非特性変形

大柴寿浩

記号

次の記号は断りなく使う．

- 添字：なんらかの族 $(a_i)_{i\in I}$ を $(a_i)_i$ とか (a_i) と略記することがある．
- 近傍：位相空間 X の点 x や部分集合 Z に対し，その開近傍系をそれぞれ I_x や I_Z で表す．これらは，包含関係の逆で有向順序集合をなす．

1　非特性変形補題

命題 1.1 ([KS90, Prop. 2.5.1])**.**　X を位相空間とし，Z を部分空間とする．F を X 上の層とし，自然な射

$$\psi\colon \varinjlim_{U\in I_Z} \Gamma(U;F) \to \Gamma(Z;F)$$

を考える．

(i) ψ は単射である．

(ii) X がハウスドルフで Z がコンパクトならば，ψ は同型である．

命題 1.2 ([KS90, Prop. 1.12.4])**.**

$$\phi_k\colon H^k(\varinjlim X) \to \varprojlim H^k(X_n)$$

について，$H^{i-1}(X_n)$ が ML 条件を満たすならば，ϕ_k は一対一対応である．

命題 1.3 ([KS90, Prop. 1.12.6])**.**　$(X_s, \rho_{s,t})$ を実数を添字とする射影系とする．

$$\lambda_s\colon X_s \to \varprojlim_{r<s} X_r, \quad \mu_s\colon \varinjlim_{t>s} X_t \to X_s$$

がどちらも単射（全射）ならば，すべての実数 $s_0 \leqq s_1$ に対し，$\rho_{s_0,s_1}\colon X_{s_1} \to X_{s_0}$ は単射（全

射）となる．

命題 1.4 ([KS90, Prop. 2.7.2, 非特性変形補題])**.** X をハウスドルフ空間とし，$F \in \mathrm{D}^+(\mathbf{Z}_X)$ とする．また，$(U_t)_{t \in \mathbf{R}}$ を X の開集合の族で次の条件 (i)–(iii) をみたすものとする．

(i) 任意の実数 t に対し，$\bigcup_{s<t} U_s = U_t$ が成り立つ．
(ii) 任意の実数 $s \leqq t$ に対し，$\overline{U_t - U_s} \cap \operatorname{supp} F$ はコンパクト集合である．
(iii) 実数 s に対して $Z_s = \bigcap_{t>s} \overline{U_t - U_s}$ とおくとき，任意の実数 $s \leqq t$ と任意の点 $x \in Z_s - U_t$ に対して $(\mathrm{R}\Gamma_{X-U_t}(F))_x = 0$ が成り立つ．

このとき，任意の実数 t に対して，次の同型が成り立つ．

$$\mathrm{R}\Gamma\left(\bigcup_{s \in \mathbf{R}} U_s; F\right) \xrightarrow{\sim} \mathrm{R}\Gamma(U_t; F)$$

証明. 次の条件を考える．

$$\begin{aligned} (a)_k^s: &\quad \varinjlim_{t>s} H^k(U_t; F) \xrightarrow{\sim} H^k(U_s; F) \\ (b)_k^t: &\quad \varprojlim_{s<t} H^k(U_s; F) \xleftarrow{\sim} H^k(U_t; F) \end{aligned}$$

任意の実数 s と任意の整数 k に対して $(a)_k^s$ が，任意の実数 t と任意の整数 $k < k_0$ に対して $(b)_k^t$ が成り立つとする．このとき，k_0 に対し，$(b)_{k_0}^t$ が成り立つことを示す．命題 1.3 より，（$(a)_k^s$ の方が μ_s，$(b)_k^t$ の方が λ_t として）各次数 $k < k_0$ と各実数 $s \leqq t$ に対し，

$$H^k(U_t; F) \xrightarrow{\sim} H^k(U_s; F) \tag{1.1}$$

が成り立つ．このとき，t を固定して，射影系 $\left(H^{k_0-1}\left(U_{t-\frac{1}{n}}; F\right)\right)_{n \in \mathbf{N}}$ を考えると，これは ML 条件をみたす．

> $\because$) 任意の $n \in \mathbf{N}$ に対し，
>
> $$\rho_{n,p}\left(H^{k_0-1}\left(U_{t-\frac{1}{p}}; F\right) \to H^{k_0-1}\left(U_{t-\frac{1}{n}}; F\right)\right)$$
>
> はすべて同形なので，当然安定．

