2024/05/27 セミナー資料

大柴寿浩

記号

- 恒等射を id や 1 で表す．
- 集合 U の開近傍系を I_U とかき，点 x の開近傍系を I_x とかく．
- $\mathbf{R}^+$: 正の実数のなす乗法群．

1　局所台切断

もうひとつ，X の局所閉部分集合 Z に対して関手的に定まる層がある．U を X の開集合とし，Z を U の閉集合とする．

$$\Gamma_Z(U;F) \coloneqq \operatorname{Ker}\left(F(U) \to F(U-Z)\right) \tag{1.1}$$

とおく．すなわち，$\Gamma_Z(U;F)$ は切断の台が Z に含まれるものからなる $\Gamma(U;F)$ の部分群である．

V を U の開集合で Z を閉集合として含むものとする．制限射 $\rho_{V,U} \colon \Gamma(U;F) \to \Gamma(V;F)$ から自然な射

$$\widetilde{\rho}_{V,U} \colon \Gamma_Z(U;F) \to \Gamma_Z(V;F)$$

が誘導される．実際 $s \in \Gamma_Z(U;F)$ が $s|_{U-Z} = 0$ をみたすとき

$$\rho_{V-Z,V} \circ \rho_{V,U}(s) = \rho_{V-Z,U}(s) = \rho_{V-Z,U-Z} \circ \rho_{U-Z,U}(s) = 0$$

となる．したがって $\rho_{V,U}|_{\operatorname{Ker}\rho_{V,U}}$ の像は $\rho_{V-Z,V}$ の核に含まれる．こうして定まる射 $\Gamma_Z(U;F) \to \Gamma_Z(V;F)$ は同型である．実際，$\widetilde{\rho}_{V,U}$ が全単射であることが次のように示される．

単射性　$s \in \Gamma_Z(U;F)$ が $\widetilde{\rho}_{V,U}(s) = 0$ となると仮定する．これは $s|_V = 0$ かつ $s|_{U-Z} = 0$ ということである．$U-Z$ と V は U を被覆するので，F が層であることから，s は U 上の切断として 0 である．よってとくに $\Gamma_Z(U;F)$ の元としても 0 である．すなわち，$\widetilde{\rho}_{V,U}$ は単射である．

全射性　$t \in \Gamma_Z(V;F)$ とする．定義より $t|_{V-Z} = 0$ である．0 を $U-Z$ 上の切断とみなせば，$U-Z$ と V は $V-Z = (U-Z) \cap V$ をみたす U の被覆なので，F が層であることから，U 上の切断 s で $s|_{U-Z} = 0$ となるものが定まる．したがって $\widetilde{\rho}_{V,U}$ は全射である．

Z を閉集合として含む X の任意の開集合 U, V に関して $\Gamma_Z(U;F) \to \Gamma_Z(V;F)$ が同型であることが示されたので，X の局所閉集合 Z に対し，Z を閉集合として含む X の任意の開集合 U を用いることで，$\Gamma_Z(X;F)$ を $\Gamma_Z(U;F)$ として定めることができる．前層 $U \mapsto \Gamma_{Z\cap U}(U;F)$ は層となる．

証明. 切断の様子：まず $\Gamma_{Z\cap U}(U;F)$ の意味について確認する．U を全体集合としてみたとき，$Z\cap U$ を局所閉集合として含む．実際，X の開集合 V と閉集合 A を用いて，$Z = V\cap A$ とかくとき，$Z\cap U$ は $(V\cap U)\cap(A\cap U)$ とかける．U の相対位相について $V\cap U$ は開で $A\cap U$ は閉なので，$Z\cap U$ は局所閉である．この U と $Z\cap U\subset U$ の組に対して上の $\Gamma_Z(X;F)$ を考えたものが $\Gamma_{Z\cap U}(U;F)$ である．

前層になること：次に $U\mapsto \Gamma_{Z\cap U}(U;F)$ が前層となることを示す．$V\subset U$ を X の開集合とする．$Z\cap U$ を閉集合として含む U の開集合 U' と $Z\cap V$ を閉集合として含む V の開集合 V' を選び

$$\Gamma_{Z\cap U}(U;F) = \Gamma_{Z\cap U}(U';F), \quad \Gamma_{Z\cap V}(U;F) = \Gamma_{Z\cap V}(V';F)$$

とする．このとき $V'\subset U'$ としてよい．実際 $Z\cap V\subset V'$ と $Z\cap U\subset U'$ に対して，$V'' = V'\cap U'$ とすれば，V'' は

$$Z\cap V = Z\cap (V\cap U) = (Z\cap V)\cap(Z\cap U) \subset V'\cap U' = V'' \subset U'$$

