2024/01/18 セミナー資料

大柴寿浩

2024/01/18

1 向きづけと双対性 [KS90, 3.3]

1.1 前回示したもの

次がある．

$$f^{-1}(\cdot) \otimes \omega_{Y/X} \to f^!(\cdot). \tag{1.1}$$

$F \in \mathsf{D}^{\mathrm{b}}(A_X)$ に対して次が成り立つ．

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{D}^{\mathrm{b}}(A_X)}(F, \omega_X) \cong \mathrm{Hom}_{\mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathrm{Mod}(A))}(\mathrm{R}\Gamma_c(X; F), A), \tag{1.2}$$

$$\mathrm{RHom}(F, \omega_X) \cong \mathrm{RHom}(\mathrm{R}\Gamma_c(X; F), A). \tag{1.3}$$

定義 1.1. $f\colon Y \to X$ を局所コンパクト空間の間の連続写像とする．f がファイバー次元 l の**位相的沈めこみ** (topological submersion) であるとは，Y の各点 y に対して，y の開近傍 $V \in I_y$ で，$U = f(V)$ が X の開集合であり，次の図式が可換になることをいう．

$$\begin{tikzcd} U \times \mathbf{R}^l \arrow[r, "h", "\sim"'] \arrow[dr, "\mathrm{pr}_1"'] & V \arrow[d, "f|_V"] \\ & U. \end{tikzcd}$$

例. X, Y が C^1 級多様体で f を C^1 沈めこみとすると，f は位相的沈めこみである．

1.2 今回

命題 1.2. $f\colon Y \to X$ をファイバー次元 l の位相的沈めこみとする．

(i) $k \neq -l$ に対し $H^k(f^! A_X) = 0$ であり，局所的に $H^{-l}(f^! A_X) \cong A_Y$ である．
(ii) $f^{-1}(\cdot) \otimes \omega_{Y/X} \to f^!(\cdot)$ は同型である．

証明. まず $Y = \mathbf{R}^l$, $X = \{\mathrm{pt}\}$ の場合に (i) を示す．(1.3) より任意の開集合 $U \subset Y$ に対し，

$$\mathrm{R}\Gamma(U; f^! A_X) \cong \mathrm{RHom}(\mathrm{R}\Gamma_c(U; A_Y), A)$$

である．さらに，$U \approx \mathbf{R}^l$ なら

$$\mathrm{R}\Gamma_c(U; A_Y) \cong A[-l]$$

であり，

$$H^j(U; f^! A_X) \cong 0 \quad (j \neq -l)$$
$$\Gamma(U; H^{-l}(f^! A_X)) \cong \mathrm{Hom}(H_c^l(U; A_Y), A)$$

である．

一般の場合，局所的に考えて $Y = \mathbf{R}^l \times X$ とし，$f = \mathrm{pr}_2$ とする．$p = \mathrm{pr}_1 \colon Y \to \mathbf{R}^l$ とおく．

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{R}^l \times X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, phantom, "\Box"] & X \arrow[d, "\mathrm{a}_X"] \\
\mathbf{R}^l \arrow[r, "\mathrm{a}_{\mathbf{R}^l}"'] & \{\mathrm{pt}\}.
\end{tikzcd}$$

固有基底変換から射 $p^{-1}\omega_{\mathbf{R}^l} = p^{-1}\mathrm{a}_{\mathbf{R}^l}^! A \to f^! \mathrm{a}_X^{-1} A = f^! A_X$ が定まる．任意の $F \in \mathsf{D}^+(A_X)$ に対し，この射と (1.1) から次の射が定まる．

$$p^{-1}\omega_{\mathbf{R}^l} \otimes f^{-1}F \to f^! A_X \otimes f^{-1}F \to f^{-1}F. \tag{1.4}$$

これが同型になることを示す．$U \subset \mathbf{R}^l$, $V \subset X$ とする．$h \colon U \approx \mathbf{R}^l$ のとき，位相的沈めこみの図式は

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{R}^l \times V \arrow[r, "h \times \mathrm{id}_X", "\sim"'] \arrow[dr, "\mathrm{pr}_2"'] & U \times V \arrow[d, "f|_{U \times V}"] \\
& V
\end{tikzcd}$$

