

2024/02/22 セミナー資料

大柴寿浩

記号

- $\overline{\mathbf{R}} := [-\infty, +\infty] = \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$
- 集合 U の開近傍系を I_U とかき, 点 x の開近傍系を I_x とかく.

1 核

X, Y を局所コンパクト空間で c 柔軟次元が有限であるものとする. 積空間 $X \times Y$ から X, Y への射影をそれぞれ q_1, q_2 とする. $K \in D^b(X \times Y)$ とする. (基礎環は大域次元が有限な可換環 A とする.)

定義 1.1 ([KS90, Definition 3.6.1]). 関手 $\Phi_K: D^+(Y) \rightarrow D^+(X)$ と $\Psi_K: D^+(X) \rightarrow D^+(Y)$ を次で定める. $G \in D^+(Y), F \in D^+(X)$ に対し,

$$\begin{aligned}\Phi_K(G) &:= Rq_{1!} \left(K \overset{L}{\otimes} q_2^{-1} G \right), \\ \Psi_K(F) &:= Rq_{2*} R\mathcal{H}om(K, q_1^! F).\end{aligned}$$

命題 1.2 ([KS90, Proposition 3.6.2]). $\Phi_K \dashv \Psi_K$ である. すなわち

$$\mathrm{Hom}_{D^+(X)}(\Phi_K(\cdot), \cdot) \cong \mathrm{Hom}_{D^+(Y)}(\cdot, \Psi_K(\cdot))$$

が成り立つ.

コメント. $(\otimes, \mathcal{H}om)$ や $(Rf_!, f^!)$ と同じ向き.

証明. $F \in D^+(X)$, $G \in D^+(Y)$ に対し,

$$\begin{aligned}
& \mathrm{Hom}_{D^+(X)}(\Phi_K(G), F) \\
&= \mathrm{Hom}_{D^+(X)}\left(\mathrm{R}q_{1!}\left(K \overset{\mathrm{L}}{\otimes} q_2^{-1}G\right), F\right) && (\text{定義}) \\
&\cong \mathrm{Hom}_{D^+(X \times Y)}\left(K \overset{\mathrm{L}}{\otimes} q_2^{-1}G, q_1^!F\right) && (\mathrm{R}q_{2!} \dashv q_2^!) \\
&\cong \mathrm{Hom}_{D^+(X \times Y)}(q_2^{-1}G, \mathrm{R}\mathcal{H}om(K, q_1^!F)) && (\overset{\mathrm{L}}{\otimes} \dashv \mathrm{R}\mathcal{H}om) \\
&\cong \mathrm{Hom}_{D^+(X \times Y)}(G, \mathrm{R}q_{2*} \mathrm{R}\mathcal{H}om(K, q_1^!F)) && (q_2^{-1} \dashv \mathrm{R}q_{2*}) \\
&= \mathrm{Hom}_{D^+(X \times Y)}(G, \Psi_K(F))
\end{aligned}$$

である. □

命題 1.3 ([KS90, Proposition 3.6.3]). $X = Y$ であり, $K = A_\Delta$ のとき, Φ_K と Ψ_K は $D^+(X)$ の恒等関手と同型になる. ただし Δ は X の対角集合である.

次の補題を用いる.

補題 1.4 ([KS90, Proposition 3.1.14]). X を c 柔軟次元が有限な局所コンパクト空間とする. $F \in D^+(A_X)$ と $G \in D^b(A_X)$ に対し, 次が成り立つ.

$$\mathrm{R}\mathcal{H}om(G, F) \cong \mathrm{R}q_{1*} \mathrm{R}\Gamma_\Delta \mathrm{R}\mathcal{H}om(q_2^{-1}G, q_1^!F).$$

命題 1.3 の証明. $F \in D^+(X)$ に対し,

$$\begin{aligned}
F &\underset{\text{定数層の台}}{\cong} \mathrm{R}\mathcal{H}om(A_X, F) \\
&\underset{\text{補題 1.4}}{\cong} \mathrm{R}q_{2*} \mathrm{R}\Gamma_\Delta \mathrm{R}\mathcal{H}om(q_2^{-1}A_X, q_1^!F) \\
&\underset{[\text{KS90}, (2.6.9)]}{\cong} \mathrm{R}q_{2*} \mathrm{R}\mathcal{H}om(q_2^{-1}A_\Delta, q_1^!F) \\
&= \Psi_K(F).
\end{aligned}$$

また, $G \in D^+(X)$ に対し,

$$\begin{aligned}
\Phi_K(F) &= \mathrm{R}q_{1!}\left(A_\Delta \overset{\mathrm{L}}{\otimes} q_2^{-1}G\right) \\
&\cong \mathrm{R}q_{1!}(q_2^{-1}G)_\Delta && (\text{複体に対する台の切り落としの定義}) \\
&\cong G. && (q_1|_\Delta = q_2|_\Delta \text{ は固有なので } (q_1|_\Delta)_! = (q_2|_\Delta)_! \cong (q_2|_\Delta)_*)
\end{aligned}$$

