2024/02/22 セミナー資料

大柴寿浩

記号

- $\overline{\mathbf{R}} \coloneqq [-\infty, +\infty] = \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$
- 集合 U の開近傍系を I_U とかき，点 x の開近傍系を I_x とかく．

1　核

X, Y を局所コンパクト空間で c 柔軟次元が有限であるものとする．積空間 $X \times Y$ から X, Y への射影をそれぞれ q_1, q_2 とする．$K \in \mathsf{D}^{\mathrm{b}}(X \times Y)$ とする．（基礎環は大域次元が有限な可換環 A とする．）

定義 1.1 ([KS90, Definition 3.6.1])**.**　関手 $\Phi_K\colon \mathsf{D}^+(Y) \to \mathsf{D}^+(X)$ と $\Psi_K\colon \mathsf{D}^+(X) \to \mathsf{D}^+(Y)$ を次で定める．$G \in \mathsf{D}^+(Y)$, $F \in \mathsf{D}^+(X)$ に対し，

$$\Phi_K(G) \coloneqq \mathrm{R}q_{1!}\left(K \overset{\mathrm{L}}{\otimes} q_2^{-1}G\right),$$
$$\Psi_K(F) \coloneqq \mathrm{R}q_{2*}\,\mathrm{R}\mathscr{H}om\left(K, q_1^!F\right).$$

命題 1.2 ([KS90, Proposition 3.6.2])**.**　$\Phi_K \dashv \Psi_K$ である．すなわち

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{D}^+(X)}(\Phi_K(\,\cdot\,),\ \cdot\,) \cong \mathrm{Hom}_{\mathsf{D}^+(Y)}(\,\cdot\,, \Psi_K(\,\cdot\,))$$

が成り立つ．

コメント．　$(\otimes, \mathscr{H}om)$ や $\left(\mathrm{R}f_!, f^!\right)$ と同じ向き．

証明． $F \in \mathsf{D}^+(X)$, $G \in \mathsf{D}^+(Y)$ に対し，

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{Hom}_{\mathsf{D}^+(X)}(\Phi_K(G), F) \\
&= \operatorname{Hom}_{\mathsf{D}^+(X)}\left(\mathrm{R}q_{1!}\left(K \overset{\mathrm{L}}{\otimes} q_2^{-1}G\right), F\right) && \text{（定義）} \\
&\cong \operatorname{Hom}_{\mathsf{D}^+(X\times Y)}\left(K \overset{\mathrm{L}}{\otimes} q_2^{-1}G, q_1^! F\right) && (\mathrm{R}q_{2!} \dashv q_2^!) \\
&\cong \operatorname{Hom}_{\mathsf{D}^+(X\times Y)}\left(q_2^{-1}G, \mathrm{R}\mathscr{H}om\left(K, q_1^! F\right)\right) && (\overset{\mathrm{L}}{\otimes} \dashv \mathrm{R}\mathscr{H}om) \\
&\cong \operatorname{Hom}_{\mathsf{D}^+(X\times Y)}\left(G, \mathrm{R}q_{2*}\mathrm{R}\mathscr{H}om\left(K, q_1^! F\right)\right) && (q_2^{-1} \dashv \mathrm{R}q_{2*}) \\
&= \operatorname{Hom}_{\mathsf{D}^+(X\times Y)}\left(G, \Psi_K(F)\right)
\end{aligned}
$$

である． □

命題 1.3 ([KS90, Proposition 3.6.3])**．** $X = Y$ であり，$K = A_\Delta$ のとき，Φ_K と Ψ_K は $\mathsf{D}^+(X)$ の恒等関手と同型になる．ただし Δ は X の対角集合である．

次の補題を用いる．

補題 1.4 ([KS90, Proposition 3.1.14])**．** X を c 柔軟次元が有限な局所コンパクト空間とする．$F \in \mathsf{D}^+(A_X)$ と $G \in \mathsf{D}^{\mathrm{b}}(A_X)$ に対し，次が成り立つ．

$$\mathrm{R}\mathscr{H}om(G, F) \cong \mathrm{R}q_{1*}\,\mathrm{R}\Gamma_\Delta\,\mathrm{R}\mathscr{H}om(q_2^{-1}G, q_1^! F).$$