をみたす．この設定のもとで制限射

$$\rho_{V,U} = \rho_{V',U'}\colon \Gamma_{Z\cap U}(U;F) = \Gamma_{Z\cap U}(U';F) \to \Gamma_{Z\cap V}(V;F) = \Gamma_{Z\cap V}(V';F)$$

が F の制限射 $\rho'_{V',U'}\colon F(U')\to F(V')$ から誘導される．実際，$s\in\Gamma_{Z\cap U}(U';F)$ に対し，$\rho'_{V',U'}(s)$ は

$$\begin{aligned}
\rho'_{V',U'}(s)\big|_{V'-Z\cap V} &= \rho'_{V'-Z\cap V, V'}\circ\rho'_{V',U'}(s)\\
&= \rho'_{V'-Z\cap V, U'}(s)\\
&= \rho'_{V'-Z\cap V, U'-Z\cap U}\circ\rho'_{U'-Z\cap U, U'}(s) = 0
\end{aligned}$$

となる． $\rho_{V',U'}$ が関手性をみたすことを示せばよい．

$$\rho_{U',U'} = \rho'_{U',U'}\big|_{\Gamma_{Z\cap U}(U';F)} = \mathrm{id}_{F(U')}\big|_{\Gamma_{Z\cap U}(U';F)} = \mathrm{id}_{\Gamma_{Z\cap U}(U';F)}$$

である．また，$W\subset V\subset U$ を X の開集合とし，W の開集合 W' を $Z\cap W$ を閉集合として含み，$W'\subset V'\subset U'$ となるように選ぶ．このとき

$$\begin{aligned}
\rho_{W',V'}\circ\rho_{V',U'} &= \left(\rho'_{W',V'}\circ\rho'_{V',U'}\right)\big|_{\Gamma_{Z\cap U}(U';F)}\\
&= \rho'_{W',V'}\big|_{\Gamma_{Z\cap V}(V';F)}\circ\rho'_{V',U'}\big|_{\Gamma_{Z\cap U}(U';F)}\\
&= \rho'_{W',U'}\big|_{\Gamma_{Z\cap U}(U';F)}\\
&= \rho_{V',U'}
\end{aligned}$$

が成り立つ．よって $U \mapsto \Gamma_{Z\cap U}(U;F)$ は前層となる．

層になること：前層 $U \mapsto \Gamma_{Z\cap U}(U;F)$ が層となることを示す．U を X の開集合とし，$(U_i)_{i\in I}$ を U の開被覆とする．U' を U の開集合で $Z\cap U$ を閉集合として含むものとする．このとき $U'_i = U'\cap U_i$ とおくと，$(U'_i)_{i\in I}$ は U' の開被覆で，各 i に対し U'_i は $Z\cap U_i$ を閉集合として含む．実際，$Z\cap U_i = Z\cap(U_i\cap U) = (Z\cap U)\cap U_i$ なので，$U_i\subset U$ の相対位相について $Z\cap U$ は閉である．したがって，この U' と $(U'_i)_{i\in I}$ に対して貼り合わせの条件が成り立つことを示せばよい．

$$\Gamma_{Z\cap U}(U';F) \to \prod_{i\in I}\Gamma_{Z\cap U_i}(U'_i;F)$$

が単射であることを示す．$s\in\Gamma_{Z\cap U}(U';F)$ が $\rho'_{U'_i,U'}$ であるとすると，F の貼り合わせの条件から U' 上の切断として $s=0$ である．

$$\Gamma_{Z\cap U}(U';F) \to \prod_{i\in I}\Gamma_{Z\cap U_i}(U'_i;F) \to \prod_{i,j\in I}\Gamma_{Z\cap U_i\cap U_j}(U'_i\cap U'_j;F)$$

が完全であることを示す．ところで，$U'_i\cap U'_j$ は $Z\cap U_i\cap U_j$ を閉集合として含む．実際 $Z\cap(U_i\cap U_j) = (Z\cap U_i)\cap(Z\cap U_j)\subset U'_i, U'_j$ なので，とくに $Z\cap(U_i\cap U_j) = (Z\cap U_i)\cap(Z\cap U_j)\cap(U'_i\cap U'_j)$ である．$U'_i\cap U'_j\subset U'_i$ の相対位相に関して $Z\cap(U_i\cap U_j)$ は閉である．さて，$(s_i)_{i\in I}$ を U'_i 上の切断で $s_i|_{U'_i - Z\cap U_i} = 0$ となるものの族とし，各 $i,j\in I$ に対して