□

こんどは Z をあわせて $X \times Y \times Z$ を考える．射影を

$$\begin{array}{ccc} & X \times Z & \\ q'_1 \swarrow & & \searrow q'_2 \\ X & & Z \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & Y \times Z & \\ q''_1 \swarrow & & \searrow q''_2 \\ Y & & Z \end{array}$$

のように定め,

$$(3.6.1) \quad \begin{array}{ccccc} & & X \times Y \times Z & & \\ & q_{12} \swarrow & \downarrow q_{13} & \searrow q_{23} & \\ X \times Y & & X \times Z & & Y \times Z \\ q_1 \downarrow & & & & \downarrow q''_2 \\ X & q'_1 \swarrow & q_2 \searrow & q'_1 \swarrow & q'_2 \searrow \\ & X & Y & & Z \end{array}$$

のように射影を定める．

命題 1.5. $K_1 \in D^b(X \times Y)$ と $K_2 \in D^b(Y \times Z)$ に対し,

$$K := Rq_{13!} \left(q_{12}^{-1} K_1 \overset{L}{\otimes} q_{23}^{-1} K_2 \right)$$

とおく．このとき, 次が成り立つ．

$$\Psi_{K_2} \circ \Psi_{K_1} \cong \Psi_K, \quad \Phi_{K_1} \circ \Phi_{K_2} \cong \Phi_K.$$

証明. $F \in D^+(X)$ とすると,

$$\begin{aligned} & \Psi_{K_2} \circ \Psi_{K_1}(F) \\ &= Rq_{2*}'' R\mathcal{H}om_{Y \times Z} \left(K_2, q_1''^! \Psi_{K_1}(F) \right) \\ &= Rq_{2*}'' R\mathcal{H}om_{Y \times Z} \left(K_2, q_1''^! Rq_{2*} R\mathcal{H}om_{X \times Y} (K_1, q_1^! F) \right) \\ &= Rq_{2*}'' R\mathcal{H}om_{Y \times Z} \left(K_2, Rq_{23*} q_{12}^! R\mathcal{H}om_{X \times Y} (K_1, q_1^! F) \right) && \text{(固有基底変換)} \\ &= Rq_{2*}'' Rq_{23*} R\mathcal{H}om_{Y \times Z} \left(q_{23}^{-1} K_2, q_{12}^! R\mathcal{H}om_{X \times Y} (K_1, q_1^! F) \right) && \text{(順像逆像随伴)} \\ &= Rq_{2*}'' Rq_{23*} R\mathcal{H}om_{X \times Y \times Z} \left(q_{23}^{-1} K_2, R\mathcal{H}om_{X \times Y \times Z} (q_{12}^{-1} K_1, q_{12}^! q_1^! F) \right) && \text{(Prop.3.1.13)} \\ &= Rq_{13*} Rq_{2*}' R\mathcal{H}om_{X \times Y \times Z} \left(q_{23}^{-1} K_2, R\mathcal{H}om_{X \times Y} (q_{12}^{-1} K_1, q_{12}^! q_1^! F) \right) && \text{(図式の可換性)} \\ &= Rq_{13*} Rq_{2*}' R\mathcal{H}om_{X \times Y \times Z} \left(q_{12}^{-1} K_1 \overset{L}{\otimes} q_{23}^{-1} K_2, q_{12}^! q_1^! F \right) && \text{(テンソルホム随伴)} \\ &= Rq_{13*} Rq_{2*}' R\mathcal{H}om_{X \times Y \times Z} \left(q_{12}^{-1} K_1 \overset{L}{\otimes} q_{23}^{-1} K_2, q_{13}^! q_1^! F \right) && \text{(図式の可換性)} \\ &= Rq_{2*}' R\mathcal{H}om_{X \times Z} \left(Rq_{13!} \left(q_{12}^{-1} K_1 \overset{L}{\otimes} q_{23}^{-1} K_2 \right), q_1^! F \right) && \text{(PV)} \\ &= \Psi_K(F) \end{aligned}$$

である.

