2024/02/29 セミナー資料

大柴寿浩

記号

- $\overline{\mathbf{R}} \coloneqq [-\infty, +\infty] = \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$
- 集合 U の開近傍系を I_U とかき，点 x の開近傍系を I_x とかく．

1　コホモロジー構成可能層

1.1　理想複体

A を可換環とする．$M \in \mathsf{D}^{\mathrm{b}}(A) \coloneqq \mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathrm{Mod}(A))$ を A 加群の導来圏の対象とする．M が**理想対象**[*1] (perfect object) であるとは，有限生成射影的 A 加群の有界複体と擬同型であることをいう．

命題 1.1 ([KS90, Exercise I.30])**.**　A を可換環とする．

(i) $X \to Y \to Z \underset{+1}{\to}$ が $\mathsf{D}^{\mathrm{b}}(A)$ における完全三角で，X と Y が理想的ならば，Z も理想的である．

(ii) 理想対象の直和因子も理想対象である．

(iii) $M \in \mathsf{D}^{\mathrm{b}}(A)$ を理想対象とする．$M^* \coloneqq \mathrm{RHom}_A(M, A)$ とおく．M^* は理想対象であり，標準的な射 $M \to M^{**}$ は同型である．

A がネーター環で大域次元が有限であるとする．

(iv) $\mathrm{Mod}^{\mathrm{f}}(A)$ の導来圏 $\mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathrm{Mod}^{\mathrm{f}}(A))$ の任意の対象は理想的である．

(v) $\mathsf{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{f}}(A)$ で各コホモロジーが $\mathrm{Mod}^{\mathrm{f}}(A)$ に属す対象の導来圏を表す．$\mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathrm{Mod}^{\mathrm{f}}(A)) \to \mathsf{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{f}}(\mathrm{Mod}(A))$ は圏同値である．■

証明は略．
擬連接かつ tor 次元が有限であることと同値らしい．([SP, lem 15.74.2])

---

*1 [Ue] による訳にしたがった．定訳は未だ無いと思われる．

1.2　本編

X を局所コンパクト空間で c 柔軟次元が有限なものとする．

定義 1.2 (コホモロジー構成可能層 [KS90, Definition 3.4.1])**.**　$F \in \mathsf{D}^{\mathrm{b}}(A_X)$ がコホモロジー構成可能とは，任意の $x \in X$ に対して，次の条件が成り立つことをいう．

(i) $\text{“}\varinjlim_{x\in U}\text{”}\, \mathrm{R}\Gamma(U;F)$ と $\text{“}\varprojlim_{x\in U}\text{”}\, \mathrm{R}\Gamma_c(U;F)$ が共に表現可能である．

(ii) $\text{“}\varinjlim_{x\in U}\text{”}\, \mathrm{R}\Gamma(U;F) \to F_x$ と $\mathrm{R}\Gamma_{\{x\}}(X;F) \to \text{“}\varprojlim_{x\in U}\text{”}\, \mathrm{R}\Gamma_c(U;F)$ が共に同型である．

(iii) F_x と $\mathrm{R}\Gamma_{\{x\}}(X;F)$ は perfect である．

注意 1.3 ([KS90, Remark 3.4.2])**.**　(ii) は (i) から従う．

コメント 1.4.　[HS23] では弱構成可能層（条件 (ii) のみを課したもの）について色々考察している．

命題 1.5 ([KS90, Proposition 3.4.3])**.**　F をコホモロジー構成可能層とする．

(i) $\mathrm{D}F$ はコホモロジー構成可能である．

(ii) $F \xrightarrow{\sim} \mathrm{DD}F$.

