超函数の構造について

柏原正樹 [*]

“この世・現実世界”（実数の世界）と “あの世・ゆうれいの世界”（複素数領域）の境目に立って眺めることによって，タチの悪い無限大をとらえ......

—佐藤幹夫—

0　序

超函数 (hyperfunction) の概念構成の端緒は，実の上の函数を正則函数の境界値としてとらえることにあった。n 変数超函数 $f(x_1,\ldots,x_n)$ は，$D_{\pm_1,\ldots,\pm_n}=\{\operatorname{Im} z_1 \gtrless 0,\ldots,\operatorname{Im} z_n \gtrless 0\}$ という領域で定義された正則函数 $\varphi_{\pm_1,\ldots,\pm_n}(z_1,\ldots,z_n)$ の境界値の和としてあらわされる。即ち，

$$f(x_1,\ldots,x_n)=\sum\varphi_{\pm_1,\ldots,\pm_n}(x_1\pm i0,\ldots,x_n\pm i0)$$

ここに，超函数 $\varphi_{\pm_1,\ldots,\pm_n}(x_1\pm i0,\ldots,x_n\pm i0)$ は，$\lim\limits_{\varepsilon_j\downarrow 0}\varphi_{\pm_1,\ldots,\pm_n}(x_1\pm i\varepsilon_1,\ldots,x_n\pm i\varepsilon_n)$ ともいうべき “ideal” function である。これは，$f(x_1,\ldots,x_n)$ という超函数が，$\varphi(x_1\pm i0,\ldots,x_n\pm i0)$ という型の超函数の和にあらわされることを示している。この $\varphi(x_1\pm i0,\ldots,x_n\pm i0)$ は，通常の超函数に比して，より単純な構造を持っているということができよう。この考えを極限にまで敷衍して得られたのが “ $\mathscr{C}$ の理論” といわれるもので，これを用いて超函数の特異性を極めて明瞭に記述することができる。20 世紀後半に入って、Hörmander 等々によって展開された偏微分方程式論は，種々様々の評価を駆使した，いわば，“不等式による”（或は “量的”）理論といえるだろう。それに対して，$\mathscr{C}$ の理論は，“幾何学的”（或は “質的”）偏微分方程式を開拓していく強力な道具となるであろう。

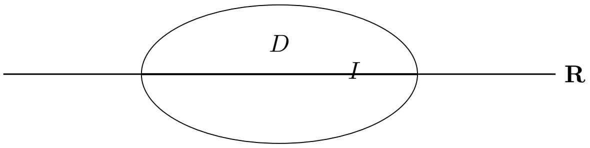
“ $\mathscr{C}$ の理論” は，数年前から盛んになりつつあった超函数研究の機運に力を得て，“超函数論” の創始者佐藤幹夫先生が 1969 年に建設された。この小論は，1970 年の 4 月 1 日から 4 日にかけて江之島の片瀬において佐藤先生が行われた連続講演を骨子にしてまとめたものである。佐藤先生の平易な中にも深い洞察に満ちた語口を復原できませんでしたが，できるだけ完全な説明と証明を心懸けました。尚，$\mathscr{C}$ の理論に不可欠な cohomology 理論は，読者の便宜をはかって一番最後にまわしました。

[*] 東大数学教室

1　1変数超函数の特異性の分解

多変数の場合の理解を容易にするために，まず一変数の場合をとりあつかう。$\mathscr{O}$ によって正則函数のつくる D 上の sheaf を，$\mathscr{A} = \mathcal{O}|_{\mathbf{R}}$ によって実解析的函数のつくる $\mathbf{R}$ 上の sheaf をあらわす。

$\mathbf{R}$ の区間 I, I の $\mathbf{C}$ における近傍 D をとる。



(1.1)

$$\mathscr{O}(D) \to \mathscr{O}(D-I) \to \mathscr{B}(I) \to 0 \tag{1.2}$$

という完全列で超函数の層 $\mathscr{B}$ が定義される。$\varphi \in \mathscr{O}(D-I)$ のあらわす I 上の超函数を $[\varphi]$ とかく.

$$\varepsilon_{\pm}(z) = \begin{cases} 1 \ (\operatorname{Im} z \gtreqless 0) \\ 0 \ (\operatorname{Im} z \lesseqgtr 0) \end{cases} \tag{1.3}$$