命題 1.3 の証明． $F \in \mathsf{D}^+(X)$ に対し，

$$
\begin{aligned}
F &\underset{\text{定数層の台}}{\cong} \mathrm{R}\mathscr{H}om(A_X, F) \\
&\underset{\text{補題 1.4}}{\cong} \mathrm{R}q_{2*}\,\mathrm{R}\Gamma_\Delta\,\mathrm{R}\mathscr{H}om(q_2^{-1}A_X, q_1^! F) \\
&\underset{\text{[KS90, (2.6.9)]}}{\cong} \mathrm{R}q_{2*}\,\mathrm{R}\mathscr{H}om(q_2^{-1}A_\Delta, q_1^! F) \\
&= \Psi_K(F).
\end{aligned}
$$

また，$G \in \mathsf{D}^+(X)$ に対し，

$$
\begin{aligned}
\Phi_K(F) &= \mathrm{R}q_{1!}\left(A_\Delta \overset{\mathrm{L}}{\otimes} q_2^{-1}G\right) \\
&\cong \mathrm{R}q_{1!}\left(q_2^{-1}G\right)_\Delta && \text{（複体に対する台の切り落としの定義）} \\
&\cong G. && \left(q_1|_\Delta = q_2|_\Delta \text{ は固有なので } (q_1|_\Delta)_! = (q_2|_\Delta)_! \cong (q_2|_\Delta)_*\right)
\end{aligned}
$$

□

こんどは Z をあわせて $X\times Y\times Z$ を考える．射影を

$$
\begin{tikzcd}
 & X\times Z \arrow[dl, "q_1'"'] \arrow[dr, "q_2'"] & & & Y\times Z \arrow[dl, "q_1''"'] \arrow[dr, "q_2''"] & \\
X & & Z & Y & & Z
\end{tikzcd}
$$

のように定め，

$$
\begin{tikzcd}
 & X\times Y\times Z \arrow[dl, "q_{12}"'] \arrow[d, "q_{13}"] \arrow[dr, "q_{23}"] & \\
X\times Y \arrow[d, "q_1"'] \arrow[dr, "q_2" near end] & X\times Z \arrow[dl, "q_1'" near end] \arrow[dr, "q_2'" near end] & Y\times Z \arrow[dl, "q_1''" near end] \arrow[d, "q_2''"] \\
X & Y & Z
\end{tikzcd}
\tag{3.6.1}
$$

のように射影を定める．

命題 1.5 ([KS90, Proposition 3.6.4])**.** $K_1\in \mathsf{D}^{\mathrm{b}}(X\times Y)$ と $K_2\in \mathsf{D}^{\mathrm{b}}(Y\times Z)$ に対し，

$$K := \mathrm{R}q_{13!}\left(q_{12}^{-1}K_1 \overset{\mathrm{L}}{\otimes} q_{23}^{-1}K_2\right)$$

とおく．このとき，次が成り立つ．

$$\Psi_{K_2}\circ\Psi_{K_1}\cong\Psi_K,\quad \Phi_{K_1}\circ\Phi_{K_2}\cong\Phi_K.$$

