2024/01/25 セミナー資料

大柴寿浩

2024/01/25

1　向きづけと双対性 [KS90, 3.3]

命題 1.1 ([KS90, Prop3.3.6]). X を n 次元 C^0 多様体とする.

(i) or_X は前層 $U \mapsto \mathrm{Hom}(H^n_c(U; A_X), A)$ から誘導された層である.

(ii) $x \in X$ に対し，標準的な同型 $\mathrm{or}_{X,x} \cong \mathrm{Hom}\left(H^n_{\{x\}}(X; A_X), A\right) \cong H^n_{\{x\}}(X; A_X)$ が存在する.

(iii) X が向きづけられた可微分多様体であるとする. このとき，同型 $\mathrm{or}_X \cong A_X$ が存在する. この同型は X の向きをとりかえることで符号が変わる.

証明. (i) U を $\mathbf{R}^n$ と同相な X の開集合とすると，

$$\begin{aligned} \mathrm{R}\Gamma(U; \omega_X) &\cong \mathrm{RHom}_{A_X}(A_U, \omega_X) \\ &\underset{(3.1.8)}{\cong} \mathrm{RHom}_A(\mathrm{R}\Gamma_c(X; A_U), A) \\ &\underset{A:\text{単射的}}{\cong} \mathrm{Hom}_A(\mathrm{R}\Gamma_c(X; A_U), A) \\ &\underset{\mathrm{Prop3.2.3}}{\cong} \mathrm{Hom}_A(H^n_c(U; A_U), A)[n] \end{aligned}$$

である. $\omega_X \cong \mathrm{or}_X[n]$ なので (i) が従う.

(ii) $x \in X$ とする. x の近傍 U で $\mathbf{R}^n$ と同相なものがある. この近傍 U に対して，[KS90, Proposition 3.3.4 (ii)] より

$$\mathrm{Hom}(\mathrm{or}_{X/\{x\}}, A_X) \cong \mathrm{or}_X$$

が，[KS90, Proposition 3.2.3 (ii)] より，

$$\mathrm{R}\Gamma_{\{x\}}(U; A_U) \xrightarrow{\sim} \mathrm{R}\Gamma_c(U; A_U)$$

が成りたつ. コホモロジーを取ると

$$H^n_{\{x\}}(U; A_U) \xrightarrow{\sim} H^n_c(U; A_U)$$

(iii) $X=\bigcup_i U_i$ を X の開被覆で，各 U_i が $U_i \underset{\text{diffeo}}{\cong} \mathbf{R}^n$ であり，座標変換が X の向きづけと整合的なものとする．各 U_i ごとの同型 $\phi_{U_i}\colon \mathrm{or}_X|_{U_i} \cong A_{U_i}$ を次の補題 1.2 により貼り合わせることができる．[KS90, Proposition 3.2.3] により，向き反転させると，ϕ_{U_i} は $-\phi_{U_i}$ になる． □

補題 1.2 ([KS90, Prop3.3.7])**.** E をユークリッド空間 $\mathbf{R}^n$ とし，同型 $\mathrm{or}_E \cong A_E$ を固定する．U と V を E の開集合とし，$f\colon U \to V$ を微分同相写像とする．U の各点における f のヤコビアンが正であるとする．このとき，次の図式は可換である．

$$\begin{tikzcd} \mathrm{or}_U \arrow[r, dash, "\sim"] & \mathrm{or}_{E/U} \arrow[r, dash, "\sim"] & A_U \\ f^{-1}(\mathrm{or}_V) \arrow[u, "f^\sharp_{\mathrm{or}}"] \arrow[r, dash, "\sim"] & f^{-1}(\mathrm{or}_{E/V}) \arrow[r, dash, "\sim"] & f^{-1}(A_V) \arrow[u, "f^\sharp_A"'] \end{tikzcd}$$

（ただし，射 $f^\sharp_{\mathrm{or}}$ と $f^\sharp_A$ は次のように定義する．a_U と a_V を U と V から $\{\mathrm{pt}\}$ への射影とする．このとき $f^\sharp_A$ は同型 $f^{-1}\circ a_V^{-1} \xrightarrow{\sim} a_U^{-1}$ で $f^\sharp_{\mathrm{or}}$ は同型 $f^{-1}\circ a_V^{-1}[-n] \xrightarrow{\sim} f^! \circ a_V^![-n] \xrightarrow{\sim} \circ a_U^{-1}$ である．$f^{-1}\cong f^!$ である．）

