Morse 理論

Toshi2019

2022 年 10 月 9 日

概要

2022 年度秋セメスターで行う Morse 理論ゼミのための勉強ノート．実質 [M01] の読書ノート．

はじめに

個人的なモチベはシンプレクティック幾何と層の超局所理論に由来する．前者に関して，どうやら Morse 理論はシンプレクティック幾何の原型になっている[*1]らしいので，本格的に勉強する前に，Morse 理論をかじっておこうというモチベ．後者に関して，層の超局所理論は層理論における Morse 理論という見方ができるらしい [Ike21]．そういった幾何的な見方がわかるようになりたいというのも一つのモチベ．なので低次元トポロジーにはそこまで興味があるわけではない．

凡例

- 関数：断りがなければ関数は実数値の写像とする．
- 偏微分作用素：$\partial/\partial x$ を ∂_x で表すことがある．

1　曲面上の Morse 理論

1.1　関数の臨界点

$u < v$ を実数とし，$y = f(x)$ を開区間 (u, v) で定義された C^∞ 級関数とする．(u, v) の点 a が $y = f(x)$ の臨界点であるとは，

$$f'(a) = 0 \tag{1.1}$$

であることをいう．

*1　シンプレクティック幾何の中でも，とくに Floer 理論というものの原型らしく，無限次元の Morse 理論をやることに対応しているとかいないとか．([Ono06] 参照)

$u < v$ を実数とし，$y = f(x)$ を開区間 (u, v) で定義された C^∞ 級関数とし，(u, v) の点 a を $y = f(x)$ の臨界点とする．このとき，$x = a$ が $y = f(x)$ の**退化した臨界点** (degenerate critical point) とは

$$f''(a) = 0 \tag{1.2}$$

であることをいう．$x = a$ が退化していないとき，**非退化な臨界点** (nondegenerate critical point) であるという．

例 1.1. 1. $y = f(x) = x^2$ とおく．$f'(x) = 2x$ なので，$f'(0) = 0$ である．$f''(x) = 2$ なので，$f''(0) \neq 0$ である．よって $x = 0$ は $y = x^2$ の非退化な臨界点である．

2. 自然数 $n \geqq 3$ に対し $y = f(x) = x^n$ とおく．$f'(x) = nx^{n-1}$ なので，$f'(0) = 0$ である．$f''(x) = n(n-1)x^{n-2}$ なので，$f''(0) = 0$ である．したがって $x = 0$ は $y = x^n$ の退化した臨界点である．

1.2 Hesse 行列

定義 1.2 . U を平面 $\mathbf{R}^2$ の開集合とする．$z = f(x, y)$ を U で定義された C^∞ 級関数とする．U の点 $p_0 = (x_0, y_0)$ が $z = f(x, y)$ の臨界点であるとは

$$f'(p_0) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(p_0) & \dfrac{\partial f}{\partial y}(p_0) \end{pmatrix} = (0, 0) \tag{1.3}$$

が成り立つことをいう．

例 1.3 . 平面の原点 $0 = (0, 0)$ は

$$z = f(x, y) = x^2 + y^2, \qquad z = g(x, y) = x^2 - y^2, \qquad z = h(x, y) = -x^2 - y^2 \tag{1.4}$$

の臨界点である．実際

$$\begin{aligned} f'(0,0) &= \begin{pmatrix} f'_x(0,0) & f'_y(0,0) \end{pmatrix} = (2x, 2y)|_{(x,y)=(0,0)} = (0,0), \\ g'(0,0) &= \begin{pmatrix} g'_x(0,0) & g'_y(0,0) \end{pmatrix} = (2x, -2y)|_{(x,y)=(0,0)} = (0,0), \\ h'(0,0) &= \begin{pmatrix} h'_x(0,0) & h'_y(0,0) \end{pmatrix} = (-2x, -2y)|_{(x,y)=(0,0)} = (0,0) \end{aligned}$$

となるので原点はこれらの臨界点である．

定義 1.4 . $(x, y) = p_0$ を f の臨界点とする．f のヘッセ行列

$$H_f(p_0) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(p_0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(p_0) \\ \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(p_0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(p_0) \end{bmatrix} \tag{1.5}$$

