リーマン面

大柴 寿浩

概要

北大の院試用レポート．楕円曲線（複素トーラス）から複素射影直線への正則射が 4 点で分岐する 2 重被覆であることを示すことが目的である．

1　複素関数論

命題 1.1. U をガウス平面の領域（連結開集合）とする．$\varphi(z)$ を U 上の複素数値関数とする．このとき，次の条件 (1)–(3) は同値である．

(1) $\varphi(z)$ は U の各点で**正則** (regular, holomorphic) すなわち，U の各点で極限値

$$\lim_{h\to a}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

が存在する．

(2) $\varphi(z)$ は U の各点 a の近傍でテイラー展開できる．

$$\varphi(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varphi^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n$$

(3) U の各点 a と a を中心とし U に含まれる任意の開円盤 Δ に対して，$\varphi(z)$ と $\varphi(z)$ の a を中心とするテイラー展開は Δ で一致する．

命題 1.2. U をガウス平面の領域（連結開集合）とする．a を U の点とする．$\varphi(z)$ を a を中心とするある開円盤 Δ_a から a を除いた集合 $\Delta_a-\{a\}$ 上の正則関数とする．このとき，次の条件 (1), (2) は同値である．

(1) $\varphi(z)$ は a において高々極しかもたない．

(2) $\varphi(z)$ は a においてローラン展開できる．つまり，a の適当な近傍 W 及び適当な整数 $k\geqq 0$ と複素数列 $(a_n)_{n=-k}^{\infty}$ で，$W-\{a\}$ で次が成り立つものが存在する．

$$\varphi(z)=\sum_{m=1}^{k}\frac{a_{-m}}{(z-a)^m}+\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-a)^n. \tag{1.1}$$

(1.1) の右辺第 2 項は正則である．$k=0$ のときは右辺第 1 項は 0 であり，$k>0$ のときは $a_{-k}\neq 0$ であるとする．U の各点で高々極しかもたない $U-R$ 上の正則関数 φ を U 上の**有理形関数**（ゆうりけい） (meromorphic function) という．

1.1　リーマン球面

$\mathbf{C}^2$ から原点 $0=(0,0)$ を除いた集合 $\mathbf{C}^2-\{0\}$ の点 $(a_0,a_1),(b_0,b_1)$ に対し次の関係を考える．

$$(a_0,a_1)\sim(b_0,b_1)\iff (a_0,a_1)=c\cdot(b_0,b_1) \text{ となる複素数 } c\neq 0 \text{ が存在する．} \tag{1.2}$$

これは同値関係である．(a_0,a_1) の同値類 $\{c\cdot(a_0,a_1); c\in\mathbf{C}-\{0\}\}$ を $[a_0:a_1]$ とかく．

(1.2) **が同値関係になることのチェック**．（反射律）$c=1$ は $(a_0,a_1)=1\cdot(a_0,a_1)$ をみたす．

（対称律）複素数 $c\neq 0$ を $(a_0,a_1)=c\cdot(b_0,b_1)$ をみたすものとすると，複素数 $c^{-1}\neq 0$ は $(b_0,b_1)=c^{-1}\cdot(a_0,a_1)$ をみたす．

（推移律）複素数 $c,c'\neq 0$ をそれぞれ $(a_0,a_1)=c\cdot(b_0,b_1)$，$(b_0,b_1)=c'\cdot(c_0,c_1)$ をみたすものとする．このとき複素数 $cc'\neq 0$ は

$$(a_0,a_1)=c\cdot(b_0,b_1)=cc'\cdot(c_0,c_1)$$

をみたす． □

同値関係 $\sim$ の定める商写像を用いて次の集合を定義する．

定義 1.3. $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})=\left(\mathbf{C}^2-\{0\}\right)/\!\sim$ を**リーマン球面** (Riemann sphere) という．$\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ を $\mathbf{P}^1_{\mathbf{C}}$ とか $\mathbf{P}^1$ ともかく．

