到達可能対象・到達可能圏

うるち米

2024 年 7 月 25 日

1 κ フィルター余極限 [MP89, sect.1.1]

定義 1 ([MP89, def.1.1.1]). κ を無限正則基数とする．圏 I が κ フィルター (κ-filtered) であるとは，κ より小さな濃度をもつ任意のグラフ G に対して，任意の図式 $D\colon G \to I$ が余錐をもつ，すなわち図式 $\bar{D}\colon G^{+} \to I$ で D に拡張される図式をもつことをいう．

命題 2. I を圏とする．次の条件は同値である．

(i) 次の 2 つの条件が成り立つ．
   (a) 任意の $A \subset \mathrm{Ob}(I)$ で $\mathrm{card}(A) < \pi$ をみたすものに対し，$j \in I$ でどの $a \in A$ に対しても I の射 $a \to j$ が存在するものが存在する．
   (b) 任意の $i, j \in I$ と任意の $B \subset \mathrm{Hom}_I(i, j)$ で $\mathrm{card}(B) < \pi$ となるものに対し，I の射 $j \to k$ で合成 $i \xrightarrow{s} j \to k$ が $s \in B$ によらないものが存在する．

(ii) 任意の圏 J で $\mathrm{card}(\mathrm{Mor}(J)) < \pi$ となるものと任意の関手 $\varphi\colon J \to I$ に対し，$i \in I$ で $\varinjlim_{j \in I} \mathrm{Hom}_I(\varphi(j), i) \neq \varnothing$ となるものが存在する．

参考文献

[KS90] Masaki Kashiwara, Pierre Schapira, *Sheaves on Manifolds*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 292, Springer, 1990.

[KS06] Masaki Kashiwara, Pierre Schapira, *Categories and Sheaves*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 332, Springer, 2006.

[MP89] Michael Makkai, Robert Paré, *Accesible Categories: The Foundation of Categorical Model Theory*, AMS, 1989.