# リーマン面

大柴 寿浩

**概要**

北大の院試用レポート．楕円曲線（複素トーラス）から複素射影直線への正則射が 4 点で分岐する 2 重被覆であることを示すことが目的である．

# 1　リーマン面

## 1.1　リーマン球面

$\mathbf{C}^2$ から原点 $0 = (0, 0)$ を除いた集合 $\mathbf{C}^2 - \{0\}$ の点 $(a_0, a_1), (b_0, b_1)$ に対し次の関係を考える．

$$(a_0, a_1) \sim (b_0, b_1) \iff (a_0, a_1) = c \cdot (b_0, b_1) \text{ となる複素数 } c \neq 0 \text{ が存在する．} \tag{1.1}$$

これは同値関係である．$(a_0, a_1)$ の同値類 $\{c \cdot (a_0, a_1); c \in \mathbf{C} - \{0\}\}$ を $[a_0 \colon a_1]$ とかく．

(1.1) **が同値関係になることのチェック．**（反射律）$c = 1$ は $(a_0, a_1) = 1 \cdot (a_0, a_1)$ をみたす．

（対称律）複素数 $c \neq 0$ を $(a_0, a_1) = c \cdot (b_0, b_1)$ をみたすものとすると，複素数 $c^{-1} \neq 0$ は $(b_0, b_1) = c^{-1} \cdot (a_0, a_1)$ をみたす．

（推移律）複素数 $c, c' \neq 0$ をそれぞれ $(a_0, a_1) = c \cdot (b_0, b_1)$，$(b_0, b_1) = c' \cdot (c_0, c_1)$ をみたすものとする．このとき複素数 $cc' \neq 0$ は

$$(a_0, a_1) = c \cdot (b_0, b_1) = cc' \cdot (c_0, c_1)$$

をみたす．$\square$

同値関係 $\sim$ の定める商写像を用いて次の集合を定義する．

**定義 1.1.** $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}) = \left(\mathbf{C}^2 - \{0\}\right)/\!\sim$ を**リーマン球面** (Riemann sphere) という．$\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ を $\mathbf{P}^1_{\mathbf{C}}$ とか $\mathbf{P}^1$ ともかく．

$\mathbf{P}^1$ の任意の点 $P$ は $[a_0 \colon a_1]$ の形に表せる．実際，$P$ を $\mathbf{P}^1$ の点とすると，$\mathbf{P}^1$ の定義より，$(a_0, a_1) \in \mathbf{C}^2 - \{0\}$ で $P = \pi(a_0, a_1) = [a_0 \colon a_1]$ となるものが存在する．また，$[a_0 \colon a_1] = [b_0 \colon b_1]$ となるのは，$a_0 \colon a_1 = b_0 \colon b_1$ となるときである．実際，

$$\begin{aligned}
[a_0 \colon a_1] = [b_0 \colon b_1] &\iff (a_0, a_1) \sim (b_0, b_1) \\
&\iff (a_0, a_1) = c(b_0, b_1) \text{ for some } c \neq 0 \\
&\iff a_0 = cb_0, a_1 = cb_1 \text{ for some } c \neq 0 \\
&\iff a_0 \colon b_0 = a_1 \colon b_1 \\
&\iff a_0 b_1 = a_1 b_0 \\
&\iff a_0 \colon b_1 = b_0 \colon b_1
\end{aligned}$$

である．

**定義 1.2.** 次の写像の組を考える．　$\mathbf{C}^2 - \{0\} \overset{\mathrm{pr}_1 = X_0}{\underset{\mathrm{pr}_2 = X_1}{\rightrightarrows}} \mathbf{C}$ ；$(a_0, a_1) \mapsto a_0, a_1$. この組を $\mathbf{C}^2 - \{0\}$ の標準座標，$\mathbf{P}^1$ の同次座標という．