$\mathbf{P}^1$ の任意の点 P は $[a_0\colon a_1]$ の形に表せる．実際，P を $\mathbf{P}^1$ の点とすると，$\mathbf{P}^1$ の定義より，$(a_0,a_1)\in\mathbf{C}^2-\{0\}$ で $P=\pi(a_0,a_1)=[a_0\colon a_1]$ となるものが存在する．

また，$[a_0\colon a_1]=[b_0\colon b_1]$ となるのは，$a_0\colon a_1=b_0\colon b_1$ となるときである．実際，

$$\begin{aligned}
[a_0\colon a_1]=[b_0\colon b_1] &\Longleftrightarrow (a_0,a_1)\sim(b_0,b_1)\\
&\Longleftrightarrow (a_0,a_1)=c(b_0,b_1)\text{ for some }c\neq 0\\
&\Longleftrightarrow a_0=cb_0,a_1=cb_1\text{ for some }c\neq 0\\
&\Longleftrightarrow a_0\colon b_0=a_1\colon b_1\\
&\Longleftrightarrow a_0b_1=a_1b_0\\
&\Longleftrightarrow a_0\colon b_1=b_0\colon b_1
\end{aligned}$$

である．

定義 1.4. 次の写像の組を考える．$\mathbf{C}^2-\{0\}\underset{\mathrm{pr}_2=X_1}{\overset{\mathrm{pr}_1=X_0}{\rightrightarrows}}\mathbf{C}$; $(a_0,a_1)\mapsto a_0,a_1$. この組を $\mathbf{C}^2-\{0\}$ の標準座標，$\mathbf{P}^1$ の同次座標という．

$P\in\mathbf{P}^1$ を代表する $\mathbf{C}^2-\{0\}$ の点 $\widetilde{P}$ の標準座標の値 (a_0,a_1) が P の同次座標の値である．なお，P に対する $\widetilde{P}$ の取り方，すなわち (a_0,a_1) の取り方には任意性がある．

$\mathbf{P}^1$ は商写像 $\pi\colon\mathbf{C}^2-\{0\}\longrightarrow\left(\mathbf{C}^2-\{0\}\right)/\!\sim$ による商位相により位相空間になる．この定義から π の連続性が従う．

$\mathbf{P}^1$ の位相空間としての性質を調べるために，次の部分集合を定義する．

$$\begin{aligned}
U_0&=\{[a_0\colon a_1]\in\mathbf{P}^1;a_0\neq 0\},\\
U_1&=\{[a_0\colon a_1]\in\mathbf{P}^1;a_1\neq 0\}.
\end{aligned}$$

このとき次が成り立つ．

$$
\begin{aligned}
U_0 \cup U_1 &= \mathbf{P}^1, && (1.3)\\
U_0 \cap U_1 &= \{[a_0 \colon a_1] \in \mathbf{P}^1; a_0, a_1 \neq 0\} && (1.4)\\
&= U_0 - \{[1 \colon 0]\}\\
&= U_1 - \{[0 \colon 1]\}.
\end{aligned}
$$

補題 1.5. 1. 商写像 $\pi \colon \mathbf{C}^2 - \{0\} \longrightarrow \left(\mathbf{C}^2 - \{0\}\right)/\sim$ は開写像である．

2. U_0 と U_1 は $\mathbf{P}^1$ の開集合であり，

$$
\begin{aligned}
\varphi_0 \colon U_0 \xrightarrow{\sim} \mathbf{C};\ [a_0 \colon a_1] \mapsto a_1/a_0,\\
\varphi_1 \colon U_1 \xrightarrow{\sim} \mathbf{C};\ [a_0 \colon a_1] \mapsto a_0/a_1
\end{aligned}
$$

はともに同相写像である．

3. 任意の $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in GL(2, \mathbf{C})$ は自己同相写像

$$
p_A \colon \mathbf{P}^1 \xrightarrow{\sim} \mathbf{P}^1; \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix}
$$