によって $\mathbf{C}-\mathbf{R}$ 上の函数 $\varepsilon_{\pm}(z)$ を定義すれば, $g = [\varphi] = [\varepsilon_{+}\varphi] - [-\varepsilon_{-}\varphi]$ である。$\varphi\,(x \pm i0) = [\pm\varepsilon_{\pm}\varphi]$ によって超函数 $\varphi\,(x \pm i0)$ を定義する。これらは，正則関数の上半平面（或は下半平面）からの境界値という意味をもつ。そして

$$g = [\varphi] = \varphi(x+i0) - \varphi(x-i0) \tag{1.4}$$

は任意の超函数を上半平面からの境界値とか半平面からの境界値との差にかきあらわす公式である。$\mathscr{A}^{\pm}$ を,

$$I \mapsto \varinjlim \mathscr{O}\left(D^{\pm}\right)$$

（但し，D は I の近傍を動き，$D^{\pm} = D \cap \mathbf{C}^{\pm}$。
$D^{\pm} = \{z \in \mathbf{C}; \operatorname{Im} z \gtrless 0\}$）

で定義された層とする。

$\mathscr{A}^{\pm} \to \mathscr{B}$ を，$\varphi \in \mathscr{A}^{\pm}(I)$ に $\varphi(x \pm i0) \in \mathscr{B}(I)$ を対応させる homomorphism とする。（φ を $D^{\mp}$ では 0 に延長することにより，$\mathscr{O}(D-\mathbf{R})$ の元とみなす。）簡単な check によって，これは injective になることがわかる。従って，$\mathscr{A}^{\pm}$ は，正則函数の上半平面（下半平面）からの境界値のつくる層ということができよう。$\varphi \in \mathscr{A}^{\pm}$ に対して，$\varphi(x \pm i0) \in \mathscr{A}^{\pm} \hookrightarrow \mathscr{B}$ を対応させることにより，$\mathscr{A}$ の $\mathscr{B}$ の中への 2 つの埋め込み $\mathscr{A} \to \mathscr{A}^{+} \to \mathscr{B}$ 及び $\mathscr{A} \to \mathscr{A}^{-} \to \mathscr{B}$ が得られる。これは同一になる。その homomorphism によって実解析函数を超函数と見なす。一方，式 (1.4) は

$$\alpha\colon \mathscr{A}^{+} \oplus \mathscr{A}^{-} \to \mathscr{B} \quad \left(\mathscr{A}^{+} \ni \varphi, \mathscr{A}^{-} \ni \psi \mapsto \varphi(x+i0) + \psi(x-i0) \in \mathscr{B}(I)\right)$$

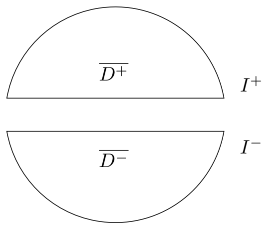
が surjective なことをあらわす。更に $\mathscr{A}^+$ を $\mathscr{B}$ の subsheaf と見做した時，$\mathscr{A}^+ \cap \mathscr{A}^- = \mathscr{A}$。即ち次の exact sequence が成立つ。

$$0 \to \mathscr{A} \to \mathscr{A}^+ \oplus \mathscr{A}^- \xrightarrow{\alpha} \mathscr{B} \to 0 \tag{1.5}$$

但し，$\mathscr{A} \to \mathscr{A}^+ \oplus \mathscr{A}^-$ は，$\varphi \mapsto (\varphi(x+i0), -\varphi(x-i0),)$ という homomorphism である。この完全列は，超関数を，上半平面からの境界値と下半平面からの境界値との差で書きあらわす方法が $\mathscr{A}$ を modulo として一意的であることをあらわしている。

さて，(1.5) によって，α からただちにみちびかれる sheaf homomorphism $(\mathscr{A}^+/\mathscr{A}) \oplus (\mathscr{A}^-/\mathscr{A}) \to \mathscr{B}/\mathscr{A}$ は isomorphism であることがわかる。これで，$\mathscr{B}/\mathscr{A}$ といういわば超函数の特異性を表現する sheaf を 2 つの sheaf の直和により分解することができた。従って超関数の特異性を，直和因子の各々で眺めてやることによって，よりくわしく分析することができる。

多変数への拡張を考慮にいれて，上の事実を次の様にいいかえよう。I^+, I^- を I の 2 つの copy とする。$SI = I^+ \sqcup I^-$, $\pi\colon SI \to I$ をその projection とする。$I \ni x$ に対して，対応する $I^\pm$ の点を $x \pm i0$ とかく。$x \pm i0$ は，実の点 x に上半平面から近づいたか，下半平面から近づいたかをあらわす。



(1.6)