$P \in \mathbf{P}^1$ を代表する $\mathbf{C}^2 - \{0\}$ の点 $\widetilde{P}$ の標準座標の値 $(a_0, a_1)$ が $P$ の同次座標の値である．なお，$P$ に対する $\widetilde{P}$ の取り方，すなわち $(a_0, a_1)$ の取り方には任意性がある．

$\mathbf{P}^1$ は商写像 $\pi\colon \mathbf{C}^2 - \{0\} \to \big(\mathbf{C}^2 - \{0\}\big)/\!\sim$ による商位相により位相空間になる．この定義から $\pi$ の連続性が従う．

$\mathbf{P}^1$ の位相空間としての性質を調べるために，次の部分集合を定義する．

$$U_0 = \{[a_0\colon a_1] \in \mathbf{P}^1; a_0 \neq 0\}, \quad U_1 = \{[a_0\colon a_1] \in \mathbf{P}^1; a_1 \neq 0\}.$$

このとき次が成り立つ．

$$\begin{aligned} U_0 \cup U_1 &= \mathbf{P}^1, && (1.2)\\ U_0 \cap U_1 &= \{[a_0\colon a_1] \in \mathbf{P}^1; a_0, a_1 \neq 0\} && (1.3)\\ &= U_0 - \{[1\colon 0]\}\\ &= U_1 - \{[0\colon 1]\}. \end{aligned}$$

**補題 1.3.** 1. 商写像 $\pi\colon \mathbf{C}^2 - \{0\} \to \big(\mathbf{C}^2 - \{0\}\big)/\!\sim$ は開写像である．

2. $U_0$ と $U_1$ は $\mathbf{P}^1$ の開集合であり，

$$\begin{aligned} \varphi_0\colon U_0 &\xrightarrow{\sim} \mathbf{C};\ [a_0\colon a_1] \mapsto a_1/a_0,\\ \varphi_1\colon U_1 &\xrightarrow{\sim} \mathbf{C};\ [a_0\colon a_1] \mapsto a_0/a_1 \end{aligned}$$

はともに同相写像である．

3. 任意の $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in GL(2, \mathbf{C})$ は自己同相写像

$$p_A\colon \mathbf{P}^1 \xrightarrow{\sim} \mathbf{P}^1; \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix}$$

を引き起こす．

4. $\mathbf{P}^1$ は第 2 可算公理をみたす連結なコンパクトハウスドルフ空間である．

証明. 1. $U$ を $\mathbf{C}^2 - \{0\}$ の開集合とする．$\pi(U)$ が $\mathbf{P}^1$ の開集合であること，すなわち $\pi^{-1}(\pi(U))$ が $\mathbf{C}^2 - \{0\}$ の開集合であることを示す．いま，任意の開集合 $U \subset \mathbf{C}^2 - \{0\}$ に対し，複素数 $c \neq 0$ を用いて

$$cU = \big\{(ca_0, ca_1); (a_0, a_1) \in \mathbf{C}^2 - \{0\}\big\}$$

とおくと，$cU$ は $\mathbf{C}^2 - \{0\}$ の開集合であり，

$$\pi^{-1}(\pi(U)) = \bigcup_{c \in \mathbf{C} - \{0\}} cU \qquad (*)$$

なので，$\pi^{-1}(\pi(U))$ は $\mathbf{C}^2 - \{0\}$ の開集合である．

2.　まず $U_0, U_1$ が $\mathbf{P}^1$ の開集合であることを示す．$U_0 = \{[a_0 : a_1]; a_0 \neq 0\}$ は $V_0 = \{(a_0, a_1); a_0 \neq 0\}$ の $\pi$ による像であり，$V_0$ は $\mathbf{C}^2 - \{0\}$ の開集合であるから，$U_0$ は $\mathbf{P}^1$ の開集合である．同様に $U_1$ も $\mathbf{P}^1$ の開集合である．

