ベクトル束と局所自由層

2024 年 6 月 5 日更新 *

はじめに

ベクトル束の一定階数をもつ射の核・余核は再びベクトル束となる．高次元の多様体上のベクトル束はアーベル圏を成さないが，ベクトル束を局所自由層とみると，層のアーベル圏の中で核・余核を関手的に定めることができる．（ただし，核と余核は局所自由とは限らなくなる．）ここではベクトル束から局所自由層を構成する方法を説明し，一定階数の場合にはこの対応が圏同値を引き起こすことを示す．

記号

次の記号は断りなく使う．

- 添字：なんらかの族 $(a_i)_{i\in I}$ を $(a_i)_i$ とか (a_i) と略記することがある．
- 近傍：位相空間 X の点 x や部分集合 Z に対し，その開近傍系をそれぞれ I_x や I_Z で表す．これらは，包含関係の逆で有向順序集合をなす．
- $\mathcal{A}$ 構造：$\mathcal{A}$ 多様体 M 上の $\mathcal{A}$ ベクトル束や $\mathcal{A}$ 加群というとき，$\mathcal{A}$ は $\mathcal{C}^\infty_M$ または $\mathcal{O}_M$ を表す．

1　ベクトル束

2　層

M を $\mathcal{A}$ 多様体とする．このとき，$\mathcal{A}$ を M 上の環（の層）とする．

* 2024 年 6 月 5 日かきはじめ

3　関手

E を M 上の $\mathcal{A}$ ベクトル束とする．このとき，M の任意の開集合 U に対し，$\mathcal{E}(U)$ を

$$\mathcal{E}(U) \coloneqq \{\sigma \colon U \to E; \sigma \text{ は } E \text{ の切断}\} \tag{3.1}$$

とおくと，$U \mapsto \mathcal{E}(U)$ は前層を定める．実は $\mathcal{E}$ は層になる．$E \mapsto \mathcal{E}$ を α で表すことにする．

4　圏同値

命題 4.1.　関手 α は圏同値

$$\{\text{階数 } d \text{ の } \mathcal{A} \text{ ベクトル束}\} \xrightarrow{\sim} \{\text{階数 } d \text{ の局所自由 } \mathcal{A} \text{ 加群}\} \tag{4.1}$$

を誘導する．

参考文献

[Sab07] Claude Sabbah, *Isomonodromic Deformations and Frobenius Manifolds*, Universitext, Springer, 2007.