$$s_i|_{U'_i\cap U'_j} = s_j|_{U'_i\cap U'_j}$$

が成り立つとする．このとき，F の貼り合わせの条件から，U' 上の切断 s で各 $i\in I$ に対し $s|_{U'_i} = s_i$ となるものが存在する．$s|_{U'-Z\cap U} = 0$ となることを示す．

$$\begin{aligned}
U' - Z\cap U &= U'\cap U - Z\cap U \\
&= (U' - Z)\cap U \\
&= (U' - Z)\cap \bigcup_{i\in I} U_i \\
&= \bigcup_{i\in I}(U' - Z)\cap U_i \\
&= \bigcup_{i\in I}(U'\cap U_i - Z\cap U_i) \\
&= \bigcup_{i\in I}(U'_i - Z\cap U_i)
\end{aligned}$$

なので $(U'_i - Z\cap U_i)_{i\in I}$ は $U' - Z\cap U$ を被覆する．各 $U'_i - Z\cap U_i$ 上で $s|_{U'_i - Z\cap U_i} = s_i|_{U'_i - Z\cap U_i} = 0$ なので $s|_{U'-Z\cap U} = 0$ である．□

定義 1.1. 層 $U \mapsto \Gamma_{Z\cap U}(U;F)$ を Z に台をもつ F の切断の層とよび $\Gamma_Z(F)$ で表す[*1]．

[*1] 本多ノートだと local support functor と呼んでいるので Z が明らかなときは局所台切断の層とも呼ぶのもアリか？．

命題 1.2. Z を X の局所閉部分集合とし，F を X 上の層とする．

(i) $\mathrm{Sh}(X)$ から Ab への関手 $\Gamma_Z(X;\ \cdot\ )\colon F \mapsto \Gamma_Z(X;F)$ と $\mathrm{Sh}(X)$ から $\mathrm{Sh}(X)$ への関手 $\Gamma_Z\colon F \mapsto \Gamma_Z(F)$ は左完全である．さらに次が成り立つ．

$$\Gamma_Z(X;\ \cdot\ ) = \Gamma(X;\ \cdot\ ) \circ \Gamma_Z.$$

(ii) Z' を Z とは別の X の局所閉部分集合とする．このとき次が成り立つ．

$$\Gamma_{Z'} \circ \Gamma_Z = \Gamma_{Z\cap Z'}.$$

(iii) Z が X の開集合であるとし，$i\colon Z \hookrightarrow X$ を Z の X への包含写像とする．このとき次が成り立つ．

$$\Gamma_Z = i_* i^{-1} F$$

(iv) Z' を Z の閉部分集合とする．このとき，次の列は完全である．

$$0 \to \Gamma_{Z'}(F) \to \Gamma_Z(F) \to \Gamma_{Z-Z'}(F).$$

(v) U_1 と U_2 を X の開部分集合とする．このとき列

$$0 \to \Gamma_{U_1\cup U_2}(F) \underset{\alpha}{\to} \Gamma_{U_1}(F) \oplus \Gamma_{U_2}(F) \underset{\beta}{\to} \Gamma_{U_1\cap U_2}(F)$$

は完全である．ただし $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ と $\beta = (\beta_1, -\beta_2)$ はそれぞれ自然な射 $\Gamma_{U_1\cup U_2}(F) \to \Gamma_{U_i}(F)$ と $\Gamma_{U_i}(F) \to \Gamma_{U_1\cap U_2}(F)$（$i = 1, 2$）から引きおこされるものである．

(vi) Z_1 と Z_2 を X の閉部分集合とする．このとき列

$$0 \to \Gamma_{Z_1\cap Z_2}(F) \underset{\gamma}{\to} \Gamma_{Z_1}(F) \oplus \Gamma_{Z_2}(F) \underset{\delta}{\to} \Gamma_{Z_1\cup Z_2}(F)$$

は完全である．ただし $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ と $\delta = (\delta_1, -\delta_2)$ はそれぞれ自然な射 $\Gamma_{Z_1\cap Z_2}(F) \to \Gamma_{Z_i}(F)$ と $\Gamma_{Z_i}(F) \to \Gamma_{Z_1\cup Z_2}(F)$（$i = 1, 2$）から引きおこされるものである．

各操作の関係

ここまでに定義してきた圏 $\mathrm{Sh}(X)$ 上の関手 $\mathscr{H}om(\ \cdot\ ,\ \cdot\ )$, $\ \cdot \otimes \cdot\ $, f_*, f^{-1}, $(\ \cdot\ )_Z$, Γ_Z, $\Gamma(X;\ \cdot\ )$ の関係を調べる．