$\varphi_0 \colon U_0 \to \mathbf{C}$ が連続であることを示す．$V$ を $\mathbf{C}$ の開集合とする．$V = \varphi_0 \circ \pi(V_0) (= \widetilde{\varphi_0}(V_0)$ とおく）である．$\widetilde{\varphi_0}^{-1}(V) = \pi^{-1}\left(\varphi_0^{-1}(V)\right)$ は $V_0$ の開集合である．したがって，これは $\mathbf{C}^2 - \{0\}$ の開集合であり，商位相の定義から $\varphi_0^{-1}(V) \subset U_0$ は開集合である．

$$\begin{tikzcd} V_0 \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, "\widetilde{\varphi_0}"] & \\ U_0 \arrow[r, "\varphi_0"'] & V \end{tikzcd}$$

$\varphi_0$ が同相であることを示す．$\psi_0 \colon \mathbf{C} \to U_0$ を $\psi_0(z) = [1 \colon z]$ で定める．このとき $\psi_0 \circ \varphi_0\left([a_0 \colon a_1]\right) = \psi_0\left(a_1/a_0\right) = [1 \colon a_1/a_0] = [a_0 \colon a_1]$ である．また $\varphi_0 \circ \psi_0(z) = \varphi_0([1 \colon z]) = z/1 = z$．したがって，$\psi_0 \circ \varphi_0 = \mathrm{id}_{U_0}$ かつ $\varphi_0 \circ \psi_0 = \mathrm{id}_{\mathbf{C}}$ であり，$\psi_0 = \varphi_0^{-1}$ である．$\psi_0 = \varphi_0^{-1}$ は自然な単射 $\mathbf{C} \hookrightarrow \mathbf{C}^2 - \{0\}$ と $\pi$ の合成であり，これらは連続なので，その合成である $\psi_0$ も連続である．以上より $\varphi_0$ は同相である．

3. $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ を可逆な行列とする．$A$ を自己同形 $\mathbf{C}^2 \to \mathbf{C}^2$ とみたとき，それを $\mathbf{C}^2 - \{0\}$ に制限した $A|_{\mathbf{C}^2 - \{0\}} \colon \mathbf{C}^2 - \{0\} \to \mathbf{C}^2 - \{0\}$ は自己同相であり，逆写像は $A^{-1}\big|_{\mathbf{C}^2 - \{0\}}$ で与えられる．一般に $A(cx) = cAx$ なので，$A$ から可逆な写像 $p_A$ が不備なく定まり，逆写像は $p_{A^{-1}}$ で与えられる．

$p_A$ が連続であることを示す．$V$ を $\mathbf{P}^1$ の開集合とする．次の図式が可換であり，$\pi$ と $A$ は連続写像であるから，$\pi^{-1}\left(p_A^{-1}(V)\right) = A^{-1}\left(\pi^{-1}(V)\right)$ は $\mathbf{C}^2 - \{0\}$ の開集合である．

$$\begin{tikzcd} \mathbf{C}^2 - \{0\} \arrow[r, "A"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathbf{C}^2 - \{0\} \arrow[d, "\pi"] \\ \mathbf{P}^1 \arrow[r, "p_A"'] & \mathbf{P}^1 \end{tikzcd}$$

$\mathbf{P}^1$ の商位相の定義より $\pi^{-1}(V)$ は $\mathbf{P}^1$ の開集合である．したがって $p_A$ で連続である．$p_A^{-1}$ が連続であることも同様である．

4. 第 2 可算公理をみたすこと：

$$\mathbf{Q}(\sqrt{-1}) = \{a + b\sqrt{-1}; a, b \in \mathbf{Q}\}$$

に属する点 $z$ と有理数 $p$ に対し $U_p(z)$ を考えると $\left(U_p(z)\right)_{p \in \mathbf{Q}, z \in \mathbf{C}}$ は $\mathbf{C}$ の位相空間としての基底になる．したがって $\mathbf{C}$ は第 2 可算公理をみたす．直積集合 $\mathbf{C}^2$ も第 2 可算であるから，1 点を除いた $\mathbf{C}^2 - \{0\}$ もそうであり，これに全射 $\pi$ を適用した $\mathbf{P}^1$ も第 2 可算公理をみたす．