を引き起こす．

4. $\mathbf{P}^1$ は第 2 可算公理をみたす連結なコンパクトハウスドルフ空間である．

証明. 1. U を $\mathbf{C}^2 - \{0\}$ の開集合とする．$\pi(U)$ が $\mathbf{P}^1$ の開集合であること，すなわち $\pi^{-1}(\pi(U))$ が $\mathbf{C}^2 - \{0\}$ の開集合であることを示す．いま，任意の開集合 $U \subset \mathbf{C}^2 - \{0\}$ に対し，複素数 $c \neq 0$ を用いて

$$
cU = \left\{(ca_0, ca_1); (a_0, a_1) \in \mathbf{C}^2 - \{0\}\right\}
$$

とおくと，cU は $\mathbf{C}^2 - \{0\}$ の開集合であり，

$$
\pi^{-1}(\pi(U)) = \bigcup_{c \in \mathbf{C} - \{0\}} cU \tag{$*$}
$$

なので，$\pi^{-1}(\pi(U))$ は $\mathbf{C}^2 - \{0\}$ の開集合である．

2. まず U_0, U_1 が $\mathbf{P}^1$ の開集合であることを示す．$U_0 = \{[a_0 : a_1]; a_0 \neq 0\}$ は $V_0 = \{(a_0, a_1); a_0 \neq 0\}$ の π による像であり，V_0 は $\mathbf{C}^2 - \{0\}$ の開集合であるから，U_0 は $\mathbf{P}^1$ の開集合である．同様に U_1 も $\mathbf{P}^1$ の開集合である．

$\varphi_0 \colon U_0 \to \mathbf{C}$ が連続であることを示す．V を $\mathbf{C}$ の開集合とする．$V = \varphi_0 \circ \pi(V_0) (= \widetilde{\varphi_0}(V_0)$ とおく）である．$\widetilde{\varphi_0}^{-1}(V) = \pi^{-1}\left(\varphi_0^{-1}(V)\right)$ は V_0 の開集合である．したがって，これは $\mathbf{C}^2 - \{0\}$ の開集合であり，商位相の定義から $\varphi_0^{-1}(V) \subset U_0$ は開集合である．

$$
\begin{tikzcd}
V_0 \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, "\widetilde{\varphi_0}"] & \\
U_0 \arrow[r, "\varphi_0"'] & V
\end{tikzcd}
$$

φ_0 が同相であることを示す．$\psi_0\colon \mathbf{C} \to U_0$ を $\psi_0(z) = [1\colon z]$ で定める．このとき $\psi_0 \circ \varphi_0([a_0\colon a_1]) = \psi_0(a_1/a_0) = [1\colon a_1/a_0] = [a_0\colon a_1]$ である．また $\varphi_0 \circ \psi_0(z) = \varphi_0([1\colon z]) = z/1 = z$. したがって，$\psi_0 \circ \varphi_0 = \mathrm{id}_{U_0}$ かつ $\varphi_0 \circ \psi_0 = \mathrm{id}_{\mathbf{C}}$ であり，$\psi_0 = \varphi_0^{-1}$ である．$\psi_0 = \varphi_0^{-1}$ は自然な単射 $\mathbf{C} \hookrightarrow \mathbf{C}^2 - \{0\}$ と π の合成であり，これらは連続なので，その合成である ψ_0 も連続である．以上より φ_0 は同相である．

3. $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ を可逆な行列とする．A を自己同形 $\mathbf{C}^2 \to \mathbf{C}^2$ とみたとき，それを $\mathbf{C}^2 - \{0\}$ に制限した $A|_{\mathbf{C}^2-\{0\}} : \mathbf{C}^2 - \{0\} \to \mathbf{C}^2 - \{0\}$ は自己同相であり，逆写像は $A^{-1}\big|_{\mathbf{C}^2-\{0\}}$ で与えられる．一般に $A(cx) = cAx$ なので，A から可逆な写像 p_A が不備なく定まり，逆写像は $p_{A^{-1}}$ で与えられる．

p_A が連続であることを示す．V を $\mathbf{P}^1$ の開集合とする．次の図式が可換であり，π と A は連続写像であるから，$\pi^{-1}\left(p_A^{-1}(V)\right) = A^{-1}\left(\pi^{-1}(V)\right)$ は $\mathbf{C}^2 - \{0\}$ の開集合である．

