

# 2024/02/08 セミナー資料

大柴寿浩

## 1 コホモロジー構成可能層

### 1.1 理想複体

$A$  を可換環とする.  $M \in D^b(A) := D^b(\text{Mod}(A))$  を  $A$  加群の導来圏の対象とする.  $M$  が理想対象<sup>\*1</sup> (perfect object) であるとは, 有限生成射影的  $A$  加群の有界複体と擬同型であることをいう.

命題 1.1 ([KS90, Exercise I.30]).  $A$  を可換環とする.

- (i)  $X \rightarrow Y \rightarrow Z \xrightarrow{+1}$  が  $D^b(A)$  における完全三角で,  $X$  と  $Y$  が理想的ならば,  $Z$  も理想的である.
- (ii) 理想対象の直和因子も理想対象である.
- (iii)  $M \in D^b(A)$  を理想対象とする.  $M^* := \text{RHom}_A(M, A)$  とおく.  $M^*$  は理想対象であり, 標準的な射  $M \rightarrow M^{**}$  は同型である.

$A$  がネーター環で大域次元が有限であるとする.

- (iv)  $\text{Mod}^f(A)$  の導来圏  $D^b(\text{Mod}^f(A))$  の任意の対象は理想的である.
- (v)  $D^b_f(A)$  で各コホモロジーが  $\text{Mod}^f(A)$  に属す対象の導来圏を表す.  $D^b(\text{Mod}^f(A)) \rightarrow D^b_f(\text{Mod}(A))$  は圏同値である. ■

証明は略.

擬連接かつ  $\text{tor}$  次元が有限であることと同値らしい. ([SP, lem 15.74.2])

## 参考文献

- [Le13] John M. Lee, *Introduction to Smooth Manifolds*, Second Edition, Graduate Texts in Mathematics, **218**, Springer, 2013.
- [Sp65] Michael Spivak, *Calculus on Manifolds*, Benjamin, 1965.
- [B+84] Borel, *Intersection Cohomology*, Progress in Mathematics, 50, Birkhäuser, 1984.

---

<sup>\*1</sup> [Ue] による訳にしたがった. 定訳は未だ無いと思われる.

- [G58] Grauert, *On Levi's problem and the embedding of real analytic manifolds*, Ann. Math. 68, 460–472 (1958).
- [GP74] Victor Guillemin, Alan Pollack, *Differential Topology*, Prentice-Hall, 1974.
- [KS90] Masaki Kashiwara, Pierre Schapira, *Sheaves on Manifolds*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 292, Springer, 1990.
- [KS06] Masaki Kashiwara, Pierre Schapira, *Categories and Sheaves*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 332, Springer, 2006.
- [R55] de Rham, *Variétés différentiables*, Hermann, Paris, 1955.
- [Sa59] Mikio Sato, *Theory of Hyperfunctions*, 1959–60.
- [S66] Schwartz, *Théorie de distributions*, Hermann, Paris, 1966.
- [Sh16] 志甫淳, 層とホモロジー代数, 共立出版, 2016.
- [SP] The Stacks Project.
- [Ike21] 池祐一, 超局所層理論概説, 2021.
- [Tak17] 竹内潔,  $\mathcal{D}$  加群, 共立出版, 2017.
- [Ue] 植田一石, ホモロジー的ミラー対称性, <https://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~kazushi/course/hms.pdf> 2024/02/04 最終閲覧.