

位相空間まとめノート

Toshi2019

2023 年 9 月 21 日 *

位相空間論で調べたことをまとめるノート.

1 局所コンパクト

定義 1.1. X をハウスドルフ空間とする.

1. X の部分集合 $A \subset X$ について, 閉包 \bar{A} がコンパクトであるとき, A は相対コンパクトであるという.
2. 任意の点 $x \in X$ に対して, x の相対コンパクトな開近傍が存在するとき, X は局所コンパクト空間であるという.

例 1.2. 位相多様体 X は局所コンパクトである.

証明. $x \in X$ の近傍 U_x でユークリッド空間の開集合 U'_x と同相なものが存在する. U_x と U'_x の間の同相写像を $\varphi: U_x \rightarrow U'_x$ とする. $\varphi(x)$ を中心とする開球 B_x で U'_x に含まれるものがある. この B_x に対し, $\overline{B_x}$ はコンパクトである. したがって, $\varphi^{-1}(\overline{B_x}) = \overline{\varphi^{-1}(B_x)}$ はコンパクトである. すなわち $\varphi^{-1}(B_x)$ は x の相対コンパクトな開近傍である. \square

2 パラコンパクト性

定義 2.1 (パラコンパクト). ハウスドルフ空間 X がパラコンパクトであるとは, 任意の開被覆が局所有限な細分をもつことをいう.

定義 2.2 (第 2 可算). 位相空間 X が第 2 可算であるとは, 開集合の基底で可算集合であるものが存在することをいう.

定義 2.3 (σ コンパクト). 位相空間 X が σ コンパクトであるとは, コンパクト集合の列 $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ で X の被覆であるものが存在することをいう.

命題 2.4. 位相多様体に対して次の条件 (1)–(3) は同値である.

* 2023/09/21 作成開始

1. 第 2 可算である.
2. リンデレーフである.
3. σ コンパクトである.

参考文献

- [KS90] Masaki Kashiwara, Pierre Schapira, *Sheaves on Manifolds*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 292, Springer, 1990.
- [KS06] Masaki Kashiwara, Pierre Schapira, *Categories and Sheaves*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 332, Springer, 2006.
- [Mat65] 松島与三, 多様体入門, 裳華房, 1965.
- [Sai09] 斎藤毅, 集合と位相, 東京大学出版会, 2009.
- 第 2 可算, σ コンパクトの定義と, 無限遠点で可算との同値性について.
- [Sh16] 志甫淳, 層とホモロジー代数, 共立出版, 2016.