局所系と局所定数層

toshi2019

概要

局所系と局所定数層が同じことを説明する．余裕があればモノドロミーについて述べる．

記号と用語

- 単位閉区間 $[0,1]$ を I とかく．
- 位相空間 X の部分集合 A に対し，閉包を $\operatorname{Cl} A$ とかく．
- 位相空間 X の点 x, y に対し，x を始点，y を終点とする X 内の道のホモトピー類の集合を $\varOmega(X;x,y)$ とかく．X が明らかな場合は $\varOmega(x,y)$ ともかく．
- 開集合 U の開被覆の族を $\mathsf{Cov}(U)$ とかく．

1 局所系

1.1 亜群

X を弧状連結な位相空間とする．このとき，X 上の**基本亜群** (fundamental groupoid) $\varPi(X)$ を次で定める．

対象 x の各点.

射 $x, y \in X$ に対し，x から y への道 $l\colon I \to X$ たちのホモトピー類.

合成 道の結合.

次のように書いてもよい.

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Ob}(\varPi(X)) &\coloneqq X,\\
\operatorname{Hom}_{\varPi(X)}(x,y) &\coloneqq \varOmega(x,y),\\
[l'] \circ [l] &\coloneqq [l \cdot l'] \quad (l \in \varOmega(x,y), l' \in \varOmega(y,z)).
\end{aligned}
$$

$\varPi(X)$ の射はすべて同型なので $\varPi(X)$ は亜群である.

1.2　局所系

X を弧状連結な位相空間とする．亜群 $\mathit{\Pi}(X)$ 上の共変換手 $F\colon \mathit{\Pi}(X) \to \mathscr{C}$ を X 上の $\mathscr{C}$ に値をとる局所系という．

2　局所定数層

X 上の $\mathscr{C}$ に値をとる層 F が**局所定数層** (locally constant sheaf) であるとは，X の開被覆 $(U_i)_i$ で，各開集合 U_i ごとに，$F|_{U_i}$ が定数層と同型となるものが存在することをいう．

3　[Sp66] から

3.1　[Sp66, Chap 1]

[Sp66, Chap 1] の Exercise F が局所系に関するものである．

F 局所系[*1]

1　空間 X 上の局所系とは，X の基本亜群から別の圏への共変関手である．任意の圏 $\mathcal{C}$ に対し，$\mathcal{C}$ に値をとる X 上の局所系の圏が定まることを示せ．（2 つの局所系がこの圏の対象として同値であるとき，それらが同値であるという．）

2　$f\colon X \to Y$ を写像とする．f は $\mathcal{C}$ に値をとる Y 上の局所系の圏から $\mathcal{C}$ に値をとる X 上の局所系の圏への関手をひきおこすことを示せ．

3　A が圏 $\mathcal{C}$ の対象であるとき，$\operatorname{Aut} A$ を $\mathcal{C}$ における A の自己同値のなす群とする．$\varphi\colon A \approx B$ が $\mathcal{C}$ における同値とであるとき，$\overline{\varphi}(\alpha) = \varphi \circ \alpha\varphi^{-1}$ で定義される射 $\overline{\varphi}\colon \operatorname{Aut} A \to \operatorname{Aut} B$ は群の同型であることを示せ．

4　Γ を X 上の局所系とし $x_0 \in X$ とする．このとき，Γ は準同型

$$\bar{\Gamma}_{x_0}\colon \pi(X, x_0) \to \operatorname{Aut}\Gamma(x_0)$$

をひきおこすことを示せ．

5　X が弧状連結であるとき，X 上の $\mathcal{C}$ に値をとる局所系 Γ, Γ' が同値であるためには，同値 $\varphi\colon \Gamma(x_0) \to \Gamma'(x_0)$ で，$\operatorname{Aut}\Gamma'(x_0)$ において $\bar{\varphi} \circ \bar{\Gamma}_{x_0}$ が $\bar{\Gamma}'_{x_0}$ と共役となるものが存在することが必要十分であることを示せ．

6　X が弧状連結であるとき，$A \in \mathcal{C}$ と準同型 $\alpha\colon \pi(X, x_0) \to \operatorname{Aut} A$ に対して，X 上の $\mathcal{C}$ に値をとる局所系 Γ で，$\Gamma(x_0) = A$ と $\bar{\Gamma}_{x_0} = \alpha$ をみたすものが存在することを示せ．

[*1] Steenrod, Homology with local coefficients, Ann Math., 44, pp. 610–627, 1943 参照.

3.2 [Sp66, Chap 6]

局所系と層の関係については [Sp66, Chap 6] の Exercise F に書いてある．

F 局所系と層

以下の一連の演習問題では，X はパラコンパクトハウスドルフであるとする．

1　Γ が X 上の局所系であるとき，$\bar{\Gamma}$ を，開集合 $V \subset X$ に対し，

$$\bar{\Gamma}(V) := \left\{ f\colon X \to \Gamma(X);\ V \text{ 内の任意の道 } \omega \text{ に対して，} f(\omega(1)) = \Gamma(\omega)\left(f\left(\omega(0)\right)\right) \right\}$$

で定まる X 上の前層とする．$\bar{\Gamma}$ は X 上の層であり，Γ に $\bar{\Gamma}$ を対応させる操作は，局所系から層への自然変換であることを示せ．