命題 1.3. $\mathscr{R}$ を X 上の環の層とし，$F \in \mathrm{Mod}(\mathscr{R})$ とする．Z を X の局所閉部分集合とするとき，次の自然な同型が存在する．

$$\mathscr{R}_Z \underset{\mathscr{R}}{\otimes} F \cong F_Z, \tag{1.2}$$

$$\mathscr{H}om_{\mathscr{R}}(\mathscr{R}_Z, F) \cong \Gamma_Z(F). \tag{1.3}$$

証明． (1.2)：左辺が (**??**) をみたすことを示す．

$$\begin{aligned}\left(\mathscr{R}_Z \underset{\mathscr{R}}{\otimes} F\right)\Big|_Z &\cong (\mathscr{R}_Z|_Z) \underset{\mathscr{R}|_Z}{\otimes} (F|_Z) \\ &\cong (\mathscr{R}|_Z) \underset{\mathscr{R}|_Z}{\otimes} (F|_Z) \\ &\cong \left(\mathscr{R} \underset{\mathscr{R}}{\otimes} F\right)\Big|_Z \cong F|_Z\end{aligned}$$

である．また，

$$\left(\mathscr{R}_Z \underset{\mathscr{R}}{\otimes} F\right)\Big|_{X-Z} \cong (\mathscr{R}_Z|_{X-Z}) \underset{\mathscr{R}|_{X-Z}}{\otimes} (F|_{X-Z}) \cong 0 \underset{\mathscr{R}|_{X-Z}}{\otimes} (F|_{X-Z}) \cong 0$$

であるから，左辺は (**??**) をみたす．よって命題**??** (i) より (1.2) がしたがう．

(1.3)：まず Z が開集合の場合と閉集合の場合に示す．その後開集合と閉集合の共通部分として表したときに示す．

(1.3)：まず Z が開集合の場合と閉集合の場合に示す．その後開集合と閉集合の共通部分として表したときに示す．

Z が開集合のとき　X の任意の開集合 U と U 上の $\mathscr{R}_Z$ の切断 $s \in \Gamma(U;\mathscr{R}_Z)$ に対し，s の台 $\operatorname{supp} s$ は $U \cap Z$ の閉集合である．実際，$\mathscr{R}|_{X-Z} = 0$ より，$x \in X - Z$ に対し $(\mathscr{R}_Z)_x = 0$ である．よってとくに $x \in U - U \cap Z$ に対して $(\mathscr{R}_Z)_x = 0$ となる．したがって，任意の $s \in \Gamma(U;\mathscr{R}_Z)$ に対し，$x \in U - U \cap Z$ ならば $s_x = 0 \in (\mathscr{R}_Z)_x = 0$ となる．すなわち $\operatorname{supp} s \subset U \cap Z$ である．台の定義から $\operatorname{supp} s$ は U の閉集合なので，$U \cap Z$ の相対位相に関しても閉集合である．この注意のもとで，$\operatorname{Hom}_{\mathscr{R}}(\mathscr{R}_Z, F)$ の制限射として定まる自然な射

$$\operatorname{Hom}_{\mathscr{R}}(\mathscr{R}_Z, F) \to \operatorname{Hom}_{\mathscr{R}|_Z}(\mathscr{R}_Z|_Z, F|_Z)$$

が同型であることがわかる．

まず単射であること示す．$\mathscr{R}$ 加群の層の射 $\varphi\colon \mathscr{R}_Z \to F$ に対し，$\varphi|_Z\colon \mathscr{R}_Z|_Z \to F|_Z$ が零射であるとする．このとき，$\varphi = 0$ であることを示す．U を X の開集合とし，$s \in \Gamma(U;\mathscr{R}_Z)$ とする．

$$\begin{aligned}\varphi_U(s)|_{U\cap Z} &= \varphi_{U\cap Z}(s|_{U\cap Z}) = 0_{U\cap Z}(s|_{U\cap Z}) = 0, \\ \varphi_U(s)|_{U-\operatorname{supp} s} &= \varphi_{U-\operatorname{supp} s}(s|_{U-\operatorname{supp} s}) = \varphi_{U-\operatorname{supp} s}(0) = 0\end{aligned}$$

であるから $U \cap Z - \operatorname{supp} s = (U \cap Z) \cap (U - \operatorname{supp} s)$ 上で

$$\varphi_U(s)|_{U\cap Z-\operatorname{supp} s} = 0$$

となる．$U = (U \cap Z) \cup (U - \operatorname{supp} s)$ であるから，F の層の条件から $\varphi_U(s) = 0$ である．

