Normal Deformation and Normal Cones

本多研 院生ゼミ

大柴 寿浩

2024 年 7 月 8 日

Normal Deformation

- X: a manifold of $\dim M = n$
- $M \subset X$: a closed submanifold of$\operatorname{codim} M = l$
- $T_M X$: the normal bundle to M in X

We defined the **normal deformation** of M in X:

- $\widetilde{X}_M$
- $p\colon \widetilde{X}_M \to X$
- $t\colon \widetilde{X}_M \to \mathbf{R}$

Normal Deformation

p and t satisfy the following conditions:

$$
(4.1.3) \qquad \begin{cases} p^{-1}(X - M) \cong (X - M) \times (\mathbf{R} - \{0\}), \\ t^{-1}(\mathbf{R} - \{0\}) \cong X \times (\mathbf{R} - \{0\}), \\ t^{-1}(0) \cong T_M X. \end{cases}
$$

Normal Deformation

- $\Omega := t^{-1}(]0,+\infty[)$
- $j\colon \Omega \hookrightarrow \widetilde{X}_M$
- $\widetilde{p} := p \circ j$

(4.1.5)
$$
\begin{tikzcd}
T_M X \arrow[r, hook, "s"'] \arrow[d, "\tau"'] & \widetilde{X}_M \arrow[d, "p"] & \Omega \arrow[l, hook', "j"'] \arrow[dl, "\widetilde{p}"] \\
M \arrow[r, hook, "i"'] & X &
\end{tikzcd}
$$

Normal Deformation

Claim

$\widetilde{p}$ is smooth.

Proof. $\widetilde{p} = p|_{\Omega}$. $\square$

正則関数と有理型関数

f を $\mathbf{C}^n$ の開集合上で定義された複素数値関数とする．

Definition (正則関数)

f が正則であるとは，各成分 $z^1, \ldots, z^n$ について正則，すなわち，複素微分可能であることをいう．

Definition (有理型関数)

f が有理型であるとは，f の定義域の各点で高々極しか持たず，極を除き正則であることをいう．

楕円関数

Definition

ω_0, ω_1 に対し，$\mathbf{C}$ 上の有理型関数 f で

$$f(z+\omega_0)=f(z), \quad f(z+\omega_1)=f(z)$$

を満たすものを，ω_0, ω_1 を周期とする，或は Ω を周期とする楕円関数という．

次の補題がある．

Lemma

商写像 $p\colon \mathbf{C} \to E$ の引き戻し $p^*\colon f \mapsto f \circ p$ は $\{E$ 上の有理型関数 $\}$ から $\{\Omega$を周期とする $\mathbf{C}$ 上の楕円関数 $\}$ への *1* 対 *1* 対応を定める．

Weierstrass の $\wp$ 関数

Definition (Weierstrass の $\wp$ 関数)

$$\wp(u) := \sum_{\substack{\omega\in\Omega, \\ \omega\neq 0}} \left(\frac{1}{(u-\omega)^2} - \frac{1}{\omega} \right)$$

は Ω にのみ 2 位の極を持つ楕円関数である．$\wp$ を Weierstrass の $\wp$ 関数という．

分岐指数

Fact

X と Y をリーマン面とする．$f\colon X \to Y$ を定値でない正則写像とする．
$P \in X, Q = f(P) \in Y$ とおく．
このとき，P のまわりの局所座標 t と Q のまわりの局所座標 s と正の整数 $n \geqq 1$ で，f の局所座標表示が $s = t^n$ となるものが存在する．この n は座標の取り方によらない．

写像度

Fact

X と Y をコンパクトリーマン面とし，$f\colon X \to Y$ を定値でない正則写像とする．このとき，次が成り立つ．

1. $\forall Q \in Y \quad f^{-1}(Q) \neq \varnothing$, $\# f^{-1}(Q) < \infty$.
2. $\#\{f$ の分岐点 $\} < \infty$.
3. $Q \in Y$, $d(Q) := \displaystyle\sum_{P \in f^{-1}(Q)} e_P$: *constant*. $\deg f := d(Q)$.
4. $Q \in Y - \{f$ の分岐点 $\}$, $\# f^{-1}(Q) = \deg f$.
5. $Q \in \{f$ の分岐点 $\}$, $\# f^{-1}(Q) < \deg f$.

分岐指数と写像度

Definition (分岐指数)

上の事実における n を P における f の分岐指数といい，e_P とかく．
$e_P > 1$ のとき，P を f の分岐点という．

Definition (写像度)

$d = \deg f$ を f の写像度といい，f を d 重被覆写像という．

主定理

Theorem (複素トーラスから射影直線への 2 重被覆)

E から $\mathbf{P}^1$ への正則射

$$\wp\colon E \to \mathbf{P}^1; \quad [z] \mapsto [\wp(z); 1]$$

は 4 点

$$[0], \left[\frac{\omega_0}{2}\right], \left[\frac{\omega_1}{2}\right], \left[\frac{\omega_0 + \omega_1}{2}\right]$$

で分岐する 2 重被覆写像である.

定理の言い換え

$P \in \mathbf{P}^1$ に対し，

$$\#\wp^{-1}(P) = \begin{cases} 1 & \left([0], \left[\frac{\omega_0}{2}\right], \left[\frac{\omega_1}{2}\right], \left[\frac{\omega_0+\omega_1}{2}\right] \mapsto P \text{ のとき}\right), \\ 2 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

ということ．

証明 (1/2)

$\wp$ は Ω にのみ 2 位の極をもつ楕円関数であったから，$[0]$ のみに 2 位の極をもつ E 上の有理型関数というのと同じである．したがって，$\wp^{-1}(\infty) = \{[0]\}$ であり，写像度に関する事実より，$\deg \wp = 2$ である．いま，$\wp$ は偶関数なので，$[a] \in E$ に対し，$\wp([a]) = \wp([-a])$ が成り立つ．$[a]$ が E の 2 分点でなければ，$[a] \neq [-a]$ である．$\deg \wp = 2$ なので，このとき，$\wp^{-1}(\wp([a])) = \{[a], [-a]\}$ と確定する．

証明 (2/2)

$[\omega_0/2]$ の近傍で $\wp$ を局所座標表示する．$\wp$ は ω_0 を周期にもつ偶関数なので $\wp(-z) = \wp(z) = \wp(z+\omega_0)$ をみたす．両辺を微分して，$-\wp'(-z) = \wp'(z+\omega_0)$ となるが，$z = -\omega_0/2$ のとき，$-\wp'(\omega_0/2) = \wp'(\omega_0/2)$ となる．したがって，$\wp'(\omega_0/2) = 0$ となる．よって，$\wp(z)$ の $\omega_0/2$ のまわりでの展開における 1 次の項の係数は 0 である．したがって，$e_{[\omega_0/2]} > 1$ であり，$[\omega_0/2]$ は $\wp$ の分岐点である．

$[\omega_1/2]$ と $[(\omega_0+\omega_1)/2]$ についても同様に，$e_{[\omega_1/2]} > 1$, $e_{[(\omega_0+\omega_1)/2]} > 1$ となるので，$\wp$ は E の 2 分点で分岐する 2 重被覆であることが示せた．

参考文献 I

[KS90] Kashiwara, Schapira *Sheaves on Manifolds*, Springer, 1990.