となる．

$$\begin{aligned}
&\mathrm{R}\Gamma(U \times V; f^! F) \\
&\cong \mathrm{RHom}_Y(A_{U \times V}, f^! F) && \Gamma \text{ の定義} \\
&\cong \mathrm{RHom}_X(\mathrm{R}f_! A_{U \times V}, F) && \text{ポアンカレ・ヴェルディエ双対} \\
&\cong \mathrm{RHom}_X(\mathrm{R}\Gamma_c(U; A_U) \otimes^{\mathrm{L}} A_V, F) && (\natural) \\
&\xleftarrow{\sim} \mathrm{RHom}(\mathrm{R}\Gamma_c(U; A_U), A) \otimes^{\mathrm{L}} \mathrm{RHom}(A_V, F) && (\flat) \\
&\xleftarrow{\sim} \mathrm{R}\Gamma(U; \omega_{\mathbf{R}^l}) \otimes^{\mathrm{L}} \mathrm{R}\Gamma(V; F) && \text{上で示した}
\end{aligned}$$

となる．ただし ($\natural$) の部分は

$$\begin{aligned}
\mathrm{R}f_! A_{U \times V} &\cong \mathrm{R}f_! \left(A_{U \times V} \otimes A_{U \times V}\right) \\
&\cong \mathrm{R}f_! \left(\mathrm{a}_{U \times V}^{-1} A \otimes \mathrm{a}_{U \times V}^{-1} A\right) \\
&\cong \mathrm{R}f_! \left(p^{-1}\mathrm{a}_U^{-1} A \otimes f^{-1}\mathrm{a}_V^{-1} A\right) \\
&\cong \mathrm{R}f_! \left(p^{-1}A_U \otimes f^{-1}A_V\right)
\end{aligned}$$

であり，射影公式から，

$$\mathrm{R}f_! \left(p^{-1}A_U \otimes f^{-1}A_V\right) \cong \mathrm{R}f_! p^{-1}A_U \otimes A_V$$

であり，固有基底変換から，

$$\begin{aligned} \mathrm{R}f_! p^{-1}A_U \otimes f^{-1}A_V &\cong \mathrm{a}_V^{-1}\mathrm{R}\mathrm{a}_{U!}A_U \otimes A_V \\ &\cong \mathrm{a}_V^{-1}\,\mathrm{R}\Gamma_c(U; A_U) \otimes A_V \end{aligned}$$

となることから従う．($\flat$) の部分は分かってない．

以上より (1.4) は同型である．(ii) から (i) が従う． □

定義 1.3. $f\colon Y \to X$ をファイバー次元が l の位相的しずめ込みとする．

$$\mathrm{or}_{Y/X} := H^{-l}(\omega_{Y/X}) \in \mathrm{Mod}(A_Y)$$

とおき，**相対向きづけ層** (relative orientation sheaf) と呼ぶ．$X = \{\mathrm{pt}\}$ のとき，or_Y とかき，向きづけ層という．

命題 1.2 より，

$$\omega_{Y/X} \cong \mathrm{or}_{Y/X}[l] \tag{1.5}$$

である．

チェック． $\mathrm{or}_{Y/X}$ を 0 時に集中した複体とみなす．このとき，$\left(\mathrm{or}_{Y/X}[l]\right)^n = H^{-l}(\omega_{Y_X})$ となるのは $n = -l$ のときである．したがって，

$$H^{-l}(\mathrm{or}_{Y/X}[l]) = H^{-l}(\omega_{Y/X})$$

である． □

命題 1.4. $f\colon Y \to X$ をファイバー次元が l の位相的しずめ込みとする．

(i) $\omega^{\mathbf{Z}}_{Y/X} \in \mathsf{D}^+(\mathbf{Z}_Y)$ と $\mathrm{or}^{\mathbf{Z}}_{Y/X} \in \mathrm{Mod}(\mathbf{Z}_Y)$ を $\mathbf{Z}$ 上の双対化複体と向きづけ層とするとき，次の同型が成り立つ．

$$\omega_{Y/X} \cong A_Y \underset{\mathbf{Z}_Y}{\otimes} \omega^{\mathbf{Z}}_{Y/X}, \quad \mathrm{or}_{Y/X} \cong A_Y \underset{\mathbf{Z}_Y}{\otimes} \mathrm{or}^{\mathbf{Z}}_{Y/X}.$$

(ii) 次の自然な同型が成り立つ．

$$\begin{aligned} \mathrm{or}_{Y/X} \otimes \mathrm{or}_{Y/X} &\cong A_Y, \\ \mathscr{H}om(\mathrm{or}_{Y/X}, A_Y) &\cong A_Y. \end{aligned}$$