の行列式（ヘッシアン）

$$\det H_f(p_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(p_0)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(p_0) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(p_0)\right)^2 \tag{1.6}$$

が 0 のとき，p_0 は退化しているという．そうでないとき，p_0 は非退化な臨界点という．

例 1.5． 式 (1.4) の関数たちの Hesse 行列は

$$\begin{aligned} H_f(0) &= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \\ H_g(0) &= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \\ H_h(0) &= \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

である．これらの行列式は 0 でないので，原点は非退化な臨界点である．

例 1.6． 関数 $z = xy$ は原点を臨界点にもつ．Hesse 行列は

$$H(0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

で $\det H(0) = -1 \neq 0$ なので 0 は非退化な臨界点である．

例 1.7． 関数 $z = x^2 + y^3$ は原点を退化した臨界点としてもつ．

補題 1.8． 平面の点 p_0 を関数 $z = f(x, y)$ の臨界点とする．座標 (x, y) における Hesse 行列を $H_f(p_0)$, 座標 (X, Y) における Hesse 行列を $\mathcal{H}_f(p_0)$ とする．このとき次が成り立つ．

$$\mathcal{H}_f(p_0) = {}^tJ(p_0)H_f(p_0)J(p_0). \tag{1.7}$$

ただし $J(p_0)$ は Jacobi 行列

$$J(p_0) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial X}(p_0) & \dfrac{\partial x}{\partial Y}(p_0) \\[2ex] \dfrac{\partial y}{\partial X}(p_0) & \dfrac{\partial y}{\partial Y}(p_0) \end{bmatrix} \tag{1.8}$$

である．

証明.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial X^2} = \frac{\partial}{\partial X}\frac{\partial f}{\partial X} &= \frac{\partial}{\partial X}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial X} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial X}\right) \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial X}\frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{\partial x}{\partial X} + \left(\frac{\partial}{\partial X}\frac{\partial f}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial X} \\ &= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial X} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\frac{\partial y}{\partial X}\right)\frac{\partial x}{\partial X} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\frac{\partial x}{\partial X} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial X}\right)\frac{\partial y}{\partial X}, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial X\partial Y} &= \frac{\partial}{\partial X}\frac{\partial f}{\partial Y} = \frac{\partial}{\partial X}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial Y} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial Y}\right) \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial X}\frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{\partial x}{\partial Y} + \left(\frac{\partial}{\partial X}\frac{\partial f}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial Y} \\
&= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial X} + \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\frac{\partial y}{\partial X}\right)\frac{\partial x}{\partial Y} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\frac{\partial x}{\partial X} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial X}\right)\frac{\partial y}{\partial Y}, \\
\frac{\partial^2 f}{\partial Y\partial X} &= \frac{\partial}{\partial Y}\frac{\partial f}{\partial X} = \frac{\partial}{\partial Y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial X} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial X}\right) \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial Y}\frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{\partial x}{\partial X} + \left(\frac{\partial}{\partial Y}\frac{\partial f}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial X} \\
&= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial Y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\frac{\partial y}{\partial Y}\right)\frac{\partial x}{\partial X} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\frac{\partial x}{\partial Y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial Y}\right)\frac{\partial y}{\partial X}, \\
\frac{\partial^2 f}{\partial Y^2} &= \frac{\partial}{\partial Y}\frac{\partial f}{\partial Y} = \frac{\partial}{\partial Y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial Y} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial Y}\right) \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial Y}\frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{\partial x}{\partial Y} + \left(\frac{\partial}{\partial Y}\frac{\partial f}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial Y} \\
&= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial Y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\frac{\partial y}{\partial Y}\right)\frac{\partial x}{\partial Y} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\frac{\partial x}{\partial Y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial Y}\right)\frac{\partial y}{\partial Y}
\end{aligned}
$$

