

2024/04/15 セミナー資料

大柴寿浩

記号

- 恒等射を id や 1 で表す.
- 集合 U の開近傍系を I_U とかき, 点 x の開近傍系を I_x とかく.
- \mathbf{R}^+ : 正の実数のなす乗法群.

1 フーリエ・佐藤変換 [KS90, section 3.7]

まず錐状層を定義する. そのために作用付きの空間を考える. X を局所コンパクト空間で \mathbf{R}^+ の作用 μ が入っているとする. つまり, 連続写像 $\mu: X \times \mathbf{R}^+ \rightarrow X$ で

$$\begin{aligned}\mu(x, t_1 t_2) &= \mu(\mu(x, t_1), t_2) \\ \mu(x, 1) &= x\end{aligned}$$

をみたすものが与えられているとする.

- 定義 1.1** ([KS90, Definition 3.7.1]). (i) 層 $F \in \text{Mod}(A_X)$ が錐状 (conic) であるとは, X の各軌道 b への制限 $F|_b$ が局所定数層であることをいう. $\text{Mod}(A_X)$ の充満部分圏 $\text{Mod}_{\mathbf{R}^+}(A_X)$ を錐状層からなるものとして定める.
- (ii) $\mathbf{D}_{\mathbf{R}^+}^+(X)$ を, 各 $j \in \mathbf{Z}$ に対して $H^j(F)$ が錐状のものからなる $\mathbf{D}^+(X)$ の充満部分圏として定める.

錐状層がどのように特徴づけられるかを調べる. 次の連続写像を考える.

$$X \xhookrightarrow{j} X \times \mathbf{R}^+ \xrightarrow[p]{\mu} X.$$

$j: X \rightarrow X \times \mathbf{R}^+$ は $x \in X$ を $X \times \mathbf{R}^+$ に $(x, 1)$ として埋め込む写像であり. $p: X \times \mathbf{R}^+ \rightarrow X$ は X への第 1 射影である. これらの連続写像を用いて, $F \in \mathbf{D}^+(X)$ に対し, 次の 2 つの射を構成する.

$$\mu^{-1}F \xleftarrow{\alpha} p^{-1}\mathbf{R}p_*\mu^{-1}F \xrightarrow{\beta} p^{-1}F.$$

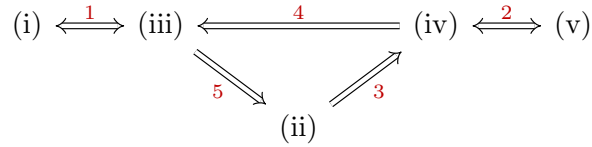
α は随伴 $(p^{-1}, R p_*)$ の余単位 $p^{-1} R p_* \rightarrow 1_{D^+(X)}$ を $\mu^{-1} F$ に適用することで得られる． β は次のように構成される．

$$\begin{aligned} p^{-1} R p_* \mu^{-1} F &\rightarrow p^{-1} R p_* R j_* j^{-1} \mu^{-1} F \\ &\cong p^{-1} R (p \circ j)_* (\mu \circ j)^{-1} F \\ &\cong p^{-1} R 1_{X*} 1_X^{-1} F \\ &\cong p^{-1} F. \end{aligned}$$

命題 1.2 ([KS90, Proposition 3.7.2]). $F \in D^+(X)$ に対し次の条件 (i)–(v) は同値である．

- (i) $F \in D_{\mathbf{R}^+}^+(X)$
- (ii) α と β はどちらも同型である．
- (iii) すべての $j \in \mathbf{Z}$ に対し, $H^j(\mu^{-1} F)$ が p の各ファイバーで局所定数層となる．
- (iv) $p^{-1} F \cong \mu^{-1} F$.
- (v) $p^! F \cong \mu^! F$.

証明. 次の順に証明する．



1. (i) \Leftrightarrow (iii): まず, $x \in X$ の \mathbf{R}^+ 軌道は $\mu(p^{-1}(x))$ と表せることに注意する． 実際, x の \mathbf{R}^+ 軌道 b は

$$b = \{\mu(x, t); t \in \mathbf{R}^+\}$$

であり, これは x での p のファイバー

$$p^{-1}(x) = \{(x, t); t \in \mathbf{R}^+\}$$

の μ による像

$$\mu(p^{-1}(x)) = \{\mu(x, t); (x, t) \in p^{-1}(x)\}$$

である．

$$\begin{aligned} j_{p^{-1}(x)} &: p^{-1}(x) \hookrightarrow X \times \mathbf{R}^+ \\ j_{\mu(p^{-1}(x))} &: \mu(p^{-1}(x)) \hookrightarrow X \end{aligned}$$