(iii) $g\colon Z \to Y$ を連続写像で $f \circ g$ がファイバー次元 m の位相的しずめ込みになるものとする．$F \in \mathsf{D}^+(A_X)$ に対して，

$$g^! \circ f^{-1}F \cong (f \circ g)^{-1}\, F \otimes \mathrm{or}_{Z/X} \otimes g^{-1}\mathrm{or}_{Y/X}[m-l]$$

が成り立つ．

証明．(i) 命題 1.2 (ii) より，

$$A_Y \otimes_{\mathbf{Z}_Y} \omega^{\mathbf{Z}}_{Y/X} \cong f^{-1}A_X \otimes_{\mathbf{Z}_Y} f^!\mathbf{Z}_X \cong f^!(A_X) = \omega_{Y/X}$$

と

$$A_Y \otimes_{\mathbf{Z}_Y} \mathrm{or}^{\mathbf{Z}}_{Y/X} \cong f^{-1}A_X \otimes_{\mathbf{Z}_Y} f^!\mathbf{Z}_X[-l] \cong f^!(A_X[-l]) \cong \omega_{Y/X}[-l] = \mathrm{or}_{Y/X}$$

(ii) [KS90, Exercise III.3]

> $X \in \mathsf{Top}$ とし，$F \in \mathrm{Sh}(X)$ を $\mathbf{Z}_X$ に局所的に同型な層とする．このとき，
>
> $$F \otimes F \cong \mathbf{Z}_Z, \quad \mathrm{D}'F \cong F$$
>
> が成り立つことを示せ．

の結果を用いると，

$$\mathrm{or}^{\mathbf{Z}}_{Y/X} \otimes \mathrm{or}^{\mathbf{Z}}_{Y/X} \cong Z_Y$$

であり，これの両辺に A_Y をかければ，

$$\mathrm{or}_{Y/X} \otimes \mathrm{or}_{Y/X} \cong \left(\mathrm{or}^{\mathbf{Z}}_{Y/X} \otimes \mathrm{or}^{\mathbf{Z}}_{Y/X}\right) \otimes A_Y \cong Z_Y \otimes A_Y \cong A_Y$$

である．

(iii) 命題 1.2 と前の結果から

$$\begin{aligned}\left(g^! f^! F =\right) (f \circ g)^! F &\cong (f \circ g)^! A_X \otimes (f \circ g)^{-1} F \\ &\cong \omega_{Z/X} \otimes (f \circ g)^{-1} F \\ &\cong \mathrm{or}_{Z/X}[m] \otimes (f \circ g)^{-1} F\end{aligned}$$

と

$$f^! F \cong f^{-1} F \otimes \omega_{Y/X} \cong f^{-1} F \otimes \mathrm{or}_{Y/X}[l]$$

が成り立つ．いま

$$\begin{aligned}g^! \left(f^{-1} F \otimes \mathrm{or}_{Y/X}[l]\right) &\cong g^! \left(f^! F\right) \\ &\cong (f \circ g)^! F \\ &\cong \mathrm{or}_{Z/X}[m] \otimes (f \circ g)^{-1} F\end{aligned}$$

に $g^{-1}\mathrm{or}_{Y/X}[-l]$ をかけると

$$g^! \left(f^{-1} F \otimes \mathrm{or}_{Y/X}[l]\right) \otimes g^{-1}\mathrm{or}_{Y/X}[-l] \cong \mathrm{or}_{Z/X}[m] \otimes (f \circ g)^{-1} F \otimes g^{-1}\mathrm{or}_{Y/X}[-l]$$

が成り立つ．左辺は

$$\begin{aligned}g^! \left(f^{-1} F \otimes \mathrm{or}_{Y/X}[l]\right) \otimes g^{-1}\mathrm{or}_{Y/X}[-l] &\cong g^! \left(f^{-1} F \otimes \mathrm{or}_{Y/X}[l] \otimes \mathrm{or}_{Y/X}[-l]\right) \\ &\cong g^! \circ f^{-1} F\end{aligned}$$

であり，右辺は

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{or}_{Z/X}[m] \otimes (f \circ g)^{-1} F \otimes g^{-1} \mathrm{or}_{Y/X}[-l] \\
\cong &\mathrm{or}_{Z/X} \otimes (f \circ g)^{-1} F \otimes g^{-1} \mathrm{or}_{Y/X}[m-l]
\end{aligned}
$$