$f\colon Y \to X$ を C^0 多様体の間の射とする．f を閉うめ込み $j\colon Y \hookrightarrow Y\times X$ としずめ込み $p\colon Y\times X \to X$ の合成に分解して

$$f\colon Y \overset{j}{\hookrightarrow} Y\times X \xrightarrow{p} X \tag{3.3.5}$$

とかくことができる．$j(y)=(y,f(y))$ で $p(y,x)=x$ である．命題付録 A.1–付録 A.3 を適用すると，$F\in \mathsf{D}^+(A_X)$ に対し，

$$\begin{aligned} f^!F \cong (p\circ j)^!F &\underset{\text{命題付録 A.1}}{\cong} j^!p^!F \\ &\underset{\text{命題付録 A.2}}{\cong} j^{-1}\,\mathrm{R}\Gamma_{j(Y)}\left(p^!F\right) \\ &\underset{\text{命題付録 A.3 (ii)}}{\cong} j^{-1}\,\mathrm{R}\Gamma_{j(Y)}\,p^{-1}F\otimes \omega_{(Y\times X)/X} \\ &\cong j^{-1}\,\mathrm{R}\Gamma_{j(Y)}\,p^{-1}F\otimes \mathrm{or}_{(Y\times X)/X}[\dim Y\times X-\dim X] \\ &\cong j^{-1}\,\mathrm{R}\Gamma_{j(Y)}\,p^{-1}F\otimes \mathrm{or}_Y[\dim Y], \end{aligned}$$

すなわち

$$f^!F \cong j^{-1}\,\mathrm{R}\Gamma_{j(Y)}\,p^{-1}F\otimes \mathrm{or}_Y[\dim Y] \tag{3.3.6}$$

である．$F=A_X$ のとき，

$$\mathrm{or}_{Y/X} \cong j^{-1}\left(H^{\dim Y}_{j(Y)}(A_{Y\times X})\right)\otimes \mathrm{or}_Y \tag{3.3.7}$$

である．さらに $f=\mathrm{id}_X$ のときは，

$$\mathrm{or}_X \cong H^{\dim X}_X(A_{X\times X})|_X \tag{3.3.8}$$

である（X と $X \times X$ の対角集合を同一視した）.

記号 1.3 ([KS90, Notation 3.3.8]). 本書では X 章 §3 をのぞき，実多様体 X の次元を $\dim X$ で表す．$f\colon Y \to X$ を C^0 多様体の射とするとき，次のようにおく．

$$\dim Y/X := \dim Y - \dim X. \tag{3.3.9}$$

Y が部分多様体のとき，

$$\operatorname{codim}_X Y := -\dim Y/X$$

のようにもかく．混同する恐れがないときは $\operatorname{codim}_X Y$ を $\operatorname{codim} Y$ と略記する．次が成り立つ．

$$\omega_{Y/X} \cong \mathrm{or}_{Y/X}[\dim Y/X]. \tag{3.3.10}$$

このとき，次のようにおくと自然．

$$\begin{aligned}\omega_{Y/X}^{\otimes -1} &:= \mathrm{R}\mathscr{H}om(\omega_{Y/X}, A_Y),\\ &\cong \mathrm{or}_{Y/X}[-\dim Y/X].\end{aligned} \tag{3.3.11}$$

命題 1.4 ([KS90, Proposition 3.3.9]). $f\colon Y \to X$ を局所コンパクト空間の間の連続写像とする．次の条件が成りたつとする．

(i) f は位相的しずめ込みである．

(ii) $\mathrm{R}f_! f^! \mathbf{Z}_X \to \mathbf{Z}_X$ は同型である．

このとき，$F \in \mathsf{D}^+(\mathbf{Z}_X)$ に対し，射 $F \to \mathrm{R}f_* f^{-1}$ は同型である．