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{C}^2 - \{0\} \arrow[r, "A"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathbf{C}^2 - \{0\} \arrow[d, "\pi"] \\
\mathbf{P}^1 \arrow[r, "p_A"'] & \mathbf{P}^1
\end{tikzcd}
$$

$\mathbf{P}^1$ の商位相の定義より $\pi^{-1}(V)$ は $\mathbf{P}^1$ の開集合である．したがって p_A で連続である．p_A^{-1} が連続であることも同様である．

4. 第 2 可算公理をみたすこと：

$$\mathbf{Q}(\sqrt{-1}) = \{a + b\sqrt{-1}; a, b \in \mathbf{Q}\}$$

に属する点 z と有理数 p に対し $U_p(z)$ を考えると $(U_p(z))_{p\in\mathbf{Q}, z\in\mathbf{C}}$ は $\mathbf{C}$ の位相空間としての基底になる．したがって $\mathbf{C}$ は第 2 可算公理をみたす．直積集合 $\mathbf{C}^2$ も第 2 可算であるから，1 点を除いた $\mathbf{C}^2 - \{0\}$ もそうであり，これに全射 π を適用した $\mathbf{P}^1$ も第 2 可算公理をみたす．

連結かつコンパクトであること：$S^3 = \{P = (a_0, a_1) \in \mathbf{C}^2; |a_0|^2 + |a_1|^2 = 1\} \subset \mathbf{C}^2 - \{0\}$ であり，$\mathbf{C} - \{0\}$ の相対位相により，S^3 は有界閉集合つまりコンパクト集合であり，連結である．全射連続写像 $\pi|_{S^3} : S^3 \to \mathbf{P}^1$ により ‘ワイもや’ で $\mathbf{P}^1$ は連結かつコンパクト．$\pi|_{S^3}$ が全射であることは

$$[a_0\colon a_1] = \left[\frac{a_0}{\sqrt{a_0^2 + a_1^2}} \colon \frac{a_1}{\sqrt{a_0^2 + a_1^2}}\right]$$

であることからしたがう．

ハウスドルフであること：$P \neq Q$ を $\mathbf{P}^1$ の点とする．$p\colon GL(2, \mathbf{C}) \to \mathrm{Aut}_{\mathsf{Top}}(\mathbf{P}^1)$ は全射．したがって，$U_0 \subset \mathbf{P}^1$ から，任意の $p_A \in \mathrm{Aut}_{\mathsf{Top}}(U_0)$ に対し $A \in GL(2, \mathbf{C})$ が存在する．つまり $p_A(P), p_A(Q) \in U_0$ となる $A \in GL(2, \mathbf{C})$ が存在する．$U_0 \cong \mathbf{C}$ であり $\mathbf{C}$ はハウスドルフなので，

$p_A(P)$ の開近傍 U_P と $p_A(Q)$ の開近傍 U_Q で $U_P \cap U_Q = \varnothing$ をみたすものが存在する．U_P と U_Q は $U_0 \subset \mathbf{P}^1$ の開集合であり，p_A が同相なので $p_A^{-1}(U_P), p_A^{-1}(U_Q)$ は $\mathbf{P}^1$ における P, Q の開近傍で $p_A^{-1}(U_P) \cap p_A^{-1}(U_Q) = \varnothing$ をみたす．よって $\mathbf{P}^1$ はハウスドルフである． □