全射であることを示す．$\psi\colon \mathscr{R}_Z|_Z \to F|_Z$ を $\mathscr{R}|_Z$ 加群の層の射とする．$\mathscr{R}$ 加群の層の射 $\varphi\colon \mathscr{R}_Z \to F$ で $\varphi|_Z = \psi$ となるものを構成する．U を X の開集合とし，$s \in \Gamma(U;\mathscr{R}_Z)$ とする．

$\psi_{U\cap Z}(s|_{U\cap Z})$ と $0\in\Gamma(U-\operatorname{supp}s;F)$ は $U\cap Z-\operatorname{supp}s$ 上で

$$\psi_U(s)|_{U\cap Z-\operatorname{supp}s}=\psi_{U\cap Z-\operatorname{supp}s}(s|_{U\cap Z-\operatorname{supp}s})=0$$

となるので，$U=(U\cap Z)\cup(U-\operatorname{supp}s)$ 上の切断 t で

$$\begin{aligned} t|_{U\cap Z}&=\psi_{U\cap Z}(s|_{U\cap Z}),\\ t|_{U-\operatorname{supp}s}&=0 \end{aligned}$$

となるものがただひとつ存在する．この t に対し $\varphi_U(s)=t$ と定めれば，X の任意の開集合 U と $U\cap Z$ 上の切断 $s\in\Gamma(U\cap Z;\mathscr{R}_Z|_Z)$ に対し

$$(\varphi|_Z)_{U\cap Z}(s)=\psi_{U\cap Z}(s)$$

となる．以上より自然な射

$$\operatorname{Hom}_{\mathscr{R}}(\mathscr{R}_Z,F)\to\operatorname{Hom}_{\mathscr{R}|_Z}(\mathscr{R}_Z|_Z,F|_Z)$$

は同型である．右辺は

$$\operatorname{Hom}_{\mathscr{R}|_Z}(\mathscr{R}_Z|_Z,F|_Z)\cong\operatorname{Hom}_{\mathscr{R}|_Z}(\mathscr{R}|_Z,F|_Z)\cong\Gamma(Z;F)$$

であるから，同型で X 上の切断としたところを各開集合 U 上の切断として取り替えることで，開集合ごとの同型

$$\begin{aligned} \operatorname{Hom}_{\mathscr{R}|_U}(\mathscr{R}_Z|_U,F|_U)&\cong\operatorname{Hom}_{\mathscr{R}|_{Z\cap U}}(\mathscr{R}_Z|_{Z\cap U},F|_{Z\cap U})\\ &\cong\Gamma(Z\cap U;F)\\ &\cong\Gamma_Z(U;F) \end{aligned}$$

が得られる．よって

$$\operatorname{Hom}_{\mathscr{R}}(\mathscr{R}_Z,F)\cong\Gamma_Z(F)$$

が成り立つ．

Z が閉集合のとき　完全列

$$0\to\mathscr{R}_{X-Z}\to\mathscr{R}\to\mathscr{R}_Z\to0$$

に対して $\mathscr{H}om_{\mathscr{R}}(\,\cdot\,,F)$ を適用すると，$X-Z$ に開集合の場合を適用したものと命題 1.2 (iv) の完全列とあわせて次の図式を得る．

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathscr{H}om_{\mathscr{R}}(\mathscr{R}_Z,F) \arrow[r] \arrow[d] & \mathscr{H}om_{\mathscr{R}}(\mathscr{R},F) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathscr{H}om_{\mathscr{R}}(\mathscr{R}_{X-Z},F) \arrow[d, equal] \\ 0 \arrow[r] & \Gamma_Z(F) \arrow[r] & F \arrow[r] & \Gamma_{X-Z}(F) \end{tikzcd}$$

したがって，左に 0 を付け加えた

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathscr{H}om_{\mathscr{R}}(\mathscr{R}_Z,F) \arrow[r] \arrow[d] & \mathscr{H}om_{\mathscr{R}}(\mathscr{R},F) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathscr{H}om_{\mathscr{R}}(\mathscr{R}_{X-Z},F) \arrow[d, equal] \\ 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \Gamma_Z(F) \arrow[r] & F \arrow[r] & \Gamma_{X-Z}(F) \end{tikzcd}$$