証明. l を f のファイバー次元とすると，

$$f^! F \underset{\text{付録 A.3(ii)}}{\cong} f^{-1}F \otimes f^! \mathbf{Z}_X$$

であり，$f^! \mathbf{Z}_X$ は $\mathbf{Z}_Y[l]$ と局所的に同型である．したがって，

$$\begin{aligned} f^{-1}F &\cong \mathrm{R}\mathscr{H}om(f^! \mathbf{Z}_X, f^! F),\\ \mathrm{R}f_* f^{-1}F &\cong \mathrm{R}f_* \,\mathrm{R}\mathscr{H}om(f^! \mathbf{Z}_X, f^! F)\\ &\underset{\text{V.D.}}{\cong} \mathrm{R}\mathscr{H}om(\mathrm{R}f_! f^! \mathbf{Z}_X, F)\\ &\xleftarrow{\sim} F.\end{aligned}$$

□

注意 1.5 ([KS90, Remark 3.3.10]). $f\colon Y \to X$ を局所コンパクト空間の間の連続写像とし，f はファイバー次元 l の位相的しずめ込みであるとする．このとき，命題 1.4 の条件 (ii) が成りたつ

ためには任意の $x \in X$ に対し，次の同型が成り立つことが必要十分である．

$$\mathrm{R}\Gamma_c(f^{-1}(x);\omega_{f^{-1}(x)}) \xrightarrow{\sim} \mathbf{Z}. \tag{3.3.12}$$

この同型は次の同型と同値である．

$$\mathbf{Z} \xrightarrow{\sim} \mathrm{R}\Gamma(f^{-1}(x);\mathbf{Z}_{f^{-1}(x)}). \tag{3.3.13}$$

実際，$M := \mathrm{R}\Gamma_c(f^{-1}(x);\omega_{f^{-1}(x)})$ とおき，$M^* \mathrm{RHom}(M,\mathbf{Z})$ とおく．このとき，$M^* \cong \mathrm{R}\Gamma(f^{-1}(x);\mathbf{Z}_{f^{-1}(x)})$ であり，$\mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathrm{Mod}(\mathbf{Z}))$ における同型 $M \xrightarrow{\sim} \mathbf{Z}$ は同型 $\mathbf{Z} \xrightarrow{\sim} M^*$ と同じである．

いま，X を n 次元 C^0 多様体とし，a_X で写像 $X \to \{\mathrm{pt}\}$ を表す．射 $\mathrm{Ra}_{X!}\mathrm{a}_X^! A_{\{\mathrm{pt}\}} \to A_{\{\mathrm{pt}\}}$ から射

$$\mathrm{Ra}_{X!}\omega_X \to A \tag{3.3.14}$$

が定まる．0 次コホモロジーをとることで，「積分射」

$$\int_X : H^n_c(X;\mathrm{or}_X) \to A \tag{3.3.15}$$

が定まる．他方で，$A = \mathbf{C}$ かつ X が C^∞ 多様体であるとき，よく知られた射 $H^n_c(X;\mathrm{or}_X) \to \mathbf{C}$ が次のようにして得られる．or_X はド・ラーム複体

$$0 \to C_X^{\infty,(0)} \otimes \mathrm{or}_X \underset{d}{\to} \cdots \to C_X^{\infty,(n)} \otimes \mathrm{or}_X \to 0$$

と擬同形である．$C_X^{\infty,(j)} \otimes \mathrm{or}_X$ は c 柔軟なので，

$$H^n_c(X;\mathrm{or}_X) \cong \Gamma_c(X;C^{\infty,(n)} \otimes \mathrm{or}_X)/d\Gamma_c(X;C^{\infty,(n-1)} \otimes \mathrm{or}_X)$$

である．ϕ をコンパクト台をもつ密度，すなわち $\Gamma_c(X;C^{\infty,(n)} \otimes \mathrm{or}_X)$ の元とすると，$\int_X \phi$ が意味をもつ．ストークスの定理から，$\psi \in \Gamma_c(X;C^{\infty,(n-1)} \otimes \mathrm{or}_X)$ で $\phi = d\psi$ となるものが存在するとき $\int_X \phi = 0$ となる．したがって，$\int_X$ は射

$$\int_X : \Gamma_c(X;C^{\infty,(n)} \otimes \mathrm{or}_X)/d\Gamma_c(X;C^{\infty,(n-1)} \otimes \mathrm{or}_X) \to \mathbf{C} \tag{3.3.16}$$

