# 収録されなかった原稿

Pierre Schapira

**Résumé**

Inference Vol. 7, No. 3 に掲載された Pierre Schapira による書評 “A Truncated Manuscript” の翻訳.

## 2023/01/09

厳密に言うと，この小文は，Alexander Grothendieck による Récolts et Semailles（収穫と蒔いた種と）の書評のためだけのものではない[1]．全体として，本については，Grothendieck の仕事と人生とともに，ここで論じられはするけれど，本稿（小文）の大部分は，Grothendieck が原文全体を通して重ねた主張を論駁するのに充てられている．この点については重要な支持者がいる．著者本人である．今度の新版には収録されていない重要な追記のなかで，Grothendieck は自身の言いがかりのうちのいくつかを撤回している．

Grothendieck という人物は，20 世紀後半の間，数学の多くの部分を支配した．彼の仕事が本質的には代数幾何学に関連するのだとしても，その視野と手法は代数幾何学を超えて大きく広まった．それは，代数的位相幾何学，表現論，複素幾何学，シンプレクティック幾何学，代数解析学，そして近年においては，計算幾何学にさえも及ぶ．端的にいって，力学系や確率論，そしてリーマン幾何学やハミルトン幾何学のような純粋に幾何学的な幾何学を除く，あらゆる線形的な数学である．

導来圏や層理論がこれらの分野において建設されたのは，彼の影響下においてである．直観に優れ，導来圏の理論の根幹を形作ったのも Grothendieck である．彼は自身の学生である Jean-Louis Verdier に，学位論文として，理論の詳細を全て書き出させた．その学位論文において，Verdier は三角圏の鍵となる概念を明確化した[2]．しかし，後述するように，導来圏の理論の枠組みで層理論と六則演算を作ったのは Grothendieck である．

---

1)．Leila Schneps の批判的かつ建設的な忠告に感謝する．

2)．Alexander Grothendieck, *Récoltes et Semailles : I, II. Réflexions et témoignage sur un passé de mathématicien* (Paris : Gallimard, 2022), 439.

1950 年から 1970 年まで，関数あるいは一般化関数は，フーリエ変換を用いて，実または複素多様体の，とりわけユークリッド空間の上で研究されていた．ところが，複素多様体の上では，我々が関数というとき実際には正則関数を意味するが，この関数が重大な困難をもたらす．どういうことかというと，存在しないのである．射影直線のようなコンパクト多様体上の正則関数は，少なくとも大域的には，もちろん定数関数は除いて，存在しない．したがって，実可微分多様体とは異なり，大域的な知識は何の情報ももたらさず，局所的に調べるしかない．この目的のための非凡な道具がある．層理論である．これは Jean Leray が 1941 年から 1945 年までの間ドイツで戦争捕虜になっていた時に発明された[3)]．Leray の原論文はどこか読みづらいところがあったが，のちに Henri Cartan と Jean-Pierre Serre によって整理され，Théorie des Faisceaux（層の理論）[4)]という Roger Godement の有名な本にまとめられた．Cartan と Serre はこの道具を次元 $\geqq 1$ における正則関数を調べるという，岡潔による金字塔以来の研究にそれぞれ用いて，Cartan の定理 A, B と Serre による重要な論文 “Faisceaux algébrique cohérents”（代数的連接層）[5)]が生まれた．

1955 年頃に Grothendieck が代数幾何学に着手し，東北数学雑誌から出版された基礎的な論文[6)]において層コホモロジーの基礎づけを与えたのは，この文脈においてである．この論文において，圏論の重大な困難，すなわち宇宙の問題という Grothendieck により SGA4 で解決される問題が暗に現れている．

その解決は快刀乱麻を断つ方法でなされた[訳注] [7)]．Grothendieck は，どの集合もある宇宙に含まれるという公理を付け加えたのである．宇宙は到達不能基数という，圏論を運用することができる範囲を超えたものとしても知られる．この問題が原因で，ブルバキは圏論を扱うことを諦め，Grothendieck はブルバキを離れたのだと思われる．この問題については Ralf Krömer が素晴らしい記事[8)]を書いている．

---

3)．Christian Houzel による歴史に関する次の記事を参照せよ．“Les début de la théorie des faisceaux,” in Masaki Kashiwara and Pierre Schapira, *Sheaves on Manifolds, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, vol. 292* (Berlin : Springer-Verlag, 1990), doi :10.1007/978-3-662-02661-8.

