2024/02/22 セミナー資料

大柴寿浩

記号

- $\overline{\mathbf{R}} := [-\infty, +\infty] = \mathbf{R} \cup \{\pm \infty\}$
- 集合 U の開近傍系を I_U とかき、点 x の開近傍系を I_x とかく.

1 核

X,Y を局所コンパクト空間で c 柔軟次元が有限であるものとする.積空間 $X\times Y$ から X,Y への射影をそれぞれ q_1,q_2 とする. $K\in\mathsf{D}^\mathrm{b}(X\times Y)$ とする.(基礎環は大域次元が有限な可換環 A とする.)

定義 1.1 ([KS90, Definition 3.6.1]). 関手 Φ_K : $\mathsf{D}^+(Y) \to \mathsf{D}^+(X)$ と Ψ_K : $\mathsf{D}^+(X) \to \mathsf{D}^+(Y)$ を次で定める. $G \in \mathsf{D}^+(Y)$, $F \in \mathsf{D}^+(X)$ に対し,

$$\Phi_K(G) := \operatorname{R}q_{1!} \left(K \overset{\operatorname{L}}{\otimes} q_2^{-1} G \right),$$

$$\Psi_K(F) := \operatorname{R}q_{2*} \operatorname{R} \mathscr{H}om \left(K, q_1^! F \right).$$

命題 **1.2** ([KS90, Proposition 3.6.2]). $\Phi_K \dashv \Psi_K$ である. すなわち

$$\operatorname{Hom}_{\mathsf{D}^+(X)}(\Phi_K(\ \cdot\),\ \cdot\)\cong \operatorname{Hom}_{\mathsf{D}^+(Y)}(\ \cdot\ ,\Psi_K(\ \cdot\))$$

が成り立つ.

コメント. $(\otimes, \mathscr{H}om)$ や (Rf!, f!) と同じ向き.

証明. $F \in D^+(X), G \in D^+(Y)$ に対し,

$$\operatorname{Hom}_{\mathsf{D}^{+}(X)}(\Phi_{K}(G), F)$$

$$= \operatorname{Hom}_{\mathsf{D}^{+}(X)}\left(\operatorname{R}q_{1!}\left(K \overset{\mathsf{L}}{\otimes} q_{2}^{-1}G\right), F\right) \qquad (定義)$$

$$\cong \operatorname{Hom}_{\mathsf{D}^{+}(X \times Y)}\left(K \overset{\mathsf{L}}{\otimes} q_{2}^{-1}G, q_{1}^{!}F\right) \qquad (\operatorname{R}q_{2!} \dashv q_{2}^{!})$$

$$\cong \operatorname{Hom}_{\mathsf{D}^{+}(X \times Y)}\left(q_{2}^{-1}G, \operatorname{R}\mathscr{H}om\left(K, q_{1}^{!}F\right)\right) \qquad (\overset{\mathsf{L}}{\otimes} \dashv \operatorname{R}\mathscr{H}om)$$

$$\cong \operatorname{Hom}_{\mathsf{D}^{+}(X \times Y)}\left(G, \operatorname{R}q_{2*} \operatorname{R}\mathscr{H}om\left(K, q_{1}^{!}F\right)\right) \qquad (q_{2}^{-1} \dashv \operatorname{R}q_{2*})$$

$$= \operatorname{Hom}_{\mathsf{D}^{+}(X \times Y)}\left(G, \Psi_{K}(F)\right)$$

である. □

命題 1.3 ([KS90, Proposition 3.6.3]). X=Y であり, $K=A_{\Delta}$ のとき, Φ_K と Ψ_K は $\mathsf{D}^+(X)$ の恒等関手と同型になる. ただし Δ は X の対角集合である.

次の補題を用いる.

