Homological Subdifferential

本永さんゼミ

大柴 寿浩

2024 年 9 月 27 日

目次

はじめに

[Ike24] は導来圏を使わずに $SS(F)$ を定義している.

劣微分の定義をダイジェスト的に述べると

- $f\colon X \to \mathbf{R}$: 下半連続関数
- $\mathrm{epi}(f) \subset X \times \mathbf{R}$: f のエピグラフ
- $F_f = \mathbf{k}_{\mathrm{epi}(f)}$: エピグラフに台を持つ定数層
- $SS(F_f) \subset T^*X \times T^*\mathbf{R}$: 超局所台をとる
- $\partial f = -\mathrm{Red}(SS(F_f)) \subset T^*X$:「射影」(簡約) をとってひねる

設定と記号

- X : 位相空間
- $\mathsf{Op}(X)$: 開集合のなす順序集合
- I_P : $P \in X$ の開近傍のなす有向順序集合
- $U \in \mathsf{Op}(X)$: 開集合
- $C^0(U)$: U 上の連続関数環
- $(U_i)_{i \in I}$: U の被覆.

簡単な例

連続関数に対する 2 つの操作：

制限 $f \in C^0(U)$ の $V \subset U$ 上の $f|_V \in C^0(V)$ への制限.

$$U \supset V \supset W \text{ ならば}, \ (f|_V)|_W = f|_W.$$

はりあわせ $(f_i)_i \in \prod_{i \in I} C^0(U_i)$ で $f_i = f_j$ on $U_i \cap U_j$ のとき， $f|_{U_i} = f_i$ として $f \in C^0(U)$ に貼り合わせ.

- 制限 $\to$ 前層
- 貼り合わせ $\to$ 層

として定式化

前層の定義

Definition (前層)

$\mathbf{k}$ 加群の前層 $\mathcal{F}$ とは $\mathbf{k}$ 加群の族と $\mathbf{k}$ 加群の射の族の組

$$\left((\mathcal{F}(U))_{U\in\mathsf{Op}(X)}, (\rho_{VU}\colon \mathcal{F}(U)\to\mathcal{F}(V))_{(V\hookrightarrow U)}\right)$$

で次をみたすもののこと

1. $\rho_{UU}=\mathrm{id}_{\mathcal{F}(U)}$
2. $W\subset V\subset U$ ならば, $\rho_{WU}=\rho_{WV}\circ\rho_{VU}$.

前層の定義

Definition (前層の射)

$\mathbf{k}$ 加群の前層の射 $\mathcal{F} \to \mathcal{G}$ とは $\mathbf{k}$ 加群の射の族

$$(\phi_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U))_{U \in \mathsf{Op}(X)}$$

で次を可換にするもののこと

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(U) \arrow[r, "\phi_U"] \arrow[d, "\rho^{\mathcal{F}}_{VU}"] & \mathcal{G}(U) \arrow[d, "\rho^{\mathcal{G}}_{VU}"] \\ \mathcal{F}(V) \arrow[r, "\phi_V"] & \mathcal{G}(V) \end{tikzcd}$$

前層の例

例

X を位相空間とする．

1. $C^r_X : U \mapsto C^r_X(U) := \{U$ 上の C^r 級関数$\}$ は X 上の前層である．
2. $\mathcal{O}_X : U \mapsto \mathcal{O}_X(U) := \{U$ 上の正則関数$\}$ は X 上の前層である．
3. $\mathcal{M}_X : U \mapsto \mathcal{M}_X(U) := \{U$ 上の有理型関数$\}$ は X 上の前層である．
4. M をアーベル群とする．$U \mapsto M$ は X 上の前層である．

前層の例

例

$E \to X$ を C^∞ ベクトル束とする.

$$U \mapsto \Gamma(U;E) \coloneqq \{s\colon U \to E; s\colon C^\infty, \pi \circ s = \mathrm{id}_U\}$$

は前層である.