連結かつコンパクトであること：$S^3 = \{P = (a_0, a_1) \in \mathbf{C}^2; |a_0|^2 + |a_1|^2 = 1\} \subset \mathbf{C}^2 - \{0\}$ であり，$\mathbf{C} - \{0\}$ の相対位相により，$S^3$ は有界閉集合つまりコンパクト集合であり，連結である．全射連続写像 $\pi|_{S^3} : S^3 \to \mathbf{P}^1$ により $\mathbf{P}^1$ は連結かつコンパクトである．$\pi|_{S^3}$ が全射であることは

$$[a_0 \colon a_1] = \left[\frac{a_0}{\sqrt{a_0^2 + a_1^2}} \colon \frac{a_1}{\sqrt{a_0^2 + a_1^2}}\right]$$

であることからしたがう．

ハウスドルフであること：$P \neq Q$ を $\mathbf{P}^1$ の点とする．$p \colon GL(2, \mathbf{C}) \to \mathrm{Aut}_{\mathsf{Top}}(\mathbf{P}^1)$ は全射．したがって，$U_0 \subset \mathbf{P}^1$ から，任意の $p_A \in \mathrm{Aut}_{\mathsf{Top}}(U_0)$ に対し $A \in GL(2, \mathbf{C})$ が存在する．つまり $p_A(P), p_A(Q) \in U_0$ となる $A \in GL(2, \mathbf{C})$ が存在する．$U_0 \cong \mathbf{C}$ であり $\mathbf{C}$ はハウスドルフなので，$p_A(P)$ の開近傍 $U_P$ と $p_A(Q)$ の開近傍 $U_Q$ で $U_P \cap U_Q = \varnothing$ をみたすものが存在する．$U_P$ と $U_Q$ は $U_0 \subset \mathbf{P}^1$ の開集合であり，$p_A$ が同相なので $p_A^{-1}(U_P), p_A^{-1}(U_Q)$ は $\mathbf{P}^1$ における $P, Q$ の開近傍で $p_A^{-1}(U_P) \cap p_A^{-1}(U_Q) = \varnothing$ をみたす．よって $\mathbf{P}^1$ はハウスドルフである． □

**注意 1.4** (($*$) の幾何的イメージ)**.** この等式については次の図 1 を見ると理解しやすい．

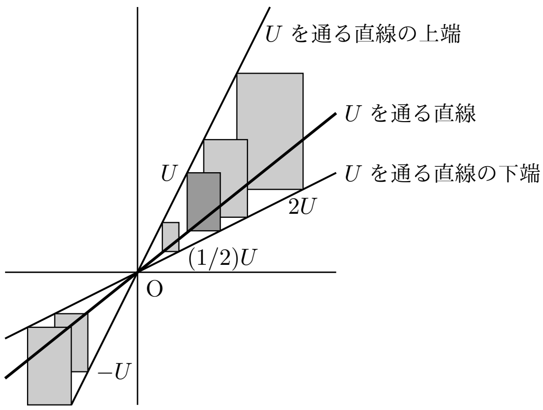


図 1　商写像の逆像 1

いま，簡単のため $\mathbf{R}^2$ の部分集合 $U$ について考える．$\pi(U)$ は $U$ を通る直線たちの集合である．像が $\pi(U)$ となるようなもの，つまり $\pi^{-1}(\pi(U))$ は $U$ を $c$ 倍に拡大・縮小したもの全体である．したがって

$$\begin{aligned}\pi^{-1}(\pi(U)) &= (U \text{ を射影したものと同じところに行くもの}) \\ &= (U \text{ を } c \text{ 倍に拡大したもの全て}) \\ &= \bigcup_{c \in \mathbf{R} - \{0\}} cU\end{aligned}$$

