2024/01/25 セミナー資料

大柴寿浩

2024/01/25

1 向きづけと双対性 [KS90, 3.3]

命題 1.1 ([KS90, Prop3.3.6])**.** X を n 次元 C^0 多様体とする．

(i) or_X は前層 $U \mapsto \mathrm{Hom}(H^n_c(U; A_X), A)$ から誘導された層である．

(ii) $x \in X$ に対し，標準的な同型 $\mathrm{or}_{X,x} \cong \mathrm{Hom}(H^n_{\{}x\}(X; A_X), A) \cong H^n_{\{}x\}(X; A_X)$ が存在する．

(iii) X が向きづけられた可微分多様体であるとする．このとき，同型 $\mathrm{or}_X \cong A_X$ が存在する．この同型は X の向きをとりかえることで符号が変わる．

補題 1.2 ([KS90, Prop3.3.7])**.** E をユークリッド空間 $\mathbf{R}^n$ とする．

記号 1.3 ([KS90, Notation 3.3.8])**.** 本書では X 章 §3 をのぞき，実多様体 X の次元を $\dim X$ で表す．$f\colon Y \to X$ を C^0 多様体の射とするとき，

p.156 の下の方までスキップ

1.1 向きづけ，微分形式，密度

C^0 多様体 M 上の層として，向きづけ層 or_M を考えることも必要になってくる．or_M は $\mathbf{Z}_M$ と局所的に同型な層であり，M の向きが存在する場合，その向きを選ぶことと同型 $\mathrm{or}_M \cong \mathbf{Z}_M$ を選ぶことが同義となるようなものである．or_M については次章で詳しくしらべる．

いま，$\alpha = \infty$ または $\alpha = \omega$ とし，p を整数とする．C^α_M を係数にもつ p 次微分形式の層を $C^{\alpha,(p)}_M$ とおく．また外微分を $d\colon C^{\alpha,(p)}_M \to C^{\alpha,(p+1)}_M$ で表す．

$(x_1, \ldots, x_n)$ が M 上の局所座標系であるとする．このとき，p 形式 f は次の形にただ一通りに

表されるのであった．

$$f = \sum_{|I|=p} f_I dx_I,$$

ここに，$I = \{i_1, \dots, i_p\} \subset \{1, \dots, n\}$, $(i_1 < i_2 < \cdots < i_p)$, $dx_I = dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}$ で，f_I は C^α_M の切断である．このとき，

$$df = \sum_{i=1}^{n} \sum_{|I|=p} \frac{\partial f_I}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_I$$

となるのであった．もうひとつ層を導入する．

$$\mathscr{V}^\alpha_M \coloneqq C^{\alpha,(n)}_M \otimes \mathrm{or}_M$$

（$\alpha = \infty$ または $\alpha = \omega$）とおき，M 上の C^α 密度の層とよぶ．

コンパクト台をもつ C^∞ 密度は積分することができる．$\int_M \cdot$ で積分写像

$$\int_M \cdot : \Gamma_c(M; \mathscr{V}^\infty_M) \to \mathbf{C} \tag{1.1}$$

を表す．$C^{\alpha,(p)}_M$ と $\mathscr{V}^\alpha_M$ は C^α_M 加群の層である．

「1 の分割」の存在から，層 C^α_M，$C^{\alpha,(p)}$，$\mathscr{V}^\alpha_M$ は $\alpha \neq \omega$ に対しては c 柔軟であることが従う．層 C^ω_M，$C^{\omega,(p)}$，$\mathscr{V}^\omega_M$ は関手 $\Gamma(M;\cdot)$ に対し非輪状，すなわち $j > 0$ に対し $H^j(M; C^\omega_M) = 0$ である．Grauert[G58] を参照．

1.2　分布と超関数

C^∞ 多様体 M 上にはシュワルツ分布の層 $\mathscr{D}b_M$ が自然に定まる（Schwartz[S66], de Rham[R55] を参照）．$\mathscr{D}b_M$ は c 柔軟層であり，$\Gamma_c(M; \mathscr{D}b_M)$ は $\Gamma(M; \mathscr{V}^\infty_M)$ の双対位相線形空間である．ただし，$\Gamma(M; \mathscr{V}^\infty_M)$ にはフレシェ空間としての自然な位相を入れている．

C^ω 多様体 M 上にも同様に佐藤超関数の層 $\mathscr{B}_M$ が自然に定まる（佐藤 [Sa59] を参照）．$\mathscr{B}_M$ は脆弱層であり，$\Gamma_c(M; \mathscr{B}_M)$ は $\Gamma(M; \mathscr{V}^\omega_M)$ の双対位相線形空間である．ただし，$\Gamma(M; \mathscr{V}^\omega_M)$ には DFS 空間としての自然な位相を入れている（Martineau と Schapira に詳細な解説がある）．しかし，佐藤による構成は純粋にコホモロジーによるものである．後ほど**??**項で復習する．