層の定義

Definition (層)

$\mathcal{F}$: X 上の $\mathbf{k}$ 加群の前層.
$\mathcal{F}$ が層 (sheaf) であるとは，$\forall U \in \mathrm{Op}(X)$ とその開被覆 $(U_i)_{i \in I}$ に対して

(S0) $\mathcal{F}(\varnothing) = 0$.

(S1) $s \in \mathcal{F}(U)$ が各 $i \in I$ に対して U_i 上 $s|_{U_i} = 0$ ならば，$s = 0$.

(S2) $(s_i)_i \in \prod_i \mathcal{F}(U_i)$ が各 $i, j \in I$ で $U_i \cap U_j \neq \varnothing$ となるものに対して $U_i \cap U_j$ 上 $s_i|_{U_i \cap U_j} - s_j|_{U_i \cap U_j} = 0$ ならば，$s \in \mathcal{F}(U)$ で各 U_i 上 $s|_i = s_i$ となるものが存在する.

層の定義

層の射は前層としての射

記号を定める.

- $\mathrm{PSh}(X) := \{X$ 上の前層$\}$
- $\mathrm{Sh}(X) := \{X$ 上の層$\}$
- $\mathrm{Mod}(\mathbf{k}_X) := \{X$ 上の $\mathbf{k}$ 加群の層$\}$
- $\mathbf{Ab} := \{$アーベル群$\}$

切断関手

定義 (切断関手)

$U \in \mathrm{Op}(X)$: fixed

$$\Gamma(U;\ \cdot\ ) \colon \mathrm{Sh}(X) \to \mathbf{Ab}; \quad F \mapsto \Gamma(U;F) = F(U)$$

層の例

例

X を位相空間とする．

1. 前層 C_X^r は X 上の層である．
2. 前層 $\mathcal{O}_X$ は X 上の層である．
3. 前層 $\mathcal{M}_X$ は X 上の層である．
4. M をアーベル群とする．前層 $M\colon U \mapsto M$ は X 上の層ではない．実際，X を 2 点からなる離散空間 $2 = \{0,1\}$ とし，その上の前層として $M = \mathbf{C}$ を考えると，$1 \in \mathbf{C}(\{0\}), i \in \mathbf{C}(\{1\})$ に対して，$\mathbf{C}(\{0\} \cap \{1\}) = \mathbf{C}(\varnothing) = 0$ より，$\rho_{\varnothing,0}(1) = 0 = \rho_{\varnothing,1}(i)$ となるが，2 上の切断 $z \in \mathbf{C}(2)$ で $z|_{\{0\}} = 1, z|_{\{1\}} = i$ をみたすものは存在しない．したがって，条件 (S2) が成り立たない．

前層の例

例

$E \to X$ を C^∞ ベクトル束とする.

$$C^\infty(E)\colon U \mapsto \Gamma(U;E) := \{s\colon U \to E; s\colon C^\infty, \pi \circ s = \mathrm{id}_U\}$$

は層である.

層化

層ではない前層に対して，「最も近い」層を自然に対応させる．

定理

X 上の任意の前層 $\mathcal{F}$ に対して，X 上の層 $\mathcal{F}^\dagger$ と前層の射 $\theta\colon \mathcal{F} \to \mathcal{F}^\dagger$ で次の普遍性をみたすものがただ一つ存在する．

任意の層 $\mathcal{G} \in \mathrm{Sh}(X)$ と前層の射 $\varphi\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ に対し，層の射 $\varphi^\dagger\colon \mathcal{F}^\dagger \to \mathcal{G}$ で，

$$\varphi^\dagger \circ \theta = \varphi$$

をみたすものがただ一つ存在する．

茎の例から

- X：例えばリーマン面，$U \subset X$：開集合
- 正則関数 $f \in \mathcal{O}_X(U)$ は各点 P のまわりで冪級数展開可能
- 関数 $f \in \mathcal{O}_X(U)$ と $g \in \mathcal{O}_X(V)$ が P の近くで等しいとは

  $U \cap V$ に含まれる P の近傍 W とって, P のまわりの座標 $z\colon W \to z(W)$ を用いて f, g を展開したとき，収束冪級数として等しいということ

定義域の異なる関数（環）に対して，各点まわりに注目するという操作を茎として定式化.

