2024/03/15 セミナー資料

大柴寿浩

記号

- 恒等射を id や 1 で表す.
- 集合 U の開近傍系を I_U とかき，点 x の開近傍系を I_x とかく.
- $\mathbf{R}^+$: 正の実数のなす乗法群.

1　フーリエ・佐藤変換 [KS90, section 3.7]

まず錐状層を定義する．そのために作用つきの空間を考える．X を局所コンパクト空間で $\mathbf{R}^+$ の作用 μ が入っているとする．つまり，連続写像 $\mu\colon X \times \mathbf{R}^+ \to X$ で

$$\begin{aligned} \mu(x, t_1 t_2) &= \mu(\mu(x, t_1), t_2) \\ \mu(x, 1) &= x \end{aligned}$$

をみたすものが与えられているとする．

定義 1.1 ([KS90, Definition 3.7.1])**.**　(i) 層 $F \in \mathrm{Mod}(A_X)$ が**錐状** (conic) であるとは，X の各軌道 b への制限 $F|_b$ が局所定数層であることをいう．$\mathrm{Mod}(A_X)$ の充満部分圏 $\mathrm{Mod}_{\mathbf{R}^+}(A_X)$ を錐状層からなるものとして定める．

(ii) $\mathsf{D}^+_{\mathbf{R}^+}(X)$ を，各 $j \in \mathbf{Z}$ に対して $H^j(F)$ が錐状のものからなる $\mathsf{D}^+(X)$ の充満部分圏として定める．

錐状層がどのように特徴づけられるかを調べる．次の連続写像を考える．

$$X \xhookrightarrow{j} X \times \mathbf{R}^+ \underset{p}{\overset{\mu}{\rightrightarrows}} X.$$

$j\colon X \to X \times \mathbf{R}^+$ は $x \in X$ を $X \times \mathbf{R}^+$ に $(x, 1)$ として埋め込む写像であり．$p\colon X \times \mathbf{R}^+ \to X$ は X への第 1 射影である．これらの連続写像を用いて，$F \in \mathsf{D}^+(X)$ に対し，次の 2 つの射を構成する．

$$\mu^{-1}F \xleftarrow{\alpha} p^{-1}\mathrm{R}p_*\mu^{-1}F \xrightarrow{\beta} p^{-1}F.$$

α は随伴 $(p^{-1}, \mathrm{R}p_*)$ の余単位 $p^{-1}\mathrm{R}p_* \to 1_{\mathsf{D}^+(X)}$ を $\mu^{-1}F$ に適用することで得られる．β は次のように構成される．

$$\begin{aligned} p^{-1}\mathrm{R}p_*\mu^{-1}F &\to p^{-1}\mathrm{R}p_*\mathrm{R}j_*j^{-1}\mu^{-1}F \\ &\cong p^{-1}\mathrm{R}(p\circ j)_*(\mu\circ j)^{-1}F \\ &\cong p^{-1}\mathrm{R}1_{X*}1_X^{-1}F \\ &\cong p^{-1}F. \end{aligned}$$

命題 1.2 ([KS90, Proposition 3.7.2])**.** $F \in \mathsf{D}^+(X)$ に対し次の条件 (i)–(v) は同値である．

(i) $F \in \mathsf{D}^+_{\mathbf{R}^+}(X)$
(ii) α と β はどちらも同型である．
(iii) すべての $j \in \mathbf{Z}$ に対し，$H^j(\mu^{-1}F)$ が p の各ファイバーで局所定数層となる．
(iv) $p^{-1}F \cong \mu^{-1}F$.
(v) $p^!F \cong \mu^!F$.

証明. 次の順に証明する．

$$\begin{tikzcd} (\mathrm{i}) \arrow[r, Leftrightarrow, "1"] & (\mathrm{iii}) \arrow[dr, Rightarrow] & & (\mathrm{iv}) \arrow[ll, Rightarrow] \arrow[r, Leftrightarrow] & (\mathrm{v}) \\ & & (\mathrm{ii}) \arrow[ur, Rightarrow] & & \end{tikzcd}.$$

1. (i)⇔(iii): まず，$\mathbf{R}^+$ 軌道は μ による像としてかけることから，$x \in X$ での p のファイバー $p^{-1}(x)$ の軌道は $\mu\left(p^{-1}(x)\right)$ と表せることに注意する．$j_{p^{-1}(x)}\colon p^{-1}(x) \hookrightarrow X \times \mathbf{R}^+$ を包含写像とする．このとき，

$$\begin{aligned} & H^j\left(\mu^{-1}F\right) \text{ は } p^{-1}(x) \text{ で局所定数層である} \\ \Leftrightarrow\ & H^j\left(\mu^{-1}F\right)|_{p^{-1}(x)} \text{ は局所定数層である} \\ \Leftrightarrow\ & j_{p^{-1}(x)}^{-1}H^j\left(\mu^{-1}F\right) \text{ は局所定数層である} \\ \Leftrightarrow\ & j_{p^{-1}(x)}^{-1}\mu^{-1}H^j\left(F\right) \text{ は局所定数層である} \\ \Leftrightarrow\ & \left(\mu\circ j_{p^{-1}(x)}\right)^{-1}H^j\left(F\right) \text{ は局所定数層である} \\ \Leftrightarrow\ & H^j\left(F\right) \text{ は } \mu\left(p^{-1}(x)\right) \text{ で局所定数層である} \end{aligned}$$

□

参考文献

[BouTVS] ブルバキ, 位相線形空間 1, 東京図書, 1968.

[B+84] Borel, *Intersection Cohomology*, Progress in Mathematics, 50, Birkhäuser, 1984.

[G58] Grauert, *On Levi's problem and the embedding of real analytic manifolds*, Ann. Math. 68, 460–472 (1958).

[GP74] Victor Guillemin, Alan Pollack, *Differential Topology*, Prentice-Hall, 1974.

[HS23] Andreas Hohl, Pierre Schapira, *Unusual Functorialities for weakly constructible sheaves*, 2023.

[KS90] Masaki Kashiwara, Pierre Schapira, *Sheaves on Manifolds*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 292, Springer, 1990.

[KS06] Masaki Kashiwara, Pierre Schapira, *Categories and Sheaves*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 332, Springer, 2006.

[Le13] John M. Lee, *Introduction to Smooth Manifolds*, Second Edition, Graduate Texts in Mathematics, **218**, Springer, 2013.

[Mo76] 森本光生, 佐藤超函数入門, 共立出版, 1976.

[R55] de Rham, *Variétés différentiables*, Hermann, Paris, 1955.

[Sa59] Mikio Sato, *Theory of Hyperfunctions*, 1959–60.

[S66] Schwartz, *Théorie de distributions*, Hermann, Paris, 1966.

[Sh16] 志甫淳, 層とホモロジー代数, 共立出版, 2016.

[SP] The Stacks Project.

[Sp65] Michael Spivak, *Calculus on Manifolds*, Benjamin, 1965.

[Ike21] 池祐一, 超局所層理論概説, 2021.

[Tak17] 竹内潔, $\mathcal{D}$ 加群, 共立出版, 2017.

[Ue] 植田一石, ホモロジー的ミラー対称性, https://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~kazushi/course/hms.pdf 2024/02/04 最終閲覧.