超関数について

2024 年 9 月 5 日 *

1 関手空間

[Sch04, Section.4] の超関数に関する記述を抜粋して述べる．

■向きづけ層　すこし向きづけ層について復習する．$i\colon M \hookrightarrow X$ を閉埋め込みとし，$a_M\colon M \to \{\mathrm{pt}\}$ と $a_X\colon X \to \{\mathrm{pt}\}$ を一点への射とすると

$$\begin{aligned}
\mathrm{or}_{M/X}[-n] &\cong \omega_{M/X} \cong i^{!}\mathbf{C}_X \\
&\cong i^{!}a_X^{-1}\mathbf{C} \\
&\cong (a_X \circ i)^{-1}\mathbf{C} \underset{\mathbf{C}_M}{\otimes} \mathrm{or}_M \underset{\mathbf{C}_M}{\otimes} i^{-1}\mathrm{or}_X[n-2n] \\
&\cong a_M^{-1}\mathbf{C} \underset{\mathbf{C}_M}{\otimes} \mathrm{or}_M \underset{\mathbf{C}_M}{\otimes} i^{-1}\mathrm{or}_X[-n] \\
&\cong \mathbf{C}_M \underset{\mathbf{C}_M}{\otimes} \mathrm{or}_M \underset{\mathbf{C}_M}{\otimes} i^{-1}\mathrm{or}_X[-n] \\
&\cong \mathrm{or}_M \underset{\mathbf{C}_M}{\otimes} i^{-1}\mathrm{or}_X[-n]
\end{aligned}$$

が成り立つ．$\omega_{M/X} \cong \mathrm{or}_{M/X}[-n]$ なので，

(1.1) $$\mathrm{or}_{M/X} \cong \mathrm{or}_M \underset{\mathbf{C}_M}{\otimes} i^{-1}\mathrm{or}_X$$

である．X 上の層 or_X と制限 $\mathrm{or}_X|_M = i^{-1}\mathrm{or}_X$ を M 上で同一視すると，上の式は

(1.2) $$\mathrm{or}_{M/X} \cong \mathrm{or}_M \otimes \mathrm{or}_X$$

とも書ける．（[KS90, p.130] の記法．）

■超関数　M を n 次元実解析多様体とし，その上の層 $\mathcal{B}_M$ を

(1.3) $$\mathcal{B}_M \coloneqq H^n_M(\mathcal{O}_X) \otimes \mathrm{or}_{M/X}$$

* 2024/9/5 かきはじめ

で定める．ただし，X は M の複素化[*1]である．

$\mathbf{C}_{XM}$ で，$\mathbf{C}_M$ を $X-M$ に 0 で拡張したものを表す．ポアンカレ双対性により，M 上で

$$\mathrm{R}\mathscr{H}om_{\mathbf{C}_X}(\mathbf{C}_{XM},\mathbf{C}_X)\cong \mathrm{or}_{M/X}[-n].$$

が成り立つ．ここで，左辺の $\mathrm{R}\mathscr{H}om_{\mathbf{C}_X}(\mathbf{C}_{XM},\mathbf{C}_X)$ は M への制限 $i^{-1}\,\mathrm{R}\mathscr{H}om_{\mathbf{C}_X}(\mathbf{C}_{XM},\mathbf{C}_X)$ と同一視している．

証明． $i\colon M\hookrightarrow X$ を閉埋め込みとすると

$$\begin{aligned}
i^{-1}\,\mathrm{R}\mathscr{H}om_{\mathbf{C}_X}(\mathbf{C}_{XM},\mathbf{C}_X) &\cong i^{-1}\,\mathrm{R}\mathscr{H}om_{\mathbf{C}_X}(\mathrm{R}i_!\mathbf{C}_M,\mathbf{C}_X)\\
&\cong i^{-1}\mathrm{R}i_*\,\mathrm{R}\mathscr{H}om_{\mathbf{C}_M}(\mathbf{C}_M,i^!\mathbf{C}_X)\\
&\cong \mathrm{R}\mathscr{H}om_{\mathbf{C}_M}(\mathbf{C}_M,\omega_{M/X})\\
&\cong \omega_{M/X}\\
&\cong \mathrm{or}_{M/X}[-n]
\end{aligned}$$

となる． □

X は向きづけ可能なので，$\mathrm{or}_X\cong\mathbf{C}_X$ が成り立つ．よって (1.1) で $\mathrm{or}_{M/X}\cong\mathrm{or}_M$ となることから

$$\mathrm{D}'_X(\mathbf{C}_{XM}):=\mathrm{R}\mathscr{H}om_{\mathbf{C}_X}(\mathbf{C}_{XM},\mathbf{C}_X)$$

とおくと，

$$\mathrm{D}'_X(\mathbf{C}_{XM})\cong\mathrm{or}_M[-n]$$

も成り立つ．よって，超関数の同値な定義として

$$\mathcal{B}_M:=\mathrm{R}\mathscr{H}om_{\mathbf{C}_X}(\mathrm{D}'_X\mathbf{C}_{XM},\mathcal{O}_X) \tag{1.4}$$

というものが得られる．ここでも X 上の $\mathrm{R}\mathscr{H}om_{\mathbf{C}_X}(\mathrm{D}'_X\mathbf{C}_{XM},\mathcal{O}_X)$ を M への制限

$$\mathrm{R}\mathscr{H}om_{\mathbf{C}_X}(\mathrm{D}'_X\mathbf{C}_{XM},\mathcal{O}_X)|_M$$

と同一視している．(1.3) と (1.4) が同値な定義であることは，

$$H^n_M(\mathcal{O}_X)\otimes\mathrm{or}_M\cong\mathrm{R}\Gamma_M(\mathcal{O}_X)[n]\otimes\mathrm{or}_M$$

であることから，次を示すことに帰着される．

$$\mathrm{R}\Gamma_M(\mathcal{O}_X)\otimes\mathrm{or}_M[n]\cong\mathrm{R}\mathscr{H}om_{\mathbf{C}_X}(\mathrm{D}'_M\mathbf{C}_{XM},\mathcal{O}_X). \tag{1.5}$$

証明． まず $\mathrm{D}'_X\mathbf{C}_{XM}\cong\mathrm{or}_M[-n]$ より，右辺は

$$\mathrm{R}\mathscr{H}om_{\mathbf{C}_X}(\mathrm{D}'_M\mathbf{C}_{XM},\mathcal{O}_X)\cong\mathrm{R}\mathscr{H}om_{\mathbf{C}_X}(\mathrm{or}_M,\mathcal{O}_X)[n]$$

[*1] M がパラコンパクトならば，X は局所的には一意である．

である．一方左辺は

$$\mathrm{R}\Gamma_M(\mathcal{O}_X)\otimes\mathrm{or}_M \cong \mathrm{R}\mathscr{H}om(\mathbf{C}_{X\,M},\mathcal{O}_X)\otimes\mathrm{or}_M$$

である．よって (1.5) が成り立つのは

$$\mathrm{R}\mathscr{H}om(\mathbf{C}_{X\,M},\mathcal{O}_X)\otimes\mathrm{or}_M \cong \mathrm{R}\mathscr{H}om_{\mathbf{C}_X}(\mathrm{or}_M,\mathcal{O}_X)$$

となるときである． □

参考文献

[KS90] Masaki Kashiwara, Pierre Schapira, *Sheaves on Manifolds*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 292, Springer, 1990.

[Sch04] Pierre Schapira, *Sheaves: from Leray to Grothendieck and Sato*, Séminaires et Congres 9, Soc. Math. France, pp.173–181, 2004.