Liscitz 連続性の超局所的特徴づけ

2024 年 10 月 10 日 *

概要

[J1] の紹介

1　序論

■設定　$f\colon M \to N$ を C^∞ 多様体間の連続写像とする．この f に対して

Whitney cone　$C_f := C(\Gamma_f, \Gamma_f) \subset T(M \times N)$
conormal　$\Lambda_f := \mathrm{SS}(\mathbf{K}_{\Gamma_f}) \subset T^*(M \times N)$

とおく．

■Whitney cone と conormal の性質

$$\begin{cases} C_f\colon & \text{closed symmetric cone,} \\ \Lambda_f\colon & \text{coisotropic closed symmetric cone.} \end{cases}$$

また，f が C^1 級なら

$$\begin{cases} C_f = T\Gamma_f, \\ \Lambda_f = (T\Gamma_f)^\perp = T^*_{\Gamma_f}(M \times N). \end{cases}$$

■主定理

定理 1.　次は同値.

(1) f は Lipscitz.
(2) $C_f \cap (0_M \times TN) \subset 0_{MN}$.
(3) $\Lambda_f \cap (T^*M \times 0_N) \subset 0^*_{MN}$.

■論文の構成

2 節 SS の復習
3 節 部分集合の SS の性質，cone, strict cone の性質
4 節 C_f の定義と性質．Liscitz, strict differentiability の定義，chain rule.

* 2024/10/10 かきはじめ

5 節 Λ_f の定義と性質．核の畳み込みを用いて SS の性質を f に拡張.
6 節 実数値関数のときを調べる．Vichery subdifferential との関係.
7 節 主定理の証明
8 節 部分多様体に拡張．locally Lipschitz, strict differentiable の判定.

2 背景知識

2.1 記号と規約

多様体はパラコンパクト C^∞ とする．

集合

$p_i\colon X_1\times X_2\to X_i$ とか $p_{ij}\colon X_{ijk}=X_i\times X_j\times X_k\to X_{ij}$ で射影を表す．
$R_i\subset X_1\times X_2$ に対して

$$R_1\circ R_2 \coloneqq p_{13}\left(p_{12}^{-1}(R_1)\cap p_{23}^{-1}(R_2)\right)$$

とおく．

位相空間

ベクトル空間

ベクトル束

多様体

$f\colon M\to N$ を多様体の射とする．$\Lambda_f\coloneqq T^*_{\Gamma_f}(M\times N)$ とおく．

$$\Lambda\cong M\times_N T^*N$$

が成り立つ．
$A\subset T^*M$, $B\subset T^*N$ に対し，

$$f_\pi f_d^{-1}(A)=A\overset{a}{\circ}\Lambda_f,\quad f_d f_\pi^{-1}(B)=\Lambda_f\overset{a}{\circ}B \tag{2.1}$$

が成り立つ．
f が**平滑** (smooth) すなわち沈めこみとなることと

$$\Lambda_f\cap(0^*_M\times T^*N)\subset 0^*_{M\times N} \tag{2.2}$$

となることは同値である．より一般に，閉錐 $B\subset T^*N$ に対して

$$\Lambda_f\cap(0^*_M\times B)\subset 0^*_{M\times N} \tag{2.3}$$

となるとき，f は B に対して**非特性的** (noncharacteristic) であるという．

2.2 層

2.3 核

2.4 超局所台

参考文献

[J1] Benoit, Jubin, *A Microlocal Characterization of Lipschitz Continuity*, https://doi.org/10.4171/PRIMS/54-4-2.

[KS90] Masaki Kashiwara, Pierre Schapira, *Sheaves on Manifolds*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 292, Springer, 1990.

[Vic1] Nicolas Vichery, *Homological Differential Calculus*, https://doi.org/10.48550/arXiv.1310.4845.