を定める．この射 (3.3.16) は (3.3.15) と符号を除いて一致する．

X が連結のとき，$H^n_c(X;\mathrm{or}_X) \cong \mathrm{Hom}(H^0(X;\mathbf{C}_X),\mathbf{C}) \cong \mathbf{C}$ である．したがって，(3.3.15) と (3.3.16) は 0 以外の定数倍を除いて等しい．

命題 1.6 ([KS90, Proposition 3.3.11]). X を n 次元 C^0 多様体とし，A を環とする．このとき，$\mathrm{Mod}(A_X)$ のホモロジー次元は $3n + \mathrm{gld}(A) + 1$ でおさえられる．

系 1.7 ([KS90, Corollary 3.3.12]). X を C^0 多様体とする．このとき，$\mathrm{R}\mathscr{H}om(\cdot,\cdot)$ は $\mathsf{D}^{\mathrm{b}}(A_X)^{\mathrm{op}} \times \mathsf{D}^{\mathrm{b}}(A_X)$ から $\mathsf{D}^{\mathrm{b}}(A_X)$ への関手を定める．

付録 A　あとで使う定理（復習）

命題 付録 A.1 ([KS90, Proposition 3.1.8])**.**　$f\colon Y \to X$，$g\colon Z \to Y$ を局所コンパクト空間の間の連続写像とする．$f_!$ と $g_!$ のコホモロジー次元が有限であるとする．このとき，$(f \circ g)_!$ のコホモロジー次元は有限で

$$(f \circ g)^! \cong g^! \circ f^!$$

である．

命題 付録 A.2 ([KS90, Proposition 3.1.12])**.**　$f\colon Y \to X$ を Y から X の局所閉集合 Z の上への同相写像とする．このとき，

$$f^! \cong f^{-1} \circ \mathrm{R}\Gamma_{f(Y)}(\cdot)$$

である．

命題 付録 A.3 ([KS90, Proposition 3.3.2])**.**　$f\colon Y \to X$ をファイバー次元 l の位相的沈めこみとする．

(i) $k \neq -l$ に対し $H^k(f^! A_X) = 0$ であり，局所的に $H^{-l}(f^! A_X) \cong A_Y$ である．

(ii) $f^{-1}(\cdot) \otimes \omega_{Y/X} \to f^!(\cdot)$ は同型である．

付録 B　層の例（[KS90, §2.9] から）

B.1　向きづけ，微分形式，密度

C^0 多様体 M 上の層として，向きづけ層 or_M を考えることも必要になってくる．or_M は $\mathbf{Z}_M$ と局所的に同型な層であり，M の向きが存在する場合，その向きを選ぶことと同型 $\mathrm{or}_M \cong \mathbf{Z}_M$ を選ぶことが同義となるようなものである．or_M については次章で詳しくしらべる．

いま，$\alpha = \infty$ または $\alpha = \omega$ とし，p を整数とする．C_M^α を係数にもつ p 次微分形式の層を $C_M^{\alpha,(p)}$ とおく．また外微分を $d\colon C_M^{\alpha,(p)} \to C_M^{\alpha,(p+1)}$ で表す．

$(x_1, \ldots, x_n)$ が M 上の局所座標系であるとする．このとき，p 形式 f は次の形にただ一通りに表されるのであった．

$$f = \sum_{|I|=p} f_I dx_I,$$

ここに，$I = \{i_1, \ldots, i_p\} \subset \{1, \ldots, n\}$, $(i_1 < i_2 < \cdots < i_p)$, $dx_I = dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}$ で，f_I は

C_M^α の切断である．このとき，

$$df = \sum_{i=1}^{n} \sum_{|I|=p} \frac{\partial f_I}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_I$$

となるのであった．もうひとつ層を導入する．

$$\mathscr{V}_M^\alpha := C_M^{\alpha,(n)} \otimes \mathrm{or}_M$$

（$\alpha = \infty$ または $\alpha = \omega$）とおき，M 上の C^α 密度の層とよぶ．

コンパクト台をもつ C^∞ 密度は積分することができる．$\int_M \cdot$ で積分写像

(付録 B.1)
$$\int_M \cdot : \Gamma_c(M; \mathscr{V}_M^\infty) \to \mathbf{C}$$

を表す．$C_M^{\alpha,(p)}$ と $\mathscr{V}_M^\alpha$ は C_M^α 加群の層である．

「1 の分割」の存在から，層 C_M^α，$C_M^{\alpha,(p)}$，$\mathscr{V}_M^\alpha$ は $\alpha \neq \omega$ に対しては c 柔軟であることが従う．層 C_M^ω，$C^{\omega,(p)}$，$\mathscr{V}_M^\omega$ は関手 $\Gamma(M; \cdot)$ に対し非輪状，すなわち $j > 0$ に対し $H^j(M; C_M^\omega) = 0$ である．Grauert[G58] を参照．