I^+ に $\mathscr{A}^+$, I^- に $\mathscr{A}^-$ の sheaf をのせることによって SI 上に sheaf $\widetilde{\mathscr{A}}$ を定義する。故に，$\widetilde{\mathscr{A}}_{x+i0} = \mathscr{A}^+_x$, $\widetilde{\mathscr{A}}_{x-i0} = \mathscr{A}^-_x$。超函数の特異部分をあらわす sheaf $\mathscr{B}/\mathscr{A}$ を，$\widetilde{\mathscr{A}}$ を使って，

$$\begin{aligned}
(\mathscr{B}/\mathscr{A})_x &= \left(\mathscr{A}^+_x/\mathscr{A}_x\right) \oplus \left(\mathscr{A}^-_x/\mathscr{A}_x\right) \\
&= \left(\widetilde{\mathscr{A}}_{x+i0}\Big/\mathscr{A}_x\right) \oplus \left(\widetilde{\mathscr{A}}_{x-i0}\Big/\mathscr{A}_x\right) \\
&= \left(\widetilde{\mathscr{A}}\Big/\pi^{-1}\mathscr{A}\right)_{x+i0} \oplus \left(\widetilde{\mathscr{A}}\Big/\pi^{-1}\mathscr{A}\right)_{x-i0} \\
&= \pi_*\left(\widetilde{\mathscr{A}}\Big/\pi^{-1}\mathscr{A}\right)
\end{aligned}$$

と書きあらわすことができる。$\mathscr{C} = \widetilde{\mathscr{A}}/\pi^{-1}\mathscr{A}$ と新たに層 $\mathscr{C}$ を定義すれば

$$\mathscr{B}/\mathscr{A} = \pi_*\mathscr{C} \tag{1.6}$$

これから，

$$0 \to \mathscr{A} \to \mathscr{B} \to \pi_*\mathscr{C} \to 0$$
$$0 \to \pi^{-1}\mathscr{A} \to \widetilde{\mathscr{A}} \to \mathscr{C} \to 0$$

の 2 つの exact sequence が得られる。これは同一になる。従って，$\mathscr{C}$ は超函数の特異性を更にくわしく分解する層というにふさわしい。以下の章では，これを多変数の場合に一般化する。

2 Tangential sphere bundle と real monoidal transform

M を n 次元実解析的多様体（以下我々がとり扱う category は実解析的なものばかりであるから，多様体といえば全て実解析的多様体をあらわす），X を M の複素近傍とする．

$\mathscr{O} = \mathscr{O}_X$ によって，X 上の holomorphic な函数のつくる X 上の層，$\mathscr{A} = \mathscr{A}_M = \mathscr{O}_X|_M$ によって，実解析函数のつくる M 上の層をあらわす。

M の tangent vector bundle TM には，乗法群 $\mathbf{R}^+ = \{t \in \mathbf{R}; t > 0\}$ が作用している。TM から，TM の zero section M をひき去った $TM - M$ を $\mathbf{R}^+$ でわって得られた空間を SM と書く。SM は $(n-1)$ 次元球面 S^{n-1} を fibre とする M 上の sphere bundle である。SM を M の (tangential) sphere bundle とよぶ。M の cotangent bundle T^*M から上と同じようにしてつくられた sphere bundle $S^*M = (T^*M - M)/\mathbf{R}^+$ を M の cotangential sphere bundle（或は，co-sphere bundle）とよぶ。

解析的には，S^*M の方が SM よりも大きな意味をもっている。それは，有限階偏微分作用素 $P(x, D)$ に対して $P_m(x, \eta)$ をその主要部とすれば，$P_m(x, D)$ が S^*M 上の（斉次）函数となることからも肯ける。しかし，幾何学的には，むしろ SM の方が意味をつけやすい。それは以下の記述で明らかになっていくだろう。

さて，X の複素構造によって X の tangent bundle TX は，$TX|_M = TM \oplus \sqrt{-1}TM$ と canonical に分解される。従って，M の X における normal bundle は iTM と同一視でき，従って，TM と同型である。故に M の X における normal sphere bundle（normal bundle から zero section を除いた空間を $\mathbf{R}^+$ でわって得られた M 上の sphere bundle）は SM に同型である。$\tau\colon \widetilde{X} \to X$ を，X の M を中心とする実 monoidal 変換としよう。（付録 F を参照。）$\widetilde{X} = (X - M) SM$ である。$x \in M, \xi \in T_xM - \{0\}$ に対して，$x + i\xi_0$ により対応する SM の点をあらわすことにする。これは，$x + i\xi_0 \in SM \subset \widetilde{X}$ が，$i\xi$ という虚の方向から x に近づいた事を示す適切な表現である[*1]。

