X^k/\,\mathrm{Im}\, d_X^{k-1}\end{aligned}$$

とおく．$H^k(X)$ を複体 X の k 次のコホモロジーという．

注意． 完全列 $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ に対し，Z を Y の商対象といい，Y/X とかく．一般に単射 $i\colon X \hookrightarrow Y$ の余核 $\mathrm{Coker}\, i$ を Y/X とかける．

任意の k に対し H^k は $\mathrm{C}(\mathcal{C})$ から $\mathcal{C}$ への加法関手を定める．

$$H^k(X) = H^0(X[k]) \tag{1.3.6}$$

$f\colon X \to Y$ が 0 とホモトピックならば，$H^k(f)\colon H^k(X) \to H^k(Y)$ は 0. よって H^k は $\mathrm{K}(\mathcal{C})$ から $\mathcal{C}$ への関手を定める．

完全列たち

$$\begin{aligned}
&X^{k-1} \to Z^k(X) \to H^k(X) \to 0,\\
&0 \to H^k(X) \to \operatorname{Coker} d_X^{k-1} \to X^{k+1},\\
&0 \to Z^{k-1}(X) \to X^{k-1} \to B^k(X) \to 0,\\
&0 \to B^k(X) \to X^k \to \operatorname{Coker} d_X^{k-1} \to 0,\\
&0 \to H^k(X) \to \operatorname{Coker} d_X^{k-1} \xrightarrow{d_X^k} Z^{k+1}(X) \to H^{k+1}(X) \to 0.
\end{aligned}$$

命題 1.3.2. $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ を $\mathrm{C}(\mathcal{C})$ の完全列とする．このとき，$\mathcal{C}$ における次の長完全列が存在する．

$$\cdots \to H^n(X) \to H^n(Y) \to H^n(Z) \xrightarrow{\delta} H^{n+1}(X) \to \cdots.$$

■切り落とし　$X \in \mathrm{C}(\mathcal{C})$ と整数 n に対し，$\tau^{\leqq n}(X), \tau^{\geqq n}(X) \in \mathrm{C}(\mathcal{C})$ を

$$\tau^{\leqq n}(X)\colon \cdots \to X^{n-2} \to X^{n-1} \to \operatorname{Ker} d^n \to 0 \to \cdots, \tag{1.3.7}$$

$$\tau^{\geqq n}(X)\colon \cdots 0 \to \operatorname{Coker} d^{n-1} \to X^{n+1} \to X^{n+2} \to \cdots \tag{1.3.8}$$

で定める．このとき，$\mathrm{C}(\mathcal{C})$ における次の射が得られる．

$$\tau^{\leqq n}(X) \to X, \quad X \to \tau^{\geqq n}(X),$$

また，$n' \leqq n$ ならば

$$\tau^{\leqq n'}(X) \to \tau^{\leqq n}(X), \quad \tau^{\geqq n'}(X) \to \tau^{\geqq n}(X).$$

命題 1.3.3.

1. 自然な射 $H^k(\tau^{\leqq n}(X)) \to H^k(X)$ は $k \leqq n$ ならば同型であり，$k > n$ では $H^k(X) = 0$ である．
2. 自然な射 $H^k(X) \to H^k(\tau^{\geqq n}(X))$ は $k \geqq n$ ならば同型であり，$k < n$ では $H^k(X) = 0$ である．

注意 1.3.4. ホモトピー同値

1.4　写像錐

$\mathcal{C}$ を加法圏とし $f\colon X \to Y$ を $\mathrm{C}(\mathcal{C})$ の射とする．

定義 1.4.1. f の写像錐 $M(f)$ とは次で定まる $\mathrm{C}(\mathcal{C})$ の対象である．

$$\begin{cases} M(f)^n = X^{n+1} \oplus Y^n, \\ d^n_{M(f)} = \begin{bmatrix} d^n_{X[1]} & 0 \\ f^{n+1} & d^n_Y \end{bmatrix} \end{cases}$$

射 $\alpha(f)\colon Y \to M(f)$ と $\beta(f)\colon M(f) \to X[1]$ を次で定める．

$$\alpha(f)^n = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathrm{id}_{Y^n} \end{bmatrix}, \tag{1.4.1}$$

$$\beta(f)^n = \begin{bmatrix} \mathrm{id}_{X^{n+1}} & 0 \end{bmatrix}. \tag{1.4.2}$$