をそれぞれ包含写像とすると

$$j_{\mu(p^{-1}(x))} \circ \mu = \mu \circ j_{p^{-1}(x)}$$

が成り立つ。したがって、

$$\begin{aligned}
H^j(\mu^{-1}F) &\cong H^j(\mu^{-1}F)|_{p^{-1}(x)} \\
&\cong j_{p^{-1}(x)}^{-1} H^j(\mu^{-1}F) \\
&\cong j_{p^{-1}(x)}^{-1} \mu^{-1} H^j(F) \\
&\cong (\mu \circ j_{p^{-1}(x)})^{-1} H^j(F) \\
&\cong (j_{\mu(p^{-1}(x))} \circ \mu)^{-1} H^j(F) \\
&\cong \mu^{-1} j_{\mu(p^{-1}(x))}^{-1} H^j(F) \\
&\cong \mu^{-1} (H^j(F)|_{\mu(p^{-1}(x))})
\end{aligned}$$

である。引き戻しが定数層なら元の層も定数層であり、定数層の引き戻しも定数層^{*1}なので、 $H^j(\mu^{-1}F)$ が p の各ファイバーで局所定数層となるのは、 $H^j(F)$ が $\mu(p^{-1}(x))$ で、すなわち x の \mathbf{R}^+ 軌道で局所定数層となるときである。

2. (iv) \Leftrightarrow (v): $p^{-1}F \cong p^{-1} \overset{\mathbf{L}}{\otimes} \omega_{X \times \mathbf{R}^+ / X}$ と $\mu^{-1}F \cong \mu^{-1} \overset{\mathbf{L}}{\otimes} \omega_{X \times \mathbf{R}^+ / X}$ が成り立つ。
3. (ii) \Leftrightarrow (iv): α と β が同型なので、互いに逆射となる射

$$\beta\alpha^{-1}: \mu^{-1}F \rightarrow p^{-1}F, \quad \alpha\beta^{-1}: p^{-1}F \rightarrow \mu^{-1}F$$

が得られる。したがって、 $p^{-1}F \cong \mu^{-1}F$ である。

4. (iv) \Leftrightarrow (iii): $\mu^{-1}F \cong p^{-1}F$ とする。 $x \in X$ とする。 $p^{-1}(x) = \{x\} \times \mathbf{R}^+$ に対し

$$i_{p^{-1}(x)}: p^{-1}(x) \hookrightarrow X \times \mathbf{R}^+, \quad i_x: \{x\} \hookrightarrow X$$

とおくと次の図式が可換になる。

$$\begin{array}{ccc}
p^{-1}(x) & \xrightarrow{i_{p^{-1}(x)}} & X \times \mathbf{R}^+ \\
p|_{p^{-1}(x)} \downarrow & & \downarrow p \\
\{x\} & \xrightarrow{i_x} & X
\end{array}$$

したがって、 j を整数とすると

$$\begin{aligned}
H^j(p^{-1}F)|_{p^{-1}(x)} &\cong p^{-1} H^j(F)|_{p^{-1}(x)} \\
&\cong i_{p^{-1}(x)}^{-1} p^{-1} H^j(F) \\
&\cong (p \circ i_{p^{-1}(x)})^{-1} H^j(F) \\
&\cong (i_x \circ p|_{p^{-1}(x)})^{-1} H^j(F) \\
&\cong (p|_{p^{-1}(x)})^{-1} i_x^{-1} H^j(F) \\
&\cong (p|_{p^{-1}(x)})^{-1} H^j(F)_x \\
&\cong (H^j(F)_x)_{p^{-1}(x)}
\end{aligned}$$

^{*1} $f: Y \rightarrow X$ を位相空間の間の連続写像とし、 M を加群とする。 X 上の層 F の引き戻し $f^{-1}F$ が Y 上の定数層 M_Y になったとすると、 $a_Y = a_X \circ f$ より、 $f^{-1}F \cong M_Y \cong a_Y^{-1}M \cong f^{-1}a_X^{-1}M \cong f^{-1}M_X$ である。逆像関手は conservative なので (ホンマか?) $F \cong M_X$ である。

で，定数層となる（よって特に局所定数層となる）．

5. (iii) \Leftrightarrow (ii):

□

2 2024/04/15 のぶん

定理 2.1 ([KS90, Theorem 3.7.7]). $D_{\mathbf{R}_{>0}}^+(E)$ から $D_{\mathbf{R}_{>0}}^+(E^*)$ への関手 $\tilde{\Phi}_{P'}$ と $\tilde{\Psi}_P$ は自然に同型である.