のようになり，$\mathbf{C}^2$ の場合には ($*$) が成り立つ．

## 1.2　貼りあわせ関数

補題 1.3.2 から $\varphi_0\colon U_0 \xrightarrow{\sim} \mathbf{C}$, $\varphi_1\colon U_1 \xrightarrow{\sim} \mathbf{C}$ である．ここで，$\varphi_0(U_0)$ の標準座標を $w$, $\varphi_1(U_1)$ の標準座標を $z$ で表すことにする．定義 1.2 のようにかくと

$$
\begin{aligned}
z\colon \varphi_1(U_1) = \mathbf{C} \to \mathbf{C}; (a) \mapsto a \\
w\colon \varphi_0(U_0) = \mathbf{C} \to \mathbf{C}; (b) \mapsto b
\end{aligned}
$$

のようになる．複素数の一つ組に対し第一成分を対応させるということである．これによって点 $(a)$ と座標値 $z(a)$ を同一視し，点を単に $z$ と書いたりする．ガウス平面 $\mathbf{C}$ に，そこでの標準座標をつけて $\mathbf{C}_z$, $\mathbf{C}_w$ のように表すと，$\mathbf{C}_w \subset \mathbf{P}^1$, $\mathbf{C}_z \subset \mathbf{P}^1$ とみなせる．例えば $\mathbf{C}_z$ の点 $1+\sqrt{-1}$ は $\mathbf{P}^1$ では

$$
\varphi_1^{-1}\left(1+\sqrt{-1}\right) = \left[1+\sqrt{-1}\colon 1\right]
$$

であり $\mathbf{C}_w$ の点 $1/(1+\sqrt{-1})$ は $\mathbf{P}^1$ では

$$
\varphi_0^{-1}\left(\frac{1}{1+\sqrt{-1}}\right) = \left[1\colon \frac{1}{1+\sqrt{-1}}\right] = \left[1+\sqrt{-1}\colon 1\right]
$$

である．本節では，$\mathbf{C}_z$ と $\mathbf{C}_w$ の間の関係を調べる．

いまの $1+\sqrt{-1}$ の例を見ると

$$
z = \frac{1}{w} \tag{1.4}
$$

の関係が成り立っているようである．他の例も見る．例えば点 $[2\colon 1]$ と点 $[1\colon 1/2]$ は $\mathbf{P}^1$ では同じものである．これらをそれぞれ $\varphi_1$, $\varphi_0$ で $\mathbf{C}_z$, $\mathbf{C}_w$ の点とみなすと座標値は $z=2$ と $w=1/2$ である．したがって $z=1/w$ が成り立つ．

$z=0$ のときはうまくいかない．$[z\colon 1]=[1\colon 1/z]=[1\colon w]$ のようにして $w=1/z$ となるものを見つけたいが $w=1/0$ となってしまい不合理である．$w=0$ のときも同様である．そもそも $\varphi_0$ は $U_0$ 上で定義されており，$z=0$ となる $[0\colon 1]$ のような点に対しては $w$ の値は定まっていない．つまり，関係式 (1.4) が成り立つためには $z$ も $w$ も 0 でないことが必要である．逆に $z$ と $w$ のどちらも 0 でなければ，関係式 (1.4) が成り立つ．

$z, w \neq 0$ は (1.3) より $[z\colon w] \in U_0 \cap U_1$ ということである．$[z\colon w] \in U_0 \cap U_1$ のとき $z$ は $w$ の正則関数になっている．$\varphi_0(U_0 \cap U_1) = \mathbf{C}_w - \{0\} = \mathbf{C}_w \cap \mathbf{C}_z = \mathbf{C}_z - \{0\} = \varphi_1(U_0 \cap U_1)$ なので，この正則関数を $\varphi_{10}\colon \mathbf{C}_w - \{0\} = \varphi_0(U_0 \cap U_1) \to \mathbf{C}_z - \{0\} = \varphi_1(U_0 \cap U_1)$ とかくことにす