コメント (4/24)**.** 「どうして逆に $X \to M(f)$ や $M(f) \to Y$ じゃないんですか？」

例えば，逆に $\Gamma^n\colon M(f)^n \to Y^n$ を $\begin{bmatrix} 0 & \mathrm{id}_{Y^n} \end{bmatrix}$ で定めようとしても，

$$\begin{aligned} \Gamma^{n+1} \circ d^n_{M(f)} &= \begin{bmatrix} 0 & \mathrm{id}_{Y^n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d^n_{X[1]} & 0 \\ f^{n+1} & d^n_Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f^{n+1} & d^n_Y \end{bmatrix}, \\ d^n_Y \circ \Gamma^n &= d^n_Y \circ \begin{bmatrix} 0 & \mathrm{id}_{Y^n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & d^n_Y \end{bmatrix} \end{aligned}$$

となり，両者は一致しない．したがって，Γ は複体の射にならない．$X \to M(f)$ も同様である．したがって，$M(f)$ に対して定まる自然な射は α, β のようにせざるを得ない．

補題 1.4.2. 任意の $\mathrm{C}(\mathcal{C})$ の射 $f\colon N \to Y$ に対し，$\phi\colon X[1] \to M(\alpha(f))$ で次の条件をみたすものが存在する．

1. ϕ は $\mathrm{K}(\mathcal{C})$ で同型である，
2. 次の図式は $\mathrm{K}(\mathcal{C})$ で可換になる：

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "\alpha(f)"] \arrow[d, "\mathrm{id}_Y"] & M(f) \arrow[r, "\beta(f)"] \arrow[d, "\mathrm{id}_{M(f)}"] & X[1] \arrow[r, "-f[1]"] \arrow[d, "\phi"] & Y[1] \arrow[d, "\mathrm{id}_{Y[1]}"] \\ Y \arrow[r, "\alpha(f)"] & M(f) \arrow[r, "\alpha(\alpha(f))"] & M(\alpha(f)) \arrow[r, "\beta(\alpha(f))"] & Y[1]. \end{tikzcd}$$

2023/05/01

1.5　三角圏

$\mathcal{C}$ を加法圏とし，$T\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ を自己関手とする．$\mathcal{C}$ の三角とは射の列

$$X \to Y \to Z \to T(X)$$

のことである．

定義 1.5.1. 三角圏 $\mathcal{C}$ は次のデータ (1.5.1), (1.5.2) と規則 (TR0)–(TR5) からなる．1.5.1

データ

$$\text{加法圏 } \mathcal{C} \text{ と自己関手 } T\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C} \text{ の組,} \tag{1.5.1}$$

$$\text{特三角 (distinguished triangle) の族.} \tag{1.5.2}$$

規則 (TR0) 特三角に同形な三角は特三角である．

(TR1) 任意の対象 $X \in \mathcal{C}$ に対し，$X \xrightarrow{\mathrm{id}_X} X \longrightarrow 0 \longrightarrow T(X)$ は特三角である．

(TR2) $\mathcal{C}$ の任意の射 $f\colon X \to Y$ は特三角 $X \xrightarrow{f} Y \to Z \to T(X)$ に埋め込める．つまり $Z \in \mathcal{C}$ で $X \xrightarrow{f} Y \to Z \to T(X)$ が特三角となるものが存在する．

(TR3) $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} T(X)$ が特三角であることと $Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} T(X) \xrightarrow{-T(f)} T(Y)$ が特三角であることは同値である．

(TR4) 2 つの特三角 $X \xrightarrow{f} Y \to Z \to T(X)$, $X' \xrightarrow{f'} Y' \to Z' \to T(X')$ に対し，可換図式

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"] & Y \arrow[d, "v"] \\ X' \arrow[r, "f'"] & Y' \end{tikzcd}$$

は特三角の射に埋め込める．

(TR5) （八面体公理）．3 つの特三角

$$X \xrightarrow{f} Y \to Z' \to T(X),$$
$$Y \xrightarrow{g} Z \to X' \to T(Y),$$
$$X \xrightarrow{g\circ f} Z \to Y' \to T(X)$$