$\omega = \omega_M$ によって，M 上の orientation bundle をあらわす[*2]。ω は局所的には，$\mathbf{Z}$ を fibre とする constant sheaf $\mathbf{Z}_M$ に同型であり，連結開集合 $U \subset M$ に対して

$$\Gamma(U;\omega) \cong \begin{cases} \mathbf{Z} & \text{もしも } U \text{ が orientable} \\ 0 & \text{もしも } U \text{ が non orientable} \end{cases}$$

が成立つ。更に，上の $\Gamma(U;\omega) \cong \mathbf{Z}$ の同型は，U の “向き” のとり方によって正負の違いがでてくる。明らかに，$\omega \otimes_{\mathbf{Z}_M} \omega = \mathbf{Z}_M$ が成立つ。

[*1] これからわかるように，我々が用いる tangential sphere bundle SM は，SM というより iSM というべきものである。
[*2] 以下 ω を使うのが煩雑と思う方は，最初から M は向きづけられていると仮定して，ω を無視されてよい。

付録 F　実 monoidal 変換について

n 次元複素多様体 X とその m 次元複素部分多様体 Y が与えられた時，X の Y を中心とする monoidal 変換 X' をつくることができる。大雑把に言えば，X から Y を抜き取って，代わりに Y 上の $(n-m-1)$ 次元射影空間を fibre とする fibre bundle をさし込んでつくるのである。それと同じように，m 次元実解析的多様体 M とその n 次元部分多様体 N が与えられた時，M から N を抜きとって，かわりに $(m-n-1)$ 次元球面を fibre とする N 上の fibre bundle S_MN をさしこんで実 monoidal 変換 $\widetilde{M}$ をつくることができる。

TM, TN を M, N の tangent bundle としよう。$TN \to TM \underset{M}{\times} N$ の cokernel T_MN は N の normal bundle と呼ばれる。

$S_MN = (T_MN - M)/\mathbf{R}^+$ は N 上の $(m-n-1)$ 次元球を fibre とする fibre bundle である。S_MN を N の normal sphere bundle と呼ぶ。

M の座標近傍 U_j と座標系 $\left(x_j^1, \ldots, x_j^m\right)$ を

$$N \cap U_j = \left\{x_j^{n+1} = \cdots = x_j^m = 0\right\}$$

となるようにとる。そういう U_j で M を cover する。

$$x_j^\nu = f_{jk}^\nu(x_k) \quad \nu = 1, \ldots, n \tag{付録 F.1}$$

$$x_j^{n+\nu} = \sum_{\mu=1}^{m-n} x_k^{n+\mu} g_{jk}^{\nu;\mu}(x_k) \quad \nu = 1, \ldots, m-n \tag{付録 F.2}$$

を座標変換の式とする。

$$U_j' = \left\{ (x_j, \xi_j); \begin{array}{l} \xi = \left(\xi_j^1, \ldots, \xi_j^{m-n}\right) \neq 0, x_j = \left(x_j^1, \ldots, x_j^{m-n}\right) \in U_j \\ x_j^{n+\nu}\xi_j^\mu = x_j^{n+\mu}\xi_j^\nu \quad \text{for} \quad \nu, \mu = 1, \ldots, m-n \end{array} \right\}$$

とおく。U_j' には $((x_j, \xi_j), t) \to (x_j, t\xi_j)$ によって $\mathbf{R}^+$ が作用しているから，

$$\widetilde{U}_j = U_j'/\mathbf{R}^+$$

とおく。

$\left\{\widetilde{U}_j\right\}$ を次のように貼り合わせる。$\widetilde{U}_j \ni (x_j, \xi_j)$ と $\widetilde{U}_k \ni (x_k, \xi_k)$ は次の場合に同一視する：x_j, x_k が (付録 F.1), (付録 F.2) を満し，更に

$$\xi_j^\nu = \sum_{\mu=1}^{m-n} \xi_k^\mu g_{jk}^{\nu;\mu}(x_k) \quad \nu = 1, \ldots, m-n. \tag{付録 F.3}$$

