2024/04/23 セミナー資料

大柴寿浩

記号

- 恒等射を id や 1 で表す.
- 集合 U の開近傍系を I_U とかき，点 x の開近傍系を I_x とかく.
- $\mathbf{R}^+$: 正の実数のなす乗法群.

1 フーリエ・佐藤変換 [KS90, section 3.7]

まず錐状層を定義する．そのために作用つきの空間を考える．X を局所コンパクト空間で $\mathbf{R}^+$ の作用 μ が入っているとする．つまり，連続写像 $\mu\colon X \times \mathbf{R}^+ \to X$ で

$$\begin{aligned} \mu(x, t_1 t_2) &= \mu(\mu(x, t_1), t_2) \\ \mu(x, 1) &= x \end{aligned}$$

をみたすものが与えられているとする．

定義 1.1 ([KS90, Definition 3.7.1])**.** (i) 層 $F \in \mathrm{Mod}(A_X)$ が**錐状** (conic) であるとは，X の各軌道 b への制限 $F|_b$ が局所定数層であることをいう．$\mathrm{Mod}(A_X)$ の充満部分圏 $\mathrm{Mod}_{\mathbf{R}^+}(A_X)$ を錐状層からなるものとして定める．
(ii) $\mathsf{D}^+_{\mathbf{R}^+}(X)$ を，各 $j \in \mathbf{Z}$ に対して $H^j(F)$ が錐状のものからなる $\mathsf{D}^+(X)$ の充満部分圏として定める．

錐状層がどのように特徴づけられるかを調べる．次の連続写像を考える．

$$X \xhookrightarrow{j} X \times \mathbf{R}^+ \underset{p}{\overset{\mu}{\rightrightarrows}} X.$$

$j\colon X \to X \times \mathbf{R}^+$ は $x \in X$ を $X \times \mathbf{R}^+$ に $(x, 1)$ として埋め込む写像であり．$p\colon X \times \mathbf{R}^+ \to X$ は X への第 1 射影である．これらの連続写像を用いて，$F \in \mathsf{D}^+(X)$ に対し，次の 2 つの射を構成する．

$$\mu^{-1}F \xleftarrow{\alpha} p^{-1}\mathrm{R}p_*\mu^{-1}F \xrightarrow{\beta} p^{-1}F.$$

α は随伴 $(p^{-1}, \mathrm{R}p_*)$ の余単位 $p^{-1}\mathrm{R}p_* \to 1_{\mathsf{D}^+(X)}$ を $\mu^{-1}F$ に適用することで得られる．β は次のように構成される．

$$
\begin{aligned}
p^{-1}\mathrm{R}p_*\mu^{-1}F &\to p^{-1}\mathrm{R}p_*\mathrm{R}j_*j^{-1}\mu^{-1}F \\
&\cong p^{-1}\mathrm{R}(p\circ j)_*(\mu\circ j)^{-1}F \\
&\cong p^{-1}\mathrm{R}1_{X*}1_X^{-1}F \\
&\cong p^{-1}F.
\end{aligned}
$$

命題 1.2 ([KS90, Proposition 3.7.2])**.** $F \in \mathsf{D}^+(X)$ に対し次の条件 (i)–(v) は同値である．

(i) $F \in \mathsf{D}^+_{\mathbf{R}^+}(X)$

(ii) α と β はどちらも同型である．

(iii) すべての $j \in \mathbf{Z}$ に対し，$H^j(\mu^{-1}F)$ が p の各ファイバーで局所定数層となる．

(iv) $p^{-1}F \cong \mu^{-1}F$.

(v) $p^!F \cong \mu^!F$.

証明． 次の順に証明する．

$$
\begin{tikzcd}
\text{(i)} \arrow[r, Leftrightarrow, "1"] & \text{(iii)} \arrow[dr, Rightarrow, "5"'] & & \text{(iv)} \arrow[ll, Rightarrow, "4"'] \arrow[r, Leftrightarrow, "2"] & \text{(v)} \\
& & \text{(ii)} \arrow[ur, Rightarrow, "3"'] & &
\end{tikzcd}
.
$$

