

2024/02/08 セミナー資料

大柴寿浩

1 コホモロジー構成可能層

1.1 理想複体

A を可換環とする. $M \in D^b(A) := D^b(\text{Mod}(A))$ を A 加群の導来圏の対象とする. M が理想対象^{*1} (perfect object) であるとは, 有限生成射影的 A 加群の有界複体と擬同型であることをいう.

命題 1.1 ([KS90, Exercise I.30]). A を可換環とする.

- (i) $X \rightarrow Y \rightarrow Z \xrightarrow{+1}$ が $D^b(A)$ における完全三角で, X と Y が理想的ならば, Z も理想的である.
- (ii) 理想対象の直和因子も理想対象である.
- (iii) $M \in D^b(A)$ を理想対象とする. $M^* := \text{RHom}_A(M, A)$ とおく. M^* は理想対象であり, 標準的な射 $M \rightarrow M^{**}$ は同型である.

A がネーター環で大域次元が有限であるとする.

- (iv) $\text{Mod}^f(A)$ の導来圏 $D^b(\text{Mod}^f(A))$ の任意の対象は理想的である.
- (v) $D_f^b(A)$ で各コホモロジーが $\text{Mod}^f(A)$ に属す対象の導来圏を表す. $D^b(\text{Mod}^f(A)) \rightarrow D_f^b(\text{Mod}(A))$ は圏同値である. ■

証明は略.

擬連接かつ tor 次元が有限であることと同値らしい. ([SP, lem 15.74.2])

2 γ 位相

■錐 (体) [KS90] に錐の定義が書いてなかったのでまとめておく. [BouTVS, Mo76] を参考にした.

定義 2.1. n 次元実ベクトル空間 V の部分集合 γ が次の条件をみたすとき, 錐 (あるいは錐体)

^{*1} [Ue] による訳にしたがった. 定訳は未だ無いと思われる.

(cone) であるという.

任意の実数 $t > 0$ に対し, $v \in \gamma \implies tv \in \gamma$.

コメント 2.2. [Mo76] では $\gamma \neq 0$ も課している. 空集合は錐である.

$$\gamma = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2; 0 < \arg(x_1, x_2) < 7\pi/4\}$$

は錐である. (図 1).

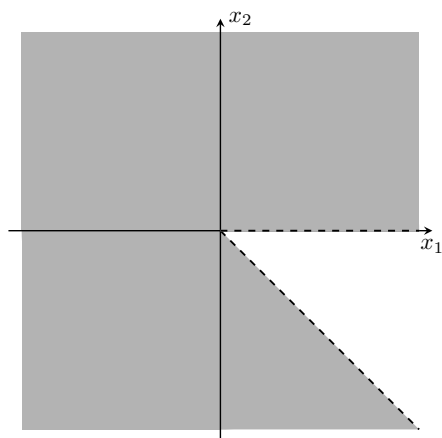


図 1 錐の例

次の例を見ると, 有界でないことが大事っぽい.

例 2.3. $\gamma := \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2; 0 < \arg(x_1, x_2) < \pi/3, \|(x_1, x_2)\| < 1\}$ は錐ではない. (図 2)

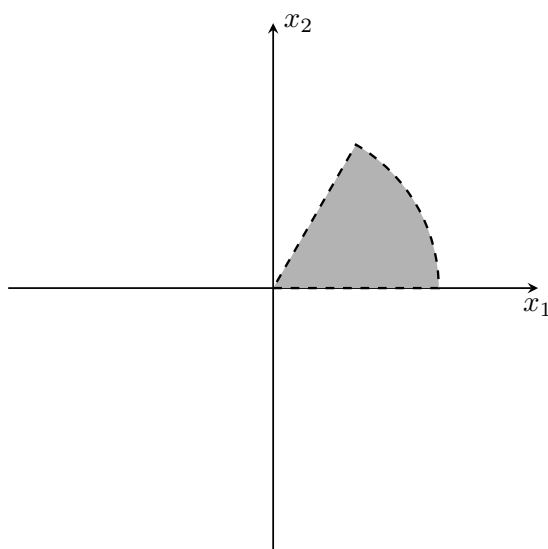


図 2 錐でない例

定義 2.4. 閉凸錐は閉集合で凸集合な錐.

参考文献

- [BouTVS] ブルバキ, 位相線形空間 1, 東京図書, 1968.
- [B+84] Borel, *Intersection Cohomology*, Progress in Mathematics, 50, Birkhäuser, 1984.
- [G58] Grauert, *On Levi's problem and the embedding of real analytic manifolds*, Ann. Math. 68, 460–472 (1958).
- [GP74] Victor Guillemin, Alan Pollack, *Differential Topology*, Prentice-Hall, 1974.
- [KS90] Masaki Kashiwara, Pierre Schapira, *Sheaves on Manifolds*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 292, Springer, 1990.
- [KS06] Masaki Kashiwara, Pierre Schapira, *Categories and Sheaves*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 332, Springer, 2006.
- [Le13] John M. Lee, *Introduction to Smooth Manifolds*, Second Edition, Graduate Texts in Mathematics, **218**, Springer, 2013.
- [Mo76] 森本光生, 佐藤超函数入門, 共立出版, 1976.
- [R55] de Rham, *Variétés différentiables*, Hermann, Paris, 1955.
- [Sa59] Mikio Sato, *Theory of Hyperfunctions*, 1959–60.
- [S66] Schwartz, *Théorie de distributions*, Hermann, Paris, 1966.
- [Sh16] 志甫淳, 層とホモロジー代数, 共立出版, 2016.
- [SP] The Stacks Project.
- [Sp65] Michael Spivak, *Calculus on Manifolds*, Benjamin, 1965.
- [Ike21] 池祐一, 超局所層理論概説, 2021.
- [Tak17] 竹内潔, \mathcal{D} 加群, 共立出版, 2017.
- [Ue] 植田一石, ホモロジー的ミラー対称性, <https://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~kazushi/course/hms.pdf> 2024/02/04 最終閲覧.