に五項補題を適用することで (1.3) がしたがう．

Z が一般の局所閉集合のとき　開集合 U と閉集合 A を用いて $Z = U \cap A$ と表す．このとき，開集合と閉集合の場合を用いて

$$\begin{aligned}
\mathscr{H}om_{\mathscr{R}}(\mathscr{R}_Z, F) &\cong \mathscr{H}om_{\mathscr{R}}(\mathscr{R}_{U\cap A}, F) \\
&\cong \mathscr{H}om_{\mathscr{R}}((\mathscr{R}_U)_A, F) \\
&\cong \mathscr{H}om_{\mathscr{R}}\left(\mathscr{R}_U \underset{\mathscr{R}}{\otimes} \mathscr{R}_A, F\right) \\
&\cong \mathscr{H}om_{\mathscr{R}}(\mathscr{R}_U, \mathscr{H}om_{\mathscr{R}}(\mathscr{R}_A, F)) \\
&\cong \mathscr{H}om_{\mathscr{R}}(\mathscr{R}_U, \Gamma_A(F)) \\
&\cong \Gamma_A(\Gamma_A(F)) \\
&\cong \Gamma_{U\cap A}(F)
\end{aligned}$$

となる．　□

注意 1.4.　命題を用いることで他にも多くの射や同型が得られる．例えば，$f\colon Y \to X$ を連続写像，$\mathscr{R}$ を Z を X の局所閉部分集合とし，F, F_1, F_2 を $\mathscr{R}$ 加群の層，G, G_1, G_2 を $f^{-1}\mathscr{R}$ 加群の層とする．（テンソル積を考える場合は F_1, G, G_1 は右加群とする．）このとき，以下のような射や同型が存在する．

$$\left(F_1 \underset{\mathscr{R}}{\otimes} F_2\right)_Z \cong F_1 \underset{\mathscr{R}}{\otimes} (F_2)_Z \cong (F_1)_Z \underset{\mathscr{R}}{\otimes} F_2, \quad (\text{in } \mathrm{Mod}(\mathbf{Z}_X)) \tag{1.4}$$

$$\mathscr{H}om_{\mathscr{R}}((F_1)_Z, F_2) \cong \mathscr{H}om_{\mathscr{R}}(F_1, \Gamma_Z(F_2)) \cong \Gamma_Z \mathscr{H}om_{\mathscr{R}}(F_1, F_2) \tag{1.5}$$

$$f^{-1}F_Z \cong \left(f^{-1}F\right)_{f^{-1}(Z)}, \tag{1.6}$$

$$\Gamma_Z f_* G \cong f_* \Gamma_{f^{-1}(Z)}(G), \tag{1.7}$$

$$f_*G \underset{\mathscr{R}}{\otimes} F \to f_*\left(G \underset{f^{-1}\mathscr{R}}{\otimes} f^{-1}F\right), \tag{1.8}$$

$$f_*G_1 \underset{\mathscr{R}}{\otimes} f_*G_2 \to f_*\left(G_1 \underset{f^{-1}\mathscr{R}}{\otimes} G_2\right), \tag{1.9}$$

$$f_* \mathscr{H}om_{f^{-1}\mathscr{R}}(G_1, G_2) \to \mathscr{H}om_{\mathscr{R}}(f_*G_1, f_*G_2), \tag{1.10}$$

$$f^{-1} \mathscr{H}om_{\mathscr{R}}(F_1, F_2) \to \mathscr{H}om_{f^{-1}\mathscr{R}}(f^{-1}F_1, f^{-1}F_2). \tag{1.11}$$

証明. (1.4)：$\mathbf{Z}_X$ 加群の層として

$$\left(F_1 \underset{\mathscr{R}}{\otimes} F_2\right)_Z \cong \mathbf{Z}_Z \underset{\mathbf{Z}_X}{\otimes} \left(F_1 \underset{\mathscr{R}}{\otimes} F_2\right) \cong \left(\mathbf{Z}_Z \underset{\mathbf{Z}_X}{\otimes} F_1\right) \underset{\mathscr{R}}{\otimes} F_2 \cong (F_1)_Z \underset{\mathscr{R}}{\otimes} F_2,$$

$$\left(F_1 \underset{\mathscr{R}}{\otimes} F_2\right)_Z \cong \left(F_1 \underset{\mathscr{R}}{\otimes} F_2\right) \underset{\mathbf{Z}_X}{\otimes} \mathbf{Z}_Z \cong F_1 \underset{\mathscr{R}}{\otimes} \left(F_2 \underset{\mathbf{Z}_X}{\otimes} \mathbf{Z}_Z\right) \cong F_1 \underset{\mathscr{R}}{\otimes} (F_2)_Z$$

