

偏微分方程式 — 層の超局所台：微分加群への応用^{*}

柏原正樹

ピエール・シャピラ

1982 年 9 月 27 日 提出

概要

C^1 級多様体において、層の超局所台を、余接束内の包含的な錐的閉集合として導入し、その関手的な性質を調べる。その後、確定特異点を持つホロノミー加群から誘導される方程式系の特性多様体の増大度を導出する。

1 法錐

M を C^1 級多様体とし、 T^*M をその余法束、 π を T^*M から M への射影とする。 \dot{T}^*M を T^*M における零切断 T_M^*M の補集合とする。 a を T^*M の^{たいせき}対蹠写像 (application anti-podale) とし、 S^a を T^*M の部分集合 S の像とする。 M の 2 つの集合 S と Z に対し、点 $x \in M$ における Z に沿った S の法錐 (cône normal) $C_x(S, Z)$ とは、接空間 T_xM の閉錐で、局所座標系を用いて次のように定義されるものである。

$$\begin{cases} v \in C_x(S, Z) \Leftrightarrow S \times Z \times \mathbf{R}^+ \text{ 内の列 } (s_n, z_n, c_n)_n \text{ で} \\ s_n \xrightarrow{n} x, z_n \xrightarrow{n} x, c_n(x_n - z_n) \xrightarrow{n} v \text{ をみたすものが存在する。} \end{cases}$$

$C(S, Z) = \bigcup_x C_x(S, Z)$ とおく。 Z が M の部分多様体のとき、 $C_x(S, Z)$ は T_xZ で安定であり、 $C_Z(S)$ で $C(S, Z)$ の法束 T_ZM での像を表す。 M の閉部分集合 S に対し、錐 $TM \setminus C(M \setminus S, S)$ を強い意味での法錐 (cône normal strict) といい $N(S)$ とかく。また $N(S) \cap T_xM$ の双対閉錐体を N_x^*S とかき、 x における S の余法錐 (cône conrmal) という (cf.[4])。

2 超局所台

$D_+(M)$ ($D_b(M)$) を M 上の A 加群の層の下に有界な (有界な) 複体のなす圏の導来圏とする。^{*1} ここで A は環である。

命題 1. — $F^\bullet \in \text{Ob}(D_+(M))$ とし ξ を T^*M の点とする。次の条件は同値である。

^{*} M. Kashiwara, P. Schapira, *Micro-support des faisceaux: application aux modules différentiels*, C. R. Acad. Sc. Paris, 295 (8 novembre 1982) の和訳 (2023/10/28). (2024 年 8 月 20 日更新)

^{*1} [訳注] D_+ と D_b は現在、上つきの D^+ と D^b でそれぞれ表すのが通例である。

- (i) ξ の錐状近傍 U と $\pi(\xi)$ の近傍 V で, V の任意の閉部分集合 Z と任意の点 $x \in \partial Z \cap V$ で $N_x^*(Z) \subset U^a \cup \{0\}$ を満たすものに対し $(\mathrm{R}\Gamma_Z(F^\bullet))_x = 0$ となるものが存在する;
- (ii) (M を C^r 級とする. ここで $1 \leq r \leq \infty$ または $r = \omega$ とする.) 境界が C^r 級超曲面であるような任意の Z に対し, 条件 (i) が成り立つ;
- (iii) (M が \mathbf{R}^n の開集合であるとし, $\xi = (x_0, \xi_0)$ とする) 実数 $\delta > 0, \varepsilon > 0$ で, $|a - x_0| < \varepsilon$ を満たす全ての点 $a \in M$ に対し次が成り立つものが存在する.

$$\begin{aligned} \mathrm{R}\Gamma(\{x; -\delta \leq \langle x - x_0, \xi_0 \rangle, \langle x - a, \xi_0 \rangle \leq -\varepsilon|x - a|\}, F^\bullet) \\ \simeq \mathrm{R}\Gamma(\{x; -\delta = \langle x - x_0, \xi_0 \rangle, \langle x - a, \xi_0 \rangle \leq -\varepsilon|x - a|\}, F^\bullet). \end{aligned}$$

この命題は [4, §4] で暗に示されている.

