

複素トーラスと複素射影直線

February 9, 2023

複素射影直線

$\mathbf{C}^2 - \{(0, 0)\}$ の点 x, y に対して, 同値関係 \sim を

$$x \sim y \stackrel{\text{def}}{\iff} x = cy \text{ をみたす複素数 } c \neq 0 \text{ が存在する}$$

で定める. このとき \sim に関する (x, y) の同値類を $[x : y]$ とかき

$$\mathbf{P}^1 := (\mathbf{C}^2 - \{(0, 0)\}) / \sim$$

の複素多様体構造を次で定めたものはリーマン面である. P^1 を複素射影直線という.

複素射影直線の複素多様体構造

\mathbf{P}^1 の開集合 U_0, U_1 を次で定める.

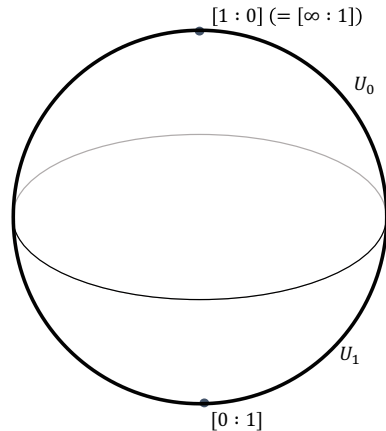
$$U_0 := \{(z, w) \in \mathbf{C}^2; w \neq 0\},$$

$$U_1 := \{(z, w) \in \mathbf{C}^2; z \neq 0\}.$$

U_0, U_1 の間の座標変換を次で定める.

$$w = \frac{1}{z}$$

$$([z : 1] = [1 : w] \in U_0 \cap U_1)$$



周期格子

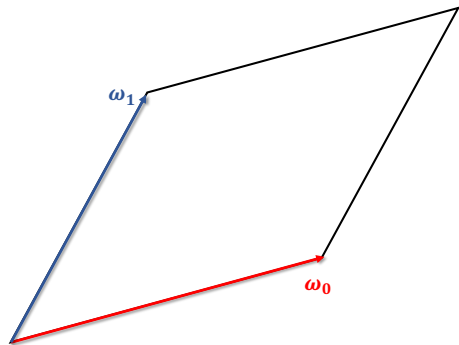
ω_0, ω_1 を \mathbf{R} 上一次独立な 0 でない複素数とする. このとき, \mathbf{C} の部分加群 $\Omega \subset \mathbf{C}$ を

$$\Omega := \{n_0\omega_0 + n_1\omega_1; n_0, n_1 \in \mathbf{Z}\}$$

で定める. Ω を周期格子といい,

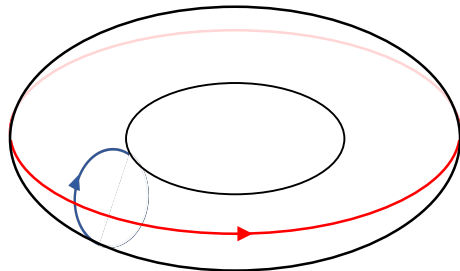
$$S := \{a\omega_0 + b\omega_1; 0 \leq a, b < 1\}$$

を周期平行四辺形という.



複素トーラス

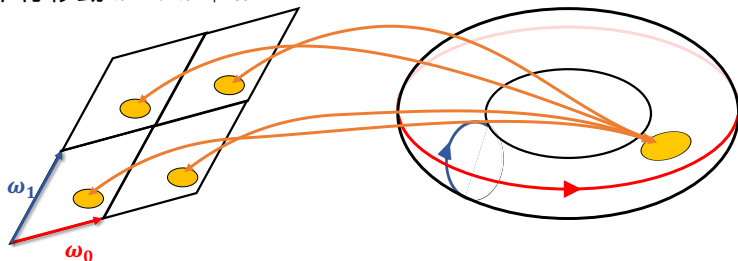
$E := \mathbb{C}/\Omega$ を複素トーラスという.
 S と E の点は一対一に対応する.
 標準射影 $p: \mathbb{C} \rightarrow E$ による $z \in \mathbb{C}$
 の像を $[z]$ とかく.



複素トーラスの複素多様体構造

各点 $P \in E$ の十分小さい開近傍 $U_P \subset E$ に対し, $U_P = p(\mathcal{U}_x)$ となる開集合 $\mathcal{U}_x \subset S$ をとる. $p^{-1}(U_P) = \bigcup_{\omega \in \Omega} \mathcal{U}_x + \omega$ である.

$\omega \in \Omega$ を一つ取って同相 $\varphi_{P,x+\omega} := (p|_{\mathcal{U}_x+\omega})^{-1} : U_P \rightarrow \mathcal{U}_x+\omega$ を考える.
座標変換は平行移動 $z \mapsto z + \omega$.



参考文献 I

[Og02] 小木曾啓示, 『代数曲線論』, 朝倉書店, 2002.