

# simplex category (単体圏) について

Toshi2019

## 概要

単体圏の性質についてまとめる.

## 記号など

- 1 点から成る集合を  $\{\text{pt}\}$  で表す.
- 集合  $X$  の基数を  $|X|$  とか  $\#X$  とか  $\text{Card } X$  で表す.
- 圏  $\mathcal{C}$  の始対象を  $\varnothing_{\mathcal{C}}$ , 終対象を  $\text{pt}_{\mathcal{C}}$  で表す.
- 圏  $\mathcal{C}$  の対象  $X$  から  $Y$  への射の集合を  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$  や  $\mathcal{C}(X, Y)$  で表す.
- 有限集合とその間の写像のなす圏を  $\text{Set}^f$  で表す.

## 1 単体的圏

[KS06] を参考にした.

定義 1.1. 単体圏 (simplex category)<sup>\*1</sup>  $\Delta$  を次で定める.

$$\begin{aligned}\text{Ob}(\Delta) &:= \{\text{有限全順序集合}\}, \\ \text{Hom}_{\Delta}(\sigma, \tau) &:= \{u: \sigma \rightarrow \tau; u \text{ は順序を保つ写像}\}.\end{aligned}$$

射の合成は写像の合成で定める.

$\Delta$  の部分圏  $\tilde{\Delta}$  を次で定める.

$$\begin{aligned}\text{Ob}(\tilde{\Delta}) &:= \{\sigma \in \Delta; \sigma \neq \varnothing\}, \\ \text{Hom}_{\tilde{\Delta}}(\sigma, \tau) &:= \{u \in \text{Hom}_{\Delta}(\sigma, \tau); u \text{ は最大元と最小元を保つ}\}.\end{aligned}$$

有限全順序集合  $[n, m]$  を  $\{k \in \mathbf{Z}; n \leq k \leq m\}$  で定める.  $[0, n]$  をたんに  $[n]$  とかくことが多い.

<sup>\*1</sup>[KS06] では,  $\Delta$  のことを simplicial category (単体的圏) と呼んでいるが, [Ri16] とか [RV22] ではこう呼んでいたのだから合わせる. [Lu09] では別の概念を表すのに simplicial category を使っていたので, 衝突しないようにする意図もある.

以下単体圏の性質を述べる.

**命題 1.2.** うめこみ関手  $\iota: \Delta \hookrightarrow \mathbf{Set}^f$  は半充満かつ忠実である.

**注意 1.3.** 関手  $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$  が半充満 (half-full) であるとは, 任意の対象  $X, Y \in \mathcal{C}$  に対し,  $F(X) \cong F(Y)$  ならば,  $X$  と  $Y$  の間の同型が存在することをいう. ただし,  $\mathcal{C}'$  における同型  $F(X) \xrightarrow{\sim} F(Y)$  は  $\mathcal{C}$  における同型  $X \rightarrow Y$  から来るものでなくともよい.

$\mathcal{C}$  の部分圏  $\mathcal{C}'$  が半充満であるとは, うめこみ関手  $\mathcal{C} \hookrightarrow \mathcal{C}'$  が半充満であることをいう.

**命題 1.2 の証明** まず  $\iota$  が半充満であることを示す.  $\sigma, \tau \in \Delta$  を  $\iota(\sigma) \cong \iota(\tau)$  をみたすものとする  
と,  $\# \sigma = \# \tau$  である. □

## 参考文献

- [KS06] Masaki Kashiwara, Pierre Schapira, *Categories and Sheaves*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 332, Springer, 2006.
- [La21] Markus Land, *Introduction to Infinity-Categories*, Compact Textbooks in Mathematics, Birkhäuser Cham, 2021.
- [Lu09] Jacob Lurie, *Higher Topos Theory*, Annals of Mathematics Studies 170, Princeton University Press, 2009.
- [Ri16] Emily Riehl, *Category Theory in Context*, Dover Publications, 2016.
- [RV22] Emily Riehl, Dominic Verity, *Elements of  $\infty$ -Category Theory*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics (194) Cambridge University Press, 2022.