よって，命題 1.2 より $(b)_{k_0}^t$ が従う．k に関する帰納法により，どの $t \in \mathbf{R}$ と $k \in \mathbf{Z}$ に対しても $(b)_k^t$ が成り立つ．命題 2.7.1 を $\left(H^k\left(U_n; F\right)\right)_{n \in \mathbf{N}}$ に用いると，k に関する帰納法から，定理の結論

$$\mathrm{R}\Gamma\left(\bigcup_{s \in \mathbf{R}} U_s; F\right) \xrightarrow{\sim} \mathrm{R}\Gamma(U_t; F)$$

が従う．

$(a)^s_k$ **の証明**　X を $\operatorname{supp} F$ におきかえて，どの実数 $s \leqq t$ に対しても $\overline{U_t - U_s}$ はコンパクトとしてよい．次の d.t. を考える[*1]．

$$\mathrm{R}\Gamma_{(X-U_t)}(F)|_{Z_s} \to \mathrm{R}\Gamma_{(X-U_s)}(F)|_{Z_s} \to \mathrm{R}\Gamma_{(U_t-U_s)}(F)|_{Z_s} \xrightarrow{+1}.$$

仮定 (iii) より，左と真ん中の 2 つは 0 なので，d.t. の性質から，$\mathrm{R}\Gamma_{(U_t-U_s)}(F)|_{Z_s} = 0$ となる．したがって，任意の $k \in \mathbf{Z}$ と $t \geqq s$ に対し，

$$\begin{aligned} 0 &= H^k(Z_s; \mathrm{R}\Gamma_{(U_t-U_s)}(F)) \\ &= \varinjlim_{U \supset Z_s} H^k(U \cap U_t; \mathrm{R}\Gamma_{X-U_s}(F)) \end{aligned}$$

となる．

> $\mathrm{R}\Gamma_{U_t-U_s}(F)$ は X 上の層で，それを Z_s に制限した $\mathrm{R}\Gamma_{U_t-U_s}(F)|_{Z_s}$ は Z_s 上の層である．Z_s での大域切断 $\mathrm{R}\Gamma(Z_s; \mathrm{R}\Gamma_{U_t-U_s}(F)|_{Z_s})$ のコホモロジーをとっているので，[KS90, Notations 2.6.8] の 2 番目の記号を用いることになる．
> Z_s はハウスドルフ空間 X のコンパクト集合 $\overline{U_t - U_s}$ の共通部分として表されているので，コンパクトである（X の置き換えがここに効いている）．したがって，[KS90, Remark 2.6.9 (ii)] の場合に当てはまり，そこでの記号を用いて書くと
>
> $$H^j(Z; F) \simeq \varinjlim_{U \in I_Z} H^j(U; F)$$
>
> が成り立つ．これが上の式の 2 つ目の変形．詳しく書くと，
>
> $$\begin{aligned} H^k(Z_s; \mathrm{R}\Gamma_{U_t-U_s}(F)) &= \varinjlim_{U \in I_Z} H^k(U; \mathrm{R}\Gamma_{U_t-U_s}(F)) \\ &= \varinjlim_{U \in I_Z} H^k(U \cap U_t; \mathrm{R}\Gamma_{X-U_s}(F)) \end{aligned}$$
>
> ここで，2 つ目の変形は次のように考える．$U_t - U_s$ に台を持つ層の U 上の切断は $U \cap U_t$ 上で切断を考えても同じ．台の方も，U が Z_s に十分近ければ $X - U_s$ で考えても同じ．

どの開集合 U に対しても，実数 $s < t' \leqq t$ で $U \cap U_t \supset U_{t'} - U_s$ となるものが存在する．したがって，

$$\varinjlim_{t > s} H^k(U_t; \mathrm{R}\Gamma_{X-U_s}(F)) = 0$$

が成り立つ[*2]．条件 (i) より，(U_t) は増大族なので，これから，$(a)^s_k$ が従う．　□

[*1] [KS90, (2.6.32)] の d.t.

$$\mathrm{R}\Gamma_{Z'}(F) \to \mathrm{R}\Gamma_Z(F) \to \mathrm{R}\Gamma_{Z-Z'}(F) \xrightarrow[+1]{}$$

を用いる．但し，Z は X の局所閉集合，Z' は Z の閉集合である．

[*2] $X - U_s$ に台をもつ層 F の $U \cap U_t$ での切断を考えたとき，$U \cap U_t \supset U_{t'} - U_s$ から，$U_{t'} - U_s$ での切断を考えればよいことになる．台が U_s を含まないので，最初から $U_{t'}$ を走らせてよい．

参考文献

[KS90] Masaki Kashiwara, Pierre Schapira, *Sheaves on Manifolds*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 292, Springer, 1990.

[KS06] Masaki Kashiwara, Pierre Schapira, *Categories and Sheaves*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 332, Springer, 2006.

[Sh16] 志甫淳, 層とホモロジー代数, 共立出版, 2016.