1. (i) $\Leftrightarrow$ (iii): まず，$x \in X$ の $\mathbf{R}^+$ 軌道は $\mu\left(p^{-1}(x)\right)$ と表せることに注意する．実際，x の $\mathbf{R}^+$ 軌道 b は
$$b = \left\{\mu(x,t); t \in \mathbf{R}^+\right\}$$
であり，これは x での p のファイバー
$$p^{-1}(x) = \left\{(x,t); t \in \mathbf{R}^+\right\}$$
の μ による像
$$\mu\left(p^{-1}(x)\right) = \left\{\mu(x,t); (x,t) \in p^{-1}(x)\right\}$$
である．
$$
\begin{aligned}
j_{p^{-1}(x)} &\colon p^{-1}(x) \hookrightarrow X \times \mathbf{R}^+ \\
j_{\mu(p^{-1}(x))} &\colon \mu\left(p^{-1}(x)\right) \hookrightarrow X
\end{aligned}
$$
をそれぞれ包含写像とすると
$$j_{\mu(p^{-1}(x))} \circ \mu = \mu \circ j_{p^{-1}(x)}$$

が成り立つ．したがって，

$$\begin{aligned} H^j\left(\mu^{-1}F\right) &\cong H^j\left(\mu^{-1}F\right)|_{p^{-1}(x)} \\ &\cong j_{p^{-1}(x)}^{-1}H^j\left(\mu^{-1}F\right) \\ &\cong j_{p^{-1}(x)}^{-1}\mu^{-1}H^j(F) \\ &\cong \left(\mu\circ j_{p^{-1}(x)}\right)^{-1}H^j(F) \\ &\cong \left(j_{\mu(p^{-1}(x))}\circ\mu\right)^{-1}H^j(F) \\ &\cong \mu^{-1}j_{\mu(p^{-1}(x))}^{-1}H^j(F) \\ &\cong \mu^{-1}\left(H^j(F)|_{\mu(p^{-1}(x))}\right) \end{aligned}$$

である．引き戻しが定数層なら元の層も定数層であり，定数層の引き戻しも定数層[*1]なので，$H^j(\mu^{-1}F)$ が p の各ファイバーで局所定数層となるのは，$H^j(F)$ が $\mu\left(p^{-1}(x)\right)$ で，すなわち x の $\mathbf{R}^+$ 軌道で局所定数層となるときである．

2. (iv) ⇔ (v): $p^{-1}F\cong p^{-1}\overset{\mathrm{L}}{\otimes}\omega_{X\times\mathbf{R}^+/X}$ と $\mu^{-1}F\cong\mu^{-1}\overset{\mathrm{L}}{\otimes}\omega_{X\times\mathbf{R}^+/X}$ が成り立つ．
3. (ii) ⇔ (iv): α と β が同型なので，互いに逆射となる射

$$\beta\alpha^{-1}\colon\mu^{-1}F\to p^{-1}F,\quad \alpha\beta^{-1}\colon p^{-1}F\to\mu^{-1}F$$

が得られる．したがって，$p^{-1}F\cong\mu^{-1}F$ である．

4. (iv) ⇔ (iii): $\mu^{-1}F\cong p^{-1}F$ とする．$x\in X$ とする．$p^{-1}(x)=\{x\}\times\mathbf{R}^+$ に対し

$$i_{p^{-1}(x)}\colon p^{-1}(x)\hookrightarrow X\times\mathbf{R}^+,\quad i_x\colon\{x\}\hookrightarrow X$$

とおくと次の図式が可換になる．

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(x) \arrow[r, hook, "i_{p^{-1}(x)}"] \arrow[d, "p|_{p^{-1}(x)}"'] & X\times\mathbf{R}^+ \arrow[d, "p"] \\ \{x\} \arrow[r, hook, "i_x"'] & X \end{tikzcd}.$$

したがって，j を整数とすると

$$\begin{aligned} H^j\left(p^{-1}F\right)\Big|_{p^{-1}(x)} &\cong p^{-1}\ H^j(F)\Big|_{p^{-1}(x)} \\ &\cong i_{p^{-1}(x)}^{-1}p^{-1}H^j(F) \\ &\cong \left(p\circ i_{p^{-1}(x)}\right)^{-1}H^j(F) \\ &\cong \left(i_x\circ p|_{p^{-1}(x)}\right)^{-1}H^j(F) \\ &\cong \left(p|_{p^{-1}(x)}\right)^{-1}i_x^{-1}H^j(F) \\ &\cong \left(p|_{p^{-1}(x)}\right)^{-1}H^j(F)_x \\ &\cong \left(H^j(F)_x\right)_{p^{-1}(x)} \end{aligned}$$

[*1] $f\colon Y\to X$ を位相空間の間の連続写像とし，M を加群とする．X 上の層 F の引き戻し $f^{-1}F$ が Y 上の定数層 M_Y になったとすると，$\mathrm{a}_Y=\mathrm{a}_X\circ f$ より，$f^{-1}F\cong M_Y\cong\mathrm{a}_Y^{-1}M\cong f^{-1}\mathrm{a}_X^{-1}M\cong f^{-1}M_X$ である．逆像関手は conservative なので（ホンマか？）$F\cong M_X$ である．

で，定数層となる（よって特に局所定数層となる）.