ると，次の図式が可換になる．

$$\begin{tikzcd} U_0 \cap U_1 \arrow[r, equal, "{[1:w]=[z:1]}"] & U_0 \cap U_1 \arrow[d, "\varphi_1"] \\ \mathbf{C}_w - \{0\} \arrow[u, "\varphi_0^{-1}"] \arrow[r, "\varphi_{10}"'] & \mathbf{C}_z - \{0\} \end{tikzcd}$$

つまり，$\varphi_{10} = \varphi_1 \circ \varphi_0^{-1}$ である．この正則関数を貼りあわせ関数と呼ぶ．また，$\varphi_{01} = \varphi_0 \circ \varphi_1^{-1} \colon \varphi_1(U_0 \cap U_1) \to \varphi_0(U_0 \cap U_1)$ も $w = 1/z$ として同様に定まる．これは正則であり $\varphi_{10}$ の逆関数でもある．

## 1.3　複素多様体とリーマン面

$\mathbf{C}^n$ での座標が $z = (z^1, \ldots, z^n)$ であるとき複素数空間 $\mathbf{C}^n$ を $\mathbf{C}^n_z$ とか $\mathbf{C}^n_{(z^1,\ldots,z^n)}$ とかく．$\mathcal{U}$ を $\mathbf{C}^n$ の空でない開集合とする．このとき，$\mathcal{U}$ で定義された複素数値関数 $f$ は標準座標を用いて $f(z) = f(z^1, \ldots, z^n)$ とかける．

$f$ が $\mathcal{U}$ で**正則**であるとは，次の条件 (1), (2) のどちらかをみたすことをいう．（これらは同値．）

(1) $f(z)$ は $\mathcal{U}$ で連続であり，各変数 $z^j$ $(j = 1, \ldots, n)$ について正則である．

(2) $\mathcal{U}$ の各点 $a = (a^1, \ldots, a^n)$ に対して，関数 $f(z)$ は $a$ の近傍で収束巾級数

$$f(z) = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} c_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} (z^1 - a^1)^{\alpha_1} \ldots (z^n - a^n)^{\alpha_n}$$

で表される．

**定義 1.5** ($n$ 次元複素多様体 [Og02, 定義 4.1])**.** $X$ を位相空間とする．$(\varphi_i \colon U_i \to \mathcal{U}_i)_{i \in I}$ を写像の族とする．このとき，対 $(X, (\varphi_i)_i)$ が次の条件 (1)–(4) をみたすとき，$X$ を台集合とし $(\varphi_i)_i$ を座標近傍系とする $n$ **次元複素多様体** ($n$-dimensional complex manifold) という．

(1) $X$ は空集合でなく，第 2 可算公理を満たす連結なハウスドルフ空間である．

(2) すべての $i \in I$ に対して $U_i$ は $X$ の空でない開集合であり，$(U_i)_i$ は $X$ の開披覆である．

(3) すべての $i \in I$ に対して，$\mathcal{U}_i$ は $\mathbf{C}^n_{(z^1,\ldots,z^n)}$ の空でない開集合であり $\varphi_i \colon U_i \to \mathcal{U}_i$ は同相である．

(4) 任意の $i \neq j \in I$ で $U_i \cap U_j \neq \varnothing$ をみたすものに対して $\mathcal{U}_{ij} \coloneqq \varphi_j(U_i \cap U_j) \subset \mathcal{U}_j$ とおくとき，$\varphi_{ij} \coloneqq \varphi_i \circ \varphi_j^{-1}\big|_{\mathcal{U}_{ij}} \colon \mathcal{U}_{ij} \to \mathcal{U}_{ji}$ は正則である．

**例 1.6.** 1. $\mathbf{C}^n$ の領域 $\mathcal{U}$ は $(\mathrm{id}_{\mathcal{U}} \colon \mathcal{U} \to \mathcal{U})$ を座標近傍系とする $n$ 次元複素多様体である．