補題 1.4 ([KS90, Proposition 3.1.14]). X を c 柔軟次元が有限な局所コンパクト空間とする. $F \in \mathsf{D}^+(A_X)$ と $G \in \mathsf{D}^\mathrm{b}(A_X)$ に対し、次が成り立つ.

$$R\mathscr{H}om(G,F) \cong Rq_{1_*} R\Gamma_{\Delta} R\mathscr{H}om(q_2^{-1}G,q_1^!F).$$

命題 1.3 の証明. $F \in D^+(X)$ に対し,

F
$$\cong_{\text{定数層の台}} R\mathscr{H}om(A_X, F)$$

$$\cong_{\text{補題 1.4}} Rq_{2*} R\Gamma_{\Delta} R\mathscr{H}om(q_2^{-1}A_X, q_1^! F)$$

$$\cong_{[KS90, (2.6.9)]} Rq_{2*} R\mathscr{H}om(q_2^{-1}A_{\Delta}, q_1^! F)$$

$$= \Psi_K(F).$$

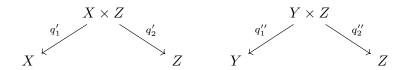
また, $G \in D^+(X)$ に対し,

$$\Phi_K(F) = \operatorname{R} q_{1!} \left(A_\Delta \overset{\operatorname{L}}{\otimes} q_2^{-1} G \right)$$

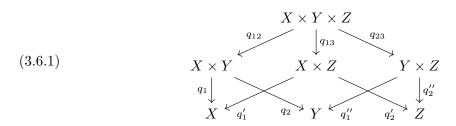
$$\cong \operatorname{R} q_{1!} \left(q_2^{-1} G \right)_\Delta \qquad (複体に対する台の切り落としの定義)$$

$$\cong G. \qquad (q_1|_\Delta = q_2|_\Delta \ \text{は固有なので} \ (q_1|_\Delta)_! = (q_2|_\Delta)_! \cong (q_2|_\Delta)_*$$

こんどは Z をあわせて $X \times Y \times Z$ を考える. 射影を



のように定め,



のように射影を定める.

命題 1.5 ([KS90, Proposition 3.6.4]). $K_1 \in \mathsf{D^b}(X \times Y)$ と $K_2 \in \mathsf{D^b}(Y \times Z)$ に対し,

$$K := \operatorname{R}q_{13!} \left(q_{12}^{-1} K_1 \overset{\operatorname{L}}{\otimes} q_{23}^{-1} K_2 \right)$$

とおく. このとき, 次が成り立つ.

$$\Psi_{K_2} \circ \Psi_{K_1} \cong \Psi_K, \quad \Phi_{K_1} \circ \Phi_{K_2} \cong \Phi_K.$$

証明. $F \in D^+(X)$ とすると,

 $=\Psi_K(F)$

である.