である．

(1.5) : $\mathscr{R}$ 加群として

$$\begin{aligned}
\mathscr{H}om_{\mathscr{R}}((F_1)_Z, F_2) &\cong \mathscr{H}om_{\mathscr{R}}\left(\mathscr{R}_Z \underset{\mathscr{R}}{\otimes} F_1, F_2\right) \\
&\cong \mathscr{H}om_{\mathscr{R}}(F_1, \mathscr{H}om_{\mathscr{R}}(\mathscr{R}_Z, F_2)) \\
&\cong \mathscr{H}om_{\mathscr{R}}(F_1, \Gamma_Z(F_2)), \\
\mathscr{H}om_{\mathscr{R}}((F_1)_Z, F_2) &\cong \mathscr{H}om_{\mathscr{R}}\left(\mathscr{R}_Z \underset{\mathscr{R}}{\otimes} F_1, F_2\right) \\
&\cong \mathscr{H}om_{\mathscr{R}}(\mathscr{R}_Z\, \mathscr{H}om_{\mathscr{R}}(F_1, F_2)) \\
&\underset{(1.3)}{\cong} \Gamma_Z\, \mathscr{H}om_{\mathscr{R}}(F_1, F_2)
\end{aligned}$$

である．この変形でテンソル積を用いている部分があるが，F_1 は左 $\mathscr{R}$ 加群としている．

(1.6) : $f^{-1}F_Z$ が (**??**) をみたすことを示す．Y の点 y に対して，

$$\left(f^{-1}(F_Z)\right)_y \cong (F_Z)_{f(y)} \cong \begin{cases} F_{f(y)} & f(y) \in Z \quad \text{すなわち} \quad y \in f^{-1}(Z) \\ 0 & f(y) \in X - Z \quad \text{すなわち} \quad y \in Y - f^{-1}(Z) \end{cases}$$

である．よって $F_Z|_{f^{-1}(Z)}$ は $f^{-1}F\big|_{f^{-1}(Z)}$ と同型であり $F_Z|_{Y-f^{-1}(Z)}$ は 0 である．したがって，命題**??** (i) より (1.6) が成り立つ．

(1.7) : 任意の $\mathscr{R}$ 加群の層 F に対して

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{\mathscr{R}}(F, \Gamma_Z(f_*G)) &\underset{(1.5)}{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathscr{R}}(F_Z, f_*G) \\
&\cong \mathrm{Hom}_{f^{-1}\mathscr{R}}\left(f^{-1}F_Z, G\right) \\
&\underset{(1.6)}{\cong} \mathrm{Hom}_{f^{-1}\mathscr{R}}\left((f^{-1}F)_{f^{-1}(Z)}, G\right) \\
&\underset{(1.5)}{\cong} \mathrm{Hom}_{f^{-1}\mathscr{R}}\left(f^{-1}F, \Gamma_{f^{-1}(Z)}(G)\right) \\
&\cong \mathrm{Hom}_{\mathscr{R}}\left(F, f_*\Gamma_{f^{-1}(Z)}(G)\right)
\end{aligned}$$

が成り立つ．したがって米田の補題から (1.7) がしたがう．

(1.8) : 次の射の列を考える．

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}(G \otimes f^{-1}F, G \otimes f^{-1}F) &\underset{(\eta_G \otimes f^{-1}F)^*}{\longrightarrow} \mathrm{Hom}(f^{-1}f_*G \otimes f^{-1}F, G \otimes f^{-1}F) \\
&\cong \mathrm{Hom}(f^{-1}(f_*G \otimes F), G \otimes f^{-1}F) \\
&\cong \mathrm{Hom}\left(f_*G \otimes F, f_*\left(G \otimes f^{-1}F\right)\right).
\end{aligned}$$

ただし，最初の $(\eta_G \otimes f^{-1}F)^*$ は随伴の余単位 $\eta_G \colon f^{-1}f_*G \to G$ に $f^{-1}F$ の恒等射を掛けたものの引き戻しである．以上の射の合成による $G \otimes f^{-1}F$ の恒等射の像が

$$f_*G \otimes F \to f_*\left(G \otimes f^{-1}F\right)$$

を定める．

(1.9)：次の射の列を考える．

$$\begin{aligned}\operatorname{Hom}_{f^{-1}\mathscr{R}}\left(G_1 \underset{f^{-1}\mathscr{R}}{\otimes} G_2, G_1 \underset{f^{-1}\mathscr{R}}{\otimes} G_2\right) &\to \operatorname{Hom}_{f^{-1}\mathscr{R}}\left(f^{-1}f_*G_1 \underset{f^{-1}\mathscr{R}}{\otimes} f^{-1}f_*G_2, G_1 \underset{f^{-1}\mathscr{R}}{\otimes} G_2\right)\\ &\cong \operatorname{Hom}_{f^{-1}\mathscr{R}}\left(f^{-1}\left(f_*G_1 \underset{\mathscr{R}}{\otimes} f_*G_2\right), G_1 \underset{f^{-1}\mathscr{R}}{\otimes} G_2\right)\\ &\cong \operatorname{Hom}_{f^{-1}\mathscr{R}}\left(f_*G_1 \underset{\mathscr{R}}{\otimes} f_*G_2, f_*\left(G_1 \underset{f^{-1}\mathscr{R}}{\otimes} G_2\right)\right)\end{aligned}$$