2　X 上の前層 Γ が局所定数層であるとは，X の開被覆 $\mathscr{U} = \{U\}$ で $U \in \mathscr{U}$ かつ $x \in U$ のとき，$\Gamma(U) \approx \varinjlim_{V \ni x} \{\Gamma(V)\}$ が成りたつことをいう．$U \in \mathscr{U}$ で U' が U の連結開集合のとき，合成

$$\Gamma(U) \to \Gamma(U') \to \hat{\Gamma}(U')$$

が同型射になることを示せ．[*2] Γ が局所定数層で，U' が $U \in \mathscr{U}$ の連結開集合であるとき，$\Gamma(U) \approx \Gamma(U')$ となることを示せ．

3　X が局所弧状連結で Γ' が X 上の局所定数層であるとき，X 上の局所系 Γ で $\bar{\Gamma} \approx \Gamma'$ となるものが存在することを示せ．

4　X が局所弧状連結かつ半局所 1 連結[*3]であるとき，X 上の局所系の同値類と X 上の局所定数層の同値類との間に一対一対応が存在することを示せ．

---

*2 $\hat{\Gamma}$ は前層 Γ の完備化と呼ばれ，次のように定義される．

$$\Gamma(\mathscr{U}) := \left\{ (s_U)_U \in \prod_{U \in \mathscr{U}} \Gamma(U); \text{各 } U, V \in \mathscr{U} \text{ に対し，} s_U|_{U \cap V} = s_V|_{U \cap V} \right\}$$

とおくとき，

$$\hat{\Gamma}(W) := \varinjlim_{\mathscr{U} \in \mathsf{Cov}(W)} \Gamma(\mathscr{U}).$$

要するに層化．[Sp66, p.78]

*3 空間 X が**半局所 1 連結** (semilocally 1-connected) であるとは，各点 $x_0 \in X$ に対し近傍 N で $\pi(N, x_0) \to \pi(X, x_0)$ が自明となることをいう．[Sp66, p.78]

4 局所定数層の分類 [Iv, IV.9]

同変 k 層を導入する．k を可換環とし，X を位相空間で群 G が右から作用するものとするとき，層 E に対する G 作用とは，k 層の射 $a_\sigma\colon E \to \sigma_* E$ で次をみたすものの族 $(a_\sigma)_{\sigma\in G}$ のことである．

$$a_{\sigma\tau} = \tau_* a_\sigma \circ a_\tau. \quad (\sigma, \tau \in G) \tag{4.1}$$

G 作用をもつ層を G 同変層 E という．k 層の射で任意の $\sigma \in G$ に対し次の図式が可換になるものを G 同変層の射 $h\colon E \to F$ という．

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r] \arrow[d, "h"] & \sigma_* E \arrow[d, "\sigma_* h"] \\ F \arrow[r] & \sigma_* F. \end{tikzcd}$$

X 上の G 同変層の圏を $\mathrm{Sh}^G(X,k)$ とかく．以下で $B = X/G$ とおき，$f\colon X \to B$ で射影を表す．ここで，関手を 2 つ導入する．

$$\mathrm{Sh}^G(X,k) \underset{\mathrm{Inv}^G}{\overset{f^*}{\leftrightarrows}} \mathrm{Sh}(B,k). \tag{4.2}$$

まず，X 上の k 層 E への G 作用は，随伴を考えることで，$a^\sigma\colon \sigma^* E \to E$ という同型によって表すこともできることに注意する．したがって，B 上の層 F に対し，標準的な同型

$$\sigma^* f^* F \to f^* F \quad (\sigma \in G)$$

によって f^*F への G 作用が定まる．いま，E を X 上の G 同変層とする．B の開集合 V での $\mathrm{Inv}^G E$ の切断について述べるために，式 (4.1) から，$\Gamma(f^{-1}(V), E)$ への左 G 作用が定まることに注意する．このとき，

$$\Gamma(V; \mathrm{Inv}^G E) := \Gamma(f^{-1}(V), E)^G$$

とおく．ただし，$\Gamma(f^{-1}(V), E)^G$ は E の $f^{-1}(V)$ における G 不変な切断のなす集合である．f^* は Inv^G の左随伴関手である．すなわち，任意の $F \in \mathrm{Sh}(B,k)$, $E \in \mathrm{Sh}^G(X,k)$ に対し

$$\mathrm{Hom}_F(f^*F, E) \cong \mathrm{Hom}(F, \mathrm{Inv}^G E) \tag{4.3}$$

である．証明は読者に任せる．G 作用をもつ k 加群 N に対し，N 上の G 作用を対応させることができる．$\sigma \in G$ と X の開集合 U に対し，次の写像を対応させる．

$$\mathrm{Hom}(U, N) \to \mathrm{Hom}(\sigma(U), N); \quad \varphi \to \sigma_N \circ \varphi \circ \sigma. \tag{4.4}$$

参考文献

[B+84] Borel, *Intersection Cohomology*, Progress in Mathematics, 50, Birkhäuser, 1984.

[Iv] Iversen, Cohomology of Sheaves.

[KS90] Masaki Kashiwara, Pierre Schapira, *Sheaves on Manifolds*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 292, Springer, 1990.

[KS06] Masaki Kashiwara, Pierre Schapira, *Categories and Sheaves*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 332, Springer, 2006.

[Sh16] 志甫淳, 層とホモロジー代数, 共立出版, 2016.

[Sp66] Spanier: Algebraic Topology. McGraw-Hill, 1966.