だから

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H}_f(p_0) &= \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial X^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial X\partial Y} \\[2ex] \dfrac{\partial^2 f}{\partial Y\partial X} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial Y^2} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\dfrac{\partial x}{\partial X} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\dfrac{\partial y}{\partial X} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\dfrac{\partial x}{\partial X} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\dfrac{\partial y}{\partial X} \\[2ex] \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\dfrac{\partial x}{\partial Y} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\dfrac{\partial y}{\partial Y} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\dfrac{\partial x}{\partial Y} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\dfrac{\partial y}{\partial Y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial X} & \dfrac{\partial x}{\partial Y} \\[2ex] \dfrac{\partial y}{\partial X} & \dfrac{\partial y}{\partial Y} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial X} & \dfrac{\partial y}{\partial X} \\[2ex] \dfrac{\partial x}{\partial Y} & \dfrac{\partial y}{\partial Y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} \\[2ex] \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial X} & \dfrac{\partial x}{\partial Y} \\[2ex] \dfrac{\partial y}{\partial X} & \dfrac{\partial y}{\partial Y} \end{bmatrix} \\
&= {}^tJ(p_0)H_f(p_0)J(p_0)
\end{aligned}
$$

が成り立つ. □

例 1.9 . 例 1.6 の関数 $z = xy$ は座標変換

$$
\begin{cases} x = X - Y \\ y = X + Y \end{cases} \tag{1.9}
$$

によって

$$xy = (X - Y)(X + Y) = X^2 - Y^2$$

と書き直される．これは式 (1.4) の $g(x, y)$ と同じ関数である．xy と $X^2 - Y^2$ の原点 0 における Hesse 行列は

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

である．座標変換 (1.9) の Jacobi 行列は

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

なので

$${}^t\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

が成り立つ．

系 1.10． 平面の点 p_0 が関数 f の非退化な臨界点であることは座標系の取り方によらない．

1.3 Morse の補題

定理 1.11 (Morse の補題)**．** 平面の点 p_0 が 2 変数関数 f の非退化な臨界点であるとき，p_0 の周りの局所座標系 (X, Y) をうまく選んで，その局所座標系によって表した関数 f の形が，次の 3 つの標準形のどれかになるようにできる．

(i) $f = X^2 + Y^2 + c$,

(ii) $f = X^2 - Y^2 + c$,

(iii) $f = -X^2 - Y^2 + c$.

ここに，c は定数 $(= f(p_0))$ である．また，p_0 は (X, Y) の原点になっている $(p_0 = (0, 0))$.

系 1.12． 2 変数関数 f の非退化な臨界点は孤立した臨界点である．（つまり，

$$C_f := \{f \text{ の臨界点 }\}$$

は平面の離散集合である．）

定義 1.13 (非退化な臨界点の指数)**．** 点 p_0 を 2 変数 f の非退化な臨界点とする．点 p_0 の近傍で適当な局所座標系 (x, y) により f を標準形で表したとき，標準形に現れる符号の数を p_0 の指数という．

1.4 曲面上の Morse 関数

p_0 を曲面 M の点とする．p_0 が曲面 M 上の関数 $f\colon M \to \mathbf{R}$ 臨界点であるとは p_0 の局所座標系で

$$\frac{\partial f}{\partial x}(p_0) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(p_0) = 0 \tag{1.10}$$

が成り立つことをいう．

定義 1.14 (Morse 関数)**．** 曲面 M 上の関数 $f\colon M \to \mathbf{R}$ の臨界点がすべて非退化であるとき，f は **Morse 関数** (Morse function) であるという．

例 1.15 (球面の高さ関数)**．** 直交座標 (x, y, z) をもつ 3 次元空間 $\mathbf{R}^3$ のなかの単位球面

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\} \tag{1.11}$$

を考える．「高さ関数」$f\colon S^2 \to \mathbf{R}$ を $f(x, y, z) = z$ で定めると，f は S^2 上の Morse 関数である．

実際，$p_0 \in S^2$ が f の臨界点となるのは $z = \pm\sqrt{1 - x^2 - y^2}$ の微分

$$f'(p_0) = \left(\frac{\mp x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} \quad \frac{\mp y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} \right)$$

が 0 となるときである．よって p_0 が臨界点となるためには $(x, y) = (0, 0)$ となることが必要十分である．よって，f の臨界点は $p_0 = (0, 0, 1)$, $q_0 = (0, 0, -1)$ の 2 点である．

