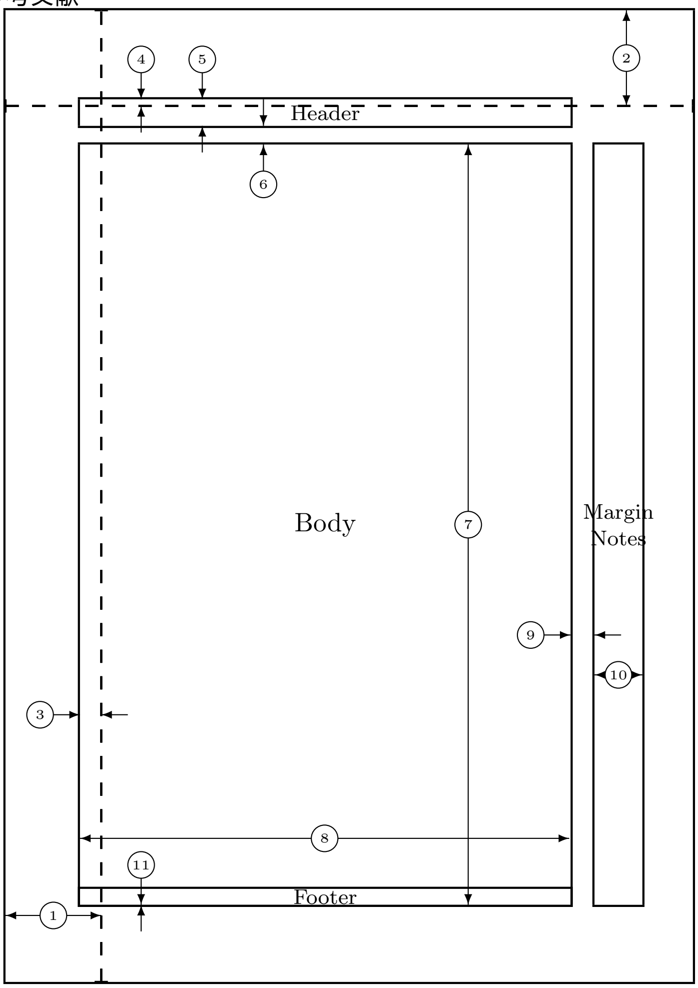
準アーベル圏まとめノート

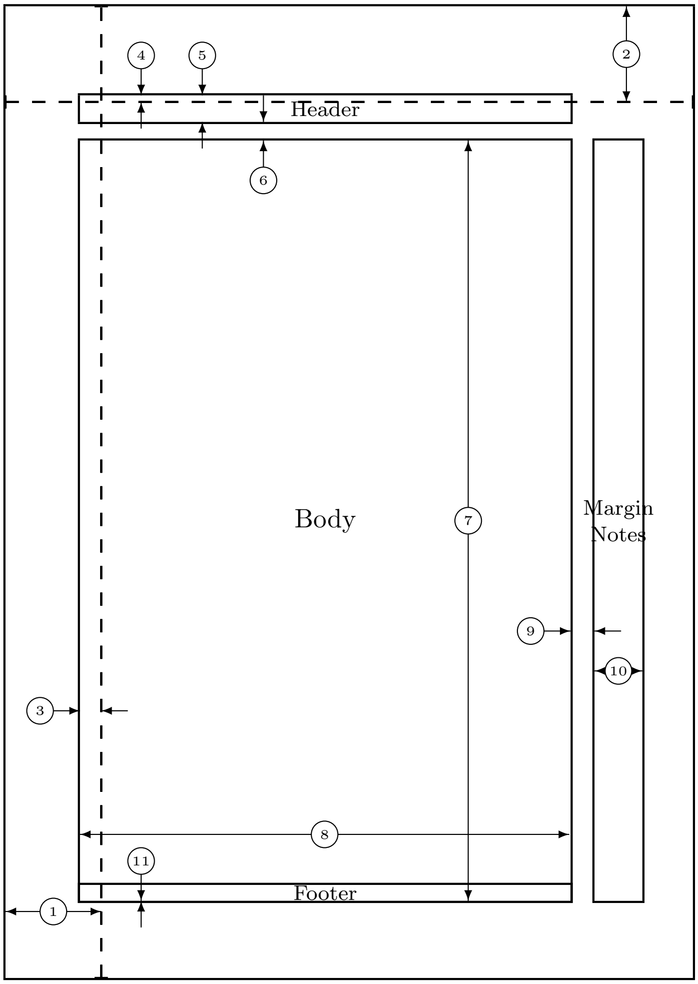
Toshi2019

2023 年 9 月 16 日

目次



1	one inch + \hoffset	2	one inch + \voffset
3	\oddsidemargin = -16pt	4	\topmargin = -5pt
5	\headheight = 20pt	6	\headsep = 14pt
7	\textheight = 572pt	8	\textwidth = 369pt
9	\marginparsep = 18pt	10	\marginparwidth = 36pt
11	\footskip = 0pt		\marginparpush = 16pt (not shown)
	\hoffset = 0pt		\voffset = 0pt
	\paperwidth = 517pt		\paperheight = 731pt



1	`one inch + \hoffset`	2	`one inch + \voffset`
3	`\oddsidemargin = -16pt`	4	`\topmargin = -5pt`
5	`\headheight = 20pt`	6	`\headsep = 14pt`
7	`\textheight = 572pt`	8	`\textwidth = 369pt`
9	`\marginparsep = 18pt`	10	`\marginparwidth = 36pt`
11	`\footskip = 0pt`		`\marginparpush = 16pt (not shown)`
	`\hoffset = 0pt`		`\voffset = 0pt`
	`\paperwidth = 517pt`		`\paperheight = 731pt`

導入

■2023/09/15　[Sch99] を読む．まずモチベーションについて．解析ではフィルター加群や局所凸空間を考えることが多い．それに対するホモロジー論を作っておくと便利だが，これらの圏はアーベル圏にならない．そこで，アーベル圏よりも少し条件を緩めた「準アーベル圏」を考えようというのがモチベ．

もう一つは上記のような対象の圏に値を取る層に対してのコホモロジー論としていいものを見つけたいというもの．

Quillen の意味での完全圏のうち特別なものとして準アーベル圏を定義する．

第 1 章

準アーベル圏

1.1 準アーベル圏と関手

$\mathcal{E}$ を核と余核を持つ加法圏とする．

1.1.1 像，余像，strict morphism[*1]