B.2　分布と超関数

C^∞ 多様体 M 上にはシュワルツ分布の層 $\mathscr{D}b_M$ が自然に定まる（Schwartz[S66], de Rham[R55] を参照）．$\mathscr{D}b_M$ は c 柔軟層であり，$\Gamma_c(M; \mathscr{D}b_M)$ は $\Gamma(M; \mathscr{V}_M^\infty)$ の双対位相線形空間である．ただし，$\Gamma(M; \mathscr{V}_M^\infty)$ にはフレシェ空間としての自然な位相を入れている．

C^ω 多様体 M 上にも同様に佐藤超関数の層 $\mathscr{B}_M$ が自然に定まる（佐藤 [Sa59] を参照）．$\mathscr{B}_M$ は脆弱層であり，$\Gamma_c(M; \mathscr{B}_M)$ は $\Gamma(M; \mathscr{V}_M^\omega)$ の双対位相線形空間である．ただし，$\Gamma(M; \mathscr{V}_M^\omega)$ には DFS 空間としての自然な位相を入れている（Martineau と Schapira に詳細な解説がある）．

積分写像 (付録 B.1) はペアリング

(付録 B.2)
$$\begin{array}{ccc} \Gamma(M; C_M^\infty) \times \Gamma_c(M; \mathscr{V}_M^\infty) & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ \cup & & \cup \\ (f, g) & \longmapsto & \displaystyle\int_M fg \end{array}$$

を定める．このペアリングから C_M^∞ から $\mathscr{D}b_M$ への層の射がひきおこされ，この射が単射であることも示せる．さらに，実解析多様体 M の上では，単射 $\Gamma(M; \mathscr{V}_M^\omega) \to \Gamma(M; \mathscr{V}_M^\infty)$ から射 $\mathscr{D}b_M \to \mathscr{B}_M$ が引き起こされ，こちらも単射であることがわかる．

分布係数の p 形式の層 $\mathscr{D}b_M^{(p)} := C_M^{\infty,(p)} \otimes_{C_M^\infty} \mathscr{D}b_M$ や超関数係数の p 形式の層 $\mathscr{B}_M^{(p)} := C_M^{\omega,(p)} \otimes_{C_M^\omega} \mathscr{B}_M$ も定義することができる．$\mathscr{D}b_M^{(p)}$ は c 柔軟層，$\mathscr{B}_M^{(p)}$ は脆弱層である．

参考文献

[Le13] John M. Lee, *Introduction to Smooth Manifolds*, Second Edition, Graduate Texts in Mathematics, **218**, Springer, 2013.

[Sp65] Michael Spivak, *Calculus on Manifolds*, Benjamin, 1965.

[B+84] Borel, *Intersection Cohomology*, Progress in Mathematics, 50, Birkhäuser, 1984.

[G58] Grauert, *On Levi's problem and the embedding of real analytic manifolds*, Ann. Math. 68, 460–472 (1958).

[GP74] Victor Guillemin, Alan Pollack, *Differential Topology*, Prentice-Hall, 1974.

[KS90] Masaki Kashiwara, Pierre Schapira, *Sheaves on Manifolds*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 292, Springer, 1990.

[KS06] Masaki Kashiwara, Pierre Schapira, *Categories and Sheaves*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 332, Springer, 2006.

[R55] de Rham, *Vari'et'es différentiables*, Hermann, Paris, 1955.

[Sa59] Mikio Sato, *Theory of Hyperfunctions*, 1959–60.

[S66] Schwartz, *Théorie de distributions*, Hermann, Paris, 1966.

[Sh16] 志甫淳, 層とホモロジー代数, 共立出版, 2016.

[Ike21] 池祐一, 超局所層理論概説, 2021.

[Tak17] 竹内潔, $\mathcal{D}$ 加群, 共立出版, 2017.