コーシー問題の超函数解

ジャン・ミッシェル・ボニー　　ピエール・シャピラ

0　序

$P\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ を $\mathbf{R}^n$ の開集合 U で定義された解析的係数の m 階微分作用素で，主要部がある方向 N に双曲型であるとする（P の特性多様体に関しては何も仮定しない）．(w) が超曲面 $(x, N) = 0$ 上の m 組の超函数であり，v がこの超曲面の近傍で定義された超函数であり，N 方向に「解析的」であるとき，コーシー問題 $Pu = v$, $\gamma(u) = (w)$ が超函数の空間で解けることを示す．

証明は，超函数を正則関数の境界値の和としてあらわし，複素領域におけるコーシー問題を解き，そして得られた解が境界値をもつことを示す，という方法で行う．このとき重要となる道具が 2 つある．ひとつは偏微分方程式の正則解の延長定理である．もうひとつは双曲不等式で，これはボホナーの管定理の局所版にあたる小松・柏原の定理から導かれる．

我々は同時に，双曲型方程式の解析解を調べ，とくに，余方向が双曲型ならば，同次方程式の解は開集合の C^1 級の境界を超えて延長できることを示す．

単純特性的な双曲型作用素の研究は超函数の範囲については河合 [7] が行っている．定数係数の方程式の解の延長についてはキーセルマン [8] によって全く異なる手法で研究されている．

ここで述べる手法は準備中の論文 (cf. [1] [2] [3] [4]) からの抜粋である．

1　記法と復習

本稿を通して，$P = P\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ は $\mathbf{R}^n$ の開集合 U 上の解析関数係数微分作用素で，その係数が $\mathbf{C}^n$ の開集合 $\widetilde{U}$ に延長できるものを表す．$\widetilde{U}$ 上で定義された P の複素化を $P = P\left(z, \frac{\partial}{\partial z}\right)$ で表す．$\mathbf{C}^n$ にエルミート積 $\langle z, \zeta\rangle = \sum_i z_i \zeta_i$ を入れたものを，ユークリッド空間 $\mathbf{R}^{2n}$ にスカラー積 $\mathrm{Re}\langle z, \zeta\rangle$ を入れたものと同一視する．超平面というときには，特に断らないかぎり，$\mathbf{R}^{2n}$ 内の実超平面を意味する．$z = x + iy$, $\zeta = \xi + i\eta$ とかく．方程式 $\mathrm{Re}\langle z - z_0, \zeta\rangle$ で定義された超曲面が $p(z_0, \zeta) = 0$ をみたすとき，z_0 で**特性的** (caractéristique) であるという．ここで p は $\widetilde{U} \times (\mathbf{C}^n - \{0\})$ で定義された P の主要表象を表す．同様に，ベクトル ζ のことも z_0 で特性的であるという．

$\mathbf{R}^n$ と $\mathbf{R}^{2n}$ の単位球面をそれぞれ S^{n-1}, S^{2n-1} とかく．I が S^{n-1} の部分集合であるとき，I が**凸** (convexe), あるいは**固有** (propre) であるとは，I の生成する錐が凸，あるいは直線を一切含

まないことをいう．I の極 (polaire) とは，原点を通る半空間で方空間の外部が I に属するものの共通部分である閉錐である．

I の極の内部を Γ とかくことが多い．逆に Γ が $\mathbf{R}^n$ の凸錐であるとき，その極 $I \subset S^{n-1}$ は原点を通る Γ の法線の（閉）集合である．

後で必要となる [3] の定理を復習する．

定理 1.1. $\widetilde{\omega}$ と $\widetilde{\Omega}$ を $\mathbf{C}^n$ の凸集合とし，$\widetilde{\omega}$ は局所コンパクト，$\widetilde{\Omega}$ は開集合で $\widetilde{\omega} \subset \widetilde{\Omega}$ をみたすとする．$\widetilde{\Omega}$ の（少なくとも）ひとつの点で特性的な方向の極限が法方向であるような超平面を考える．そのような超平面で $\widetilde{\Omega}$ と交わるものはすべて $\widetilde{\omega}$ とも交わると仮定する．このとき，f が $\widetilde{\omega}$ の近傍上の正則関数であり，Pf が $\widetilde{\Omega}$ 上の正則関数に延長されるならば，関数 f も $\widetilde{\Omega}$ 上の正則関数に延長される．