(iii) 任意の $x \in X$ に対し

$$\begin{aligned} \mathrm{R}\Gamma_{\{x\}}(X;\mathrm{D}F) &\cong \mathrm{RHom}(F_x, A), \\ (\mathrm{D}F)_x &\cong \mathrm{RHom}(\mathrm{R}\Gamma_{\{x\}}(X;F), A). \end{aligned}$$

証明. (i) と (iii)：

$$\mathrm{RHom}(F, \omega_X) \cong \mathrm{RHom}(\mathrm{R}\Gamma_c(X;F), A) \tag{3.1.8}$$

より，

$$\begin{aligned} \mathrm{R}\Gamma(U;\mathrm{D}F) &= \mathrm{R}\Gamma(U;\mathrm{R}\mathscr{H}\!om(F,\omega_X)) \\ &= \mathrm{R}\Gamma(U; j_U^{-1}\,\mathrm{R}\mathscr{H}\!om(F,\omega_X)) \\ &= \mathrm{R}\Gamma(U; j_U^{!}\,\mathrm{R}\mathscr{H}\!om(F,\omega_X)) \\ &= \mathrm{R}\Gamma(U;\mathrm{R}\mathscr{H}\!om(j_U^{-1}F, j_U^{!}\omega_X)) \\ &= \mathrm{R}\Gamma(U;\mathrm{R}\mathscr{H}\!om(j_U^{-1}F, \omega_U)) \\ &= \mathrm{RHom}(\mathrm{R}\Gamma_c(U; j_U^{-1}F), A) \\ &= \mathrm{RHom}(\mathrm{R}\Gamma_c(U;F), A) \end{aligned}$$

である．“$\varinjlim_{x\in U}$” をあてて，

$$
\begin{aligned}
\text{“}\varinjlim_{x\in U}\text{”}\, \mathrm{R}\Gamma(U;\mathrm{D}F) &\cong \text{“}\varinjlim_{x\in U}\text{”}\, \mathrm{RHom}(\mathrm{R}\Gamma_c(U;F),A)\\
&\underset{\text{定義 (ii)}}{\cong} \mathrm{RHom}(\mathrm{R}\Gamma_{\{x\}}(X;F),A)
\end{aligned}
$$

を得る．よって，(iii) の 2 つ目の式が成り立つ．したがって，“$\varinjlim_{x\in U}$” $\mathrm{R}\Gamma(U;\mathrm{D}F)$ は表現可能であり，perfect でもある．

K を x のコンパクト近傍とし，$\mathring{K}$ を内部とする．このとき，

$$
\begin{aligned}
\mathrm{R}\Gamma_K(X;\mathrm{D}F) &\cong \mathrm{RHom}(A_K,\mathrm{D}F)\\
&\cong \mathrm{RHom}(F_K,\omega_X) && \text{Hom テンソル随伴}\\
&\cong \mathrm{RHom}(\mathrm{R}\Gamma(X;F_K),A) && \text{(3.1.8) 使った（cpt なので c とった？）}
\end{aligned}
$$

である．“$\varprojlim_{z\in U}$” あてて

$$
\begin{aligned}
\text{“}\varprojlim_{x\in U}\text{”}\, \mathrm{R}\Gamma_c(U;\mathrm{D}F) &\cong \text{“}\varprojlim_{x\in \mathring{K}}\text{”}\, \mathrm{R}\Gamma_K(X;\mathrm{D}F)\\
&\cong \text{“}\varprojlim_{x\in \mathring{K}}\text{”}\, \mathrm{RHom}(\mathrm{R}\Gamma(X;F_K),A)\\
&\cong \mathrm{RHom}\left(\text{“}\varinjlim_{x\in \mathring{K}}\text{”}\, \mathrm{R}\Gamma(X;F_K),A\right)\\
&\cong \mathrm{RHom}\left(\text{“}\varinjlim_{x\in U}\text{”}\, \mathrm{R}\Gamma(U;F),A\right) && \text{微妙}\\
&\cong \mathrm{RHom}\,(F_x,A)
\end{aligned}
$$

を得る．よってこれは perfect で，(iii) の 1 つ目も示せた．コホモロジー構成可能性の条件 (i) も示せているから条件 (ii) も成り立つ．よって，DF はコホモロジー構成可能である．((i) が示せた．)