を満す。

すると上の貼り合わせ方で $\widetilde{U}_j$ を貼りあわせることができる。貼りあわせてできた空間

$$\widetilde{M} = \bigcup \widetilde{U}_j$$

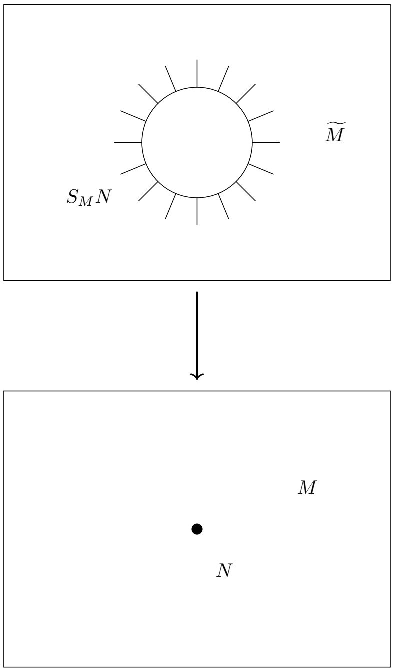
を M の N を中心とする実 monoidal 変換とよぶ。

$$\widetilde{M} \ni (x_j, \xi_j) \mapsto x_j \in M$$

を τ であらわせば，$M-N$ 上では，τ は

$$\widetilde{M}-\tau^{-1}(N) \xrightarrow{\sim} M-N \tag{付録 F.4}$$

の isomorphism を与える。$\tau^{-1}(N) \cong S_M N$ となることも容易にたしかめられる。従って，$\widetilde{M}$ は，$M-N$ に $S_M N$ にさし込んで得られた空間ということができる。$\xi \neq 0 \in T_M N_x$ とする時，対応する $S_M N \subset \widetilde{M}$ の点を $x+\xi_0$ と書く。これは $x+\xi_0$ が，ξ の方向から x に近づいて得られた点である事をうまくいいあらわしたものである。



M を N に vertical な方向で切った図

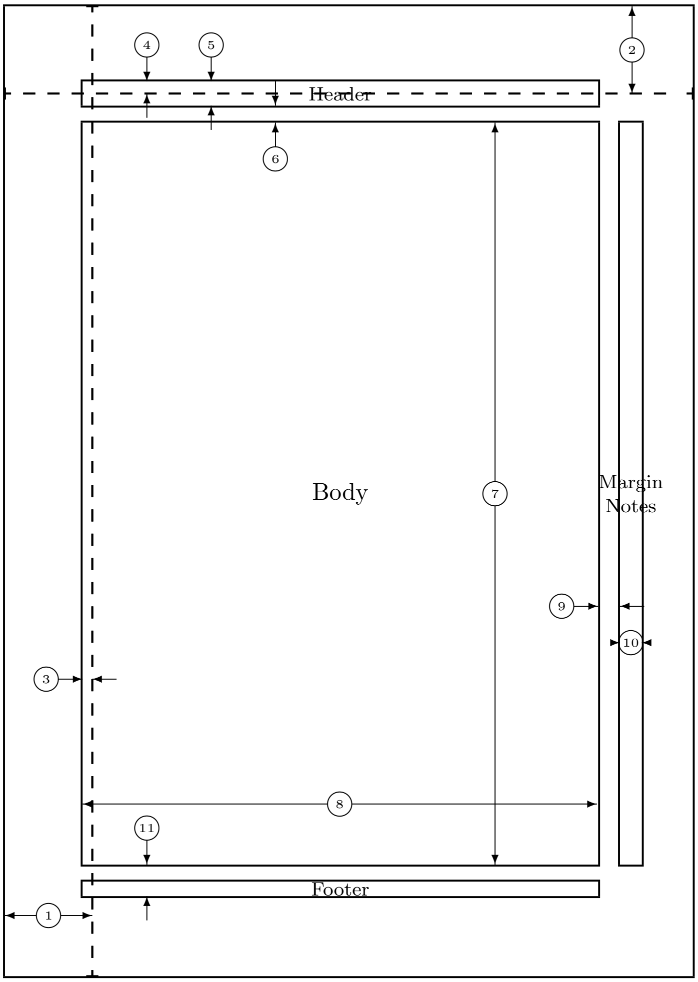
(6.5)

参考文献

[KS90] Masaki Kashiwara, Pierre Schapira, *Sheaves on Manifolds*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 292, Springer, 1990.

[KS06] Masaki Kashiwara, Pierre Schapira, *Categories and Sheaves*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 332, Springer, 2006.

[Sh16] 志甫淳, 層とホモロジー代数, 共立出版, 2016.



1	`one inch + \hoffset`	2	`one inch + \voffset`
3	`\oddsidemargin = -8pt`	4	`\topmargin = -10pt`
5	`\headheight = 20pt`	6	`\headsep = 14pt`
7	`\textheight = 612pt`	8	`\textwidth = 425pt`
9	`\marginparsep = 18pt`	10	`\marginparwidth = 18pt`
11	`\footskip = 26pt`		`\marginparpush = 15pt (not shown)`
	`\hoffset = 0pt`		`\voffset = 0pt`
	`\paperwidth = 567pt`		`\paperheight = 800pt`