茎の定義

定義 (茎)

- $\mathcal{F} \in \mathrm{Sh}(X)$
- $P \in X$

$\mathcal{F}$ の P での茎 (stalk) $\mathcal{F}_P$ を次で定める.

$$\mathcal{F}_P := \varinjlim_{U \in I_P} \mathcal{F}(U).$$

$\mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}_P$ から定まる $s \in \mathcal{F}(U)$ の行き先を s_P とかき, s の芽 (germ) という.

茎の定義

$$\mathcal{F}_P \cong \left(\bigsqcup_{U \in I_P} \mathcal{F}(U) \right) \Big/ \sim$$

ここで，$(f, U), (g, V) \in \bigsqcup_{U \in I_P} \mathcal{F}(U)$ に対し，

$$(f, U) \sim (g, V) :\iff \begin{cases} P \text{ の開近傍 } W \in I_P \text{ で } W \subset U \cap V \text{ と} \\ f|_W = g|_W \text{ をみたすものが存在する.} \end{cases}$$

つまり，P のまわりでの挙動が同じ切断を同一視した類が芽.

層化の構成

開集合 U に対し,

$$\mathcal{F}^\dagger(U) := \left\{ (s^P)_{P\in U} \in \prod_{P\in U} \mathcal{F}_P;\ \begin{array}{r} \text{任意の } P\in U \text{ に対し，近傍 } W\in I_P\cap U \text{ と} \\ \text{切断 } t\in\mathcal{F}(W) \text{ で，任意の } Q\in W \text{ に対し，} \\ s^Q = t_Q \text{ となるものが存在する.} \end{array} \right\}$$

とおき，制限射 $\mathcal{F}^\dagger(U)\to\mathcal{F}^\dagger(V)$ を $(s^P)_{P\in U}\mapsto(s^P)_{P\in V}$ で定めると，前層 $\mathcal{F}^\dagger$ が定まり，$\mathcal{F}^\dagger$ が層の条件をみたすことも確かめられる.

コメント

層化は茎を保つ. $\mathcal{F}_P = \mathcal{F}^\dagger_P$

層化の例

例

$M\colon U \mapsto M$ をアーベル群 M から定まる前層とする． M の層化 $M^\dagger$ は

$$M^\dagger(U) = \{U \text{ 上の } M \text{ に値をとる局所定数関数}\}$$

である． $M^\dagger$ を M_X とかき， X 上の定数層と呼ぶ．

命題

$$M_X(U) \cong M^{\#\pi_0(U)}$$

ここで， $\pi_0(U)$ は U の連結成分の集合．

層の全射・単射

定義

X 上の層の射 $\varphi\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ が

1. 単射とは各点 x に対し，$\varphi_x\colon \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x$ が単射.
2. 全射とは各点 x に対し，$\varphi_x\colon \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x$ が全射.

層の完全列

定義

$$\mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H} \quad \text{in } \mathrm{Sh}(X)$$

が完全列であるとは各点 x に対し，

$$\mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x \to \mathcal{H}_x \quad \text{in } \mathrm{Mod}(\mathbf{k})$$

が完全列であることである．

切断は左完全

命題

$$0 \to F \to G \to H \to 0 \quad \text{in } \mathrm{Sh}(X)$$

が完全列のとき

$$0 \to \Gamma(U; F) \to \Gamma(U; F) \to \Gamma(U; H) \quad \text{in } \mathbf{Ab}$$

は完全列.