に対し，

1.6　圏の局所化

第 2 章

層

2.1　層の演算

2.1.1　部分集合から定まる関手

X を位相空間とする．Z を X の部分集合とし，$j\colon Z \hookrightarrow X$ を包含写像とする．

■制限の一般的な定義　$F \in \mathrm{Sh}(X)$ に対し，

$$F|_Z \coloneqq j^{-1}F, \tag{2.1.1}$$

$$\Gamma(Z;F) \coloneqq \Gamma\left(Z; j^{-1}F\right) \tag{2.1.2}$$

とおく．Z が開集合のとき，元の定義に一致する．

元の定義に一致することのチェック．$U \subset Z$ を開集合とすると，

$$\begin{aligned}\Gamma\left(U; j^{-1}F\right) &= \varinjlim_{j(U)\subset V} F(V) \\ &= F(j(U)) = F(U) = F|_Z(U)\end{aligned}$$

となる． □

■順像を用いた閉集合での定義　Z が閉集合であるときを考える．このとき，$F \in \mathrm{Sh}(X)$ に対し，

$$F_Z \coloneqq j_* j^{-1}F$$

とおく．

コメント 2.1.1.　池ノート [Ike21] や竹内 [Tak17] だと，固有順像 (2.1.2 項) を定義してから，$j_! j^{-1}F$ で切り落としを定義している．閉集合からの包含写像に対しては $j_! = j_*$ であり，これらの定義は一致する．

2.1.2　固有順像

$f_!\colon \mathrm{Sh}(X) \to \mathrm{Sh}(Y)$ について，f がプロパーなら $f_! \cong f_*$ である．つまり，コメント 2.1.1 の主張はもっと一般に f がプロパーなら成り立つ．

2.2　弱大域次元

アーベル層の圏はアーベル圏になる．したがって層の導来圏が考えられる．

$\cdot \otimes \cdot$ の導来関手を考えたいが，テンソルに関する複体が有界になるとは限らないので，平坦分解の長さが有限になるという仮定をおく．

命題 2.2.1.　A を環とする．

1. 自由加群は射影加群である．
2. 射影加群は自由加群の自由加群の直和因子である．
3. 射影加群は平坦加群である．
4. $n \geqq 0$ を整数とする．次の条件 (a)–(b)$^{\mathrm{op}}$ は同値である．
   (a) 任意の $j > n$, $N \in \mathrm{Mod}(A^{\mathrm{op}})$, $M \in \mathrm{Mod}(A)$ に対し，$\mathrm{Tor}_j^A(N, M) = 0$
   (b) 任意の $M \in \mathrm{Mod}(A)$ に対し，分解
   $$0 \to P^n \to \cdots \to P^0 \to M \to 0 \quad (P^j \text{ は平坦})$$
   が存在する．
   (b)$^{\mathrm{op}}$ 任意の $M \in \mathrm{Mod}(A^{\mathrm{op}})$ に対し，分解
   $$0 \to P^n \to \cdots \to P^0 \to M \to 0 \quad (P^j \text{ は平坦})$$
   が存在する．

証明.　1. M を自由加群とする．左 A 加群の全射 $g\colon N \twoheadrightarrow N'$ に対し，

$$g_*\colon \mathrm{Hom}_A(M, N) \to \mathrm{Hom}_A(M, N') \quad \text{in } \mathrm{Mod}(\mathbf{Z})$$

が全射であることを示す．$\psi\colon M \to N'$ を A 加群の射とする．I を $M \cong A^{\oplus I}$ となる添字集合とすると任意の $m \in M$ は，M の生成系 (m_i) と $(a_i)_i \in A^{\oplus I}$ を用いて，$m = \sum_{i\in I} a_i m_i$ とかける．このとき，

$$\psi(m) = \sum_i a_i \psi(m_i) \in N'$$

であり，g が全射なので，$n \in N$ で

$$g(n) = \psi(m) = \sum_i a_i \psi(m_i), \quad \psi(m_i) = g(n_i)$$

となるものがある．この $(n_i)_i$ に対して，$\phi\colon M \to N$ を

$$\phi(m_i) = n_i$$

で定めると，

$$(g_*(\phi))\,(m_i) = g \circ \phi(m_i) = g(n_i) = \psi(m_i)$$

となる．

2. P を射影加群とする．自由加群 $A^{\oplus I}$ と全射 $p\colon A^{\oplus I} \twoheadrightarrow P$ が存在する．実際，$I = P$ として，p を $p((a_x)_{x\in P}) = \sum_{x\in P} a_x x$ と定めればよい．$Q = \operatorname{Ker} p$ とすると，

