# 複素トーラスと複素射影直線

February 9, 2023

## 複素数空間

 $\mathbf{C}^n$  での座標が  $z=(z^1,\ldots,z^n)$  であるとき、複素数空間  $\mathbf{C}^n$  を

$$\mathbf{C}_z^n$$
とか $\mathbf{C}_{(z^1,...,z^n)}^n$ 

とかく.

 $\mathcal U$  を  $\mathbf C^n$  の空でない開集合とする.このとき, $\mathcal U$  で定義された複素数値関数 f は  $f(z)=f(z^1,\dots,z^n)$  とかける.

### 正則関数と有理型関数

f を  $\mathbb{C}^n$  の開集合上で定義された複素数値関数とする.

#### Definition (正則関数)

f が正則であるとは、各成分  $z^1, \ldots, z^n$  について正則、すなわち、複素微分可能であることをいう。

#### Definition (有理型関数)

f が有理型であるとは、f の定義域の各点で高々極しか持たず、極を除き正則であることをいう。

### 複素多様体, リーマン面

#### Definition (複素多様体,リーマン面)

X: 位相空間, $(\varphi_i: U_i \to \mathcal{U}_i)_{i \in I}$ : 写像の族.

対  $(X,(\varphi_i\colon U_i\to \mathcal{U}_i)_{i\in I})$  が次の条件 (1)–(4) をみたすとき,n 次元複素多様体という.1 次元複素多様体をリーマン面という.

- 1.  $X \neq \emptyset$ , ハウスドルフ, (第2可算, 連結).
- 2.  $U_i \subset X$ ,  $U_i \neq \emptyset$   $(i \in I)$ ,  $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ .
- 3.  $\forall i \in I \quad \mathcal{U}_i \underset{\text{open}}{\subset} \mathbf{C}_z^n, \quad \mathcal{U}_i \neq \varnothing, \quad \varphi_i \colon U_i \to \mathcal{U}_i$ : homeo.
- 4.  $\forall i \neq j \in I \ (U_i \cap U_j \neq \varnothing) \quad \varphi_{ij} \coloneqq \varphi_i \circ \varphi_j^{-1} \big|_{\mathcal{U}_{ij}} : \mathcal{U}_{ij} \to \mathcal{U}_{ji}$ : holomorphic.  $(\mathcal{U}_{ij} \coloneqq \varphi_j(U_i \cap U_j) \subset \mathcal{U}_j)$

## 複素射影直線

 $\mathbb{C}^2 - \{(0,0)\}$  の点 x, y に対して,同値関係  $\sim$  を

$$x \sim y \stackrel{\mathsf{def}}{\Longleftrightarrow} x = cy$$
 をみたす複素数  $c \neq 0$  が存在する

で定める.このとき  $\sim$  に関する (x,y) の同値類を [x:y] とかき

$$\mathbf{P}^1 \coloneqq \left(\mathbf{C}^2 - \{(0,0)\}\right) / \sim$$

の複素多様体構造を次で定めたものはリーマン面である.  ${f P}^1$  を複素射影直線という.

# 複素射影直線の複素多様体構造

 $\mathbf{P}^1$  の開集合  $U_0$ ,  $U_1$  を次で定める.

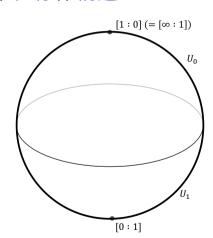
000

$$U_0 := \{(z, w) \in \mathbf{C}^2; w \neq 0\},\$$
  
 $U_1 := \{(z, w) \in \mathbf{C}^2; z \neq 0\}.$ 

 $U_0$ ,  $U_1$  の間の座標変換を次で定める.

$$w = \frac{1}{z}$$

$$([z:1] = [1:w] \in U_0 \cap U_1)$$



#### 周期格子

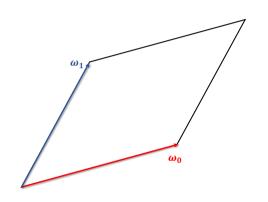
 $\omega_0$ ,  $\omega_1$  を  $\mathbf{R}$  上一次独立な 0 でない 複素数とする.このとき, $\mathbf{C}$  の部分 加群  $\Omega \subset \mathbf{C}$  を

$$\Omega := \{ n_0 \omega_0 + n_1 \omega_1; n_0, n_1 \in \mathbf{Z} \}$$

で定める.  $\Omega$  を周期格子といい,

$$S := \{a\omega_0 + b\omega_1; 0 \le a, b < 1\}$$

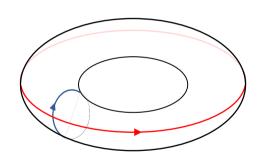
を周期平行四辺形という.



#### 複素トーラス

 $E := \mathbf{C}/\Omega$  を複素トーラスという.  $S \succeq E$  の点は一対一に対応する. 標準射影  $p \colon \mathbf{C} \to E$  による  $z \in \mathbf{C}$  の像を [z] とかく.

000

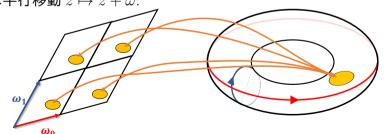


00

### 複素トーラスの複素多様体構造

各点  $P\in E$  の十分小さい開近傍  $U_P\subset E$  に対し, $U_P=p(\mathcal{U}_x)$  となる開集合  $\mathcal{U}_x\subset S$  をとる. $p^{-1}(U_P)=\bigcup \mathcal{U}_x+\omega$  である.

 $\omega \in \Omega$  を一つ取って同相  $\varphi_{P,x+\omega} \coloneqq \left(p|_{\mathcal{U}_x+\omega}\right)^{-1} : U_P \to \mathcal{U}_{x+\omega}$  を考える. 座標変換は平行移動  $z \mapsto z + \omega$ .