4)．Roger Godement, *Théorie des faisceaux* (Pairs : Hermann, 1958).

5)．Jean-Pierre Serre, “Faisceaux algébrique cohérents,”*Annals of Mathematics, 2nd Series* 61, no. 2. (1955) : 197–278, doi :10.2307/1969915.

6)．Alexander Grothendieck, “Sur quelques points d’algébre homologique,” *Tōhoku Mathematical journal* 9, no. 3 (1957) : 119–21, doi :10.2748/tmj/1178244774. この記事は Rick Jardine が詳細に分析している．“Tōhoku,” *Inference* 1, no. 3 (2015), doi :10.37282/991819.15.13.

[訳注]．原文では「もう一人のアレクサンダー（大王）がゴルディアスの結び目を断つ方法でなされた」という，Grothendieck のファーストネームをもじった表現になっている

7)．Mike Artin, Alexandre Grothendieck, and Jean-Louis Verdier, *Theéorie des topos et cohomologie étale des schémas, Lecture Notes in Mathematics*, vols. 269, 270, 305 (Berlin : Springer-Verlag, 1972–73).

8)．Ralf Krömer, “La ≪ machine de Grothendieck ≫ se fonde-t-elle seulement sur des vocables métamathématiques ? Bourbaki et les catégories au cours des années cinquante,” *Revue d’histoire des mathématiques* 12 (2006) :119–62.

## 2023/01/10

1940 年代から 1950 年代の間に起きたものの，その重要性がすぐには理解されなかった 2 つの概念の革命がある．上で述べた層理論と圏論である．後者の革命を起こしたのは Samuel Eilenberg と Saunders Mac Lane である[9)]．もっというと，圏論的な視点は，Claude Lévi-Strauss の構造主義思想や Noam Chomsky の言語学に代表される大きな思想運動の一部である．圏論は，何らかの構造を備えた集合を考えるのではなく，対象間に存在しうる関係に焦点を当てる．どういうことかというと，圏 $C$ は，集合が元の族であるのと同じように対象の族であるのだが，2 つの対象 $X$ と $Y$ が与えられると，そこには $\mathrm{Hom}_C(X,Y)$ と呼ばれる，$X$ から $Y$ への射を表す集合が最初から存在する．これらのデータは，もちろん射の合成や恒等射などいくつかの公理に従う．新しい一歩は，関手と呼ばれる，圏の間の射に注目することにある．そして，随伴関手や終対象と始対象，極限と余極限といった，重要な諸概念が生まれ，数学の根底にある多くのアイデアに対し，正確で統一的な意味づけを与えるのである．

圏の族のうち，中心的な役割を担うものがあるそれは，加法圏，そしてその中のアーベル圏という環上の加群の圏をモデルとする圏である．ところが，体上のベクトル空間を環上の加群に取り替えると，テンソル積をとる関手や内部 Hom をとる関手が存在しなくなってしまう．つまり，それらの操作によって，完全列は完全列にうつらない．部分空間が補空間をもつとは限らない．そこで，線形代数の自然な一般化であるホモロジー代数の領域に入る．ここで，Grothendieck の東北論文にとって代わられる前の初期の参考文献は Cartan と Eilenberg によるものであった[10)]．しかし，2 つの関手の合成に対する導来関手を求めるためには，Leray のスペクトル系列という，しばしば煩雑な計算を要するものを用いなければならなかった．ここで導来圏がその力を発揮する．この言葉の元では，あらゆることが驚くほど単純になる．

六則演算とは何か．通常の関数ついては，和の他に 3 つの自然な演算がある．積と，実多様体の間の対応 $f\colon X \to Y$ によって，技術的な細部を省いていうと，$X$ 上の関数を $Y$ 上の関数にうつす積分，そして，$Y$ 上の関数を $X$ 上の関数にうつす，$f$ の合成である．層理論においては，テンソル積 $\overset{\mathrm{L}}{\otimes}$ は積の類似，固有順像 $Rf_!$ が積分の類似，そして，逆像 $f^{-1}$ は $f$ の合成の類似である．ところが，テンソル積には Rhom という右随伴が，関手 $f^{-1}$ には順像 $Rf_*$

9). Samuel Eilenberg and Saunders Mac Lane, “Natural Isomorphisms in Group Theory,” *Proceedings of the National Academy of Sciences* 28 (1942) : 537–43, doi :10.1073/pnas.28.12.537 ; Samuel Eilenberg and Saunders Mac Lane, “General Theory of Natural Equivalences,” *Transactions of the American Mathematical Society* 58 (1945) : 231–94, doi :10.1090/S0002-9947-1945-0013131-6.

