層コホモロジー

大柴寿浩

1　はじめに

凡例

次の記号と用語について断りなく用いることがある．

- 始対象と終対象 : 圏 C に始対象が存在するとき $\varnothing_{\mathsf{C}}$ とかき，終対象が存在するとき pt_{C} とかく．零対象は 0_{C}，または単に 0 とかく．

2　層

層については，[Sh16, KS90] にまとまった解説がある．

2.1　簡単な例から

層を考える雛形として，ガウス平面上の関数環を考える．$\mathbf{C}$ をガウス平面とする．$\mathbf{C}$ の開集合 U に対し，

$$\mathcal{O}_{\mathbf{C}}(U) \coloneqq \{U \text{ 上の正則関数 }\} \tag{2.1}$$

とおく．$\mathcal{O}_{\mathbf{C}}(U)$ の加法と乗法を $(f+g)(z) = f(z) + g(z)$, $(fg)(z) = f(z)g(z)$ で定めることで，$\mathcal{O}_{\mathbf{C}}(U)$ は環になる．複素数倍 $(cf)(z) = cf(z)$ も考えれば線型空間，もっというと $\mathbf{C}$ 代数にもなっている．

U と V を $V \subset U$ をみたす $\mathbf{C}$ の開集合とする．$f \in \mathcal{O}_{\mathbf{C}}(U)$ に対し $f|_V \in \mathcal{O}_{\mathbf{C}}(V)$ を対応させることで環の射

$$\rho_{VU} \colon \mathcal{O}_{\mathbf{C}}(U) \to \mathcal{O}_{\mathbf{C}}(V); \quad \rho_{VU}(f) = f|_V \tag{2.2}$$

が定まる．この射を包含写像のひきおこす**制限射** (restriction morphism) とよぶ．

今度は U と V を $U \cap V \neq \varnothing$ をみたす $\mathbf{C}$ の開集合とする．複素関数論では，次の事実を学ぶ．$f \in \mathcal{O}_{\mathbf{C}}(U)$, $g \in \mathcal{O}_{\mathbf{C}}(V)$ に対し，$U \cap V$ で $f = g$ となるとき，$U \cup V$ で定義された正則関数 $h \in \mathcal{O}_{\mathbf{C}}(U \cup V)$ で

$$h|_U = f, \quad h|_V = g$$

となるものがただ一つ（！）存在する．

以上の現象を眺めるために，ここで線形代数の眼鏡をかける．U と V を $U \cap V \neq \varnothing$ をみたす $\mathbf{C}$ の開集合とする．次の列を考える．

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbf{C}}(U \cup V) \xrightarrow{\rho_{U(U\cup V)} \oplus \rho_{V(U\cup V)}} \mathcal{O}_{\mathbf{C}}(U) \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{C}}(V) \xrightarrow{\rho_{(U\cap V)U} - \rho_{(U\cap V)V}} \mathcal{O}_{\mathbf{C}}(U \cap V). \tag{2.3}$$

ここで，$\rho_{U(U\cup V)} \oplus \rho_{V(U\cup V)} \colon \mathcal{O}_{\mathbf{C}}(U \cup V) \to \mathcal{O}_{\mathbf{C}}(U) \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{C}}(V)$ は $U \cup V$ 上の関数 f に対し $f|_U$ と $f|_V$ の組 $(f|_U, f|_V)$ を対応させる射である．ただし環 A と B に対し，$A \oplus B$ は単位元を持つ環と単位元を保つ射の圏 Ring における有限積である．[*1]

上の列の $\mathcal{O}_{\mathbf{C}}(U \cup V)$ の部分空間（部分環）$\mathrm{Ker}\left(\rho_{U(U\cup V)} \oplus \rho_{V(U\cup V)}\right)$ は $U \cup V$ 上の関数 h で $h|_U$ と $h|_V$ がどちらも 0 となるもの全体である．そのような h は 0 しかないので $\mathrm{Ker}\left(\rho_{U(U\cup V)} \oplus \rho_{V(U\cup V)}\right) = 0$ となる．つまり $0 \to \mathcal{O}_{\mathbf{C}}(U \cup V) \to \mathcal{O}_{\mathbf{C}}(U) \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{C}}(V)$ は完全である．

今度は $\mathcal{O}_{\mathbf{C}}(U) \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{C}}(V)$ の部分に注目する．$\mathrm{Ker}\left(\rho_{(U\cap V)U} - \rho_{(U\cap V)V}\right)$ は U 上の関数 f と V 上の関数 g の組 (f, g) のうち $U \cap V$ 上での値が一致するもの全体である．他方，$\mathrm{Im}\left(\rho_{U(U\cup V)} \oplus \rho_{V(U\cup V)}\right)$ は U 上の関数 f と V 上の関数 g の組 (f, g) のうち，$U \cup V$ 上の関数 h を用いて $f = h|_U$, $g = h|_V$ とかけるもの全体である．(f, g) を $\mathrm{Im}\left(\rho_{U(U\cup V)} \oplus \rho_{V(U\cup V)}\right)$ の元とする．このとき $U \cup V$ 上の関数 h を用いて $(f, g) = (h|_U, h|_V)$ とかける．この h に対し $f|_{U\cap V} = h|_{U\cap V} = g_{U\cap V}$ が成り立つので (f, g) は $\mathrm{Ker}\left(\rho_{(U\cap V)U} - \rho_{(U\cap V)V}\right)$ に属する．したがって，$\mathrm{Im}\left(\rho_{U(U\cup V)} \oplus \rho_{V(U\cup V)}\right) \subset \mathrm{Ker}\left(\rho_{(U\cap V)U} - \rho_{(U\cap V)V}\right)$ が成り立つ．