また, $G \in D^+(Z)$ とすると

$$\begin{aligned}
& \Phi_{K_1} \circ \Phi_{K_2}(G) \\
&= Rq_{1!} \left(K_1 \underset{A_{X \times Y}}{\overset{L}{\otimes}} q_2^{-1} \Phi_{K_2}(G) \right) \\
&= Rq_{1!} \left(K_1 \underset{A_{X \times Y}}{\overset{L}{\otimes}} q_2^{-1} Rq_{1!}' \left(K_2 \underset{A_{Y \times Z}}{\overset{L}{\otimes}} q_2''^{-1} G \right) \right) \\
&= Rq_{1!} \left(K_1 \underset{A_{X \times Y}}{\overset{L}{\otimes}} \textcolor{red}{Rq_{12}!} q_{23}^{-1} \left(K_2 \underset{A_{Y \times Z}}{\overset{L}{\otimes}} q_2''^{-1} G \right) \right) && \text{(固有基底変換)} \\
&= Rq_{1!} \left(K_1 \underset{A_{X \times Y}}{\overset{L}{\otimes}} Rq_{12!} \left(\textcolor{red}{q_{23}^{-1}} K_2 \underset{A_{X \times Y \times Z}}{\overset{L}{\otimes}} \textcolor{red}{q_{23}^{-1}} q_2''^{-1} G \right) \right) && (2.6.18) \\
&= Rq_{1!} \left(K_1 \underset{A_{X \times Y}}{\overset{L}{\otimes}} Rq_{12!} \left(q_{23}^{-1} K_2 \underset{A_{X \times Y \times Z}}{\overset{L}{\otimes}} \textcolor{red}{q_{13}^{-1}} q_2'^{-1} G \right) \right) && \text{(図式の可換性)} \\
&= Rq_{1!} \textcolor{red}{Rq_{12}!} \left(\textcolor{red}{q_{12}^{-1}} K_1 \underset{A_{X \times Y \times Z}}{\overset{L}{\otimes}} \left(q_{23}^{-1} K_2 \underset{A_{X \times Y \times Z}}{\overset{L}{\otimes}} q_{13}^{-1} q_2'^{-1} G \right) \right) && (2.6.19) \\
&= \textcolor{red}{Rq_{11}'} \textcolor{red}{Rq_{13}!} \left(q_{12}^{-1} K_1 \underset{A_{X \times Y \times Z}}{\overset{L}{\otimes}} \left(q_{23}^{-1} K_2 \underset{A_{X \times Y \times Z}}{\overset{L}{\otimes}} q_{13}^{-1} q_2'^{-1} G \right) \right) && \text{(図式の可換性)} \\
&= Rq_{11}' Rq_{13!} \left(\left(q_{12}^{-1} K_1 \underset{A_{X \times Y \times Z}}{\overset{L}{\otimes}} q_{23}^{-1} K_2 \right) \underset{A_{X \times Y \times Z}}{\overset{L}{\otimes}} q_{13}^{-1} q_2'^{-1} G \right) && \text{(テンソル積の結合則)} \\
&\cong Rq_{11}' \left(\textcolor{red}{Rq_{13}!} \left(q_{12}^{-1} K_1 \underset{A_{X \times Y \times Z}}{\overset{L}{\otimes}} q_{23}^{-1} K_2 \right) \underset{A_{X \times Z}}{\overset{L}{\otimes}} q_2'^{-1} G \right) && (2.6.19) \\
&\cong \Phi_K(G)
\end{aligned}$$

である. □

$$(3.6.2) \quad K_1 \circ K_2 := Rq_{13!} \left(q_{12}^{-1} K_1 \underset{A_{X \times Y \times Z}}{\overset{L}{\otimes}} q_{23}^{-1} K_2 \right)$$

とおく. 核の合成 (composition of kernels) というらしい.

系 1.6 ([KS90, Corollary 3.6.5]). Z を

参考文献

[BouTVS] ブルバキ, 位相線形空間 1, 東京図書, 1968.

- [B+84] Borel, *Intersection Cohomology*, Progress in Mathematics, 50, Birkhäuser, 1984.
- [G58] Grauert, *On Levi's problem and the embedding of real analytic manifolds*, Ann. Math. 68, 460–472 (1958).
- [GP74] Victor Guillemin, Alan Pollack, *Differential Topology*, Prentice-Hall, 1974.
- [KS90] Masaki Kashiwara, Pierre Schapira, *Sheaves on Manifolds*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 292, Springer, 1990.
- [KS06] Masaki Kashiwara, Pierre Schapira, *Categories and Sheaves*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 332, Springer, 2006.
- [Le13] John M. Lee, *Introduction to Smooth Manifolds*, Second Edition, Graduate Texts in Mathematics, **218**, Springer, 2013.
- [Mo76] 森本光生, 佐藤超函数入門, 共立出版, 1976.
- [R55] de Rham, *Variétés différentiables*, Hermann, Paris, 1955.
- [Sa59] Mikio Sato, *Theory of Hyperfunctions*, 1959–60.
- [S66] Schwartz, *Théorie de distributions*, Hermann, Paris, 1966.
- [Sh16] 志甫淳, 層とホモロジー代数, 共立出版, 2016.
- [SP] The Stacks Project.
- [Sp65] Michael Spivak, *Calculus on Manifolds*, Benjamin, 1965.
- [Ike21] 池祐一, 超局所層理論概説, 2021.
- [Tak17] 竹内潔, \mathcal{D} 加群, 共立出版, 2017.
- [Ue] 植田一石, ホモロジー的ミラー対称性, <https://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~kazushi/course/hms.pdf> 2024/02/04 最終閲覧.