10). Henri Cartan and Samuel Eilenberg, *Homological Algebra* (Princeton, NJ : Princeton University Press, 1956).

という右随伴が，そして，関手 $Rf_!$ には右随伴 $f^!$ が存在する．

関手 $f^!$ は他の 5 つとは異なり，導来圏の枠組みの中でしか存在しない．これはエタールコホモロジーの文脈で Grothendieck が発見し，その後局所コンパクト空間の場合に Verdier が定式化した．Grothendieck が見通したように，$f^!$ は Poincaré 双対の広い一般化になっており，いまや中心的な役割を担っている．しかし，エタール位相よりも局所コンパクト空間の方が頻出するため，双対性に残っているのは，Verdier 一人の名前ではないものの，Poincaré-Verdier という名前である．この名前の帰属のさせ方は大いに不公平であり，Grothendieck はいくらか苦い思いをしたであろうが無理もないことである[11)]．

このような抽象的な枠組みによって，具体的な計算が必要なくなると考える向きもあるかもしれないが，それは誤解である．簡単にいうと，計算の仕方がまるっきり異なるのである．順像関手を用いても積文を明示的に求められはしないとしても，六則演算の定式化によって得られるのは，やはりホモロジー空間の次元の計算のような洗練された数値結果である．Riemann-Roch-Hilzebruch-Grothendieck の定理は美しい例である．

同じく Grothendieck の基本的な発見の 1 つに，層理論を圏の上に，したがって特に，点を一切もたない空間の上に構築するというものがある．層が存在するためには何が必要であろうか．それは，開集合とその包含関係のデータと，被覆の概念である．圏の対象に開集合の役割を担わせてはならない理由など何処にもなく，このとき，この圏は前景（準景）と呼ばれる．あとは被覆が何かを公理的に定めれば，景，すなわち，Grothendieck 位相の入った圏が得られる．このように普通の位相空間を自然に一般化しておくことは，非常に役立つことが示される．そして，解析学者もそこから発想を得ることができるであろう．実多様体上には，開集合の淵で何が起こるかを調べようとすると，あまりにも多くの病的な開集合とあまりにも多くの被覆が現れる．

そしてトポス理論というに至る．—トポイというのを知っているかもしれない．その根底にあるのは，空間，今の場合の景だが，これは景上の層の圏から復元できるというアイデアである．これは特別な場合について Israel Gelfand まで遡る．このときトポスは層のなす圏と同値な圏である．例えば，集合の圏は，1 点をトポスとみなしたものに他ならない．しかし，連続体仮説の独立性に関する Paul Cohen による新しい証明にトポス理論が用いられたとしても，数学における応用は不確かなままである．ここで紹介した Grothendieck の代表的な仕事の選び方は完全とはほど遠く，評者の興味しか反映していない．R&S において Grothendieck は，自身の仕事において鍵となる，自分の思う 12 の考え方を列挙し，自分の一覧も載せている[12)]．

1955 年ごろからの関数解析についての彼の初仕事や，代数幾何学に革命をもたらした

11). Grothendieck, *Récoltes et Semailles*, 158.

12). Grothendieck, *Récoltes et Semailles*, 42, 377.

（一新した）概形（スキーム）理論，部分的に予想し，のちに Pierre Deligne や Vladimir Voevodsky, Joseph Ayoub, 他にも多くの人々の手によって発展した理論である，モチーフについての直観についてももちろん言及しなければならない．Grothendieck が $\infty$ 圏とホモトピー代数についての礎を築いた重要な論文 “*A la poursuit des champs*” についても述べるべきである[13]．実は，三角圏は驚くほど単純で効果的な道具であるとしても，例えば，貼り合わせの問題など適用範囲が限られるという欠点がある．この欠点に関係しているのは次の事実である．ある射は同型なものを除いてただ一つしか存在しないのだが，その同型は一意的ではないのである！ この $\infty$ 圏という新理論には，Jacob Lurie, Graeme Segel, Bertrand Töen, 他にも多くの人が名を連ねるが，それは，導来圏の古典的な理論に完全に取って代わられる最中にある．それでも，当面は，それは控えめに言ってとっつきづらいものである．

13). Alexander Grothendieck, “A la poursuit des champs,” (1987).