(f, g) を $\mathrm{Ker}\left(\rho_{(U\cap V)U} - \rho_{(U\cap V)V}\right)$ の元とする．このとき，$f|_{U\cap V} - g|_{U\cap V} = 0$ すなわち $f|_{U\cap V} = g|_{U\cap V}$ が成り立つ．上で説明した通り，このとき $U \cup V$ 上の関数 h を用いて $(f, g) = (h|_U, h|_V)$ とかける．したがって，(f, g) は $\mathrm{Im}\left(\rho_{U(U\cup V)} \oplus \rho_{V(U\cup V)}\right)$ に属する．よって，$\mathrm{Ker}\left(\rho_{(U\cap V)U} - \rho_{(U\cap V)V}\right) \subset \mathrm{Im}\left(\rho_{U(U\cup V)} \oplus \rho_{V(U\cup V)}\right)$ も成り立つ．以上より，$\mathrm{Ker}\left(\rho_{(U\cap V)U} - \rho_{(U\cap V)V}\right) = \mathrm{Im}\left(\rho_{U(U\cup V)} \oplus \rho_{V(U\cup V)}\right)$，すなわち，$\mathcal{O}_{\mathbf{C}}(U \cup V) \to \mathcal{O}_{\mathbf{C}}(U) \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{C}}(V) \to \mathcal{O}_{\mathbf{C}}(U \cap V)$ も完全である．つまり，正則関数の制限と解析接続に関する以上の現象は，(2.3) が完全列であると言い換えることができる．

2.2　層

X を位相空間とし，$\mathsf{Open}(X)$ で X の開集合全体のなす集合を表す．$\mathsf{Open}(X)$ は開集合を対象とし包含写像を射とする圏になる．

定義 2.1. X を位相空間とする．X から圏 C への**前層** (presheaf) とは，$\mathsf{Open}(X)$ から C への反変関手で始対象 $\varnothing$ を終対象 pt_{C} にうつすものである．すなわち，X から圏 C への前層 $\mathcal{F}$ は次の

[*1] 環の圏についてのコメント．環の圏における積は一般には直積 $A \times B$ であり，有限の積が直和 $A \oplus B$ である．積の添字圏として有限圏を取れば $A \oplus B$ と $A \times B$ は一致する．（直和は Ring の余積ではない！）Ring における余積はテンソル積 $A \otimes_{\mathbf{Z}} B$ である．一般に $A \times B$ と $A \otimes B$ は同形ではないため，Ring はアーベル圏ではないことにも注意．（始対象は $\mathbf{Z}$ で終対象は 0．したがって Ring には零対象が存在しないのでアーベル圏ではないという議論もできる．）

データからなる.

- X の各開部分集合 U に対する圏 C の対象 $\mathcal{F}(U)$,
- 部分開集合の各組 $V \subset U$ に対する C の射 $\rho_{UV} \colon \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$ で, 次の条件 (1)–(3) を満たすもの.
  (1) $\mathcal{F}(\varnothing) = 0$,
  (2) $\rho_{UU} = \mathrm{id}$,
  (3) $W \subset V \subset U$ ならば, $\rho_{UW} = \rho_{VW} \circ \rho_{UV}$.

元 $s \in \mathcal{F}(U)$ を $\mathcal{F}$ の U 上の**切断** (section) という. $s|_V$ で $\rho_{UV}(s) \in \mathcal{F}(V)$ を表し, s の V への**制限** (restriction) とよぶ.

3 超関数

実解析多様体 M 上の超関数の層 $\mathscr{B}_M$ は自然に分布の層 $\mathscr{D}b_M$ を含む．また，$\mathscr{B}_M$ は脆弱層（すなわち，制限射が全射）であるという著しい性質がある．

はじめに M が実数直線 $\mathbf{R}$ の開区間である場合を考える．X を複素直線 $\mathbf{C}$ における M の開近傍で $X \cap \mathbf{R} = M$ をみたすものとする．$\mathcal{O}(U)$ で開集合 $U \subset X$ 上の正則関数の空間を表す．M 上の超関数の空間 $\mathscr{B}_M$ は次で与えられる．

$$\mathscr{B}_M \coloneqq \mathcal{O}(U - M)/\mathcal{O}(U). \tag{3.1}$$

$\mathscr{B}_M$ はここで取った近傍 U に依らない．したがって，次のように余極限を用いて定義するのがよい．

$$\mathscr{B}_M \coloneqq \operatorname*{colim}_{U \supset M} \mathcal{O}(U - M)/\mathcal{O}(U). \tag{3.2}$$

ここでの余極限を $\boldsymbol{F}$

参考文献

[Sh16] 志甫淳, 層とホモロジー代数, 共立出版, 2016.

[KS90] Masaki Kashiwara, Pierre Schapira, *Sheaves on Manifolds*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 292, Springer, 1990.

[Og02] 小木曽啓示, 代数曲線論, 朝倉書店, 2022.