導来関手

右完全でない度合いを定量化する量としてコホモロジーを導入

アーベル圏から導来圏まで

$$
\begin{tikzcd}
\text{アーベル圏 } \mathcal{C} \arrow[d, Rightarrow, "\text{複体をとる}"] \\
\text{複体の圏 } \mathsf{C}(\mathcal{C}) \arrow[d, Rightarrow, "\text{射の集合をホモトピー同値で割る}"] \\
\text{ホモトピー圏 } \mathsf{K}(\mathcal{C}) \arrow[d, Rightarrow, "\text{局所化}"] \\
\text{導来圏 } \mathsf{D}(\mathcal{C})
\end{tikzcd}
$$

導来圏の動機

完全列

$$0 \to X \to Y \to Z \to 0$$

を考える.

層係数コホモロジー

空間 X の上の層 $\mathcal{F}$ について，コホモロジー

$$H^i(X;\mathcal{F})$$

は重要な量.

層係数コホモロジー

計算するときには，“良い層”$\mathcal{I}^i$ たちで分解して

$$
\begin{array}{c}
\text{もとの層 } \mathcal{F} \\
\Big\downarrow{\scriptstyle \text{分解}} \\
\text{層の複体 } (\mathcal{I}^i) \\
\Big\downarrow{\scriptstyle H^i} \\
\text{コホモロジー } H^i(X; \mathcal{I})
\end{array}
$$

のようにする

層係数コホモロジー

もっと一般に，アーベル圏 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ に対して，左完全関手 $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ があるとき，

$$\mathbf{R}^i F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$$

を定めた

問題点

- 導来関手どうしの合成の計算が面倒
- “双対性” の定式化がしづらい

複体の圏

Definition (アーベル圏の複体の圏 $\mathsf{C}(\mathcal{C})$)

対象 : $\mathrm{Ob}(\mathsf{C}(\mathcal{C})) = \left\{ X = ((X^n)_{n\in\mathbf{Z}}, (d_X^n)_{n\in\mathbf{Z}})\,;\, d_X^{n+1} \circ d_X^n = 0 \quad (n \in \mathbf{Z}) \right\}$

射 : $\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}(\mathcal{C})}(X, Y) = \{\mathcal{C}$ の複体の射 $\}$

複体の射 $f\colon X \to Y$ は，射の族 $(f^n\colon X^n \to Y^n)_{n\in\mathbf{Z}}$ で，次を可換にするもの．

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & X^n \arrow[r, "d_X^n"] \arrow[d, "f^n"] & X^{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "f^{n+1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & Y^n \arrow[r, "d_Y^n"] & Y^{n+1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

ホモトピー圏

Definition ($f, g\colon X \to Y$ in $\mathrm{C}(\mathcal{C})$ が 0 にホモトピック)

$\mathcal{C}$ の射の族 $(s^n\colon X^n \to Y^{n-1})$ で,

$$f^n - g^n = d_Y^{n-1} \circ s^n + s^{n+1} \circ d_X^n \quad (n \in \mathbf{Z})$$

となるものが存在すること.

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & X^n \arrow[r] \arrow[d] & X^n \arrow[r, "d_X^n"] \arrow[d, "f^n - g^n"] \arrow[dl, "s^n"'] & X^{n+1} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dl, "s^{+1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & Y^{n-1} \arrow[r, "d_Y^{n-1}"'] & Y^n \arrow[r] & Y^{n+1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

ホモトピー圏

Definition ($f, g\colon X \to Y$ in C($\mathcal{C}$) が 0 にホモトピック)

$\mathcal{C}$ の射の族 $(s^n\colon X^n \to Y^{n-1})$ で,

$$f^n - g^n = d_Y^{n-1} \circ s^n + s^{n+1} \circ d_X^n \quad (n \in \mathbf{Z})$$

となるものが存在すること.

これは同値関係.

$$\mathrm{Ht}(X, Y) := \{f\colon X \to Y \text{ のホモトピー類}\}$$

とおく.

ホモトピー圏

Definition (圏 $\mathcal{C}$ のホモトピー圏 $\mathsf{K}(\mathcal{C})$)

対象 : $\mathrm{Ob}(\mathsf{K}(\mathcal{C})) = \mathrm{Ob}(\mathsf{C}(\mathcal{C}))$

射 : $\mathrm{Hom}_{\mathsf{K}(\mathcal{C})}(X, Y) = \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}(\mathcal{C})}(X, Y)/\mathrm{Ht}(X, Y)$

注意

$\mathsf{K}(\mathcal{C})$ はアーベル圏ではない！

完全列の代わりに完全三角というものを用いる.