証明. $\tilde{\Phi}_{P'}(F) = R p_{2!} (p_1^{-1} F)_{P'}$, $\tilde{\Psi}_P(F) = R p_{2*} R \Gamma_P (p_1^{-1} F)$ なので, これらを同型で結ぶ.

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_{P'}(F) &= R p_{2!} (p_1^{-1} F)_{P'} \\ &\cong R p_{2!} R \Gamma_P (p_1^{-1} F)_{P'} \\ &\cong R p_{2!} (R \Gamma_P (p_1^{-1} F)_{P'}) \\ &\cong R p_{2*} (R \Gamma_P (p_1^{-1} F)_{P'}) \\ &\cong R p_{2*} R \Gamma_P (p_1^{-1} F). \end{aligned}$$

□

定義 2.2 ([KS90, Definition 3.7.8]). $F \in D_{\mathbf{R}_{>0}}^+(E)$ とする. F のフーリエ・佐藤変換 (Fourier-Sato transform) F^\wedge を

$$\begin{aligned} F^\wedge &:= \tilde{\Phi}_{P'}(F) \quad (= R p_{2!} (p_1^{-1} F)_{P'}) \\ &\quad \left(\cong \tilde{\Psi}_P(F) = R p_{2*} R \Gamma_P (p_1^{-1} F) \right) \end{aligned}$$

で定める.

$G \in D_{\mathbf{R}_{>0}}^+(E^*)$ とする. G の逆フーリエ・佐藤変換 (inverse Fourier-Sato transform) G^\vee を

$$\begin{aligned} G^\vee &:= \tilde{\Psi}_{P'}(F) \quad (= R p_{1*} R \Gamma_{P'} (p_2^! G)) \\ &\quad \left(\cong \tilde{\Phi}_P(G) = R p_{1!} (p_2^! G)_P \right) \end{aligned}$$

で定める.

定理 2.3 ([KS90, Theorem 3.7.9]). $D_{\mathbf{R}_{>0}}^+(E)$ から $D_{\mathbf{R}_{>0}}^+(E^*)$ への関手 $^\wedge$ と $D_{\mathbf{R}_{>0}}^+(E^*)$ から $D_{\mathbf{R}_{>0}}^+(E)$ への関手 $^\vee$ は圏同値であり, 互いに準逆である. とくに, F と F' を $D_{\mathbf{R}_{>0}}^+(E)$ の対象とするとき,

$$\mathrm{Hom}_{D_{\mathbf{R}_{>0}}^+(E)}(F', F) \cong \mathrm{Hom}_{D_{\mathbf{R}_{>0}}^+(E)}(F'^\wedge, F^\wedge)$$

が成り立つ.

補題 2.4 ([KS90, Lemma 3.7.10]). (i) γ を E の固有閉凸錐で零切断を含むものとする. このとき, 次が成り立つ.

$$(A_\gamma)^\wedge \cong A_{\mathrm{Int} \gamma^\circ}.$$

(ii) U を E の開凸錐とする. このとき次が成り立つ.

$$(A_U)^\wedge \cong A_{U^\circ} \otimes \mathrm{or}_{E^*/Z}[-n].$$

注意 2.5 ([KS90, Remark 3.7.11]). RMK

命題 2.6 ([KS90, Proposition 3.7.12]). $F \in D_{\mathbf{R}_{>0}}^+(E)$ とする.

$$(i) \ F^{\wedge\wedge} \cong F^a \otimes_{\text{or}_{E/Z}} [-n].$$

(ii) U を E^* の開凸集合とすると

$$\text{R}\Gamma(U; F^\wedge) \cong \text{R}\Gamma_{U^\circ}(\tau^{-1}\pi(U); F) \cong \text{R}\Gamma_{U^\circ}(E; F).$$

(iii) γ を E^* の固有閉凸錐で零切断を含むものとする

$$\text{R}\Gamma_\gamma(E^*; F^\wedge) \cong \text{R}\Gamma(\text{Int } \gamma^{\circ a}; F) \otimes_{\text{or}_{E/Z}} [-n].$$

(iv) 次の成り立つ.

