# Notes on Introduction to Symplectic Topology

# はじめに

2023 年度の数学独立探求で行う [MS17] のセミナーのノート．
次の記号は断りなく使う．

- 添字：なんらかの族 $(a_i)_{i\in I}$ を $(a_i)_i$ とか $(a_i)$ と略記することがある．
- ラグランジアン：$(V,\omega)$ のラグランジュ部分多様体全体を $\mathcal{L}(V,\omega)$ で表す．

# 第 2 章

# 線形シンプレクティック幾何

## 2.5　線形複素構造

実ベクトル空間 $V$ 上の（**線形）複素構造** ((linear) complex structure) とは自己同形

$$J \colon V \to V$$

で

$$J^2 = -\mathbb{1}$$

をみたすものをいう．[*1]複素構造を一つ固定することにより，$J$ に対応する $i = \sqrt{-1}$ の作用で $V$ は複素ベクトル空間になる．すなわち，スカラー倍は

$$\mathbb{C} \times V \to V \colon (s+it, v) \mapsto sv + tJv$$

で与えられる．とくに $V$ は実次元が偶数でなければならない．$V$ 上の線形複素構造の空間[*2]を $\mathcal{J}(V)$ で表す．複素構造の基本的な例としては，行列

$$J_0 \coloneqq \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}.$$

から定まる $\mathbb{R}^{2n}$ の自己同形が挙げられる．$\mathbb{R}^{2n}$ と $\mathbb{C}^n$ の間には $x, y \in \mathbb{R}^n$ としたとき $(x, y) \mapsto x + iy$ という同形が定まる．これを通じて $\mathbb{R}^{2n}$ と $\mathbb{C}^n$ を同一視すれば，行列 $J_0$ は $i$ を掛けることに対応する．

**■この節の内容**

- 複素構造の空間の性質
- シンプレクティック構造と同調する複素構造
- シンプレクティック形式で統制された複素構造の集合

---

[*1] $\mathbb{1}$ は単位行列．

[*2] のちに見るように，$\mathcal{J}(V)$ は等質空間になる．ベクトル空間ではない．$(0 \notin \mathcal{J}(V).)$

**■複素構造の空間の性質**　次の命題は，任意の線形複素構造が標準複素構造 $J_0$ と同形であるという主張である．

> **命題 2.5.1.**　$V$ を $2n$ 次元実ベクトル空間とし $J$ を $V$ 上の線形複素構造とする．このとき，ベクトル空間の同形 $\Phi\colon \mathbb{R}^{2n} \to V$ で $J\Phi = \Phi J_0$ をみたすものが存在する．

> **命題 2.5.2.**　(i) 空間 $\mathcal{J}(\mathbb{R}^{2n})$ は等質空間 $\mathrm{GL}(2n,\mathbb{R})/\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ と微分同相であり，したがって連結成分の数は 2 つである．
> (ii) $J_0$ を含む連結成分 $\mathcal{J}^+(\mathbb{R}^{2n})$ は，標準的な向きと同調する $\mathbb{R}^{2n}$ 上の複素構造全体のなす空間である．

**■同調する複素構造**　$(V,\omega)$ をシンプレクティックベクトル空間とする．$J \in \mathcal{J}(V)$ が $\omega$ に同調する (compatible) とは，すべての $v, w \in V$ に対し，

$$\omega(Jv, Jw) = \omega(v, w) \tag{2.5.2}$$

をみたし，$v \neq 0$ に対し

$$\omega(v, Jv) > 0. \tag{2.5.3}$$

であることをいう．

$J$ が $\omega$ と同調するとき，

$$g_J(v, w) := \omega(v, Jw) \tag{2.5.4}$$

が $V$ 上の内積を定め，$J$ は $g_J$ に対し，歪共役，すなわち

$$g_J(v, Jw) + g_J(Jv, w) = 0 \quad (v, w \in V)$$

である．

> **$g_J$ が内積になることの証明．双線形性：**　$\omega$ の性質と $J$ の線形性から従う．
> **正定値性：**　$v \neq 0$ を $V$ のベクトルとすると，(2.5.3) から，
>
> $$g_J(v, v) = \omega(v, Jv) \underset{(2.5.3)}{>} 0.$$
>
> **対称性：**　$v, w \in V$ に対し，
>
> $$\begin{aligned} g_J(w, v) = \omega(w, Jv) &\underset{\omega\text{ の歪対称性}}{=} -\omega(Jv, w) \\ &\underset{\omega\text{ の双線形性}}{=} \omega(Jv, -w) = \omega(Jv, J^2 w) \\ &\underset{(2.5.2)}{=} \omega(v, Jw). \end{aligned}$$
>
> □

$J$ が $g_J$ に関して歪共役であることの証明．$v, w \in V$ とする．

$$\begin{aligned} g_J(v, Jw) + g_J(Jv, w) &= \omega(v, -w) + \omega(Jv, Jw) \\ &\underset{(2.5.2)}{=} -\omega(v, w) + \omega(v, w) = 0. \end{aligned}$$

□

$\omega$ と同調する複素構造全体を

$$\mathcal{J}(V, \omega)$$

とかく．

**命題 2.5.4.** $(V, \omega)$ をシンプレクティックベクトル空間とする．$J \in \mathcal{J}(V)$ とする．次の (i)–(iv) は同値である．

(i) $J \in \mathcal{J}(V, \omega)$.

(ii) $(V, \omega)$ のシンプレクティック基底で $v_1, \ldots, v_n, Jv_1, \ldots, Jv_n$ と表せるものがある．

(iii) $\Psi\colon \mathbf{R}^{2n} \xrightarrow{\sim} V$ で $\Psi^*\omega = \omega_0$，$\Psi^* J = J_0$ となるものがある．

(iv) $J$ は (2.5.3) をみたし，次が成り立つ．

$$\Lambda \in \mathcal{L}(V, \omega) \Longrightarrow J\Lambda \in \mathcal{L}(V, \omega). \tag{2.5.5}$$

■$\mathcal{J}(V, \omega)$ **は可縮**　ここからの目標は $\mathcal{J}(V, \omega)$ は可縮であることの証明．3 つの証明法が書いてある．

1. $\mathcal{J}(V, \omega)$ を対称正定値シンプレクティック行列の空間と同一視．
2. $\mathcal{J}(V, \omega)$ と $\mathfrak{Met}(V) = \{\text{内積全体}\}$ の間のホモトピー同値の構成．
3. $\mathcal{J}(V, \omega)$ をジーゲル上半空間と同一視．

ここでは第 1 証明を扱う．

**第 *1* 証明**．定理 2.1.3 より，　□

# 第 3 章

# シンプレクティック多様体

## 3.1 基本的な概念

**例 3.1.1.** シンプレクティック多様体の最初の例は $\mathbf{R}^{2n}$ 自体と 1 章で定義した標準シンプレクティック形式

$$\omega_0 = \sum_{j=1}^{n} dx_j \wedge dy_j$$

の組である．

**例 3.1.2.** 2 次元球面に標準面積形式を合わせたものも基本的な例である．$S^2$ を単位球面

$$S^2 \coloneqq \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 \;\middle|\; x_1^2 + x_3^2 + x_3^2 = 1 \right\}$$

として定める場合，面積形式は $\xi, \eta \in T_x S^2$ に対し

$$\omega_x(\xi, \eta) = \langle x, \xi \times \eta \rangle$$

で与えられる．特に $S^2$ の全面積は $4\pi$ である．

# 参考文献

[MS17] McDuff, Dusa, and Dietmar Salamon, Introduction to Symplectic Topology, 3rd edn (Oxford, 2017).