積分写像 (1.1) はペアリング

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(M; C^\infty_M) \times \Gamma_c(M; \mathscr{V}^\infty_M) & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ \cup\!\!\!\!\shortmid & & \cup\!\!\!\!\shortmid \\ (f, g) & \longmapsto & \displaystyle\int_M fg \end{array} \tag{1.2}$$

を定める．このペアリングから C^∞_M から $\mathscr{D}b_M$ への層の射がひきおこされ，この射が単射であることも示せる．さらに，実解析多様体 M の上では，単射 $\Gamma(M; \mathscr{V}^\omega_M) \to \Gamma(M; \mathscr{V}^\infty_M)$ から射 $\mathscr{D}b_M \to \mathscr{B}_M$ が引き起こされ，こちらも単射であることがわかる．

分布係数の p 形式の層 $\mathscr{D}b_M^{(p)} := C_M^{\infty,(p)} \otimes_{C_M^\infty} \mathscr{D}b_M$ や超関数係数の p 形式の層 $\mathscr{B}_M^{(p)} := C_M^{\omega,(p)} \otimes_{C_M^\omega} \mathscr{B}_M$ も定義することができる．$\mathscr{D}b_M^{(p)}$ は c 柔軟層，$\mathscr{B}_M^{(p)}$ は脆弱層である．

1.3 戻る

いま，X を n 次元 C^0 多様体とし，a_X で写像 $X \to \{\mathrm{pt}\}$ を表す．射 $\mathrm{Ra}_{X!}\mathrm{a}_X^! A_{\{\mathrm{pt}\}} \to A_{\{\mathrm{pt}\}}$ から射

$$\mathrm{Ra}_{X!}\omega_X \to A \tag{1.3}$$

が定まる．0 次コホモロジーをとることで，「積分射」

$$\int_X : H_c^n(X;\mathrm{or}_X) \to A \tag{1.4}$$

が定まる．他方で，$A = \mathbf{C}$ かつ X が C^∞ 多様体であるとき，よく知られた射 $H_c^n(X;\mathrm{or}_X) \to \mathbf{C}$ が次のようにして得られる．or_X はド・ラーム複体と擬同形である：

$$0 \to C_X^{\infty,(0)} \otimes \mathrm{or}_X \underset{d}{\to} \cdots \to C_X^{\infty,(n)} \otimes \mathrm{or}_X \to 0.$$

$C_X^{\infty,(j)} \otimes \mathrm{or}_X$ は c 柔軟なので，

$$H_c^n(X;\mathrm{or}_X) \cong \Gamma_c(X;C^{\infty,(n)} \otimes \mathrm{or}_X)/d\Gamma_c(X;C^{\infty,(n-1)} \otimes \mathrm{or}_X)$$

である．ϕ をコンパクト台をもつ密度，すなわち $\Gamma_c(X;C^{\infty,(n)} \otimes \mathrm{or}_X)$ の元とすると，$\int_X \phi$ が意味をもち，ストークスの定理から $\psi \in \Gamma_c(X;C^{\infty,(n-1)} \otimes \mathrm{or}_X)$ で $\phi = d\psi$ となるものが存在するとき $\int_X \phi = 0$ となる．したがって，$\int_X$ は射

$$\int_X : \Gamma_c(X;C^{\infty,(n)} \otimes \mathrm{or}_X)/d\Gamma_c(X;C^{\infty,(n-1)} \otimes \mathrm{or}_X) \to \mathbf{C} \tag{1.5}$$

を定める．この射 (1.5) は (1.4) と符号を除いて一致する．

参考文献

[Le13] John M. Lee, *Introduction to Smooth Manifolds*, Second Edition, Graduate Texts in Mathematics, **218**, Springer, 2013.

[Sp65] Michael Spivak, *Calculus on Manifolds*, Benjamin, 1965.

[B+84] Borel, *Intersection Cohomology*, Progress in Mathematics, 50, Birkhäuser, 1984.

[G58] Grauert, *On Levi's problem and the embedding of real analytic manifolds*, Ann. Math. 68, 460–472 (1958).

[GP74] Victor Guillemin, Alan Pollack, *Differential Topology*, Prentice-Hall, 1974.

[KS90] Masaki Kashiwara, Pierre Schapira, *Sheaves on Manifolds*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 292, Springer, 1990.

[KS06] Masaki Kashiwara, Pierre Schapira, *Categories and Sheaves*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 332, Springer, 2006.

[R55] de Rham, *Vari'et'es différentiables*, Hermann, Paris, 1955.

[Sa59] Mikio Sato, *Theory of Hyperfunctions*, 1959–60.

[S66] Schwartz, *Théorie de distributions*, Hermann, Paris, 1966.

[Sh16] 志甫淳, 層とホモロジー代数, 共立出版, 2016.

[Ike21] 池祐一, 超局所層理論概説, 2021.

[Tak17] 竹内潔, $\mathcal{D}$ 加群, 共立出版, 2017.