

# 位相空間まとめノート

Toshi2019

2024 年 1 月 10 日 \*

位相空間論で調べたことをまとめるノート。

## 記号など

- $X$  を集合とする.  $\complement_X A$  で  $X$  の部分集合  $A$  の補集合を表す.  $X$  が明らかなときは  $\complement A$  ともかく.  $X - A$  とか  $X - A$  とか  $X \setminus A$  ともかく.

## 1 局所コンパクト

定義 1.1.  $X$  をハウスドルフ空間とする.

1.  $X$  の部分集合  $A \subset X$  について, 閉包  $\bar{A}$  がコンパクトであるとき,  $A$  は相対コンパクトであるという.
2. 任意の点  $x \in X$  に対して,  $x$  の相対コンパクトな開近傍が存在するとき,  $X$  は局所コンパクト空間であるという.

例 1.2. 位相多様体  $X$  は局所コンパクトである.

証明.  $x \in X$  の近傍  $U_x$  でユークリッド空間の開集合  $U'_x$  と同相なものが存在する.  $U_x$  と  $U'_x$  の間の同相写像を  $\varphi: U_x \rightarrow U'_x$  とする.  $\varphi(x)$  を中心とする開球  $B_x$  で  $U'_x$  に含まれるものが存在する. この  $B_x$  に対し,  $\overline{B_x}$  はコンパクトである. したがって,  $\varphi^{-1}(\overline{B_x}) = \overline{\varphi^{-1}(B_x)}$  はコンパクトである. すなわち  $\varphi^{-1}(B_x)$  は  $x$  の相対コンパクトな開近傍である.  $\square$

## 2 パラコンパクト性

定義 2.1 (パラコンパクト). ハウスドルフ空間  $X$  がパラコンパクトであるとは, 任意の開被覆が局所有限な細分をもつことをいう.

---

\* 2023/09/21 作成開始

**定義 2.2** (第 2 可算). 位相空間  $X$  が第 2 可算であるとは, 開集合の基底で可算集合であるものが存在することをいう.

**定義 2.3** ( $\sigma$  コンパクト). 位相空間  $X$  が  $\sigma$  コンパクトであるとは, コンパクト集合の列  $(U_n)_{n \in \mathbf{N}}$  で  $X$  の被覆であるものが存在することをいう.

**命題 2.4.** 位相多様体に対して次の条件 (1)–(3) は同値である.

- (1) 第 2 可算である.
- (2) リンデレーフである.
- (3)  $\sigma$  コンパクトである.

## 参考文献

- [KS90] Masaki Kashiwara, Pierre Schapira, *Sheaves on Manifolds*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 292, Springer, 1990.
- [KS06] Masaki Kashiwara, Pierre Schapira, *Categories and Sheaves*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 332, Springer, 2006.
- [Mat65] 松島与三, 多様体入門, 裳華房, 1965.
- [Sai09] 斎藤毅, 集合と位相, 東京大学出版会, 2009.  
第 2 可算,  $\sigma$  コンパクトの定義と, 無限遠点で可算との同値性について.
- [Sh16] 志甫淳, 層とホモロジー代数, 共立出版, 2016.