5. (iii) $\Leftrightarrow$ (ii):

$\square$

2　2024/04/23 のぶん

定理 2.1 ([KS90, Theorem 3.7.7])**.**　$\mathsf{D}^+_{\mathbf{R}_{>0}}(E)$ から $\mathsf{D}^+_{\mathbf{R}_{>0}}(E^*)$ への関手 $\widetilde{\Phi}_{P'}$ と $\widetilde{\Psi}_P$ は自然に同型である．

証明. $\widetilde{\Phi}_{P'}(F) = \mathrm{R}p_{2!}\left(p_1^{-1}F\right)_{P'}$, $\widetilde{\Psi}_P(F) = \mathrm{R}p_{2*}\,\mathrm{R}\Gamma_P(p_1^{-1}F)$ なので，これらを同型で結ぶ．

$$\begin{aligned}\widetilde{\Phi}_{P'}(F) &= \mathrm{R}p_{2!}\left(p_1^{-1}F\right)_{P'} \\ &\cong \mathrm{R}p_{2!}\,\mathrm{R}\Gamma_P\left(p_1^{-1}F\right)_{P'} \\ &\cong \mathrm{R}p_{2!}\left(\mathrm{R}\Gamma_P\left(p_1^{-1}F\right)_{P'}\right) \\ &\cong \mathrm{R}p_{2*}\left(\mathrm{R}\Gamma_P\left(p_1^{-1}F\right)_{P'}\right) \qquad (\#) \\ &\cong \mathrm{R}p_{2*}\,\mathrm{R}\Gamma_P(p_1^{-1}F).\end{aligned}$$

□

定義 2.2 ([KS90, Definition 3.7.8])**.**　$F \in \mathsf{D}^+_{\mathbf{R}_{>0}}(E)$ とする．F の**フーリエ・佐藤変換** (Fourier-Sato transform) $F^\wedge$ を

$$\begin{aligned}F^\wedge &:= \widetilde{\Phi}_{P'}(F)\ \left(= \mathrm{R}p_{2!}\left(p_1^{-1}F\right)_{P'}\right) \\ &\left(\cong \widetilde{\Psi}_P(F) = \mathrm{R}p_{2*}\,\mathrm{R}\Gamma_P(p_1^{-1}F)\right)\end{aligned}$$

で定める．

$G \in \mathsf{D}^+_{\mathbf{R}_{>0}}(E^*)$ とする．G の**逆フーリエ・佐藤変換** (inverse Fourier-Sato transform) $G^\vee$ を

$$\begin{aligned}G^\vee &:= \widetilde{\Psi}_{P'}(F)\ \left(= \mathrm{R}p_{1*}\,\mathrm{R}\Gamma_{P'}(p_2^!G)\right) \\ &\left(\cong \widetilde{\Phi}_P(G) = \mathrm{R}p_{1!}\left(p_2^!G\right)_P\right)\end{aligned}$$

で定める．

定理 2.3 ([KS90, Theorem 3.7.9])**.**　$\mathsf{D}^+_{\mathbf{R}_{>0}}(E)$ から $\mathsf{D}^+_{\mathbf{R}_{>0}}(E^*)$ への関手 $^\wedge$ と $\mathsf{D}^+_{\mathbf{R}_{>0}}(E^*)$ から $\mathsf{D}^+_{\mathbf{R}_{>0}}(E)$ への関手 $^\vee$ は圏同値であり，互いに準逆である．とくに，F と F' を $\mathsf{D}^+_{\mathbf{R}_{>0}}(E)$ の対象とするとき，

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{D}^+_{\mathbf{R}_{>0}}(E)}(F', F) \cong \mathrm{Hom}_{\mathsf{D}^+_{\mathbf{R}_{>0}}(E)}(F'^\wedge, F^\wedge)$$