注意 1.6 ($(*)$ の幾何的イメージ)**.** この等式については次の図 1 を見ると理解しやすい．

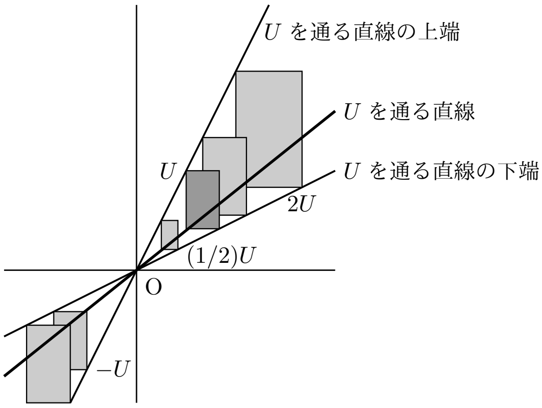

図 1　商写像の逆像 1

いま，簡単のため $\mathbf{R}^2$ の部分集合 U について考える．$\pi(U)$ は U を通る直線たちの集合である．像が $\pi(U)$ となるようなもの，つまり $\pi^{-1}(\pi(U))$ は U を c 倍に拡大・縮小したもの全体である．したがって

$$\begin{aligned}\pi^{-1}(\pi(U)) &= (U \text{ を射影したものと同じところに行くもの})\\ &= (U \text{ を } c \text{ 倍に拡大したもの全て})\\ &= \bigcup_{c \in \mathbf{R}-\{0\}} cU\end{aligned}$$

のようになり，$\mathbf{C}^2$ の場合には $(*)$ が成り立つ．

1.2　貼りあわせ関数

補題 1.5.2 から $\varphi_0 \colon U_0 \xrightarrow{\sim} \mathbf{C}$, $\varphi_1 \colon U_1 \xrightarrow{\sim} \mathbf{C}$ である．ここで，$\varphi_0(U_0)$ の標準座標を w, $\varphi_1(U_1)$ の標準座標を z で表すことにする．定義 1.4 のようにかくと

$$\begin{aligned}z &\colon \varphi_1(U_1) = \mathbf{C} \to \mathbf{C}; (a) \mapsto a\\ w &\colon \varphi_0(U_0) = \mathbf{C} \to \mathbf{C}; (b) \mapsto b\end{aligned}$$

のようになる．複素数の一つ組に対し第一成分を対応させるということである．これによって点 (a) と座標値 $z(a)$ を同一視し，点を単に z と書いたりする．ガウス平面 $\mathbf{C}$ に，そこでの標準座標をつけて $\mathbf{C}_z, \mathbf{C}_w$ のように表すと，$\mathbf{C}_w \subset \mathbf{P}^1$, $\mathbf{C}_z \subset \mathbf{P}^1$ とみなせる．例えば $\mathbf{C}_z$ の点 $1+\sqrt{-1}$ は $\mathbf{P}^1$ では

$$\varphi_1^{-1}\left(1+\sqrt{-1}\right) = \left[1+\sqrt{-1}\colon 1\right]$$

であり $\mathbf{C}_w$ の点 $1/(1+\sqrt{-1})$ は $\mathbf{P}^1$ では

$$\varphi_0^{-1}\left(\frac{1}{1+\sqrt{-1}}\right) = \left[1\colon \frac{1}{1+\sqrt{-1}}\right] = \left[1+\sqrt{-1}\colon 1\right]$$

である．本節では，$\mathbf{C}_z$ と $\mathbf{C}_w$ の間の関係を調べる．

いまの $1+\sqrt{-1}$ の例を見ると

$$z = \frac{1}{w} \tag{1.5}$$

の関係が成り立っているようである．他の例も見る．例えば点 $[2\colon 1]$ と点 $[1\colon 1/2]$ は $\mathbf{P}^1$ では同じものである．これらをそれぞれ φ_1, φ_0 で $\mathbf{C}_z$, $\mathbf{C}_w$ の点とみなすと座標値は $z=2$ と $w=1/2$ である．したがって $z=1/w$ が成り立つ．

$z=0$ のときはうまくいかない．$[z\colon 1]=[1\colon 1/z]=[1\colon w]$ のようにして $w=1/z$ となるものを見つけたいが $w=1/0$ となってしまい不合理である．$w=0$ のときも同様である．そもそも φ_0 は U_0 上で定義されており，$z=0$ となる $[0\colon 1]$ のような点に対しては w の値は定まっていない．つまり，関係式 (1.5) が成り立つためには z も w も 0 でないことが必要である．逆に z と w のどちらも 0 でなければ，関係式 (1.5) が成り立つ．