定義 1. — $F^\bullet \in \mathrm{Ob}(\mathrm{D}_+(M))$ とする. F^\bullet の超局所台 (micro-support) $\mathrm{SS}(F^\bullet)$ とは, 次で定義される T^*M の閉錐である. :

- (a) $\mathrm{SS}(F^\bullet) \cap T_M^*M = \overline{\bigcup_j \mathrm{supp}(\mathcal{H}^j(F^\bullet))}$;
- (b) $\xi \in \dot{T}^*M, \xi \in \mathrm{SS}(F^\bullet) \Leftrightarrow$ 命題 1 の同値な条件をみたす.

例 1. — $M = \mathbf{R}^n, Z = \{x \in M, x_1 \geq 0\}, F = \underline{\mathbf{C}}_Z$.^{*2}

このとき $\mathrm{SS}(F) = \{(x, \xi); x_1 \geq 0, \xi = 0\} \cup \{(x, \xi); \xi_1 \geq 0, x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0\}$.

例 2. — $M = \mathbf{R}^n, \mathcal{U} = \{x \in M, x_1 > 0\}, F = \underline{\mathbf{C}}_{\mathcal{U}}$.

このとき $\mathrm{SS}(F) = \{(x, \xi); x_1 \geq 0, \xi = 0\} \cup \{(x, \xi); \xi_1 \leq 0, x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0\}$.

例 3. — $M = \mathbf{R}^2, Z = \{x \in M, x_1^3 \geq x_2^2\}, F = \underline{\mathbf{C}}_Z$.

このとき $\pi^{-1}(0) \cup \mathrm{SS}(F) = \{\xi; \xi_1 \geq 0\}$.

3 関手的な性質

命題 2. — ω を M 上の双対化複体とする.

このとき, 任意の $F^\bullet \in \mathrm{Ob}(\mathrm{D}_b(M))$ に対し, $\mathrm{SS}(\mathrm{R}\mathcal{H}om(F^\bullet, \omega)) \subset \mathrm{SS}(F^\bullet)^a$ が成り立つ.

M と N を C^1 級多様体, f を M から N への C^1 級写像とし, $\bar{\omega}: T^*N \times_N M \rightarrow T^*N$ と $\rho: T^*N \times_N M \rightarrow T^*M$ を f から定まる写像とする.

命題 3. — $F^\bullet \in \mathrm{Ob}(\mathrm{D}_+(M))$ を f の $\overline{\bigcup_j \mathrm{supp}(\mathcal{H}^j(F^\bullet))}$ への制限が固有となるものとする. このとき $\mathrm{SS}(\mathrm{R}f_*(F^\bullet)) \subset \rho(T^*N \times_N M)$ が成り立つ.

命題 4. — f が滑らかであるとする.

- (i) $G^\bullet \in \mathrm{Ob}(\mathrm{D}_+(N))$ とする. このとき, $\mathrm{SS}(f^{-1}(G^\bullet)) = \rho\bar{\omega}^{-1}(\mathrm{SS}(G^\bullet))$ である.

^{*2} [訳注] $\underline{\mathbf{C}}_Z$ は Z に台を持つ定数層である. 現在は \mathbf{C}_Z で表すのが通例である.

- (ii) $F^\bullet \in \text{Ob}(\text{D}_b(M))$ とする. このとき, 任意の $\mathcal{H}^j(F^\bullet)$ が f のファイバー上で局所定数層となるのは, $\text{SS}((F^\bullet)) \subset \rho(T^*N \times_N M)$ が成り立つときである.

命題 5. — M と N を C^1 級多様体とし, p_1 と p_2 を $M \times N$ から M と N への射影とする.

- (i) $F^\bullet \in \text{Ob}(\text{D}_b(M))$ と $G^\bullet \in \text{Ob}(\text{D}_+(N))$ に対し,

$$\text{SS}(\text{R}\mathcal{H}om_A(p_1^{-1}F^\bullet, p_2^{-1}G^\bullet)) \subset \text{SS}(F^\bullet)^a \times \text{SS}(G^\bullet)$$

が成り立つ.

- (ii) A のコホモロジー次元が有限であるとする. このとき, $F^\bullet \in \text{Ob}(\text{D}_b(M))$ と $G^\bullet \in \text{Ob}(\text{D}_+(N))$ に対し,

$$\text{SS}(p_1^{-1}F^\bullet \otimes_A^L p_2^{-1}G^\bullet) \subset \text{SS}(F^\bullet) \times \text{SS}(G^\bullet)$$

が成り立つ.