また,
$$G \in D^+(Z)$$
 とすると

$$\begin{split} & \Phi_{K_1} \circ \Phi_{K_2}(G) \\ = & \mathrm{R}q_{1!} \left(K_1 \overset{\mathrm{L}}{\otimes} q_2^{-1} \Phi_{K_2}(G) \right) \\ = & \mathrm{R}q_{1!} \left(K_1 \overset{\mathrm{L}}{\otimes} q_2^{-1} \mathrm{R}q_{1!}'' \left(K_2 \overset{\mathrm{L}}{\otimes} q_2''^{-1} G \right) \right) \\ = & \mathrm{R}q_{1!} \left(K_1 \overset{\mathrm{L}}{\otimes} \mathrm{R}q_{12!} q_{23}^{-1} \left(K_2 \overset{\mathrm{L}}{\otimes} q_2''^{-1} G \right) \right) \\ = & \mathrm{R}q_{1!} \left(K_1 \overset{\mathrm{L}}{\otimes} \mathrm{R}q_{12!} q_{23}^{-1} \left(K_2 \overset{\mathrm{L}}{\otimes} q_2''^{-1} G \right) \right) \\ = & \mathrm{R}q_{1!} \left(K_1 \overset{\mathrm{L}}{\otimes} \mathrm{R}q_{12!} \left(q_{23}^{-1} K_2 \overset{\mathrm{L}}{\otimes} q_{23}^{-1} q_2''^{-1} G \right) \right) \\ = & \mathrm{R}q_{1!} \left(K_1 \overset{\mathrm{L}}{\otimes} \mathrm{R}q_{12!} \left(q_{23}^{-1} K_2 \overset{\mathrm{L}}{\otimes} q_{13}^{-1} q_2'^{-1} G \right) \right) \\ = & \mathrm{R}q_{1!} \left(K_1 \overset{\mathrm{L}}{\otimes} \mathrm{R}q_{12!} \left(q_{23}^{-1} K_2 \overset{\mathrm{L}}{\otimes} q_{13}^{-1} q_2'^{-1} G \right) \right) \\ = & \mathrm{R}q_{1!} \mathrm{R}q_{12!} \left(q_{12}^{-1} K_1 \overset{\mathrm{L}}{\otimes} \left(q_{23}^{-1} K_2 \overset{\mathrm{L}}{\otimes} q_{13}^{-1} q_2'^{-1} G \right) \right) \\ = & \mathrm{R}q_{1!} \mathrm{R}q_{12!} \left(q_{12}^{-1} K_1 \overset{\mathrm{L}}{\otimes} \left(q_{23}^{-1} K_2 \overset{\mathrm{L}}{\otimes} q_{13}^{-1} q_2'^{-1} G \right) \right) \\ = & \mathrm{R}q_{1!}' \mathrm{R}q_{13!} \left(q_{12}^{-1} K_1 \overset{\mathrm{L}}{\otimes} \left(q_{23}^{-1} K_2 \overset{\mathrm{L}}{\otimes} q_{23}^{-1} K_2 \overset{\mathrm{L}}{\otimes} q_{13}^{-1} q_2'^{-1} G \right) \right) \\ = & \mathrm{R}q_{1!}' \mathrm{R}q_{13!} \left(q_{12}^{-1} K_1 \overset{\mathrm{L}}{\otimes} q_{23}^{-1} K_2 \overset{\mathrm{L}}{\otimes} q_{23}^{-1} K_2 \overset{\mathrm{L}}{\otimes} q_{13}^{-1} q_2'^{-1} G \right) \\ \cong & \mathrm{R}q_{1!}' \left(\mathrm{R}q_{13!} \left(q_{12}^{-1} K_1 \overset{\mathrm{L}}{\otimes} q_{23}^{-1} K_2 \overset{\mathrm{L}}{\otimes} q_{23}^{-1} K_2 \overset{\mathrm{L}}{\otimes} q_{13}^{-1} q_2'^{-1} G \right) \\ \cong & \mathrm{R}q_{1!}' \left(\mathrm{R}q_{13!} \left(q_{12}^{-1} K_1 \overset{\mathrm{L}}{\otimes} q_{23}^{-1} K_2 \overset{\mathrm{L}}{\otimes} q_{23}^{-1} K_2 \overset{\mathrm{L}}{\otimes} q_2'^{-1} G \right) \\ \cong & \mathrm{R}q_{1!}' \left(\mathrm{R}q_{13!} \left(q_{12}^{-1} K_1 \overset{\mathrm{L}}{\otimes} q_{23}^{-1} K_2 \overset{\mathrm{L}}{\otimes} q_{23}^{-1} K_2 \overset{\mathrm{L}}{\otimes} q_2'^{-1} G \right) \right) \end{aligned} (2.6.19)$$

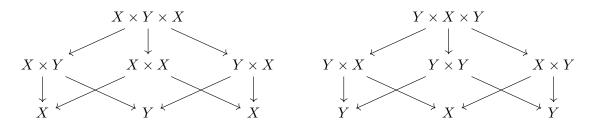
である.

(3.6.2)
$$K_1 \circ K_2 := \operatorname{R} q_{13!} \left(q_{12}^{-1} K_1 \overset{\operatorname{L}}{\otimes} q_{23}^{-1} K_2 \right)$$

とおく. 核の合成 (composition of kernels) というらしい.

系 **1.6** ([KS90, Corollary 3.6.5]). Z=X であり、整数 l,l' で $K_2\circ K_1\cong A_{\Delta_X}[l], K_1\circ K_2\cong A_{\Delta_Y}[l']$ となるものがあるとする.このとき、 $\Phi_{K_1},\Phi_{K_2},\Psi_{K_1},\Psi_{K_2}$ は圏同値である.

(3.6.1) は次のようになる.