(ii) (i) より DF と DDF はともにコホモロジー構成可能である．$x\in X$ に対し，(iii) より，

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{DD}F)_x &\cong \mathrm{RHom}(\mathrm{R}\Gamma_{\{x\}}(X;\mathrm{D}F),A)\\
&\cong \mathrm{RHom}(\mathrm{RHom}(F_x,A),A)\\
&\cong F_x
\end{aligned}
$$

なので DDF と F は同型である．？ □

命題 1.6 ([KS90, Proposition 3.4.4])**.** X と Y を c 柔軟次元が有限な局所コンパクト空間とする．$q_1\colon X\times Y\to X$ と $q_2\colon X\times Y\to Y$ を射影とする．$F\in \mathsf{D}^{\mathrm{b}}(A_X)$ をコホモロジー構成可能層とし，$G\in\mathsf{D}^{+}(A_Y)$ とする．このとき，

$$
\mathrm{D}F\overset{\mathrm{L}}{\boxtimes} G\to \mathrm{R}\mathscr{H}\!om(q_1^{-1}F,q_2^{!}G)
$$

は同型である．X が C^0 多様体なら

$$\mathrm{D}'F \overset{\mathrm{L}}{\boxtimes} G \to \mathrm{R}\mathscr{H}om(q_1^{-1}F, q_2^{-1}G)$$

も同型になる．

証明. 1 個目を示せばよい．$U \subset X$ と $V \subset Y$ をそれぞれ開集合とする．このとき

$$\mathrm{R}\Gamma\left(U \times V; \mathrm{R}\mathscr{H}om\left(q_1^{-1}F, q_2^!G\right)\right) \cong \mathrm{RHom}\left(\mathrm{R}\Gamma_c(U; F), \mathrm{R}\Gamma(V; G)\right)$$

である．（[KS90, Proposition 3.1.15]）これに "$\varinjlim_{z\in U}$" をあてて，

$$\begin{aligned}
&\text{“}\varinjlim_{z\in U}\text{”}\, \mathrm{R}\Gamma\left(U \times V; \mathrm{R}\mathscr{H}om(q_1^{-1}F, q_2^!G)\right) \\
&\cong \text{“}\varinjlim_{z\in U}\text{”}\, \mathrm{RHom}(\mathrm{R}\Gamma_c(U; F), \mathrm{R}\Gamma(V; G)) \\
&\cong \mathrm{RHom}\left(\text{“}\varprojlim_{z\in U}\text{”}\, \mathrm{R}\Gamma_c(U; F), \mathrm{R}\Gamma(V; G)\right) \\
&\cong \mathrm{RHom}\left(\mathrm{R}\Gamma_{\{x\}}(X; F), \mathrm{R}\Gamma(V; G)\right) && \text{定義 (ii)} \\
&\cong \mathrm{RHom}\left(\mathrm{R}\Gamma_{\{x\}}(X; F), A\right) \overset{\mathrm{L}}{\otimes} \mathrm{R}\Gamma(V; G) && ? \\
&\cong (\mathrm{D}F)_x \overset{\mathrm{L}}{\otimes} \mathrm{R}\Gamma(V; G) && 3.4.3(\mathrm{iii})
\end{aligned}$$

を得る．よって，

$$\begin{aligned}
\mathrm{R}\mathscr{H}om(q_1^{-1}F, q_2^!G) &\cong q_1^{-1}\mathrm{D}F \overset{\mathrm{L}}{\otimes} q_2^{-1}G \\
&\cong q_1^{-1}\mathrm{D}'F \overset{\mathrm{L}}{\otimes} q_2^!G
\end{aligned}$$

である． □

例 1.7 ([KS90, Example 3.4.5]). (i) X を C^0 多様体とし，Y を余次元 p の閉部分多様体とする．A_Y と $\mathrm{R}\Gamma_Y(A_X)$ は X 上のコホモロジー構成可能層である．