#### 楕円関数

#### Definition

 $\omega_0, \omega_1$  に対し、C 上の有理型関数 f で

$$f(z + \omega_0) = f(z), \quad f(z + \omega_1) = f(z)$$

を満たすものを、 $\omega_0$ ,  $\omega_1$  を周期とする、或は  $\Omega$  を周期とする楕円関数という.

次の補題がある.

#### Lemma

商写像  $p\colon \mathbf{C}\to E$  の引き戻し  $p^*\colon f\mapsto f\circ p$  は  $\{E$  上の有理型関数  $\}$  から  $\{\Omega$ を周期とする  $\mathbf{C}$  上の楕円関数  $\}$  への 1 対 1 対応を定める.

# Weierstrass の $\wp$ 関数

## Definition (Weierstrass の p 関数)

$$\wp(u) \coloneqq \sum_{\substack{\omega \in \Omega, \\ \omega \neq 0}} \left( \frac{1}{(u-\omega)^2} - \frac{1}{\omega} \right)$$

は  $\Omega$  にのみ 2 位の極を持つ楕円関数である.  $\wp$  を Weierstrass の  $\wp$  関数という.

### 分岐指数

#### Fact

X と Y をリーマン面とする.  $f: X \to Y$  を定値でない正則写像とする.

 $P \in X$ ,  $Q = f(P) \in Y$  とおく.

このとき、P のまわりの局所座標 t と Q のまわりの局所座標 s と正の整数  $n \geq 1$  で、f の局所座標表示が  $s = t^n$  となるものが存在する.この n は座標の

取り方によらない.

## 写像度

#### Fact

X と Y をコンパクトリーマン面とし, $f: X \to Y$  を定値でない正則写像とする.このとき,次が成り立つ.

- 1.  $\forall Q \in Y \quad f^{-1}(Q) \neq \emptyset, \#f^{-1}(Q) < \infty.$
- 2. # $\{f$  の分岐点  $\}<\infty$ .
- 3.  $Q \in Y$ ,  $d(Q) \coloneqq \sum_{P \in f^{-1}(Q)} e_P$ : constant.  $\deg f \coloneqq d(Q)$ .
- 4.  $Q \in Y \{f \text{ の分岐点 }\}, \#f^{-1}(Q) = \deg f.$
- 5.  $Q \in \{f \text{ の分岐点 }\}, \#f^{-1}(Q) < \deg f.$

## 分岐指数と写像度

#### Definition (分岐指数)

上の事実における n を P における f の分岐指数といい, $e_P$  とかく. $e_P > 1$  のとき,P を f の分岐点という.

#### Definition (写像度)

 $d = \deg f$  を f の写像度といい、f を d 重被覆写像という.

### 主定理

#### Theorem (複素トーラスから射影直線への2重被覆)

E から  $\mathbf{P}^1$  への正則射

$$\wp \colon E \to \mathbf{P}^1; \quad [z] \mapsto [\wp(z); 1]$$

は4点

$$[0], \left[\frac{\omega_0}{2}\right], \left[\frac{\omega_1}{2}\right], \left[\frac{\omega_0 + \omega_1}{2}\right]$$

で分岐する2重被覆写像である.

## 定理の言い換え

 $P \in \mathbf{P}^1$  に対し,

#
$$\wp^{-1}(P) = \begin{cases} 1 & ([0], \left[\frac{\omega_0}{2}\right], \left[\frac{\omega_1}{2}\right], \left[\frac{\omega_0 + \omega_1}{2}\right] \mapsto P \text{ のとき}), \\ 2 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

ということ.

# 証明 (1/2)

 $\wp$  は  $\Omega$  にのみ 2 位の極をもつ楕円関数であったから,[0] のみに 2 位の極をもつ E 上の有理型関数というのと同じである.したがって, $\wp^{-1}(\infty) = \{[0]\}$  であり,写像度に関する事実より, $\deg \wp = 2$  である.いま, $\wp$  は偶関数なので, $[a] \in E$  に対し, $\wp([a]) = \wp([-a])$  が成り立つ.[a] が E の 2 分点でなければ, $[a] \neq [-a]$  である. $\deg \wp = 2$  なので,このとき, $\wp^{-1}(\wp([a])) = \{[a], [-a]\}$  と確定する.

基本的な概念

# 証明 (2/2)

 $[\omega_0/2]$  の近傍で  $\wp$  を局所座標表示する.  $\wp$  は  $\omega_0$  を周期にもつ偶関数なので  $\wp(-z)=\wp(z)=\wp(z+\omega_0)$  をみたす. 両辺を微分して, $-\wp'(-z)=\wp'(z+\omega_0)$  となるが, $z=-\omega_0/2$  のとき, $-\wp'(\omega_0/2)=\wp'(\omega_0/2)$  となる. したがって, $\wp'(\omega_0/2)=0$  となる. よって, $\wp(z)$  の  $\omega_0/2$  のまわりでの展開における 1 次の項の係数は 0 である. したがって, $e_{[\omega_0/2]}>1$  であり, $[\omega_0/2]$  は  $\wp$  の分岐点である.

 $[\omega_1/2]$  と  $[(\omega_0 + \omega_1)/2]$  についても同様に, $e_{[\omega_1/2]} > 1$ , $e_{[(\omega_0 + \omega_1)/2]} > 1$  となるので, $\wp$  は E の 2 分点で分岐する 2 重被覆であることが示せた.

# 参考文献 I

[Og02] 小木曽啓示, 『代数曲線論』, 朝倉書店, 2002.