注意. この定理はツェルナー [15] の定理からヘルマンダーによる幾何学的な議論によって証明される（[5] の定理 5.3.3 を参照.）．第 4 節で類似の状況が現れる．この定理は方程式系 $P_i f = g_i$ の解 f に関しても成り立つことに注意しておく．この定理はキーセルマン [8] によって定数係数作用素の場合に証明されている．

2 双曲不等式

定理 2.1. $Q(z,\tau)$ を $\mathbf{C}^p$ の開集合 $\widetilde{V}$ 上の正則関数 τ を係数とする m 次多項式とする．τ^m の係数は 1 で，方程式 $Q(z,\tau)=0$ は z が実数 ($z \in V = \widetilde{V} \cap \mathbf{R}^p$) のとき，$\tau$ の実根を持たないと仮定する．

このとき $\widetilde{V} \cap \mathbf{R}^p$ の任意のコンパクト集合 K に対し $\varepsilon > 0$ と $C > 0$ で

$$Q(z,\tau)=0, \quad \operatorname{Re} z \in K, \quad |\operatorname{Im} z| < \varepsilon \Longrightarrow |\operatorname{Im}\tau| \leqq C|\operatorname{Im} z|$$

となるものが存在する．

柏原の指摘したように，この定理はボホナーの管定理の次の定式化からただちに従う（Kashiwara [6], Komatsu [8bis]）．

定理 2.2. $\mathbf{C}^{p+1}$ の部分集合 L を次で定める．

$$L = \{x+iy \mid |x|<r,\ y_1=\cdots=y_p=0,\ 0<y_{p+1}\leqq b\}.$$

f が L の近傍上の正則関数のとき，任意の $a<r$ に対し定数 $C>0$ で f が開集合

$$\widetilde{L} = \{x+iy \mid |x|<a,\ |y_1|+\cdots+|y_p|<C|y_{p+1}|,\ 0<y_{p+1}<b\}.$$

で正則となる．

以下では $\mathbf{R}^n$ のベクトル $(0,\ldots,0,1)$ を N で表し，$z=(z',z_n)$, $\zeta=(\zeta',\zeta_n)$ とかく．

方程式 $p(x_0,\xi',\zeta_n)=0$ が ζ_n しか実根を持たない（$\xi' \in \mathbf{R}^{n-1}$）とき，作用素 $P(x,\frac{\partial}{\partial x})$ は点 x_0 で N の方向に双曲的な主部をもつのだった．とくに，方向 N は非特性的である．

定理 2.3. P の主部は x_0 の近傍の任意の点において N の方向に双曲的であると仮定する．定数 $C>0$ と数 $\varepsilon>0$ で次をみたすものが存在する．

$$|z-x_0|<\varepsilon,\ \zeta\in\mathbf{C}^n,\ p(z,\zeta+\tau N)=0$$
$$\Longrightarrow |\mathrm{Im}\,\tau|\leqq C\,[|\xi'||y|+|\eta|].$$

証明. 定理 2.1 より，$x\in K$, $|y|<\varepsilon$, $|\xi'|=1$, $|\eta'|<\varepsilon$ とすれば，方程式 $p(z,\zeta',\tau)=0$ の解は

$$|\mathrm{Im}\,z|\leqq C_1\,[|y|+|\eta'|]$$

をみたす．同様に $|\eta'|\leqq\varepsilon|\xi'|$ とすることで

$$|\mathrm{Im}\,z|\leqq C_1\,[|y||\xi'|+|\eta'|]$$

を得る．

他方で，x_0 の近傍で N は非特性的なので，$p(z,\zeta+\tau N)$ の解の上からの評価

$$|\tau+\zeta_n|\leqq C_2|\zeta'|$$

とそこから

$$|\mathrm{Im}\,\tau|\leqq C_3\,[|\zeta'|+|\zeta_n|]$$

が得られ，これより $|\eta'|\leqq\alpha|\xi'|$ に対して

$$|\mathrm{Im}\,\tau|\leqq C_4|\eta|$$

が成り立つ． □

3 延長に関する 2 つの補題

$B(0,a)$ で 0 を中心とする半径 a の開球を表す．$\overline{B(0,a)}$ でその閉包を表し，$B'(0,a)$ で超曲面 $\langle x,N\rangle=0$ との共通部分を表す．

