Morse 理論

Toshi2019

2022 年 10 月 6 日

概要

2022 年度秋セメスターで行う Morse 理論ゼミのための勉強ノート．実質 [M01] の読書ノート．

はじめに

個人的なモチベはシンプレクティック幾何と層の超局所理論に由来する．前者に関して，どうやら Morse 理論はシンプレクティック幾何の原型になっているらしいので，本格的に勉強する前に，Morse 理論をかじっておこうというモチベ．後者に関して，層の超局所理論は層理論における Morse 理論という見方ができるらしい．そういった幾何的な見方がわかるようになりたいというのも一つのモチベ．なので低次元トポロジーにはそこまで興味があるわけではない．

凡例

- 関数：断りがなければ関数は実数値の写像とする．
- 偏微分作用素：$\partial/\partial x$ を ∂_x で表すことがある．

1　曲面上の Morse 理論

1.1　関数の臨界点

$u < v$ を実数とし，$y = f(x)$ を開区間 (u, v) で定義された C^∞ 級関数とする．(u, v) の点 a が $y = f(x)$ の臨界点であるとは，

$$f'(a) = 0 \tag{1.1}$$

であることをいう．

$u < v$ を実数とし，$y = f(x)$ を開区間 (u, v) で定義された C^∞ 級関数とし，(u, v) の点 a を $y = f(x)$ の臨界点とする．このとき，$x = a$ が $y = f(x)$ の**退化した臨界点** (degenerate critical point) とは

$$f''(a) = 0 \tag{1.2}$$

であることをいう．$x = a$ が退化していないとき，**非退化な臨界点** (nondegenerate critical point) であるという．

例 1.1. 1. $y = f(x) = x^2$ とおく．$f'(x) = 2x$ なので，$f'(0) = 0$ である．$f''(x) = 2$ なので，$f''(0) \neq 0$ である．よって $x = 0$ は $y = x^2$ の非退化な臨界点である．

2. 自然数 $n \geqq 3$ に対し $y = f(x) = x^n$ とおく．$f'(x) = nx^{n-1}$ なので，$f'(0) = 0$ である．$f''(x) = n(n-1)x^{n-2}$ なので，$f''(0) = 0$ である．したがって $x = 0$ は $y = x^n$ の退化した臨界点である．

1.2 Hesse 行列

定義 1.2 . U を平面 $\mathbf{R}^2$ の開集合とする．$z = f(x, y)$ を U で定義された C^∞ 級関数とする．U の点 $p_0 = (x_0, y_0)$ が $z = f(x, y)$ の臨界点であるとは

$$f'(p_0) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(p_0) & \dfrac{\partial f}{\partial y}(p_0) \end{pmatrix} = (0, 0) \tag{1.3}$$

が成り立つことをいう．

例 1.3 . 平面の原点 $0 = (0, 0)$ は

$$z = f(x, y) = x^2 + y^2, \qquad z = g(x, y) = x^2 - y^2, \qquad z = h(x, y) = -x^2 - y^2 \tag{1.4}$$

の臨界点である．実際

$$\begin{aligned} f'(0,0) &= \begin{pmatrix} f'_x(0,0) & f'_y(0,0) \end{pmatrix} = (2x, 2y)|_{(x,y)=(0,0)} = (0, 0), \\ g'(0,0) &= \begin{pmatrix} g'_x(0,0) & g'_y(0,0) \end{pmatrix} = (2x, -2y)|_{(x,y)=(0,0)} = (0, 0), \\ h'(0,0) &= \begin{pmatrix} h'_x(0,0) & h'_y(0,0) \end{pmatrix} = (-2x, -2y)|_{(x,y)=(0,0)} = (0, 0) \end{aligned}$$

となるので原点はこれらの臨界点である．

定義 1.4 . $(x, y) = p_0$ を f の臨界点とする．f のヘッセ行列

$$H_f(p_0) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(p_0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(p_0) \\ \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(p_0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(p_0) \end{bmatrix} \tag{1.5}$$

の行列式（ヘッシアン）

$$\det H_f(p_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(p_0)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(p_0) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(p_0)\right)^2 \tag{1.6}$$

が 0 のとき，p_0 は退化しているという．そうでないとき，p_0 は非退化な臨界点という．

例 1.5． 式 (1.4) の関数たちの Hesse 行列は

$$\begin{aligned} H_f(0) &= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \\ H_g(0) &= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \\ H_h(0) &= \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