先の命題から、シフトを除けば

$$\begin{split} \operatorname{id}_{\mathsf{D}^+(Y)} &\cong \varPhi_{K_2 \circ K_1} \cong \varPhi_{K_2} \circ \varPhi_{K_1}, \\ \operatorname{id}_{\mathsf{D}^+(X)} &\cong \varPhi_{K_1 \circ K_2} \cong \varPhi_{K_1} \circ \varPhi_{K_2}, \\ \operatorname{id}_{\mathsf{D}^+(Y)} &\cong \varPsi_{K_2 \circ K_1} \cong \varPsi_{K_1} \circ \varPsi_{K_2}, \\ \operatorname{id}_{\mathsf{D}^+(X)} &\cong \varPsi_{K_1 \circ K_2} \cong \varPsi_{K_2} \circ \varPsi_{K_1} \end{split}$$

が成り立つので、圏同値.

例 1.7 ([KS90, Example 3.6.6]). $\tau: E \to X$ を局所コンパクト空間 X 上の,ファイバー次元がn である実ベクトル束とし, $\pi: E^* \to X$ をその双対束とする. $\dot{E} := E - X$ と $\dot{E}^* := E^* - X$ をそれぞれ零切断を除いたものとし,

$$(3.6.3) S := \dot{E}/\mathbf{R}^+, \quad S^* := \dot{E}^*/\mathbf{R}^+$$

とおく. τ と π からそれぞれ引き起こされる射影はファイバー次元 n-1 の位相的しずめこみである.

次の集合を導入する.

(3.6.4)
$$\begin{cases} D \coloneqq \{(x,y) \in S \times_X S^*; \langle x,y \rangle \ge 0\}, \\ I \coloneqq \{(y,x) \in S^* \times_X S; \langle y,x \rangle > 0\}. \end{cases}$$

さらに、 $\mathsf{D}^{\mathrm{b}}(S \times S^*)$ の対象 K_1 と $\mathsf{D}^{\mathrm{b}}(S^* \times S)$ の対象 K_2 をそれぞれ次のように定める.

(3.6.5)
$$\begin{cases} K_1 := A_D \otimes \omega_{S^*/X}, \\ K_2 := A_I. \end{cases}$$

命題 1.8 ([KS90, Proposition 3.6.7]). 次が成り立つ.

$$\begin{split} K_1 \circ K_2 &\cong A_{\Delta_S} \quad \text{in $\mathsf{D}^{\mathrm{b}}(S \times S)$,} \\ K_2 \circ K_1 &\cong A_{\Delta_{S^*}} \quad \text{in $\mathsf{D}^{\mathrm{b}}(S^* \times S^*)$.} \end{split}$$

参考文献

[BouTVS] ブルバキ, 位相線形空間 1, 東京図書, 1968.

- [B+84] Borel, Intersection Cohomology, Progress in Mathematics, 50, Birkhäuser, 1984.
- [G58] Grauert, On Levi's problem and the embedding of real analytic manifolds, Ann. Math. 68, 460–472 (1958).
- [GP74] Victor Guillemin, Alan Pollack, Differential Topology, Prentice-Hall, 1974.
- [KS90] Masaki Kashiwara, Pierre Schapira, *Sheaves on Manifolds*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 292, Springer, 1990.
- [KS06] Masaki Kashiwara, Pierre Schapira, *Categories and Sheaves*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 332, Springer, 2006.
- [Le13] John M. Lee, Introduction to Smooth Manifolds, Second Edition, Graduate Texts in Mathematics, 218, Springer, 2013.
- [Mo76] 森本光生, 佐藤超函数入門, 共立出版, 1976.
- [R55] de Rham, Variétés différentiables, Hermann, Paris, 1955.
- [Sa59] Mikio Sato, Theory of Hyperfunctions, 1959–60.
- [S66] Schwartz, Théorie de distributions, Hermann, Paris, 1966.
- [Sh16] 志甫淳, 層とホモロジー代数, 共立出版, 2016.
- [SP] The Stacks Project.
- [Sp65] Michael Spivak, Calculus on Manifolds, Benjamin, 1965.
- [Ike21] 池祐一, 超局所層理論概説, 2021.
- [Tak17] 竹内潔, \mathcal{D} 加群, 共立出版, 2017.
- [Ue] 植田一石, ホモロジー的ミラー対称性, https://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~kazushi/course/hms.pdf 2024/02/04 最終閲覧.