定義 1 (層)**.**　X を位相空間とする．$\mathcal{F}\colon \mathsf{Op}(X)^{\mathrm{op}} \to \mathcal{C}$ を X 上のアーベル圏 $\mathcal{C}$ に値をとる前層とする．$\mathcal{F}$ が層 (sheaf) であるとは，任意の開集合 $U \in \mathsf{Op}(X)$ とその開被覆 $(U_i)_{i\in I}$ に対して次の条件をみたすことをいう．

(S1) 列

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}(U) \xrightarrow{\prod_i \rho_{U_i U}} \prod_{i\in I} \mathcal{F}(U_i)$$

が完全である．すなわち，$s \in \mathcal{F}(U)$ が各 $i \in I$ に対して U_i 上 $s|_{U_i} = 0$ ならば，$s = 0$ である．

(S2) 列

$$\mathcal{F}(U) \xrightarrow{\prod_i \rho_{U_i U}} \prod_{i\in I} \mathcal{F}(U_i) \xrightarrow{\prod_{i,j} \varphi_{ij}} \prod_{i,j\in I} \mathcal{F}(U_i \cap U_j)$$

が完全である．ただし，$\varphi_{ij} = \rho_{U_i\cap U_j, U_i} - \rho_{U_i\cap U_j, U_j}$．すなわち，$(s_i)_i \in \prod_i \mathcal{F}(U_i)$ が各 $i, j \in I$ で $U_i \cap U_j \neq \varnothing$ となるものに対して $U_i \cap U_j$ 上 $s_i|_{U_i\cap U_j} - s_j|_{U_i\cap U_j} = 0$ ならば，$s \in \mathcal{F}(U)$ で各 U_i 上 $s|_i = s_i$ となるものが存在する．

命題 2.　複素直線 $\mathbf{C}$ 上の複素線型空間の前層 $\mathcal{F}$ を次で定める．

$$\mathcal{F}(U) = \begin{cases} \mathbf{C} & U = \mathbf{C} \text{ のとき}, \\ 0 & U \neq \mathbf{C} \text{ のとき}. \end{cases}$$

$\mathcal{F}$ は層の条件 S2 をみたすが S1 はみたさない．したがって，$\mathcal{F}$ は層にならない．

証明.

条件 S2 をみたすこと：　$U \subsetneqq \mathbf{C}$ を $\mathbf{C}$ の開集合とし，$(U_i)_{i\in I}$ を U の開被覆とする．$(s_i)_i \in \prod_i \mathcal{F}(U_i)$ を各 $U_i \cap U_j$ で $s_i|_{U_i\cap U_j} = s_j|_{U_i\cap U_j}$ をみたす切断の族とする．どの i に対しても $U_i \subset U \subsetneqq \mathbf{C}$ であることから $\mathcal{F}(U_i) = 0$ である．すなわち $s_i = 0$ である．したがって，$0 \in \mathcal{F}(U)$ は各 $i \in I$ に対し $0|_{U_i} = 0 = s_i$ をみたす．

$U = \mathbf{C}$ とし，$(U_i)_{i\in I}$ を $\mathbf{C}$ の開被覆とする．$(s_i)_i \in \prod_i \mathcal{F}(U_i)$ を各 $U_i \cap U_j$ で $s_i|_{U_i\cap U_j} = s_j|_{U_i\cap U_j}$ をみたす切断の族とする．このとき，$U_i \neq \mathbf{C}$ となる i に対して $s_i = 0$ となるので，U_i が $\mathbf{C}$ の真部分集合からなる場合は $0 \in \mathcal{F}(\mathbf{C})$ が $0|_{U_i} = 0 = s_i$ をみたす．$U_i = \mathbf{C}$ となる i があれば，そのような i たちに対して，仮定 $s_i|_{U_i\cap U_j} = s_j|_{U_i\cap U_j}$ から切断はすべて s_i としてよい．よって $s_i \in \mathcal{F}(\mathbf{C})$ とすると，$U_j = \mathbf{C}$ 上では $s_i|_{U_j} = s_i = s_j$ が成り立ち，$U_j \subsetneqq \mathbf{C}$ 上では $s_i|_{U_j} = 0 = s_j$ となる．

条件 S1 をみたさないこと：　$U = \mathbf{C}$ とする．開集合 U_0, U_1 を

$$U_0 = \{z \in \mathbf{C}; \operatorname{Re} z > -1\}, \quad U_1 = \{z \in \mathbf{C}; \operatorname{Re} z < 1\}$$

とおくと，$\mathbf{C} = U_0 \cup U_1$ である．$s_0 = 0 \in \mathcal{F}(U_0)$, $s_1 = 0 \in \mathcal{F}(U_1)$ とすると

$$s_0|_{U_0\cap U_1} = 0 = s_1|_{U_0\cap U_1}$$

が成り立つ．ところが，$s = 1 \in \mathbf{C} = \mathcal{F}(U_0 \cup U_1)$ とすると，s は 0 ではないが

$$s|_{U_0} = 0 = s_0, \quad s|_{U_1} = 0 = s_1$$

をみたす．　□