$z, w \neq 0$ は (1.4) より $[z\colon w] \in U_0 \cap U_1$ ということである．$[z\colon w] \in U_0 \cap U_1$ のとき z は w の正則関数になっている．$\varphi_0(U_0 \cap U_1) = \mathbf{C}_w - \{0\} = \mathbf{C}_w \cap \mathbf{C}_z = \mathbf{C}_z - \{0\} = \varphi_1(U_0 \cap U_1)$ なので，この正則関数を $\varphi_{10}\colon \mathbf{C}_w - \{0\} = \varphi_0(U_0 \cap U_1) \to \mathbf{C}_z - \{0\} = \varphi_1(U_0 \cap U_1)$ とかくことにすると，次の図式が可換になる．

$$\begin{tikzcd}
U_0 \cap U_1 \arrow[r, equal, "{[1\colon w]=[z\colon 1]}"] & U_0 \cap U_1 \arrow[d, "\varphi_1"] \\
\mathbf{C}_w - \{0\} \arrow[u, "\varphi_0^{-1}"] \arrow[r, "\varphi_{10}"'] & \mathbf{C}_z - \{0\}
\end{tikzcd}$$

つまり，$\varphi_{10} = \varphi_1 \circ \varphi_0^{-1}$ である．この正則関数を貼りあわせ関数と呼ぶ．また，$\varphi_{01} = \varphi_0 \circ \varphi_1^{-1}\colon \varphi_1(U_0 \cap U_1) \to \varphi_0(U_0 \cap U_1)$ も $w=1/z$ として同様に定まる．これは正則であり φ_{10} の逆関数でもある．

1.3 複素多様体とリーマン面

$\mathbf{C}^n$ での座標が $z=(z^1,\ldots,z^n)$ であるとき複素数空間 $\mathbf{C}^n$ を $\mathbf{C}^n_z$ とか $\mathbf{C}^n_{(z^1,\ldots,z^n)}$ とかく．$\mathcal{U}$ を $\mathbf{C}^n$ の空でない開集合とする．このとき，$\mathcal{U}$ で定義された複素数値関数 f は標準座標を用いて $f(z)=f(z^1,\ldots,z^n)$ とかける．

f が $\mathcal{U}$ で**正則**であるとは，次の条件 (1), (2) のどちらかをみたすことをいう．（これらは同値.）

(1) $f(z)$ は $\mathcal{U}$ で連続であり，各変数 z^j $(j=1,\dots,n)$ について正則である．

(2) $\mathcal{U}$ の各点 $a=(a^1,\dots,a^n)$ に対して，関数 $f(z)$ は a の近傍で収束巾級数

$$f(z)=\sum_{|\alpha|=0}^{\infty} c_{\alpha_1\dots\alpha_n}(z^1-a^1)^{\alpha_1}\dots(z^n-a^n)^{\alpha_n}$$

で表される．

定義 1.7 (n 次元複素多様体 [?, 定義 4.1])**.** X を位相空間とする．$(\varphi_i\colon U_i\to\mathcal{U}_i)_{i\in I}$ を写像の族とする．このとき，対 $(X,(\varphi_i)_i)$ が次の条件 (1)–(4) をみたすとき，X を台集合とし $(\varphi_i)_i$ を座標近傍系とする n **次元複素多様体** (n-dimensional complex manifold) という．

(1) X は空集合でなく，第 2 可算公理を満たす連結なハウスドルフ空間である[*1]．

(2) すべての $i\in I$ に対して U_i は X の空でない開集合であり，$(U_i)_i$ は X の開披覆である．

(3) すべての $i\in I$ に対して，$\mathcal{U}_i$ は $\mathbf{C}^n_{(z^1,\dots,z^n)}$ の空でない開集合であり $\varphi_i\colon U_i\to\mathcal{U}_i$ は同相である．

