複素トーラスと複素射影直線

February 9, 2023

複素数空間

$\mathbf{C}^n$ での座標が $z = (z^1, \ldots, z^n)$ であるとき，複素数空間 $\mathbf{C}^n$ を

$$\mathbf{C}^n_z \text{ とか } \mathbf{C}^n_{(z^1,\ldots,z^n)}$$

とかく．
$\mathcal{U}$ を $\mathbf{C}^n$ の空でない開集合とする．このとき，$\mathcal{U}$ で定義された複素数値関数 f は $f(z) = f(z^1, \ldots, z^n)$ とかける．

正則関数と有理型関数

f を $\mathbf{C}^n$ の開集合上で定義された複素数値関数とする.

Definition (正則関数)

f が正則であるとは，各成分 $z^1, \ldots, z^n$ について正則，すなわち，複素微分可能であることをいう.

Definition (有理型関数)

f が有理型であるとは，f の定義域の各点で高々極しか持たず，極を除き正則であることをいう.

複素多様体，リーマン面

Definition (複素多様体，リーマン面)

X：位相空間，$(\varphi_i\colon U_i \to \mathcal{U}_i)_{i\in I}$：写像の族．
対 $(X, (\varphi_i\colon U_i \to \mathcal{U}_i)_{i\in I})$ が次の条件 (1)–(4) をみたすとき，n 次元複素多様体という．1 次元複素多様体をリーマン面という．

1. $X \neq \varnothing$，ハウスドルフ，(第 2 可算，連結)．
2. $U_i \underset{\text{open}}{\subset} X$, $U_i \neq \varnothing$ $(i \in I)$, $X = \bigcup_{i\in I} U_i$.
3. $\forall i \in I$ $\mathcal{U}_i \underset{\text{open}}{\subset} \mathbf{C}_z^n$, $\mathcal{U}_i \neq \varnothing$, $\varphi_i\colon U_i \to \mathcal{U}_i$: homeo.
4. $\forall i \neq j \in I$ $(U_i \cap U_j \neq \varnothing)$ $\varphi_{ij} := \varphi_i \circ \varphi_j^{-1}\big|_{\mathcal{U}_{ij}} : \mathcal{U}_{ij} \to \mathcal{U}_{ji}$: holomorphic.
$(\mathcal{U}_{ij} := \varphi_j(U_i \cap U_j) \subset \mathcal{U}_j)$

複素射影直線

$\mathbf{C}^2 - \{(0,0)\}$ の点 x, y に対して，同値関係 $\sim$ を

$$x \sim y \overset{\text{def}}{\iff} x = cy \text{ をみたす複素数 } c \neq 0 \text{ が存在する}$$

で定める．このとき $\sim$ に関する (x, y) の同値類を $[x : y]$ とかき

$$\mathbf{P}^1 := \left(\mathbf{C}^2 - \{(0,0)\}\right) /\!\sim$$

の複素多様体構造を次で定めたものはリーマン面である．$\mathbf{P}^1$ を複素射影直線という．

複素射影直線の複素多様体構造

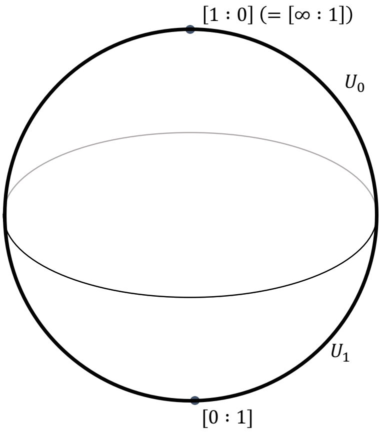
$\mathbf{P}^1$ の開集合 U_0, U_1 を次で定める.

$$U_0 := \{(z, w) \in \mathbf{C}^2; w \neq 0\},$$
$$U_1 := \{(z, w) \in \mathbf{C}^2; z \neq 0\}.$$

U_0, U_1 の間の座標変換を次で定める.