写像錐

Definition (f の写像錐 $M(f)$)

$$
\begin{cases}
M(f)^n = X^{n+1} \oplus Y^n, \\
d^n_{M(f)} = \begin{bmatrix} d^n_{X[1]} & 0 \\ f^{n+1} & d^n_Y \end{bmatrix}
\end{cases}
$$

写像錐

射 $\alpha(f)\colon Y \to M(f)$ と $\beta(f)\colon M(f) \to X[1]$ を次で定める.

$$\alpha(f)^n = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathrm{id}_{Y^n} \end{bmatrix}, \tag{0.1}$$

$$\beta(f)^n = \begin{bmatrix} \mathrm{id}_{X^{n+1}} & 0 \end{bmatrix}. \tag{0.2}$$

ホモトピー圏 $\mathsf{K}(\mathcal{C})$ は三角圏

Definition (三角)

射の列

$$X \to Y \to Z \to X[1] \quad \text{in } \mathsf{K}(\mathcal{C})$$

を三角という

$$X \to Y \to M(f) \to X[1]$$

と同形な △ を完全三角という

層の複体の圏

Definition (層の導来圏 $\mathrm{D}^b(\mathbf{k}_X)$)

$$\mathrm{D}^b(\mathbf{k}_X) := \mathrm{D}^b(\mathrm{Mod}(\mathbf{k}_X))$$

層の超局所台

$\mathrm{D^b}(\mathbf{k}_X) \ni F \mapsto SS(F) \subset T^*X$

Definition (層の超局所台)

$p \notin SS(F)$ となるのは，$\exists U \in I_p$ で $\forall x_0 \in X, \varphi\colon X \to \mathbf{R}$ で $d\varphi(x_0) \in U$ となるものに対し，

$$\varinjlim_{x_0 \in B} H^n(B; F) \xrightarrow{\sim} \varinjlim_{x_0 \in B} H^n(B \cap \{\varphi < \varphi(x_0)\}; F)$$

となるものが存在するとき．

超局所台の性質

$F, F_i\ (i = 1, 2, 3) \in \mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathbf{k}_M)$

- 超局所台は T^*M の錐状閉集合
- $SS(F) \cap T^*_M M = \mathrm{supp}(F)$
- $F_1 \to F_2 \to F_3 \to +1$: d.t. のとき，$SS(F_i) \subset SS(F_j) \cup SS(F_k)$ $(j \neq k)$

超局所台の性質

$F \in \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\mathbf{k}_M)$

定理

$SS(F)$ は包合的.

超局所台の例

a) F を連結多様体 M 上の零でない局所系とすると $SS(F) = T_M^* M$.

b) $Z \subset M$：滑らかな閉部分多様体，$F = \mathbf{k}_Z$ とすると $SS(F) = T_Z^* M$.

c) ϕ を $\phi(x) = 0$ となる x で $d\phi(x) \neq 0$ となる C^1 級関数とする．
$Z \coloneqq \{x \in M; \phi(x) \geqq 0\}$ とすると

$$SS(\mathbf{k}_Z) = Z \times_M T_M^* M \cup \{(x; \lambda d\phi(x)); \phi(x) = 0, \lambda \geqq 0\}.$$

補助的な定義

- $X : C^\infty$ 多様体
- $J^1(X) := T^*X \times \mathbf{R}$: 1 ジェット空間, $(x, t; \xi)$
- $\tilde{\lambda} = \lambda + dt$: $J^1(X)$ の接触形式

$$\begin{tikzcd}
\{\tau > 0\} \cap T^*(X \times \mathbf{R}) \arrow[rr, "\rho_t"] \arrow[dr, "\tilde{\rho}_t"'] & & T^*X \\
& J^1(X) \arrow[ur, "r"'] &
\end{tikzcd}$$

$$\rho_t(x, t; \xi, \tau) := \left(x, \frac{\xi}{\tau}\right), \quad \tilde{\rho}_t(x, t; \xi, \tau) := \left(x, \frac{\xi}{\tau}, t\right), \quad r : \text{projection}.$$