2. $X = (X, (\varphi_i \colon U_i \to \mathcal{U}_i)_{i \in I})$ を $n$ 次元複素多様体とし，$U$ を $X$ の領域とする．$J \coloneqq \{i \in I; U \cap U_i \neq \varnothing\}$ とおく．$U$ は $(\varphi_j|_{U \cap U_j})_{j \in J}$ を座標近傍系とする $n$ 次元複素多様体になる．この多様体 $U$ を開部分（複素）多様体という．

1 次元複素多様体を**リーマン面** (Riemann surface) という．

**命題 1.7.** リーマン球面 $\mathbf{P}^1$ はリーマン面である．

**証明.** 定義 1.5 の (1)–(4) で $n=1$ としたものが成り立つことを示す．

(1) 補題 1.3.4 からしたがう．

(2) (1.2) と (1.3) からしたがう．

(3) 補題 1.3.2 からしたがう．

(4) 1.2 節で説明した． □

$\mathbf{P}^1$ のような，台空間がコンパクトなリーマン面をとくにコンパクトリーマン面とか閉リーマン面という．例 1.6.2 のように，リーマン面 $X$ の領域 $U$ はリーマン面になる．この $U$ を $X$ の開リーマン面という．

**定義 1.8.** $X$ を $n$ 次元複素多様体, $Y$ を $m$ 次元複素多様体とする．$f\colon X \to Y$ を $X$ から $Y$ への連続写像とする．

1. $P$ を $X$ の点とする．$P, f(P)$ の近傍での $f$ のある座標表示 $w_j = f_{ij}(z_i)$, きちんと書くと $(w_j^1, \ldots, w_j^m) = \bigl(f_{ij}^1(z_i^1, \ldots, z_i^n), \ldots, f_{ij}^m(z_i^1, \ldots, z_i^n)\bigr)$ が $z_i(P) = (z_i^1(P), \ldots, z_i^n(P))$ で正則であるとき，$f$ は $P$ で**正則**であるという．

2. $f$ がすべての点 $\in X$ で正則であるとき $f$ を**正則写像** (holomorphic mapping) とか**正則射** (holomorphism) という．また $\mathbf{C}$ への正則写像を**正則関数** (holomorphic function) という．

3. $U$ を $X$ の空でない開集合とする．$U$ 上の関数 $f$ は $U$ の各連結成分上正則であるとき $U$ 上の正則関数という．ここで，複素多様体の領域は例 1.6.2 の方法で複素多様体とみなしている．

**定義 1.9.** $X$ と $Y$ を $n$ 次元複素多様体とする．$f\colon X \to Y$ を正則写像とする．正則写像 $g\colon Y \to X$ で $g \circ f = \mathrm{id}_X$ かつ $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ をみたすものが存在するとき，$f$ を**双正則写像** (biholomorphic mapping) とか**双正則射** (biholomorphism) という．$X$ から $Y$ への双正則写像が存在するとき，$X$ と $Y$ は**同形** (isomorphic) とか**双正則同値** (biholomorphically equivalent), またはたんに**双正則** (biholomorhic) であるという．

# 2 楕円曲線

## 2.1 楕円関数

$\omega_1, \omega_2$ を $\mathbf{R}$ 上一次独立な複素数とする．$\omega_1, \omega_2$ に対し，ガウス平面 $\mathbf{C}$ の加法部分群 $\Omega$ を

$$\Omega := \{n_1\omega_1 + n_2\omega_2; n_1, n_2 \in \mathbf{Z}\}$$

で定める．$E := \mathbf{C}/\Omega$ とおく．商写像を $p\colon \mathbf{C} \to E$ とかく．また，$S := \{a\omega_1 + b\omega_2; 0 \leqq a, b < 1\}$ とおく．このとき，$E$ と $S$ の間には 1 対 1 対応が存在する．$E$ の点 $\alpha$ に対し，$\Omega$ の点 $n_1\omega_1 + n_2\omega_2$ で $\alpha + n_1\omega_1 + n_2\omega_2 \in S$ となるものが存在する．