あとは Hessian の計算．

$$H_f(p_0) = \frac{1}{(1 - x^2 - y^2)^{3/2}} \begin{bmatrix} -1 + y^2 & -xy \\ -xy & -1 + x^2 \end{bmatrix} \Bigg|_{(x,y)=(0,0)} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

なので $\det H_f(p_0) = 1 \neq 0$ である．同様に

$$H_f(q_0) = \frac{1}{(1 - x^2 - y^2)^{3/2}} \begin{bmatrix} 1 - y^2 & xy \\ xy & 1 - x^2 \end{bmatrix} \Bigg|_{(x,y)=(0,0)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

なので $\det H_f(q_0) = 1 \neq 0$ である．したがって，f は S^2 上の Morse 関数である．

定理 1.16 ． 閉曲面 M の上に，非退化な臨界点が 2 つだけの Morse 関数 $f\colon M \to \mathbf{R}$ が存在すれば，M は球面 S^2 に同相である．

2 つの図形 X と Y が**同相** (homeomorphic) であるとは，**同相写像** (homeomorphism)，すなわち可逆な連続写像 $h\colon X \to Y$ でその逆写像 $h^{-1}\colon Y \to X$ が連続なものが存在することをいう．

定義 1.17 ． 曲面 M から曲面 N への同相写像 $h\colon M \to N$ **微分同相写像** (diffeomorphism) であるとは，h と逆写像 h^{-1} がともに C^∞ 級であることをいう．

定理 1.18 (最大値の定理). $f\colon X \to \mathbf{R}$ をコンパクト空間 X の上の連続関数値すると，X の点 p_0 と q_0 で $f(p_0)$ が最大値となり，$f(q_0)$ が最小値となるものが存在する．

補題 1.19 . M_0 上に C^∞ 級関数 $f\colon M_0 \to \mathbf{R}$ で M_0 の 2 つの境界 $C(p_0)$ と $C(q_0)$ の上で一定値をとるとする．また，M_0 上に f の臨界点はないとする．このとき，M_0 は 1 つの境界 $C(q_0)$ と単位閉区間 $[0,1]$ の直積 $C(q_0) \times [0,1]$ に微分同相である．

補題 1.20 . 2 つの円盤 D_0 と D_1 の境界の間に微分同相写像

$$k\colon \partial D_0 \to \partial D_1 \tag{1.12}$$

が与えられると，k は円盤の間の微分同相写像

$$K\colon D_0 \to D_1 \tag{1.13}$$

に拡張できる．

補題 1.21 . 閉曲面 M 上の Morse 関数 $f\colon M \to \mathbf{R}$ の臨界点は有限個しかない．

1.5 ハンドル分解

M: 閉曲面，$f\colon M \to \mathbf{R}$: Morse 関数とし，M: 連結と仮定する．

M の「部分曲面」M_t を

$$M_t = \{p \in M; f(p) \leqq t\} \tag{1.14}$$

で定める．（「劣位集合」とか言ったりするらしい．）$f(p) = t$ である点 p の集合 L_t を等高線という．$L_t = \partial M_t$ である．

M: コンパクトなので

$$A = \max_{p \in M} f(p), \quad a = \min_{p \in M} f(p)$$

とおける．$t < a$ に対し $M_t = \varnothing$, $t > A$ に対し $M_t = M$ である．

定義 1.22 . 実数 c_0 が f の**臨界値** (critical value) であるとは，c_0 が f のある臨界点 p_0 での関数値になっていることをいう．

補題 1.23 . $b < c$ を実数とする．閉区間 $[b,c]$ に f の臨界値が含まれないとする．このとき $M_b \cong M_c$（微分同相）である．

証明. a, A は f の臨界点なので，$a < b < c < A$ としてよい．

$$M_{[b,c]} \coloneqq \{p \in M; b \leqq f(p) \leqq c\} \tag{1.15}$$

とおく．

$$M_{[b,c]} \cup M_b = M_c \tag{1.16}$$

である．仮定より $M_{[b,c]}$ は臨界点をもたない．補題 1.21 より f の臨界点は有限個なので，実数 $\varepsilon > 0$ で $M_{[b-\varepsilon,c]}$ が f の臨界点を含まないものが存在する．定理 2.1 を用いると，

$$M_{[b-\varepsilon,c]} \cong f^{-1}(b-\varepsilon) \times [0,1] = L_{b-\varepsilon} \times [0,1]$$