証明. $F\in\mathsf{D}^+(X)$ とすると，

$$
\begin{aligned}
&\Psi_{K_2}\circ\Psi_{K_1}(F)\\
=&\mathrm{R}q''_{2*}\,\mathrm{R}\mathscr{H}om_{Y\times Z}\left(K_2, q_1''^{!}\Psi_{K_1}(F)\right)\\
=&\mathrm{R}q''_{2*}\,\mathrm{R}\mathscr{H}om_{Y\times Z}\left(K_2, q_1''^{!}\mathrm{R}q_{2*}\,\mathrm{R}\mathscr{H}om_{X\times Y}\left(K_1, q_1^{!}F\right)\right)\\
=&\mathrm{R}q''_{2*}\,\mathrm{R}\mathscr{H}om_{Y\times Z}\left(K_2, \mathrm{R}q_{23*}q_{12}^{!}\,\mathrm{R}\mathscr{H}om_{X\times Y}\left(K_1, q_1^{!}F\right)\right) && \text{（固有基底変換）}\\
=&\mathrm{R}q''_{2*}\mathrm{R}q_{23*}\,\mathrm{R}\mathscr{H}om_{Y\times Z}\left(q_{23}^{-1}K_2, q_{12}^{!}\,\mathrm{R}\mathscr{H}om_{X\times Y}\left(K_1, q_1^{!}F\right)\right) && \text{（順像逆像随伴）}\\
=&\mathrm{R}q''_{2*}\mathrm{R}q_{23*}\,\mathrm{R}\mathscr{H}om_{X\times Y\times Z}\left(q_{23}^{-1}K_2, \mathrm{R}\mathscr{H}om_{X\times Y\times Z}\left(q_{12}^{-1}K_1, q_{12}^{!}q_1^{!}F\right)\right) && \text{（Prop.3.1.13）}\\
=&\mathrm{R}q_{13*}\mathrm{R}q'_{2*}\,\mathrm{R}\mathscr{H}om_{X\times Y\times Z}\left(q_{23}^{-1}K_2, \mathrm{R}\mathscr{H}om_{X\times Y}\left(q_{12}^{-1}K_1, q_{12}^{!}q_1^{!}F\right)\right) && \text{（図式の可換性）}\\
=&\mathrm{R}q_{13*}\mathrm{R}q'_{2*}\,\mathrm{R}\mathscr{H}om_{X\times Y\times Z}\left(q_{12}^{-1}K_1\overset{\mathrm{L}}{\otimes} q_{23}^{-1}K_2, q_{12}^{!}q_1^{!}F\right) && \text{（テンソルホム随伴）}\\
=&\mathrm{R}q_{13*}\mathrm{R}q'_{2*}\,\mathrm{R}\mathscr{H}om_{X\times Y\times Z}\left(q_{12}^{-1}K_1\overset{\mathrm{L}}{\otimes} q_{23}^{-1}K_2, q_{13}^{!}q_1'^{!}F\right) && \text{（図式の可換性）}\\
=&\mathrm{R}q'_{2*}\,\mathrm{R}\mathscr{H}om_{X\times Z}\left(\mathrm{R}q_{13!}\left(q_{12}^{-1}K_1\overset{\mathrm{L}}{\otimes} q_{23}^{-1}K_2\right), q_1'^{!}F\right) && \text{（PV）}\\
=&\Psi_K(F)
\end{aligned}
$$

