偏屈層の勉強ノート

2024 年 1 月 23 日

はじめに

[KS90] の偏屈層のところのゼミノート．

摘要

偏屈層の歴史は浅いものの，代数幾何や群の表現論といった，様々な数学の分野において重要な役割を果たしている．その理論についてよく知られてはいるものの，解析的な場合に組織的に取り扱っている文献を見つけるのは難しい．

本章では実解析多様体 X 上の偏屈層を定義し，それらが $\mathsf{D}^{\mathrm{b}}_{\mathbf{R}\text{-c}}(X)$ のアーベル部分圏をなすことを示す．その後 X が複素多様体の場合を調べる．偏屈度が超局所的な性質であること，すなわち $\mathsf{D}^{\mathrm{b}}_{\mathbf{C}\text{-c}}(X)$ の対象が偏屈層となるのは，超局所台の生成点においてシフト $-\dim_{\mathbf{C}} X$ の純となるときである．超局所的な特徴づけにはモース理論が適しているので，シュタイン多様体上の偏屈層に対する消滅定理を証明することができる．その後，偏屈度が種々の操作，とくに特殊化，超局所化，フーリエ・佐藤変換によって保存されることを示す．この目論見を達成するためには，もうすこしホモロジー代数についての知識を補っておく必要がある．第 1 節で，t 構造について説明する．これを用いると，三角圏のアーベル部分圏を構成することができるようになる．

参考文献として，BBD, GM, Borel, Gelfand-Manin を挙げる．

ここでも 8.0 節での約束に従う．

約束 ([KS90, 8.0])**.**　約束 4.0 に従う．特に環 A は $\mathrm{gld}(A) < \infty$ をみたすとする．さらに，断らない限り，多様体とその間の射は全て実解析的で，かつ無限遠点で可算とする．

実解析部分集合 X の次元を $\dim X$ で，複素解析部分集合 X の次元を $\dim_{\mathbf{C}} X$ で表す．

約束 ([KS90, 4.0])**.**　約束 3.0 に従う．さらに，多様体とその間の射は全て C^∞ 級か実解析的であると仮定する．

以降では，主に層の有界な複体の圏に関して議論する．もちろん，仮定を弱めても成り立つ結果も多い．

約束 ([KS90, 3.0])**.** 本章と以降 11 章以外の章において，説明を煩雑になることを防ぐため，環 A を可換かつ大域次元が有限である（$\mathrm{wgld}(A) \leqq \mathrm{gld}(A)$ であった）と仮定した上で，位相空間 X 上の A_X 加群の層について議論することにする．

混同する恐れがないとき $\mathsf{D}^+(A_X)$ や $\mathsf{D}^+(X)$ の代わりに，$\mathsf{D}^{\mathrm{b}}(A_X)$ や $\mathsf{D}^{\mathrm{b}}(X)$ とかくことがある．$F \otimes^{\mathrm{L}}_{A_X} G$ や $\mathrm{R}\mathcal{H}om_{A_X}(F, G)$ の代わりに $F \otimes^{\mathrm{L}} G$ や $\mathrm{R}\mathcal{H}om(F, G)$ ともかく．

多様体は全て有限次元かつ無限遠点で可算とする．部分多様体はいつでも局所閉とする．

この章では，位相空間は γ 位相に関するもの以外すべて局所コンパクトと仮定する．

2 つの関手を合成する際，合成の記号 $\circ$ を省略して $f^! \mathrm{R} f_!$ のようにかくことがある．

1 t 構造

$\mathcal{D}$ を三角圏とする．

定義 1.1 ([KS90, 10.1.1])**.** $\mathcal{D}^{\leqq 0}$ と $\mathcal{D}^{\geqq 0}$ を $\mathcal{D}$ の充満部分圏とする．組 $\left(\mathcal{D}^{\leqq 0}, \mathcal{D}^{\geqq 0}\right)$ が $\mathcal{D}$ 上の t **構造** (t-structure) であるとは，次の条件 (i)–(iii) が成りたつことをいう．ただし，以下で $\mathcal{D}^{\leqq n} := \mathcal{D}^{\leqq 0}[-n]$，$\mathcal{D}^{\geqq n} := \mathcal{D}^{\geqq 0}[-n]$ とおく．

(i) $\mathcal{D}^{\leqq -1} \subset \mathcal{D}^{\leqq 0}$ かつ $\mathcal{D}^{\geqq 1} \subset \mathcal{D}^{\geqq 0}$.

(ii) $X \in \mathcal{D}^{\leqq 0}$ と $Y \in \mathcal{D}^{\geqq 1}$ に対し，$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X, Y) = 0$.

(iii) 任意の $X \in \mathcal{D}$ に対し，完全三角 $X_0 \to X \to X_1 \underset{+1}{\to}$ で $X_0 \in \mathcal{D}^{\leqq 0}$ と $X_1 \in \mathcal{D}^{\geqq 1}$ をみたすものが存在する．

参考文献

[Le13] John M. Lee, *Introduction to Smooth Manifolds*, Second Edition, Graduate Texts in Mathematics, **218**, Springer, 2013.

[Sp65] Michael Spivak, *Calculus on Manifolds*, Benjamin, 1965.

[B+84] Borel, *Intersection Cohomology*, Progress in Mathematics, 50, Birkhäuser, 1984.

[G58] Grauert, *On Levi's problem and the embedding of real analytic manifolds*, Ann. Math. 68, 460–472 (1958).

[GP74] Victor Guillemin, Alan Pollack, *Differential Topology*, Prentice-Hall, 1974.

[KS90] Masaki Kashiwara, Pierre Schapira, *Sheaves on Manifolds*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 292, Springer, 1990.

[KS06] Masaki Kashiwara, Pierre Schapira, *Categories and Sheaves*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 332, Springer, 2006.

[R55] de Rham, *Vari'et'es différentiables*, Hermann, Paris, 1955.

[Sa59] Mikio Sato, *Theory of Hyperfunctions*, 1959–60.

[S66] Schwartz, *Théorie de distributions*, Hermann, Paris, 1966.

[Sh16] 志甫淳, 層とホモロジー代数, 共立出版, 2016.

[Ike21] 池祐一, 超局所層理論概説, 2021.

[Tak17] 竹内潔, $\mathcal{D}$ 加群, 共立出版, 2017.