が成りたつ．

補題 2.4 ([KS90, Lemma 3.7.10])**.**　(i) γ を E の固有閉凸錐で零切断を含むものとする．このとき，次が成り立つ．

$$(A_\gamma)^\wedge \cong A_{\mathrm{Int}\,\gamma^\circ}.$$

(ii) U を E の開凸錐とする．このとき次が成り立つ．

$$(A_U)^\wedge \cong A_{U^{\circ a}} \otimes \mathrm{or}_{E^*/Z}[-n].$$

注意 2.5 ([KS90, Remark 3.7.11])**.** RMK

命題 2.6 ([KS90, Proposition 3.7.12])**.** $F \in \mathsf{D}^{+}_{\mathbf{R}_{>0}}(E)$ とする．

(i) $F^{\wedge\wedge} \cong F^{a} \otimes \mathrm{or}_{E/Z}[-n]$.

(ii) U を E^{*} の開凸集合とすると

$$\mathrm{R}\Gamma(U; F^{\wedge}) \cong \mathrm{R}\Gamma_{U^{\circ}}(\tau^{-1}\pi(U); F) \cong \mathrm{R}\Gamma_{U^{\circ}}(E; F).$$

(iii) γ を E^{*} の固有閉凸錐で零切断を含むものとすると

$$\mathrm{R}\Gamma_{\gamma}(E^{*}; F^{\wedge}) \cong \mathrm{R}\Gamma(\mathrm{Int}\,\gamma^{\circ a}; F) \otimes \mathrm{or}_{E/Z}[-n].$$

(iv) 次が成り立つ．

$$(\mathrm{D}'F)^{\vee} \cong \mathrm{D}'(F^{\wedge}), \quad (\mathrm{D}F)^{\vee} \cong \mathrm{D}(F^{\wedge}).$$

命題 2.7 ([KS90, Proposition 3.7.13])**.** (i) $F \in \mathsf{D}^{+}_{\mathbf{R}_{>0}}(E)$ とする．このとき次が成り立つ．

$$(f_{\tau}^{!}F)^{\wedge} \cong f_{\pi}^{!}(F^{\wedge}), \quad (f_{\tau}^{-1}F)^{\wedge} \cong f_{\pi}^{-1}(F^{\wedge}).$$

(ii) $G \in \mathsf{D}^{+}_{\mathbf{R}_{>0}}(E')$ とする．このとき次が成り立つ．

$$(\mathrm{R}f_{\tau *}G)^{\wedge} \cong \mathrm{R}f_{\pi *}(G^{\wedge}), \quad (\mathrm{R}f_{\tau !}G)^{\wedge} \cong \mathrm{R}f_{\pi !}(G^{\wedge}),$$

命題 2.8 ([KS90, Proposition 3.7.14])**.** (i) $F \in \mathsf{D}^{+}_{\mathbf{R}_{>0}}(E_1)$ とする．このとき次が成り立つ．

$$\begin{aligned}
{}^{t}f^{-1}(F^{\wedge}) &\cong (\mathrm{R}f_{!}F)^{\wedge}, \\
{}^{t}f^{!}(F^{\vee}) &\cong (\mathrm{R}f_{*}F)^{\vee}, \\
{}^{t}f^{!}(F^{\wedge}) &\cong (\mathrm{R}f_{*}F)^{\wedge} \otimes \omega_{E_2^{*}/E_1^{*}}, \\
{}^{t}f^{!}(F^{\vee}) &\cong (\mathrm{R}f_{!}F)^{\vee} \otimes \omega_{E_2^{*}/E_1^{*}}.
\end{aligned}$$

(ii) $G \in \mathsf{D}^{+}_{\mathbf{R}_{>0}}(E_2)$ とする．このとき次が成り立つ．

$$\begin{aligned}
(f^{-1}F)^{\vee} &\cong \mathrm{R}{}^{t}f_{!}(G^{\vee}), \\
(f^{!}F)^{\wedge} &\cong \mathrm{R}{}^{t}f_{*}(G^{\wedge}), \\
(\omega_{E_1/E_2} \otimes f^{!}G)^{\vee} &\cong \mathrm{R}{}^{t}f_{*}(G^{\vee}), \\
(\omega_{E_1/E_2} \otimes f^{-1}G)^{\wedge} &\cong \mathrm{R}{}^{t}f_{!}(G^{\wedge}).
\end{aligned}$$