4 超局所化

以降, N は M の部分多様体であるとし, M と N は C^2 級であるとする. $M \setminus N \cup T_N M$ ($M \setminus N \cup T_N^* M$) にはブローアップ (éclaté) の (余ブローアップ (co-éclaté) の) 自然な位相を入れる (cf.[6]). j を M から $M \setminus N \cup T_N M$ への包含とし π を $M \setminus N \cup T_N^* M$ から M への射影とする. $F^\bullet \in \text{Ob}(\text{D}_+(M))$ に対し, $\lambda(F^\bullet)$ で ([7] と同様に) $\text{D}_+(T_N M)$ の対象 $\text{R}j_*(F^\bullet)|_{T_N M}$ を表し, $\mu_N(F^\bullet)$ で F^\bullet に対する N での佐藤の超局所化, すなわち, $\text{D}_+(T_N^* M)$ の対象 $\text{R}\Gamma_{T_N^* M}(\pi^{-1}(F^\bullet))^a$ を表す. Λ で M の N に対する余法束 $T_N^* M$ を表す. ハミルトン同相写像 $T^*(T^* M) \simeq T(T^* M)$ によって, 束 $T^* \Lambda$ と $T_\Lambda T^* M$ を同一視することができ, それによって $T^*(T_N M)$ と $T_\Lambda T^* M$ も同一視することができる. 他方, 滑らかな写像 $T_N M \rightarrow N$ から埋め込み $T^* N \times_N T_N M \rightarrow T^*(T_N M) \simeq T_\Lambda T^* M$ が定まる. したがって, $T^* N$ を ($T_N M$ の零切断を通して) $T_\Lambda T^* M$ の部分多様体と同一視することができる. とくに (M を $T^* M$ に, N を M に取り替えることで) $T^* M$ が $TT^* M$ の部分多様体と同一視されることがわかる.

定理 1. — $F^\bullet \in \text{Ob}(\text{D}_+(M))$ とする, 次の包含関係が成り立つ.

- (i) $\text{SS}(\mu_N(F^\bullet)) \subset C_\Lambda(\text{SS}(F^\bullet))$,
- (ii) $\text{SS}(\lambda_N(F^\bullet)) \subset C_\Lambda(\text{SS}(F^\bullet))$,
- (iii) $\text{SS}(\text{R}\Gamma_N(F^\bullet)) \subset T^* N \cap C_\Lambda(\text{SS}(F^\bullet))$,
- (iv) $\text{SS}(F^*|_N) \subset T^* N \cap C_\Lambda(\text{SS}(F^\bullet))$.

証明は [4] の主張の繰り返しである ([1] も参照). (iii) と (iv) は一般に真の包含である.

系 6. — $\mathrm{SS}(F^*) \cap T_N^* M \subset T_M^* M$ とする. このとき,

$$\mathrm{R}\Gamma_N(F^\bullet) \simeq F^\bullet \otimes \mathrm{R}\Gamma_N(\mathbf{Z}_M) \quad \text{かつ} \quad \mathrm{SS}(F^*|_N) \subset \bar{\omega}\rho^{-1}(\mathrm{SS}(F^*))$$

が成り立つ.

([6, 1 章] の 命題 1.2.5 を用いる.)

系 7. — (i) $F^\bullet \in \mathrm{Ob}(\mathrm{D}_b(M)), G^\bullet \in \mathrm{Ob}(\mathrm{D}_+(M))$ とする. このとき

$$\mathrm{SS}(\mathrm{R}\mathcal{H}om_A(F^\bullet, G^\bullet)) \subset T^*M \cap C(\mathrm{SS}(G^\bullet), \mathrm{SS}(F^\bullet))$$

が成り立つ.

(ii) A のコホモロジー次元が有限であるとする. このとき $F^\bullet, G^\bullet \in \mathrm{Ob}(\mathrm{D}_+(M))$ に対し,

$$\mathrm{SS}(F^\bullet \overset{\mathrm{L}}{\otimes}_A G^\bullet) \subset T^*M \cap C(\mathrm{SS}(F^\bullet), \mathrm{SS}(G^\bullet)^a)$$

が成り立つ.