である．

　また，$G \in \mathsf{D}^+(Z)$ とすると

$$
\begin{aligned}
&\Phi_{K_1} \circ \Phi_{K_2}(G) \\
=&\mathrm{R}q_{1!}\left(K_1 \overset{\mathrm{L}}{\underset{A_{X\times Y}}{\otimes}} q_2^{-1}\Phi_{K_2}(G)\right) \\
=&\mathrm{R}q_{1!}\left(K_1 \overset{\mathrm{L}}{\underset{A_{X\times Y}}{\otimes}} q_2^{-1}\mathrm{R}q''_{1!}\left(K_2 \overset{\mathrm{L}}{\underset{A_{Y\times Z}}{\otimes}} q_2''^{-1}G\right)\right) \\
=&\mathrm{R}q_{1!}\left(K_1 \overset{\mathrm{L}}{\underset{A_{X\times Y}}{\otimes}} \mathrm{R}q_{12!}q_{23}^{-1}\left(K_2 \overset{\mathrm{L}}{\underset{A_{Y\times Z}}{\otimes}} q_2''^{-1}G\right)\right) && \text{（固有基底変換）} \\
=&\mathrm{R}q_{1!}\left(K_1 \overset{\mathrm{L}}{\underset{A_{X\times Y}}{\otimes}} \mathrm{R}q_{12!}\left(q_{23}^{-1}K_2 \overset{\mathrm{L}}{\underset{A_{X\times Y\times Z}}{\otimes}} q_{23}^{-1}q_2''^{-1}G\right)\right) && \text{（2.6.18）} \\
=&\mathrm{R}q_{1!}\left(K_1 \overset{\mathrm{L}}{\underset{A_{X\times Y}}{\otimes}} \mathrm{R}q_{12!}\left(q_{23}^{-1}K_2 \overset{\mathrm{L}}{\underset{A_{X\times Y\times Z}}{\otimes}} q_{13}^{-1}q_2'^{-1}G\right)\right) && \text{（図式の可換性）} \\
=&\mathrm{R}q_{1!}\mathrm{R}q_{12!}\left(q_{12}^{-1}K_1 \overset{\mathrm{L}}{\underset{A_{X\times Y\times Z}}{\otimes}} \left(q_{23}^{-1}K_2 \overset{\mathrm{L}}{\underset{A_{X\times Y\times Z}}{\otimes}} q_{13}^{-1}q_2'^{-1}G\right)\right) && \text{（2.6.19）} \\
=&\mathrm{R}q'_{1!}\mathrm{R}q_{13!}\left(q_{12}^{-1}K_1 \overset{\mathrm{L}}{\underset{A_{X\times Y\times Z}}{\otimes}} \left(q_{23}^{-1}K_2 \overset{\mathrm{L}}{\underset{A_{X\times Y\times Z}}{\otimes}} q_{13}^{-1}q_2'^{-1}G\right)\right) && \text{（図式の可換性）} \\
=&\mathrm{R}q'_{1!}\mathrm{R}q_{13!}\left(\left(q_{12}^{-1}K_1 \overset{\mathrm{L}}{\underset{A_{X\times Y\times Z}}{\otimes}} q_{23}^{-1}K_2\right) \overset{\mathrm{L}}{\underset{A_{X\times Y\times Z}}{\otimes}} q_{13}^{-1}q_2'^{-1}G\right) && \text{（テンソル積の結合則）} \\
\cong&\mathrm{R}q'_{1!}\left(\mathrm{R}q_{13!}\left(q_{12}^{-1}K_1 \overset{\mathrm{L}}{\underset{A_{X\times Y\times Z}}{\otimes}} q_{23}^{-1}K_2\right) \overset{\mathrm{L}}{\underset{A_{X\times Z}}{\otimes}} q_2'^{-1}G\right) && \text{（2.6.19）} \\
\cong&\Phi_K(G)
\end{aligned}
$$

である．□

(3.6.2) $$K_1 \circ K_2 \coloneqq \mathrm{R}q_{13!}\left(q_{12}^{-1}K_1 \overset{\mathrm{L}}{\otimes} q_{23}^{-1}K_2\right)$$

とおく．**核の合成** (composition of kernels) というらしい．

> **系 1.6** ([KS90, Corollary 3.6.5])．　$Z = X$ であり，整数 l, l' で $K_2 \circ K_1 \cong A_{\Delta_X}[l]$, $K_1 \circ K_2 \cong A_{\Delta_Y}[l']$ となるものがあるとする．このとき，$\Phi_{K_1}, \Phi_{K_2}, \Psi_{K_1}, \Psi_{K_2}$ は圏同値である．

(3.6.1) は次のようになる．

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
& X\times Y\times X \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & \\
X\times Y \arrow[d] \arrow[dr] & X\times X \arrow[dl] \arrow[dr] & Y\times X \arrow[dl] \arrow[d] \\
X & Y & X
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}[column sep=small]
& Y\times X\times Y \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & \\
Y\times X \arrow[d] \arrow[dr] & Y\times Y \arrow[dl] \arrow[dr] & X\times Y \arrow[dl] \arrow[d] \\
Y & X & Y
\end{tikzcd}
$$

先の命題から，シフトを除けば

$$
\begin{aligned}
\mathrm{id}_{\mathsf{D}^+(Y)} &\cong \mathit{\Phi}_{K_2\circ K_1} \cong \mathit{\Phi}_{K_2}\circ\mathit{\Phi}_{K_1}, \\
\mathrm{id}_{\mathsf{D}^+(X)} &\cong \mathit{\Phi}_{K_1\circ K_2} \cong \mathit{\Phi}_{K_1}\circ\mathit{\Phi}_{K_2}, \\
\mathrm{id}_{\mathsf{D}^+(Y)} &\cong \mathit{\Psi}_{K_2\circ K_1} \cong \mathit{\Psi}_{K_1}\circ\mathit{\Psi}_{K_2}, \\
\mathrm{id}_{\mathsf{D}^+(X)} &\cong \mathit{\Psi}_{K_1\circ K_2} \cong \mathit{\Psi}_{K_2}\circ\mathit{\Psi}_{K_1}
\end{aligned}
$$

