

単体的圏

Toshi2019

概要

単体的圏の性質についてまとめる.

記号など

- 1 点から成る集合を $\{\text{pt}\}$ で表す.
- 集合 X の基数を $|X|$ とか $\#X$ とか $\text{Card } X$ で表す.
- 圏 \mathcal{C} の始対象を $\varnothing_{\mathcal{C}}$, 終対象を $\text{pt}_{\mathcal{C}}$ で表す.
- 有限集合とその間の写像のなす圏を Set^{f} で表す.

1 単体的圏

[KS06] を参考にした.

定義 1.1. 単体圏 (simplex category)^{*1} Δ を次で定める.

$$\begin{aligned}\text{Ob}(\Delta) &:= \{\text{有限全順序集合}\}, \\ \text{Hom}_{\Delta}(\sigma, \tau) &:= \{u: \sigma \rightarrow \tau; u \text{ は順序を保つ写像}\}.\end{aligned}$$

射の合成は写像の合成で定める.

Δ の部分圏 $\tilde{\Delta}$ を次で定める.

$$\begin{aligned}\text{Ob}(\tilde{\Delta}) &:= \{\sigma \in \Delta; \sigma \neq \varnothing\}, \\ \text{Hom}_{\tilde{\Delta}}(\sigma, \tau) &:= \{u \in \text{Hom}_{\Delta}(\sigma, \tau); u \text{ は最大元と最小元を保つ}\}.\end{aligned}$$

有限全順序集合 $[n, m]$ を $\{k \in \mathbf{Z}; n \leq k \leq m\}$ で定める.

以下単体的集合の性質を述べる.

命題 1.2. うめこみ関手 $\iota: \Delta \hookrightarrow \text{Set}^{\text{f}}$ は半充満かつ忠実である.

注意 1.3. 関手 $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ が半充満 (half-full) であるとは, 任意の対象 $X, Y \in \mathcal{C}$ に対し, $F(X) \cong F(Y)$ ならば, X と Y の間の同型が存在することをいう. ただし, \mathcal{C}' における同型

$F(X) \xrightarrow{\sim} F(Y)$ は \mathcal{C} における同型 $X \rightarrow Y$ から来るものでなくともよい.

\mathcal{C} の部分圏 \mathcal{C}' が半充満であるとは, うめこみ関手 $\mathcal{C} \hookrightarrow \mathcal{C}'$ が半充満であることをいう.

命題 1.2 の証明 まず ι が半充満であることを示す. $\sigma, \tau \in \Delta$ を $\iota(\sigma) \cong \iota(\tau)$ をみたすものとする
と, $\# \sigma = \# \tau$ である. □

参考文献

[KS06] Masaki Kashiwara, Pierre Schapira, *Categories and Sheaves*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 332, Springer, 2006.