$$0 \to Q \hookrightarrow A^{\oplus I} \twoheadrightarrow P \to 0$$

は完全列である．このとき，P が射影加群であることから，id_P に対して，$u\colon P \to A^{\oplus I}$ で

$$p_*(u) = p \circ u = \mathrm{id}_P$$

となる者が存在する．したがって，上の完全列は分裂し，$A^{\oplus I} \cong P \oplus Q$ となる．

3. まず「自由 $\Rightarrow$ 平坦」を示す．$F = A^{\bigoplus I}$ を自由加群とし，

$$0 \to N_1 \to N_2 \to N_3 \to 0$$

を右 A 加群の完全系列とする．

$$0 \to N_1 \otimes A^{\bigoplus I} \to N_2 \otimes A^{\bigoplus I} \to N_3 \otimes A^{\bigoplus I} \to 0$$

において，

$$N_1 \otimes A^{\bigoplus I} \cong N_1^{\bigoplus I}, \quad N_2 \otimes A^{\bigoplus I} \cong N_2^{\bigoplus I}$$

であり，$j\colon N_1 \to N_2$ は単射なので，

$$\bigoplus_{i\in I} j_i\colon N_1^{\bigoplus I} \to N_2^{\bigoplus I}$$

で

$\square$

2.3　非特性変形補題

命題 2.3.1 ([KS90, Prop. 2.5.1])**.**　X を位相空間とし，Z を部分空間とする．F を X 上の層とし，自然な射

$$\psi\colon \varinjlim_{U \in I_Z} \Gamma(U;F) \to \Gamma(Z;F)$$

を考える．

(i) ψ は単射である．

(ii) X がハウスドルフで Z がコンパクトならば，ψ は同型である．

命題 2.3.2 ([KS90, Prop. 1.12.4])**.**

$$\phi_k\colon H^k(\varprojlim X) \to \varinjlim H^k(X_n)$$

について，$H^{i-1}(X_n)$ が ML 条件を満たすならば，ϕ_k は一対一対応である．

命題 2.3.3 ([KS90, Prop. 1.12.6])**.**　$(X_s, \rho_{s,t})$ を実数を添字とする射影系とする．

$$\lambda_s\colon X_s \to \varprojlim_{r<s} X_r, \quad \mu_s\colon \varinjlim_{t>s} X_t \to X_s$$

がどちらも単射（全射）ならば，すべての実数 $s_0 \leqq s_1$ に対し，$\rho_{s_0,s_1}\colon X_{s_1} \to X_{s_0}$ は単射（全射）となる．

命題 2.3.4 ([KS90, Prop. 2.7.2, 非特性変形補題])**.**　X をハウスドルフ空間とし，$F \in \mathrm{D}^+(\mathbf{Z}_X)$ とする．また，$(U_t)_{t\in\mathbf{R}}$ を X の開集合の族で次の条件 (i)–(iii) をみたすものとする．

(i) 任意の実数 t に対し，$\bigcup_{s<t} U_s = U_t$ が成り立つ．

(ii) 任意の実数 $s \leqq t$ に対し，$\overline{U_t - U_s} \cap \operatorname{supp} F$ はコンパクト集合である．

(iii) 実数 s に対して $Z_s = \bigcap_{t>s} \overline{U_t - U_s}$ とおくとき，任意の実数 $s \leqq t$ と任意の点 $x \in Z_s - U_t$ に対して $(\mathrm{R}\Gamma_{X-U_t}(F))_x = 0$ が成り立つ．

このとき，任意の実数 t に対して，次の同型が成り立つ．

$$\mathrm{R}\Gamma\left(\bigcup_{s\in\mathbf{R}} U_s; F\right) \xrightarrow{\sim} \mathrm{R}\Gamma(U_t;F)$$

証明. 次の条件を考える.

$$(a)^s_k: \quad \varinjlim_{t>s} H^k(U_t;F) \xrightarrow{\sim} H^k(U_s;F)$$
$$(b)^t_k: \quad \varprojlim_{s<t} H^k(U_s;F) \xleftarrow{\sim} H^k(U_t;F)$$