$K(a,\delta)$ で $B'(0,a)$ の凸閉包の内部を表し，（座標 $0,\dots,0,\delta a$ における）その点を δaN で表す．

補題 3.1. P を球体 $\overline{B(0,r)}$ の各点で N の方向に双曲型な主部を持つ偏微分作用素とする．定数 $\delta>0$ で，全ての $a<r$ と $\overline{B'(0,a)}$ の近傍で正則な任意の関数 f で Pf が $K(a,\delta)$ に解析接続されるものに対し，その開集合上に f 自体も解析接続されるものが存在する．

証明. $\varepsilon>0$ とする．A_ε で，$|x|\leqq a$ と $|x|\leqq r$ に対する点 $z=x+iy$ において $P(z,\frac{\partial}{\partial z})$ に対し特性的な方向 $\zeta\in S^{2n-1}$ のなす（閉）集合を表す． □

4 解析解

5 超函数の復習

6 コーシー問題の超函数解

7 超函数解の存在と延長

参考文献

[1] Bony, J. -M. et Schapira, P.: Existence et prolongement des solutions analytiques des systèmes hyperboliques non stricts. C. R. Acad. Sci. Paris, 274 (1972), 86–89.

[2] Bony, J. -M. et Schapira, P.: Problème de Cauchy, existence et prolongement pour les hyperfonctions solutions d'équations hyperboliques non strictes. C. R. Acad. Sci. Paris, 274 (1972), 188–191.

[3] Bony, J. -M. et Schapira, P.: Existence et prolongement des solutions holomorphes des équations aux dérivées partielles. Article à paraître aux Inventiones Mathematicae.

[4] Bony, J. -M. et Schapira, P.: Solutions analytiques et solutions hyperfonctions des équations hyperboliques non strictes. Article à paraître.

[5] Hörmander, L.: Linear Partial Differential Operators. Springer, 1963.

[6] Kashiwara, M.: On the structure of hyperfunctions (after M. Sato). Sugaku no Ayumi, 15 (1970), 19–72 (en Japonais).

[7] Kawai, T.: Construction of elementary solutions of I-hyperbolic operators and solutions with small singularities. Proc. Japan Acad., 46 (1970), 912–915.

[7bis] Kawai, T.: On the theory of Fourier transform in the theory of hyperfunctions and its applications, Surikaiseki Kenkyusho Kokyuroku, RIMS, Kyoto Univ., 108 (1969), 84–288 (en Japonais).

[8] Kiselman, C.-O.: Prolongement des solutions d' une équation aux dérivées partielles á coefficients constants. Bull. Soc. Math. France, 97 (1969), 329–356.

[8bis] Komatsu, H.: A local version of Bochner' s tube theorem. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA (à paraître).

[9] Leray, J. et Ohya, Y.: Systémes linéaires hyperboliques non stricts. Colloque sur l' Analyse Fonctionnelle, Liège, 1964, C.B.R.M., pp.105–144.

[10] Martineau, A.: Distributions et valeurs au bord des fonctions holomorphes. Proc. of the Intern. Summer Inst. Lisborn, 1964, pp.193–326.

[10bis] Morimoto, M.: Sur la décomposition du faisceau des germes de singularités d' hyper-

fonctions, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA, 17 (1970), 215–239.

[11] Sato, M.: Theory of hyperfunctions, I et II. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. I, 8 (1959–60), 139–193 et 398–437.

[12] Sato, M.: Regularity of hyperfunction solutions of partial differential equations. Intern. Congress of Math., Nice, 1970.

[13] Schapira, P.: Theorie des Hyperfonctions. Lecture Notes in Math. Springer, No.126, 1970.

[14] Schapira, P.: Théorème d' unicité de Holmgren et opérateurs hyperboliques dans l' espace des hyperfonctions. Anais Acad. Brasil Sc., 43 (1971), 38–44.

[15] Zerner, M.: Domaine d' holomorphie des fonctions vérifiant une équation aux dérivées partielles. C. R. Acad. Sci. Paris, 272 (1971), 1646–1648.