(3.4.3) $$\mathrm{D}_X(A_Y) \cong \mathrm{R}\Gamma_Y(\omega_X) \cong \omega_Y$$

が成り立つ．

(ii) X を有限次元実ベクトル空間とする．$Z \subset X$ を閉（開）凸集合とする．このとき，A_Z と $\mathrm{R}\Gamma_Z(A_X)$ は X 上のコホモロジー構成可能層である．

命題 1.8 ([KS90, Proposition 3.4.6]). $F, G \in \mathsf{D}^{\mathrm{b}}(A_X)$ をコホモロジー構成可能層とする．このとき，

$$\mathrm{R}\mathscr{H}om(G, F) \cong \mathrm{R}\mathscr{H}om(\mathrm{D}G, \mathrm{D}F) \cong \mathrm{D}\left(\mathrm{D}(F) \overset{\mathrm{L}}{\otimes} G\right)$$

が成り立つ.

証明.

$$\mathrm{R}\mathscr{H}om(G,F) \to \mathrm{R}\mathscr{H}om(\mathrm{D}G,\mathrm{D}F)$$

が同型であることを示すには

$$q_2^{-1}\mathrm{D}G \overset{\mathrm{L}}{\otimes} q_1^! F \cong q_1^{-1}(\mathrm{D}\mathrm{D}F) \overset{\mathrm{L}}{\otimes} q_2^! \mathrm{D}G$$

が成り立つことを示せばよいがこれは明らか.

後半はラク.

$$\begin{aligned}\mathrm{R}\mathscr{H}om(\mathrm{D}F\overset{\mathrm{L}}{\otimes}G,\omega_X) &\cong \mathrm{R}\mathscr{H}om(G,\mathrm{R}\mathscr{H}om(\mathrm{D}F,\omega_X)) \\ &\cong \mathrm{R}\mathscr{H}om(G,\mathrm{D}\mathrm{D}F) \\ &\cong \mathrm{R}\mathscr{H}om(G,F).\end{aligned}$$

□

参考文献

[BouTVS] ブルバキ, 位相線形空間 1, 東京図書, 1968.

[B+84] Borel, *Intersection Cohomology*, Progress in Mathematics, 50, Birkhäuser, 1984.

[G58] Grauert, *On Levi's problem and the embedding of real analytic manifolds*, Ann. Math. 68, 460–472 (1958).

[GP74] Victor Guillemin, Alan Pollack, *Differential Topology*, Prentice-Hall, 1974.

[HS23] Andreas Hohl, Pierre Schapira, *Unusual Functorialities for weakly constructible sheaves*, 2023.

[KS90] Masaki Kashiwara, Pierre Schapira, *Sheaves on Manifolds*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 292, Springer, 1990.

[KS06] Masaki Kashiwara, Pierre Schapira, *Categories and Sheaves*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 332, Springer, 2006.

[Le13] John M. Lee, *Introduction to Smooth Manifolds*, Second Edition, Graduate Texts in Mathematics, **218**, Springer, 2013.

[Mo76] 森本光生, 佐藤超函数入門, 共立出版, 1976.

[R55] de Rham, *Variétés différentiables*, Hermann, Paris, 1955.

[Sa59] Mikio Sato, *Theory of Hyperfunctions*, 1959–60.

[S66] Schwartz, *Théorie de distributions*, Hermann, Paris, 1966.

[Sh16] 志甫淳, 層とホモロジー代数, 共立出版, 2016.

[SP] The Stacks Project.

[Sp65] Michael Spivak, *Calculus on Manifolds*, Benjamin, 1965.

[Ike21] 池祐一, 超局所層理論概説, 2021.

[Tak17] 竹内潔, $\mathcal{D}$ 加群, 共立出版, 2017.

[Ue] 植田一石, ホモロジー的ミラー対称性, https://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~kazushi/course/hms.pdf 2024/02/04 最終閲覧.