5 包含性

定理 2. — $F^\bullet \in \mathrm{Ob}(\mathrm{D}_b(M))$ とする. このとき $\mathrm{SS}(F^\bullet)$ は包含的である (関数 f が $\mathrm{SS}(F^\bullet)$ で 0 になるとき, $\mathrm{SS}(F^\bullet)$ はハミルトンベクトル場 H_f で不変である).

(M は C^2 級であるとし, C^1 級関数 f は T^*M の開集合でしか定義されないと仮定する.)

6 応用

以下では (X, \mathcal{O}_X) を複素解析多様体とし, \mathcal{D}_X で有限階の (\mathcal{D}_X^∞ で無限階の) 正則関数係数の微分作用素のなす X 上の層を表す. 連接 \mathcal{D} 加群 \mathcal{M} に対し, $\mathrm{car}(\mathcal{M})$ で T^*X における \mathcal{M} の特性多様体を表す. Z を別の複素解析多様体とすると, π_Z で射影 $T^*(X \times Z) \rightarrow T^*X$ を表す.

命題 8. — (i)

$$\mathrm{car}(\mathcal{M}) = \bigcup_Z \pi_Z(\mathrm{SS}(\mathrm{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_{X \times Z})))$$

である (Z は複素解析多様体である).

(ii) \mathcal{M} がホロノミー加群であるとき,

$$\mathrm{car}(\mathcal{M}) = \mathrm{SS}(\mathrm{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X))$$

である.

包含の片側は古典的な結果 [2] であり, 反対の包含は層 $\mathcal{E}_X^{\mathbf{R}}$ (cf.[6, 2]) のコホモロジーを用いた定義と, $\mathcal{E}_X^{\mathbf{R}}$ が超局所微分作用素の環 \mathcal{E}_X の上で忠実平坦であることから従う.

系 9. — Y を X の部分多様体とし,

$$(a) \mathcal{D}_X^\infty \otimes R\Gamma_Y(\mathcal{M}) = R\Gamma_Y(\mathcal{D}_X^\infty \otimes \mathcal{M}),$$

(b) \mathcal{D}_Y 加群 $\mathcal{T}or_j^{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_Y, \mathcal{M})$ は連接的である

と仮定する. このとき, 任意の j に対し次の包含関係が成り立つ.

$$\mathrm{car}(\mathcal{T}or_j^{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_Y, \mathcal{M})) \subset T^*Y \cap C_{T_Y X}(\mathrm{car}(\mathcal{M})).$$

仮定 (a), (b) は確定特異点型ホロノミー加群ならば任意の部分多様体 Y に対して成り立つ [3]. 系 9 は [3] の結果を補完し, 例えば, $\prod_j f_j^{\lambda_j}$ 型の分布の解析的波面集合の上からの評価を得ることができる.

本稿の主要結果は著者の一人が [8] において発表している.

参考文献

- [1] J. M. Bony, P. Schapira, *Solutions Hyperfonction du Problem de Cauchy*, Springer Lecare Noles in Math., 287, 1973, p. 82–98.
- [2] *3 M. Kashiwara, Cours Université Paris-Nord redige par T. Monteiro-Fernandes, 1977.
- [3] M. Kashiwara, T. Kawai, *On Holonomic Systems of Microdifferential equations III*, Publ. Rims. Kyoto Univ., 17, 1981, p. 813–979.
- [4] M. Kashiwara, P. Schapira, *Micro-hyperbolic Systems*, Acta Math., 142, 1979, p. 1-55.
- [5] M. Kashiwara, P. Schapira, *Micro-support des faisceaux: application aux modules différentiels*, Journees E.D.P. Saint-Jean-de-Monts, 1981, publ. Ecole Polytechnique, Palaiseau.
- [6] Sato, T. Kawai, M. Kashiwara, *Microfunctions and Pseudo-differential Equations*, Springer Lecture Notes in Math., 287, 1973, p. 265-529.
- [7] B. Malgrange, Transformation de Fourier cohomologique, Expose a Nancy, mai 1982.
- [8] Schapira, *Micro-support des faisceaux*, Expose a Nancy, mai 1982.

*3[訳注] M. Kashiwara, *Systems of Microdifferential Equations*, Birkhäuser, 1983. として単行本化されている.