命題 2.9 ([KS90, Proposition 3.7.15])**.** $F_i \in \mathsf{D}^{+}_{\mathbf{R}_{>0}}(E_i)$, $i = 1, 2$ とする．このとき次が成り立つ．

$$F_1^{\wedge} \overset{\mathrm{L}}{\underset{Z}{\boxtimes}} F_2^{\wedge} \cong \left(F_1 \overset{\mathrm{L}}{\underset{Z}{\boxtimes}} F_2 \right)^{\wedge}.$$

3　その他やったこと

(#) の部分の証明．　p_2 が $Z \underset{Z}{\times} E^*$ 上で固有であることを示せば，$\mathrm{supp}(\mathrm{R}\Gamma_P(p_1^{-1}F)_{P'})$ で固有となるので，$\mathrm{R}p_{2!} \cong \mathrm{R}p_{2*}$ となる．$K \subset E^*$ をコンパクト集合とする．$(p_2|_{Z \underset{Z}{\times} E^*})^{-1}(K)$ がコンパクトとなることを示す．

$$\begin{aligned}(p_2|_{Z \underset{Z}{\times} E^*})^{-1}(K) &= \left\{(z,y) \in Z \underset{Z}{\times} E^*; p_2(z,y) \in K\right\} \\ &= \{(z,y) \in Z \times K; \mathrm{id}_Z(z) = \pi(y)\} \\ &= \{(z,y) \in Z \times K; z = \pi(y)\} \\ &= \pi(K) \times K\end{aligned}$$

である．連続写像によるコンパクト集合の像はコンパクトなので $\pi(K)$ はコンパクトである．さらに，コンパクト集合の積はコンパクトなので $\pi(K) \times K$ はコンパクトである．　□

命題 3.1.　X を局所コンパクト空間とし，F を X 上の層とする．次の同型が成り立つ．

$$\varinjlim_{K \subset X} H^j_K(X;F) \cong H^j_c(X;F).$$

証明． F の脆弱層による分解 $F \overset{\mathrm{qis}}{\sim} I^\bullet$ を取れば，$\mathrm{R}\Gamma_K(X;F)^i \cong \Gamma_K(X;I^i)$, $\mathrm{R}\Gamma_c(X;F)^i \cong \Gamma_c(X;I^i)$ である．したがって，一般に層 $F \in \mathrm{Sh}(X)$ に対して

$$\varinjlim_{K \subset X} \Gamma_K(X;F) \cong \Gamma_c(X;F)$$

が成り立つことを示せばよい．　□

参考文献

[BouTG1] ブルバキ, 位相 1, 東京図書, 1968.

[BouTVS] ブルバキ, 位相線形空間 1, 東京図書, 1968.

[B+84] Borel, *Intersection Cohomology*, Progress in Mathematics, 50, Birkhäuser, 1984.

[G58] Grauert, *On Levi's problem and the embedding of real analytic manifolds*, Ann. Math. 68, 460–472 (1958).

[GP74] Victor Guillemin, Alan Pollack, *Differential Topology*, Prentice-Hall, 1974.

[HS23] Andreas Hohl, Pierre Schapira, *Unusual Functorialities for weakly constructible sheaves*, 2023.

[KS90] Masaki Kashiwara, Pierre Schapira, *Sheaves on Manifolds*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 292, Springer, 1990.

[KS06] Masaki Kashiwara, Pierre Schapira, *Categories and Sheaves*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 332, Springer, 2006.

[Le13] John M. Lee, *Introduction to Smooth Manifolds*, Second Edition, Graduate Texts in Mathematics, **218**, Springer, 2013.

[Mo76] 森本光生, 佐藤超函数入門, 共立出版, 1976.

[R55] de Rham, *Variétés différentiables*, Hermann, Paris, 1955.

[Sa59] Mikio Sato, *Theory of Hyperfunctions*, 1959–60.

[S66] Schwartz, *Théorie de distributions*, Hermann, Paris, 1966.

[Sh16] 志甫淳, 層とホモロジー代数, 共立出版, 2016.

[SP] The Stacks Project.

[Sp65] Michael Spivak, *Calculus on Manifolds*, Benjamin, 1965.

[Ike21] 池祐一, 超局所層理論概説, 2021.

[Tak17] 竹内潔, $\mathcal{D}$ 加群, 共立出版, 2017.

[Ue] 植田一石, ホモロジー的ミラー対称性, `https://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~kazushi/course/hms.pdf` 2024/02/04 最終閲覧.