「余核の核」が像で，「核の余核」が余像．つまり $\mathcal{E}$ において

$$\operatorname{Im}(f\colon E \to F) = \operatorname{Ker}\left(F \xrightarrow{p} \operatorname{Coker} f\right),$$
$$\operatorname{Coim}(f\colon E \to F) = \operatorname{Coker}\left(\operatorname{Ker} \xrightarrow{i} E\right).$$

このとき，自然な射

$$\operatorname{Coim} f \to \operatorname{Im} f$$

が存在する．この射が同形であるとき，f は strict であるという．

1.1.2 準アーベル圏の定義

定義 1.1.1. 圏 $\mathcal{E}$ が準アーベル圏であるとは，次の互いに双対的な条件を満たすことをいう．

(QA) デカルト図式

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] & F \\ E' \arrow[u] \arrow[r, "f'"'] & F' \arrow[u] \end{tikzcd}$$

*1 完全射・嵌合射・十全射・万全射のような訳語が考えられる．

において f が strict な全射ならば，f' も strict な全射になる．

(QA*)　余デカルト図式

$$\begin{tikzcd} E' \arrow[r, "f'"] & F' \\ E \arrow[u] \arrow[r, "f"'] & F \arrow[u] \end{tikzcd}$$

において f が strict な単射ならば，f' も strict な単射になる．

参考文献

[KS90] Masaki Kashiwara, Pierre Schapira, *Sheaves on Manifolds*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 292, Springer, 1990.

[KS06] Masaki Kashiwara, Pierre Schapira, *Categories and Sheaves*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 332, Springer, 2006.

[Sh16] 志甫淳, 層とホモロジー代数, 共立出版, 2016.

[Sch99] Schneiders, *Quasi-abelian categories*, , 1999.