任意の実数 s と任意の整数 k に対して $(a)^s_k$ が，任意の実数 t と任意の整数 $k<k_0$ に対して $(b)^t_k$ が成り立つとする．このとき，k_0 に対し，$(b)^t_{k_0}$ が成り立つことを示す．命題 2.3.3 より，($(a)^s_k$ の方が μ_s，$(b)^t_k$ の方が λ_t として）各次数 $k<k_0$ と各実数 $s \leqq t$ に対し，

$$H^k(U_t;F) \xrightarrow{\sim} H^k(U_s;F) \tag{2.3.1}$$

が成り立つ．このとき，t を固定して，射影系 $\left(H^{k_0-1}\left(U_{t-\frac{1}{n}};F\right)\right)_{n\in\mathbf{N}}$ を考えると，これは ML 条件をみたす．

∵) 任意の $n\in\mathbf{N}$ に対し，

$$\rho_{n,p}\left(H^{k_0-1}\left(U_{t-\frac{1}{p}};F\right) \to H^{k_0-1}\left(U_{t-\frac{1}{n}};F\right)\right)$$

はすべて同形なので，当然安定.

よって，命題 2.3.2 より $(b)^t_{k_0}$ が従う．k に関する帰納法により，どの $t\in\mathbf{R}$ と $k\in\mathbf{Z}$ に対しても $(b)^t_k$ が成り立つ.

命題 2.7.1 を $\left(H^k\left(U_n;F\right)\right)_{n\in\mathbf{N}}$ に用いると←わかってない

k に関する帰納法で，定理の結論

$$\mathrm{R}\Gamma\left(\bigcup_{s\in\mathbf{R}} U_s;F\right) \xrightarrow{\sim} \mathrm{R}\Gamma(U_t;F)$$

が従う.

$(a)^s_k$ の証明　X を $\operatorname{supp} F$ におきかえて，どの実数 $s \leqq t$ に対しても $\overline{U_t - U_s}$ はコンパクトとしてよい．次の d.t. を考える[*1].

$$\mathrm{R}\Gamma_{(X-U_t)}(F)|_{Z_s} \to \mathrm{R}\Gamma_{(X-U_s)}(F)|_{Z_s} \to \mathrm{R}\Gamma_{(U_t-U_s)}(F)|_{Z_s} \xrightarrow{+1} .$$

仮定 (iii) より，左と真ん中の 2 つは 0 なので，d.t. の性質から，$\mathrm{R}\Gamma_{(U_t-U_s)}(F)|_{Z_s}=0$ となる．したがって，任意の $k\in\mathbf{Z}$ と $t \geqq s$ に対し，

$$\begin{aligned} 0 &= H^k(Z_s;\mathrm{R}\Gamma_{(U_t-U_s)}(F)) \\ &= \varinjlim_{U\supset Z_s} H^k(U\cap U_t;\mathrm{R}\Gamma_{X-U_s}(F)) \end{aligned}$$

*1 [KS90, (2.6.32)] の d.t.

$$\mathrm{R}\Gamma_{Z'}(F) \to \mathrm{R}\Gamma_Z(F) \to \mathrm{R}\Gamma_{Z-Z'}(F) \xrightarrow[+1]{}$$

を用いる．但し，Z は X の局所閉集合，Z' は Z の閉集合である.

となる．

$\mathrm{R}\Gamma_{U_t-U_s}(F)$ は X 上の層で，それを Z_s に制限した $\mathrm{R}\Gamma_{U_t-U_s}(F)|_{Z_s}$ は Z_s 上の層である．Z_s での大域切断 $\mathrm{R}\Gamma(Z_s; \mathrm{R}\Gamma_{U_t-U_s}(F)|_{Z_s})$ のコホモロジーをとっているので，[KS90, Notations 2.6.8] の 2 番目の記号を用いることになる．