が成り立つ．$M_{[b-\varepsilon,b]} \subset M_{[b-\varepsilon,c]}$ なので $M_{[b-\varepsilon,b]}$ にも臨界点はない．再び定理 2.1 より，

$$M_{[b-\varepsilon,b]} \cong f^{-1}(b-\varepsilon) \times [0,1] = L_{b-\varepsilon} \times [0,1]$$

が成り立つ．したがって微分同相 $h\colon M_{[b-\varepsilon,b]} \xrightarrow{\sim} M_{[b-\varepsilon,b]}$ が存在する．$h|_{L_{b-\varepsilon}} : L_{b-\varepsilon} \to L_{b-\varepsilon}$ は恒等写像である．$\mathrm{id}_{M_{b-\varepsilon}}$ と $L_{b-\varepsilon}$ で貼り合わせると

$$H = \mathrm{id} \cup h\colon M_{b-\varepsilon} \cup M_{[b-\varepsilon,b]} \xrightarrow{\sim}\colon M_{b-\varepsilon} \cup M_{[b-\varepsilon,c]}$$

が得られる． □

以下，c_0 を f の臨界値とし p_0 を f の臨界点で $f(p_0) = c_0$ となるただ一つのものとする．このとき，実数 $\varepsilon > 0$ で $M_{[c_0-\varepsilon,c_0+\varepsilon]}$ に属する臨界値が c_0 のみであるものが存在する．p_0 の指数で場合分けする．

1.5.1 p_0 の指数が 0 の場合

p_0 のまわりの局所座標 (x,y) で

$$f(x,y) = x^2 + y^2 + c_0$$

とかける．c_0 が f の最小値のとき $M_{c_0-\varepsilon} = \varnothing$ であり

$$\begin{aligned} M_{c_0+\varepsilon} &= \{p \in M; f(p) \leqq c_0 + \varepsilon\} \\ &= \{(x,y); x^2 + y^2 \leqq \varepsilon\} \end{aligned} \tag{1.17}$$

なので $M_{c_0+\varepsilon} \cong D^2$.

c_0 が空集合でないときは

$$M_{c_0+\varepsilon} \cong M_{c_0-\varepsilon} \sqcup D^2. \tag{1.18}$$

1.5.2 p_0 の指数が 1 の場合

p_0 のまわりの局所座標 (x,y) で

$$f(x,y) = -x^2 + y^2 + c_0$$

とかける．$D^1 = [-1,1]$ とおく．$\partial D^1 = \{-1,1\}$ である．

$$M_{c_0+\varepsilon} \cong M_{c_0-\varepsilon} \cup D^1 \times D^1. \tag{1.19}$$

1.5.3　p_0 の指数が 2 の場合

p_0 のまわりの局所座標 (x, y) で

$$f(x, y) = -x^2 - y^2 + c_0$$

とかける．

$$\begin{aligned} M_{c_0-\varepsilon} &= \{p \in M; f(p) \leqq c - \varepsilon\} \\ &= \{(x, y); -x^2 - y^2 \leqq -\varepsilon\} \\ &= \{(x, y); x^2 + y^2 \geqq \varepsilon\} \end{aligned} \tag{1.20}$$

である．

$$M_{c_0+\varepsilon} \cong M_{c_0-\varepsilon} \cup D^2. \tag{1.21}$$

1.5.4　ハンドル分解

定理 1.24．　Morse 関数 $f\colon M \to \mathbf{R}$ が存在するとき，閉曲面 M は有限個の 0,1,2 ハンドルの和として表される．

2　一般次元への拡張

定理 2.1．　$[a, b]$ に f の臨界値がなければ $M_{[a,b]} \cong f^{-1}(a) \times [0, 1]$

参考文献

[M01]　松本幸夫, Morse 理論の基礎, 岩波講座 現代数学の基礎 **27**, 岩波書店 (2001).

[Ike21]　池祐一, 超局所層理論入門, `https://sites.google.com/view/microlocaldustbox/`.

[Ono06]　小野薫, シンプレクティック幾何学における Floer 理論, 数学 **58** (2006), pp.113–132.