$$w = \frac{1}{z}$$

$([z : 1] = [1 : w] \in U_0 \cap U_1)$



周期格子

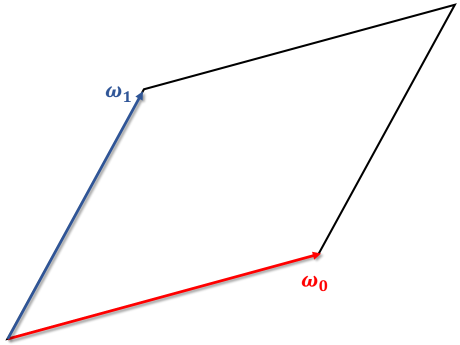
ω_0, ω_1 を $\mathbf{R}$ 上一次独立な 0 でない複素数とする．このとき，$\mathbf{C}$ の部分加群 $\Omega \subset \mathbf{C}$ を

$$\Omega := \{n_0\omega_0 + n_1\omega_1; n_0, n_1 \in \mathbf{Z}\}$$

で定める．Ω を周期格子といい，

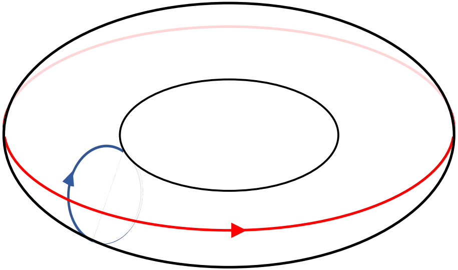
$$S := \{a\omega_0 + b\omega_1; 0 \leqq a, b < 1\}$$

を周期平行四辺形という．



複素トーラス

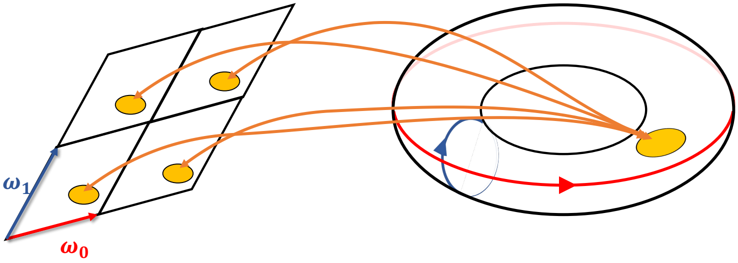
$E := \mathbf{C}/\Omega$ を複素トーラスという．
S と E の点は一対一に対応する．
標準射影 $p\colon \mathbf{C} \to E$ による $z \in \mathbf{C}$ の像を $[z]$ とかく．



複素トーラスの複素多様体構造

各点 $P \in E$ の十分小さい開近傍 $U_P \subset E$ に対し，$U_P = p(\mathcal{U}_x)$ となる開集合 $\mathcal{U}_x \subset S$ をとる．$p^{-1}(U_P) = \bigcup_{\omega \in \Omega} \mathcal{U}_x + \omega$ である．

$\omega \in \Omega$ を一つ取って同相 $\varphi_{P,x+\omega} := \left(p|_{\mathcal{U}_x+\omega}\right)^{-1} : U_P \to \mathcal{U}_{x+\omega}$ を考える．
座標変換は平行移動 $z \mapsto z + \omega$.



楕円関数

Definition

ω_0, ω_1 に対し，$\mathbf{C}$ 上の有理型関数 f で

$$f(z+\omega_0) = f(z), \quad f(z+\omega_1) = f(z)$$

を満たすものを，ω_0, ω_1 を周期とする，或は Ω を周期とする楕円関数という．

次の補題がある．

Lemma

商写像 $p\colon \mathbf{C} \to E$ の引き戻し $p^*\colon f \mapsto f \circ p$ は $\{E$ 上の有理型関数 $\}$ から $\{\Omega$を周期とする $\mathbf{C}$ 上の楕円関数 $\}$ への *1* 対 *1* 対応を定める．

Weierstrass の $\wp$ 関数

Definition (Weierstrass の $\wp$ 関数)

$$\wp(u) := \sum_{\substack{\omega\in\Omega,\\ \omega\neq 0}} \left(\frac{1}{(u-\omega)^2} - \frac{1}{\omega} \right)$$