$$(D'F)^\vee \cong D'(F^\wedge), \quad (DF)^\vee \cong D(F^\wedge).$$

命題 2.7 ([KS90, Proposition 3.7.13]). (i) $F \in D_{\mathbf{R}_{>0}}^+(E)$ とする. このとき次の成り立つ.

$$(f_\tau^! F)^\wedge \cong f_\pi^!(F^\wedge), \quad (f_\tau^{-1} F)^\wedge \cong f_\pi^{-1}(F^\wedge).$$

(ii) $G \in D_{\mathbf{R}_{>0}}^+(E')$ とする. このとき次の成り立つ.

$$(\text{R}f_{\tau*} G)^\wedge \cong \text{R}f_{\pi*}(G^\wedge), \quad (\text{R}f_{\tau!} G)^\wedge \cong \text{R}f_{\pi!}(G^\wedge),$$

命題 2.8 ([KS90, Proposition 3.7.14]). (i) $F \in D_{\mathbf{R}_{>0}}^+(E_1)$ とする. このとき次の成り立つ.

$$\begin{aligned} {}^t f^{-1}(F^\wedge) &\cong (\text{R}f_! F)^\wedge, \\ {}^t f^!(F^\vee) &\cong (\text{R}f_* F)^\vee, \\ {}^t f^!(F^\wedge) &\cong (\text{R}f_* F)^\wedge \otimes \omega_{E_2^*/E_1^*}, \\ {}^t f^!(F^\vee) &\cong (\text{R}f_! F)^\vee \otimes \omega_{E_2^*/E_1^*}. \end{aligned}$$

(ii) $G \in D_{\mathbf{R}_{>0}}^+(E_2)$ とする. このとき次の成り立つ.

$$\begin{aligned} (f^{-1} F)^\vee &\cong \text{R}^t f_!(G^\vee), \\ (f^! F)^\wedge &\cong \text{R}^t f_*(G^\wedge), \\ (\omega_{E_1/E_2} \otimes f^! G)^\vee &\cong \text{R}^t f_*(G^\vee), \\ (\omega_{E_1/E_2} \otimes f^{-1} G)^\wedge &\cong \text{R}^t f_!(G^\wedge). \end{aligned}$$

命題 2.9 ([KS90, Proposition 3.7.15]). $F_i \in D_{\mathbf{R}_{>0}}^+(E_i)$, $i = 1, 2$ とする. このとき次の成り立つ.

$$F_1^\wedge \overset{\text{L}}{\boxtimes}_Z F_2^\wedge \cong \left(F_1 \overset{\text{L}}{\boxtimes}_Z F_2 \right)^\wedge.$$

参考文献

- [BouTVS] ブルバキ, 位相線形空間 1, 東京図書, 1968.
- [B+84] Borel, *Intersection Cohomology*, Progress in Mathematics, 50, Birkhäuser, 1984.
- [G58] Grauert, *On Levi's problem and the embedding of real analytic manifolds*, Ann. Math. 68, 460–472 (1958).
- [GP74] Victor Guillemin, Alan Pollack, *Differential Topology*, Prentice-Hall, 1974.
- [HS23] Andreas Hohl, Pierre Schapira, *Unusual Functorialities for weakly constructible sheaves*, 2023.
- [KS90] Masaki Kashiwara, Pierre Schapira, *Sheaves on Manifolds*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 292, Springer, 1990.
- [KS06] Masaki Kashiwara, Pierre Schapira, *Categories and Sheaves*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 332, Springer, 2006.
- [Le13] John M. Lee, *Introduction to Smooth Manifolds*, Second Edition, Graduate Texts in Mathematics, **218**, Springer, 2013.
- [Mo76] 森本光生, 佐藤超函数入門, 共立出版, 1976.
- [R55] de Rham, *Variétés différentiables*, Hermann, Paris, 1955.
- [Sa59] Mikio Sato, *Theory of Hyperfunctions*, 1959–60.
- [S66] Schwartz, *Théorie de distributions*, Hermann, Paris, 1966.
- [Sh16] 志甫淳, 層とホモロジー代数, 共立出版, 2016.
- [SP] The Stacks Project.
- [Sp65] Michael Spivak, *Calculus on Manifolds*, Benjamin, 1965.
- [Ike21] 池祐一, 超局所層理論概説, 2021.
- [Tak17] 竹内潔, \mathcal{D} 加群, 共立出版, 2017.
- [Ue] 植田一石, ホモロジー的ミラー対称性, <https://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~kazushi/course/hms.pdf> 2024/02/04 最終閲覧.