Z_s はハウスドルフ空間 X のコンパクト集合 $\overline{U_t - U_s}$ の共通部分として表されているので，コンパクトである（X の置き換えがここに効いている）．したがって，[KS90, Remark 2.6.9 (ii)] の場合に当てはまり，そこでの記号を用いて書くと

$$H^j(Z;F) \simeq \varinjlim_{U \in I_Z} H^j(U;F)$$

が成り立つ．これが上の式の 2 つ目の変形．詳しく書くと，

$$\begin{aligned} H^k(Z_s; \mathrm{R}\Gamma_{U_t-U_s}(F)) &= \varinjlim_{U \in I_Z} H^k(U; \mathrm{R}\Gamma_{U_t-U_s}(F)) \\ &= \varinjlim_{U \in I_Z} H^k(U \cap U_t; \mathrm{R}\Gamma_{X-U_s}(F)) \end{aligned}$$

ここで，2 つ目の変形は次のように考える．$U_t - U_s$ に台を持つ層の U 上の切断は $U \cap U_t$ 上で切断を考えても同じ．台の方も，U が Z_s に十分近ければ $X - U_s$ で考えても同じ．

□

第 3 章

Poincaré-Verdier 双対性

3.1 上付きびっくり

[B+84, V, 6.1] A に対し，全射 $P \to A$ で，P が零で延長した層 R_U の直和であるものが存在する．

補題 3.1.1. [B+84, V. Proposition 6.5] $S, A \in \mathrm{Sh}(X)$ とする．S が c 柔軟であり，S, A のどちらかは平坦であるとする．このとき，$A \otimes S$ は c 柔軟である．

証明． 完全列

$$0 \to P_n \to P_{n-1} \to \cdots \to P_0 \to A \to 0 \tag{3.1.1}$$

で $0 \leqq j \leqq n-1$ に対し，P_j が層 R_U の直和となり，したがって平坦となるものがある．系列

$$0 \to P_n \otimes S \to P_{n-1} \otimes S \to \cdots \to P_0 \otimes S \to A \otimes S \to 0 \tag{3.1.2}$$

についても，S が平坦であることから，あるいは，A が平坦であれば系列 (3.1.1) の各項が平坦となることから完全になる．

□

補題 3.1.2. [B+84, VI. Théorème 3.5] G が $\mathrm{K}^+(Y)$ の対象ならば，$f_K^!(G)$ は $\mathrm{K}^+(X)$ の対象である．

証明． $(U_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ を X の開集合族とする．$U = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha$，$U_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta$ とおき，系列

$$0 \to f_K^!(G)(U) \xrightarrow{\varphi} \prod_{\alpha \in \Lambda} f_K^!(G)(U_\alpha) \xrightarrow{\psi} \prod_{(\alpha,\beta) \in \Lambda \times \Lambda} f_K^!(G)(U_{\alpha\beta})$$

を考える．ここに，

$$\varphi(s) = \left(\rho_{U_\alpha, U}(s)\right)_{\alpha \in \Lambda},$$
$$\psi\left((s_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}\right) = \left(\rho_{U_{\alpha\beta}, U_\alpha}(s_\alpha) - \rho_{U_{\alpha\beta}, U_\beta}(s_\beta)\right)_{(\alpha,\beta) \in \Lambda \times \Lambda}$$

である．この系列が完全であることを示す．

□

3.1.1　構成

X, Y を局所コンパクト空間とし，$f\colon Y \to X$ を連続写像とする．A を大域次元が有限な可換環とする．$F \in \mathrm{D}^+(A_X)$, $G \in \mathrm{D}^+(A_Y)$ とする．

$\mathrm{R}\, f_!\colon \mathrm{D}^+(A_Y) \to \mathrm{D}^+(A_X)$ の右随伴関手 $f^!\colon \mathrm{D}^+(A_X) \to \mathrm{D}^+(A_Y)$ を構成する．まず，開集合 $V \subset Y$ に対し，$f^!F$ の V 上の切断に関する条件を見てみる．

$$\mathrm{R}\Gamma(V; f^!F) = \mathrm{R}\,\mathrm{Hom}_{A_Y}(A_V, f^!F) = \mathrm{R}\,\mathrm{Hom}_{A_X}(\mathrm{R}\, f_!A_V, F)$$

となることから，$f^!F$ は $V \mapsto \mathrm{R}\,\mathrm{Hom}_{A_X}(\mathrm{R}\, f_!A_V, F)$ という対応でなければならない．$\mathrm{R}\, f_!$ を計算するには c 柔軟分解 $A_V \sim K$ を取ればよく，さらに F が入射的であれば，

$$\mathrm{R}\,\mathrm{Hom}_{A_X}(\mathrm{R}\, f_!A_V, F) = \mathrm{Hom}_{A_X}(f_!K_V, F)$$