**補題 2.1.** 1. $p$ は全射かつ連続な開写像である．

2. $E$ は第 2 可算公理をみたす連結なコンパクトハウスドルフ空間である．

証明. 1. $p$ は全射かつ連続であること：$\alpha$ を $E$ の点とする．$\alpha$ に対し，$\alpha + 0\omega_1 + 0\omega_2$ は $\alpha = p(\alpha + 0\omega_1 + 0\omega_2)$ をみたす．$p$ の連続性は商位相の定義より従う．

$p$ が開写像であること：$U$ を $\mathbf{C}$ の空でない開集合とする．

$$p^{-1}(p(U)) = \bigcup_{\omega\in\Omega}(U+\omega)$$

であり，$U+\omega$ は $\mathbf{C}$ の開集合なので，その合併である $p^{-1}(p(U))$ も $\mathbf{C}$ の開集合である．したがって，$p(U)$ は $E$ の開集合である．

2. $P \neq Q$ を $E$ の点とする．$P, Q$ に対し，$S$ の点 $x, y$ で $p(x) = P, p(y) = Q$ となるものが存在する． □

## 2.2 Weierstrass の $\wp$ 関数

**定理 2.2.**

$$\wp(u) := \sum_{\substack{\omega\in\Omega,\\ \omega\neq 0}} \left(\frac{1}{(u-\omega)^2} - \frac{1}{\omega}\right) \tag{2.1}$$

は $\Omega$ にのみ 2 位の極を持つ楕円関数である．

$\wp(u)$ を Weierstrass の $\wp$ 関数という．

証明. $\wp(u)$ が $\mathbf{C}-\Omega$ で正則であり，$\Omega$ では 2 位の極をもつこと：$M \geqq 0$ を実数とする．$D(0; 2M)$ は $\mathbf{C}$ のコンパクト集合であり，$\Omega$ は離散閉集合なので，$\Omega \cap D(0; 2M)$ は有限集合である．

$$\wp(z) = \left(\frac{1}{z^2} + \sum_{\substack{\omega\in\Omega-\{0\},\\ |\omega|\leqq 2M}} \left(\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2}\right)\right) + \sum_{\substack{\omega\in\Omega-\{0\},\\ |\omega|> 2M}} \left(\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2}\right)$$

と 2 つの和に分解する．第 1 項は有限和なので $\overline{D(0;M)} - \Omega$ で正則かつ $\overline{D(0;M)} \cap \Omega$ で 2 位の極をもつ有理形関数である．

第 2 項が $\overline{D(0;M)}$ で一様収束することを示す．$z$ を $|z| \leqq M$ をみたす複素数とする．$|\omega| > 2M \geqq 2|z|$ である．したがって

$$\left|\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2}\right| = \frac{|z|}{|\omega|^2}\frac{|z-2\omega|}{|z-\omega|^2} = \frac{|z|}{|\omega|^3}\frac{|z/\omega-2|}{|z/\omega-1|^2} \leqq \frac{M|-1/2-2|}{|\omega|^3|1/2-1|^2} = \frac{10M}{|\omega|^3}$$

が成り立つ．ここで次の補題 2.3 を用いると $\displaystyle\sum_{\substack{\omega\in\Omega,\\ |\omega|>2M}} \frac{10M}{|\omega|^3}$ が収束することがわかる．したがって，第 2 項も収束する．

**補題 2.3.** 実数 $s>1$ に対し $\displaystyle\sum_{\omega\in\Omega-\{0\}} \frac{1}{|\omega|^{2s}}$ は収束する．

$\wp(u)$ が 2 重周期関数であること： $\square$

## 参考文献


[Og02] 小木曽啓示, 代数曲線論, 朝倉書店, 2002.