が成り立つので，圏同値．

例 1.7 ([KS90, Example 3.6.6])**.** $\tau\colon E\to X$ を局所コンパクト空間 X 上の，ファイバー次元が n である実ベクトル束とし，$\pi\colon E^*\to X$ をその双対束とする．$\dot{E}\coloneqq E-X$ と $\dot{E}^*\coloneqq E^*-X$ をそれぞれ零切断を除いたものとし，

$$
S\coloneqq \dot{E}/\mathbf{R}^+,\quad S^*\coloneqq \dot{E}^*/\mathbf{R}^+ \tag{3.6.3}
$$

とおく．τ と π からそれぞれ引き起こされる射影はファイバー次元 $n-1$ の位相的しずめこみである．

次の集合を導入する．

$$
\begin{cases}
D\coloneqq \{(x,y)\in S\times_X S^*; \langle x,y\rangle \geqq 0\}, \\
I\coloneqq \{(y,x)\in S^*\times_X S; \langle y,x\rangle > 0\}.
\end{cases} \tag{3.6.4}
$$

さらに，$\mathsf{D}^{\mathrm{b}}(S\times S^*)$ の対象 K_1 と $\mathsf{D}^{\mathrm{b}}(S^*\times S)$ の対象 K_2 をそれぞれ次のように定める．

$$
\begin{cases}
K_1\coloneqq A_D\otimes\omega_{S^*/X}, \\
K_2\coloneqq A_I.
\end{cases} \tag{3.6.5}
$$

命題 1.8 ([KS90, Proposition 3.6.7])**.** 次が成り立つ．

$$
\begin{aligned}
K_1\circ K_2 &\cong A_{\Delta_S} \quad \text{in } \mathsf{D}^{\mathrm{b}}(S\times S), \\
K_2\circ K_1 &\cong A_{\Delta_{S^*}} \quad \text{in } \mathsf{D}^{\mathrm{b}}(S^*\times S^*).
\end{aligned}
$$

参考文献

[BouTVS] ブルバキ, 位相線形空間 1, 東京図書, 1968.

[B+84] Borel, *Intersection Cohomology*, Progress in Mathematics, 50, Birkhäuser, 1984.

[G58] Grauert, *On Levi's problem and the embedding of real analytic manifolds*, Ann. Math. 68, 460–472 (1958).

[GP74] Victor Guillemin, Alan Pollack, *Differential Topology*, Prentice-Hall, 1974.

[KS90] Masaki Kashiwara, Pierre Schapira, *Sheaves on Manifolds*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 292, Springer, 1990.

[KS06] Masaki Kashiwara, Pierre Schapira, *Categories and Sheaves*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 332, Springer, 2006.

[Le13] John M. Lee, *Introduction to Smooth Manifolds*, Second Edition, Graduate Texts in Mathematics, **218**, Springer, 2013.

[Mo76] 森本光生, 佐藤超函数入門, 共立出版, 1976.

[R55] de Rham, *Variétés différentiables*, Hermann, Paris, 1955.

[Sa59] Mikio Sato, *Theory of Hyperfunctions*, 1959–60.

[S66] Schwartz, *Théorie de distributions*, Hermann, Paris, 1966.

[Sh16] 志甫淳, 層とホモロジー代数, 共立出版, 2016.

[SP] The Stacks Project.

[Sp65] Michael Spivak, *Calculus on Manifolds*, Benjamin, 1965.

[Ike21] 池祐一, 超局所層理論概説, 2021.

[Tak17] 竹内潔, $\mathcal{D}$ 加群, 共立出版, 2017.

[Ue] 植田一石, ホモロジー的ミラー対称性, https://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~kazushi/course/hms.pdf 2024/02/04 最終閲覧.