(4) 任意の $i\neq j\in I$ で $U_i\cap U_j\neq\varnothing$ をみたすものに対して $\mathcal{U}_{ij}:=\varphi_j(U_i\cap U_j)\subset\mathcal{U}_j$ とおくとき，$\varphi_{ij}:=\varphi_i\circ\varphi_j^{-1}\big|_{\mathcal{U}_{ij}}\colon\mathcal{U}_{ij}\to\mathcal{U}_{ji}$ は正則である．

例 1.8. 1. $\mathbf{C}^n$ の領域 $\mathcal{U}$ は $(\mathrm{id}_{\mathcal{U}}\colon\mathcal{U}\to\mathcal{U})$ を座標近傍系とする n 次元複素多様体である．

2. $X=(X,(\varphi_i\colon U_i\to\mathcal{U}_i)_{i\in I})$ を n 次元複素多様体とし，U を X の領域とする．$J:=\{i\in I; U\cap U_i\neq\varnothing\}$ とおく．U は $(\varphi_j|_{U\cap U_j})_{j\in J}$ を座標近傍系とする n 次元複素多様体になる．この多様体 U を開部分（複素）多様体という．

1 次元複素多様体を**リーマン面** (Riemann surface) という．

命題 1.9. リーマン球面 $\mathbf{P}^1$ はリーマン面である．

証明. (1) 補題 1.5.4 からしたがう．

(2) (1.3) と (1.4) からしたがう．

(3) 補題 1.5.2 からしたがう．

(4) 1.2 節で説明した． □

$\mathbf{P}^1$ のような，台空間がコンパクトなリーマン面をとくにコンパクトリーマン面という．例 1.8.2 のように，リーマン面 X の領域 U はリーマン面になる．この U を X の開リーマン面という．

定義 1.10. X を n 次元複素多様体, Y を m 次元複素多様体とする．$f\colon X\to Y$ を X から Y への連続写像とする．

1. P を X の点とする．$P, f(P)$ の近傍での f のある座標表示 $w_j=f_{ij}(z_i)$, きちんと書くと $(w_j^1,\dots,w_j^m)=\big(f_{ij}^1(z_i^1,\dots,z_i^n),\dots,f_{ij}^m(z_i^1,\dots,z_i^n)\big)$ が $z_i(P)=(z_i^1(P),\dots,z_i^n(P))$ で正則であるとき，f は P で**正則**であるという．

[*1] 条件 (1) のうち第 2 可算と連結を課さないことも多い ([?] など).

2. f がすべての点 $\in X$ で正則であるとき f を**正則写像** (holomorphic mapping) とか**正則射** (holomorphism) という．また $\mathbf{C}$ への正則写像を**正則関数** (holomorphic function) という．

3. U を X の空でない開集合とする．U 上の関数 f は U の各連結成分上正則であるとき U 上の正則関数という．ここで，複素多様体の領域は例 1.8.2 の方法で複素多様体とみなしている．

定義 1.11. X と Y を n 次元複素多様体とする．$f\colon X \to Y$ を正則写像とする．正則写像 $g\colon Y \to X$ で $g \circ f = \mathrm{id}_X$ かつ $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ をみたすものが存在するとき，f を**双正則写像** (biholomorphic mapping) とか**双正則射** (biholomorphism) という．X から Y への双正則写像が存在するとき，X と Y は**同形** (isomorphic) とか**双正則同値** (biholomorphically equivalent), またはたんに**双正則** (biholomorhic) であるという．

2 Weierstrass の $\wp$ 関数

Weierstrass の $\wp$ 関数 $\wp(u)$ を次で定める．

$$\wp(u) \coloneqq \sum_{\omega\in\Omega,\omega\neq 0} \left(\frac{1}{(u-\omega)^2} - \frac{1}{\omega} \right) \tag{2.1}$$

これが U で一様収束することを示す．

参考文献

[Mo81] 森田紀一, 位相空間論, 岩波書店, 1981.