となることから主張が従う． □

付録 A　前回の補足

A.1　はめ込み・うめ込み・しずめ込み

参考文献は [GP74]．X, Y を多様体とする．$d_X := \dim X$, $d_Y := \dim Y$ とかく．

■局所微分同相　$d_X = d_Y$ とする．$f\colon X \to Y$ が $x \in X$ において**局所微分同相写像** (local diffeomorphism) であるとは，x の近傍 U と $y = f(x)$ の近傍 V で U と V が微分同相となるものが存在することをいう．逆写像定理から，f が x において局所微分同相であるためには，接写像 $df_x\colon T_xX \to T_{f(y)}Y$ が同形であることが必要十分である．

例 付録 A.1.　1 次元多様体 $\mathbf{R}$ から S^1 への写像 $f\colon \mathbf{R} \to S^1$ を

$$f(t) := (\cos t, \sin t)$$

で定める．$\operatorname{rank} df_t = \operatorname{rank}(-\sin t, \cos t) \equiv 1$ である．f は局所微分同相写像であるが，微分同相写像ではない．

■はめ込み　$d_X < d_Y$ のとき，$\operatorname{rank} df_x \leqq d_X$ であり，df_x は全射にはなりえない．df_x が単射となるのは $\operatorname{rank} df_x = d_X$ のときである．

定義 付録 A.2.　X, Y を C^1 級多様体とする．$f\colon X \to Y$ が x において**はめ込み** (immersion) であるとは，$df_x\colon T_xX \to T_{f(y)}Y$ が単射であることをいう．各点 $x \in X$ で $df_x\colon T_xX \to T_{f(y)}Y$ が単射であるとき，f をはめ込みという．

■うめ込み　はめ込みは局所的な条件である．大域的な性質を得るには位相的な条件が必要である．

定義 付録 A.3.　X, Y を C^1 級多様体とする．$f\colon X \to Y$ が**うめ込み** (embedding, imbedding) であるとは，各点 $x \in X$ で $df_x\colon T_xX \to T_{f(y)}Y$ が単射であり，f が X から $f(X)$ の上への微分同相であることをいう．

f がうめ込みであることは，f が単射かつ固有なはめ込みであることと同値である．

■しずめ込み　$d_X > d_Y$ のとき，df_x は単射になりえない．

定義 付録 A.4.　X, Y を C^1 級多様体とする．$f\colon X \to Y$ が x において**しずめ込み** (submersion) であるとは，$df_x\colon T_xX \to T_{f(y)}Y$ が全射であることをいう．各点 $x \in X$ で $df_x\colon T_xX \to T_{f(y)}Y$ が全射であるとき，f をたんにしずめ込みという．

f が全射であることを課すこともある．X がコンパクト，Y が連結であるとき，しずめ込み $f\colon X \to Y$ は全射である．

例 付録 A.5.　接束 TX から X への射影 $\pi\colon TX \to X$ はしずめ込みである．

A.2 位相的はめ込み・うめ込み・しずめ込み

[Le13] に滑らかでない場合のうめ込みとしずめ込みに関する記述があったのでまとめておく．

X, Y が位相空間であるとき，**位相的うめ込み** (topological embedding, – imbedding) を $f\colon X \to Y$ が中への同相であることとして定義する[*1]．

定義 付録 A.6. X, Y を位相空間とする．$f\colon X \to Y$ が，**位相的はめ込み** (topological immersion) であるとは，各点 $x \in X$ に対し，その近傍 U で $f|_U$ が位相的うめ込みであることをいう．

定義 付録 A.7. X, Y を位相空間とする．$f\colon X \to Y$ が，**位相的しずめ込み** (topological submersion) であるとは，各点 $x \in X$ が，局所切断 $\pi\colon Y \to X$ の像に含まれることをいう．

これと [KS90, Definition 3.3.1] の関係についてはまだ調べている途中．

参考文献

[GP74] Victor Guillemin, Alan Pollack, *Differential Topology*, Prentice-Hall, 1974.

[KS90] Masaki Kashiwara, Pierre Schapira, *Sheaves on Manifolds*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 292, Springer, 1990.

[Le13] John M. Lee, *Introduction to Smooth Manifolds*, Second Edition, Graduate Texts in Mathematics, **218**, Springer, 2013.

[Sp65] Michael Spivak, *Calculus on Manifolds*, Benjamin, 1965.

[*1] 他の文脈だとこちらを immersion と呼ぶ本もあるらしい．例えば代数幾何関係だと，Hartshorne, Liu, 飯高, 上野の本は全て immersion と呼んでいる．訳語について，飯高は埋入，上野は移入と訳している．