である．これらの行列式は 0 でないので，原点は非退化な臨界点である．

例 1.6． 関数 $z = xy$ は原点を臨界点にもつ．Hesse 行列は

$$H(0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

で $\det H(0) = -1 \neq 0$ なので 0 は非退化な臨界点である．

例 1.7． 関数 $z = x^2 + y^3$ は原点を退化した臨界点としてもつ．

補題 1.8． 平面の点 p_0 を関数 $z = f(x, y)$ の臨界点とする．座標 (x, y) における Hesse 行列を $H_f(p_0)$, 座標 (X, Y) における Hesse 行列を $\mathcal{H}_f(p_0)$ とする．このとき次が成り立つ．

$$\mathcal{H}_f(p_0) = {}^tJ(p_0)H_f(p_0)J(p_0). \tag{1.7}$$

ただし $J(p_0)$ は Jacobi 行列

$$J(p_0) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial X}(p_0) & \dfrac{\partial x}{\partial Y}(p_0) \\[2ex] \dfrac{\partial y}{\partial X}(p_0) & \dfrac{\partial y}{\partial Y}(p_0) \end{bmatrix} \tag{1.8}$$

である．

証明.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial X^2} = \frac{\partial}{\partial X}\frac{\partial f}{\partial X} &= \frac{\partial}{\partial X}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial X} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial X}\right) \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial X}\frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{\partial x}{\partial X} + \left(\frac{\partial}{\partial X}\frac{\partial f}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial X} \\ &= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial X} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\frac{\partial y}{\partial X}\right)\frac{\partial x}{\partial X} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\frac{\partial x}{\partial X} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial X}\right)\frac{\partial y}{\partial X}, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial X\partial Y} &= \frac{\partial}{\partial X}\frac{\partial f}{\partial Y} = \frac{\partial}{\partial X}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial Y} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial Y}\right) \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial X}\frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{\partial x}{\partial Y} + \left(\frac{\partial}{\partial X}\frac{\partial f}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial Y} \\
&= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial X} + \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\frac{\partial y}{\partial X}\right)\frac{\partial x}{\partial Y} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\frac{\partial x}{\partial X} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial X}\right)\frac{\partial y}{\partial Y}, \\
\frac{\partial^2 f}{\partial Y\partial X} &= \frac{\partial}{\partial Y}\frac{\partial f}{\partial X} = \frac{\partial}{\partial Y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial X} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial X}\right) \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial Y}\frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{\partial x}{\partial X} + \left(\frac{\partial}{\partial Y}\frac{\partial f}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial X} \\
&= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial Y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\frac{\partial y}{\partial Y}\right)\frac{\partial x}{\partial X} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\frac{\partial x}{\partial Y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial Y}\right)\frac{\partial y}{\partial X}, \\
\frac{\partial^2 f}{\partial Y^2} &= \frac{\partial}{\partial Y}\frac{\partial f}{\partial Y} = \frac{\partial}{\partial Y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial Y} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial Y}\right) \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial Y}\frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{\partial x}{\partial Y} + \left(\frac{\partial}{\partial Y}\frac{\partial f}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial Y} \\
&= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial Y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\frac{\partial y}{\partial Y}\right)\frac{\partial x}{\partial Y} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\frac{\partial x}{\partial Y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial Y}\right)\frac{\partial y}{\partial Y}
\end{aligned}
$$

だから

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H}_f(p_0) &= \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial X^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial X\partial Y} \\[2ex] \dfrac{\partial^2 f}{\partial Y\partial X} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial Y^2} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\dfrac{\partial x}{\partial X} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\dfrac{\partial y}{\partial X} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\dfrac{\partial x}{\partial X} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\dfrac{\partial y}{\partial X} \\[2ex] \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\dfrac{\partial x}{\partial Y} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\dfrac{\partial y}{\partial Y} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\dfrac{\partial x}{\partial Y} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\dfrac{\partial y}{\partial Y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial X} & \dfrac{\partial x}{\partial Y} \\[2ex] \dfrac{\partial y}{\partial X} & \dfrac{\partial y}{\partial Y} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial X} & \dfrac{\partial y}{\partial X} \\[2ex] \dfrac{\partial x}{\partial Y} & \dfrac{\partial y}{\partial Y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} \\[2ex] \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial X} & \dfrac{\partial x}{\partial Y} \\[2ex] \dfrac{\partial y}{\partial X} & \dfrac{\partial y}{\partial Y} \end{bmatrix} \\
&= {}^tJ(p_0)H_f(p_0)J(p_0)
\end{aligned}
$$

が成り立つ. □

例 1.9 . 例 1.6 の関数 $z = xy$ は座標変換

$$
\begin{cases} x = X - Y \\ y = X + Y \end{cases} \tag{1.9}
$$

によって

$$xy = (X - Y)(X + Y) = X^2 - Y^2$$

と書き直される．これは式 (1.4) の $g(x, y)$ と同じ関数である．xy と $X^2 - Y^2$ の原点 0 における Hesse 行列は

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

である．座標変換 (1.9) の Jacobi 行列は

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

なので

$$ {}^t\!\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

が成り立つ．

系 1.10． 平面の点 p_0 が関数 f の非退化な臨界点であることは座標系の取り方によらない．

1.3 Morse の補題

1.4 曲面上の Morse 関数

1.5 ハンドル分解

参考文献

[M01] 松本幸夫, Morse 理論の基礎, 岩波講座 現代数学の基礎 **27**, 岩波書店 (2001).