となって，結局

$$\mathrm{R}\Gamma(V; f^!F) = \mathrm{Hom}_{A_X}(f_!K_V, F)$$

とできる．

■f に関する仮定

定義 3.1.3.　Y 上の層 G が f 柔軟であるとは，各点 $x \in X$ に対し，$G|_{f^{-1}(x)}$ が c 柔軟であることをいう．

G が f 柔軟であることと，任意の開部分集合 $V \subset Y$ と $j \neq 0$ に対し，$\mathrm{R}^j f_!G_V = 0$ となることと同値である．

次を仮定する．

(3.1.3)　$f_!\colon \mathrm{Mod}(\mathbf{Z}_Y) \to \mathrm{Mod}(\mathbf{Z}_X)$ のコホモロジー次元は有限である．

つまり，整数 $r \geqq 0$ で，全ての $j > r$ に対し $\mathrm{R}^j f_! = 0$ となるものが存在する．(3.1.3) は次の条件と同値である．

$$(3.1.4)\qquad \begin{cases} \text{任意の } G \in \mathrm{Sh}(Y) \text{ に対し，完全列} \\ 0 \to G \to G^0 \to \cdots \to G^r \to 0 \\ \text{で，どの } G^j \text{ も } f \text{ 柔軟であるものが存在する．} \end{cases}$$

$$(3.1.4')\qquad \begin{cases} \text{完全列 } G^0 \to \cdots \to G^r \to 0 \\ \text{において，} j < r \text{ に対し } G^j \text{ が } f \text{ 柔軟ならば，} \\ G^r \text{ が } f \text{ 柔軟となる．} \end{cases}$$

$f_!$ のコホモロジー次元が $\leqq r$ となるのは，任意の $x \in X$ に対し，$\Gamma_c(f^{-1}(x); \cdot)$ のコホモロジー次元が $\leqq r$ となるときである．実際，$f_!|_{f^{-1}(x)}F = \Gamma_c(f^{-1}(x); F) = 0$ となるので．

■構成　以上の仮定は,

$$\mathrm{R}\Gamma(V; f^!F) = \mathrm{Hom}_{A_X}(f_! K_V, F)$$

の構成をするためだった. $f_!K_V$ の分解をしたくて, その長さが有限になるという仮定である.

さて, K を $\mathbf{Z}_Y$ 加群, F を A_X 加群とする. このとき, A 加群の前層 $f^!_K F$ を次で定める. $V \in \mathsf{Open}(Y)$ に対し,

$$(f^!_K F)(V) \coloneqq \mathrm{Hom}_{A_X}\left(f_!\left(A_Y \underset{\mathbf{Z}_Y}{\otimes} K_V\right), F\right)$$

とする. 制限射は $K_{V'} \to K_V$ から引き起こされるもの.

補題 3.1.4.　K を平坦かつ f 柔軟な $\mathbf{Z}_Y$ 加群とする.

(i) Y 上の任意の層 G に対し $G \otimes_{\mathbf{Z}_Y} K$ は f 柔軟である.
(ii) $G \mapsto f_!(G \otimes_{\mathbf{Z}_Y} K)$ は $\mathrm{Mod}(\mathbf{Z}_Y)$ から $\mathrm{Mod}(\mathbf{Z}_X)$ への完全関手である.

証明. (i) Y 上の任意の層 G は分解

$$\to G^{-r} \to \cdots \to G^0 \to G \to 0$$

で, 各 G^j が $\mathbf{Z}_V$ の直和となるものが存在する. □

参考文献

[B+84] Borel, *Intersection Cohomology*, Progress in Mathematics, 50, Birkhäuser, 1984.

[KS90] Masaki Kashiwara, Pierre Schapira, *Sheaves on Manifolds*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 292, Springer, 1990.

[KS06] Masaki Kashiwara, Pierre Schapira, *Categories and Sheaves*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 332, Springer, 2006.

[Sh16] 志甫淳, 層とホモロジー代数, 共立出版, 2016.

[Ike21] 池祐一, 超局所層理論概説, 2021.

[Tak17] 竹内潔, $\mathcal{D}$ 加群, 共立出版, 2017.