は Ω にのみ 2 位の極を持つ楕円関数である．$\wp$ を Weierstrass の $\wp$ 関数という．

分岐指数

Fact

X と Y をリーマン面とする．$f\colon X \to Y$ を定値でない正則写像とする．
$P \in X, Q = f(P) \in Y$ とおく．
このとき，P のまわりの局所座標 t と Q のまわりの局所座標 s と正の整数 $n \geqq 1$ で，f の局所座標表示が $s = t^n$ となるものが存在する．この n は座標の取り方によらない．

写像度

Fact

X と Y をコンパクトリーマン面とし，$f\colon X \to Y$ を定値でない正則写像とする．このとき，次が成り立つ．

1. $\forall Q \in Y \quad f^{-1}(Q) \neq \emptyset, \#f^{-1}(Q) < \infty.$
2. $\#\{f$ の分岐点 $\} < \infty.$
3. $Q \in Y, d(Q) := \sum_{P \in f^{-1}(Q)} e_P$: *constant*. $\deg f := d(Q).$
4. $Q \in Y - \{f$ の分岐点 $\}, \#f^{-1}(Q) = \deg f.$
5. $Q \in \{f$ の分岐点 $\}, \#f^{-1}(Q) < \deg f.$

分岐指数と写像度

Definition (分岐指数)

上の事実における n を P における f の分岐指数といい，e_P とかく．
$e_P > 1$ のとき，P を f の分岐点という．

Definition (写像度)

$d = \deg f$ を f の写像度といい，f を d 重被覆写像という．

主定理

Theorem (複素トーラスから射影直線への 2 重被覆)

E から $\mathbf{P}^1$ への正則射

$$\wp\colon E \to \mathbf{P}^1; \quad [z] \mapsto [\wp(z); 1]$$

は 4 点

$$[0], \left[\frac{\omega_0}{2}\right], \left[\frac{\omega_1}{2}\right], \left[\frac{\omega_0+\omega_1}{2}\right]$$

で分岐する 2 重被覆写像である.

定理の言い換え

$P \in \mathbf{P}^1$ に対し，

$$\#\wp^{-1}(P) = \begin{cases} 1 & \left([0], \left[\frac{\omega_0}{2}\right], \left[\frac{\omega_1}{2}\right], \left[\frac{\omega_0+\omega_1}{2}\right] \mapsto P \text{ のとき}\right), \\ 2 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

ということ．

証明 (1/2)

$\wp$ は Ω にのみ 2 位の極をもつ楕円関数であったから，$[0]$ のみに 2 位の極をもつ E 上の有理型関数というのと同じである．したがって，$\wp^{-1}(\infty) = \{[0]\}$ であり，写像度に関する事実より，$\deg \wp = 2$ である．いま，$\wp$ は偶関数なので，$[a] \in E$ に対し，$\wp([a]) = \wp([-a])$ が成り立つ．$[a]$ が E の 2 分点でなければ，$[a] \neq [-a]$ である．$\deg \wp = 2$ なので，このとき，$\wp^{-1}(\wp([a])) = \{[a], [-a]\}$ と確定する．

証明 (2/2)

$[\omega_0/2]$ の近傍で $\wp$ を局所座標表示する．$\wp$ は ω_0 を周期にもつ偶関数なので $\wp(-z) = \wp(z) = \wp(z+\omega_0)$ をみたす．両辺を微分して，$-\wp'(-z) = \wp'(z+\omega_0)$ となるが，$z = -\omega_0/2$ のとき，$-\wp'(\omega_0/2) = \wp'(\omega_0/2)$ となる．したがって，$\wp'(\omega_0/2) = 0$ となる．よって，$\wp(z)$ の $\omega_0/2$ のまわりでの展開における 1 次の項の係数は 0 である．したがって，$e_{[\omega_0/2]} > 1$ であり，$[\omega_0/2]$ は $\wp$ の分岐点である．

$[\omega_1/2]$ と $[(\omega_0+\omega_1)/2]$ についても同様に，$e_{[\omega_1/2]} > 1$, $e_{[(\omega_0+\omega_1)/2]} > 1$ となるので，$\wp$ は E の 2 分点で分岐する 2 重被覆であることが示せた．

参考文献 I

[Og02] 小木曽啓示, 『代数曲線論』, 朝倉書店, 2002.