錐化と簡約

Definition (錐化集合 (conification))

- $L \subset T^*X$: 滑らかなラグランジュ部分多様体

$$\mathrm{Cone}(L) := \rho_t^{-1}(L) \subset T^*X \times T^*\mathbf{R} \colon (n+2) \text{ 次元部分多様体}$$

Definition (簡約集合 (reduction))

- $A \subset T^*X \times T^*\mathbf{R}$: 錐状部分集合

$$\mathrm{Red}(A) := \rho_t(A \cap \{\tau > 0\})$$

錐化と簡約

Claim

$\mathrm{Red}(\mathrm{Cone}(L)) = L \subset T^*X$

層の representative

- X: C^∞ 多様体
- $\mathbf{k}$: 単位元を持つ大域次元が有限な可換環

Definition (層の representative)

- $F \in \mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathbf{k}_{X\times\mathbf{R}})$ に対し，次の集合 $\mathrm{R}(F)$ を F の representative という．

$$\mathrm{R}(F) := \mathsf{Red}(SS(F)) \subset T^*X$$

エピグラフ

Definition (エピグラフ (epigraph))

- $f\colon X \to \mathbf{R}$ に対し，次の集合 $\mathrm{epi}(f)$ を f のエピグラフという．

$$\mathrm{epi}(f) := \{(x,t) \in X \times \mathbf{R};\, f(x) \leqq t\}.$$

$\mathrm{epi}(f)$ を Z_f ともかく．エピグラフに台を持つ層を $F_f := \mathbf{k}_{\mathrm{epi}(f)}$ で表す．

Definition (ホモロジカル劣微分)

下半連続関数 $f\colon X \to \mathbf{R}$ に対し，f の劣微分 ∂f とは

$$\partial f := \mathrm{R}(F_f)^a$$

C^1 級関数の劣微分は 1 点

記号

- $\partial f|_x = \partial f \cap T_x^* X$
- $\partial f(x) = \partial f|_x$

例

$f \in C^1(X)$ とすると

$$\partial f|_x = \{df(x)\}.$$

劣微分の特徴づけ

劣微分は epi(f) 上の定数層の超局所台の計算に帰着.
$\rightsquigarrow$ 等位集合コホモロジーの局所的な振る舞いを見れば良い.

定義

$f\colon X \to \mathbf{R}$: 連続関数 (!?)

- $x \in X$ が f の特異点とは次が同型でないことをいう.

$$\varinjlim_{U \ni x, \epsilon \to 0} H^*(U \cap f^{<\epsilon + a}) \to \varinjlim_{U \ni x, \epsilon \to 0} H^*(U \cap f^{<a}) \quad \text{ただし } a = f(x)$$

- x が臨界点とは，列 $(\phi_n, x_n) \in C^1(X) \times X$ で $f - \phi_n$ が x_n で特異かつ $x_n \to x$ かつ $d\phi_n(x_n) \to 0$ となるものが存在することをいう.

劣微分の特徴づけ

命題

$f\colon X \to \mathbf{R}$. $\xi \in \partial f|_x$ となるのは，x が $x \mapsto f(x) - \langle \xi, x \rangle$ の臨界点となるときである．

References I

[Ike24] 池 祐一, 層理論と層のモース理論, https://drive.google.com/file/d/1x1ibUAqXxNQHSLJrIYg72Rbu6O-043JZ/view?usp=drive_link.

[KS90] Kashiwara, Schapira, *Sheaves on Manifolds*, Springer, 1990.

[Vic13] Vichery, *Homological Differential Calculus*, https://doi.org/10.48550/arXiv.1310.4845.