

定義 1 (層). X を位相空間とする. $\mathcal{F}: \text{Op}(X)^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{C}$ を X 上のアーベル圏 \mathcal{C} に値をとる前層とする. \mathcal{F} が層 (sheaf) であるとは, 任意の開集合 $U \in \text{Op}(X)$ とその開被覆 $(U_i)_{i \in I}$ に対して次の条件をみたすことをいう.

(S1) 列

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}(U) \xrightarrow{\Pi_i \rho_{U_i U}} \prod_{i \in I} \mathcal{F}(U_i)$$

が完全である. すなわち, $s \in \mathcal{F}(U)$ が各 $i \in I$ に対して U_i 上 $s|_{U_i} = 0$ ならば, $s = 0$ である.

(S2) 列

$$\mathcal{F}(U) \xrightarrow{\Pi_i \rho_{U_i U}} \prod_{i \in I} \mathcal{F}(U_i) \xrightarrow{\Pi_{i,j} \varphi_{ij}} \prod_{i,j \in I} \mathcal{F}(U_i \cap U_j)$$

が完全である. ただし, $\varphi_{ij} = \rho_{U_i \cap U_j, U_i} - \rho_{U_i \cap U_j, U_j}$. すなわち, $(s_i)_i \in \prod_i \mathcal{F}(U_i)$ が各 $i, j \in I$ で $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ となるものに対して $U_i \cap U_j$ 上 $s_i|_{U_i \cap U_j} - s_j|_{U_i \cap U_j} = 0$ ならば, $s \in \mathcal{F}(U)$ で各 U_i 上 $s|_{U_i} = s_i$ となるものが存在する.

命題 2. 複素直線 \mathbf{C} 上の複素線型空間の前層 \mathcal{F} を次で定める.

$$\mathcal{F}(U) = \begin{cases} \mathbf{C} & U = \mathbf{C} \text{ のとき,} \\ 0 & U \neq \mathbf{C} \text{ のとき.} \end{cases}$$

\mathcal{F} は層の条件 S2 をみたすが S1 はみたさない. したがって, \mathcal{F} は層にならない.

証明.

条件 S2 をみたすこと: $U \subsetneq \mathbf{C}$ を \mathbf{C} の開集合とし, $(U_i)_{i \in I}$ を U の開被覆とする. $(s_i)_i \in \prod_i \mathcal{F}(U_i)$ を各 $U_i \cap U_j$ で $s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}$ をみたす切断の族とする. どの i に対しても $U_i \subset U \subsetneq \mathbf{C}$ であることから $\mathcal{F}(U_i) = 0$ である. すなわち $s_i = 0$ である. したがって, $0 \in \mathcal{F}(U)$ は各 $i \in I$ に対し $0|_{U_i} = 0 = s_i$ をみたす.

$U = \mathbf{C}$ とし, $(U_i)_{i \in I}$ を \mathbf{C} の開被覆とする. $(s_i)_i \in \prod_i \mathcal{F}(U_i)$ を各 $U_i \cap U_j$ で $s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}$ をみたす切断の族とする. このとき, $U_i \neq \mathbf{C}$ となる i に対して $s_i = 0$ となるので, U_i が \mathbf{C} の真部分集合からなる場合は $0 \in \mathcal{F}(\mathbf{C})$ が $0|_{U_i} = 0 = s_i$ をみたす. $U_i = \mathbf{C}$ となる i があれば, そのような i たちに対して, 仮定 $s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}$ から切断はすべて s_i としてよい. よって $s_i \in \mathcal{F}(\mathbf{C})$ とすると, $U_j = \mathbf{C}$ 上では $s_i|_{U_j} = s_i = s_j$ が成り立ち, $U_j \subsetneq \mathbf{C}$ 上では $s_i|_{U_j} = 0 = s_j$ となる.

条件 S1 をみたさないこと: $U = \mathbf{C}$ とする. 開集合 U_0, U_1 を

$$U_0 = \{z \in \mathbf{C}; \text{Re } z > -1\}, \quad U_1 = \{z \in \mathbf{C}; \text{Re } z < 1\}$$

とおくと, $\mathbf{C} = U_0 \cup U_1$ である. $s_0 = 0 \in \mathcal{F}(U_0)$, $s_1 = 0 \in \mathcal{F}(U_1)$ とすると

$$s_0|_{U_0 \cap U_1} = 0 = s_1|_{U_0 \cap U_1}$$

が成り立つ. ところが, $s = 1 \in \mathbf{C} = \mathcal{F}(U_0 \cup U_1)$ とすると, s は 0 ではないが

$$s|_{U_0} = 0 = s_0, \quad s|_{U_1} = 0 = s_1$$

をみたす. □