最初の射は随伴の余単位のテンソル積

$$\eta_{G_1} \otimes \eta_{G_2} \colon G_1 \underset{f^{-1}\mathscr{R}}{\otimes} G_2 \to f^{-1}f_*G_1 \underset{f^{-1}\mathscr{R}}{\otimes} f^{-1}f_*G_2$$

による引き戻しの定める射である．以上の射の合成による $G_1 \otimes_{f^{-1}\mathscr{R}} G_2$ の恒等射の像が

$$f_*G_1 \underset{\mathscr{R}}{\otimes} f_*G_2 \to f_*\left(G_1 \underset{f^{-1}\mathscr{R}}{\otimes} G_2\right)$$

を定める．

(1.10)：Y の開集合 V に対し，

$$\operatorname{Hom}_{(f^{-1}\mathscr{R})|_V}\left(G_1|_V, G_2|_V\right) \underset{f^{-1}\mathscr{R}(V)}{\otimes} G_1(V) \to G_2(V)$$

が

$$\left(\varphi|_V \colon G_1|_V \to G_2|_V\right) \otimes s \mapsto \left(\varphi|_V\right)_V(s) = \varphi_V(s)$$

により定まる．したがって，$f^{-1}\mathscr{R}$ 加群の層の射

$$\alpha \colon \mathscr{H}\!om_{f^{-1}\mathscr{R}}\left(G_1, G_2\right) \underset{f^{-1}\mathscr{R}}{\otimes} G_1 \to G_2$$

が存在する．次の射の列を考える．

$$\begin{aligned}&\operatorname{Hom}_{f^{-1}\mathscr{R}}\left(\mathscr{H}\!om_{f^{-1}\mathscr{R}}(G_1, G_2) \underset{f^{-1}\mathscr{R}}{\otimes} G_1, G_2\right)\\ &\to \operatorname{Hom}_{\mathscr{R}}\left(f_*\left(\mathscr{H}\!om_{f^{-1}\mathscr{R}}(G_1, G_2) \underset{f^{-1}\mathscr{R}}{\otimes} G_1\right), f_*G_2\right)\\ &\to \operatorname{Hom}_{\mathscr{R}}\left(f_*\mathscr{H}\!om_{f^{-1}\mathscr{R}}(G_1, G_2) \underset{\mathscr{R}}{\otimes} f_*G_1, f_*G_2\right)\\ &\cong \operatorname{Hom}_{\mathscr{R}}\left(f_*\mathscr{H}\!om_{f^{-1}\mathscr{R}}(G_1, G_2), \mathscr{H}\!om_{\mathscr{R}}(f_*G_1, f_*G_2)\right).\end{aligned}$$

最初の射は順像関手の定める射である．2 番目の射は $\mathscr{H}\!om_{f^{-1}\mathscr{R}}(G_1, G_2)$ と G_1 に (1.9) を適用した

$$f_*\mathscr{H}\!om_{f^{-1}\mathscr{R}}(G_1, G_2) \underset{\mathscr{R}}{\otimes} f_*G_1 \to f_*\left(\mathscr{H}\!om_{f^{-1}\mathscr{R}}(G_1, G_2) \underset{f^{-1}\mathscr{R}}{\otimes} G_1\right)$$

による引き戻しの定める射である．以上の射の列の合成による α の像が

$$f_* \mathscr{H}om_{f^{-1}\mathscr{R}}(G_1, G_2) \to \mathscr{H}om_{\mathscr{R}}(f_*G_1, f_*G_2)$$

をひきおこす．

(1.11)：次の射の列を考える．

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Hom}_{\mathscr{R}}\left(\mathscr{H}om_{\mathscr{R}}(F_1,F_2)\underset{\mathscr{R}}{\otimes}F_1, F_2\right)\\
&\to \mathrm{Hom}_{f^{-1}\mathscr{R}}\left(f^{-1}\left(\mathscr{H}om_{\mathscr{R}}(F_1,F_2)\underset{\mathscr{R}}{\otimes}F_1\right), f^{-1}F_2\right)\\
&\cong \mathrm{Hom}_{f^{-1}\mathscr{R}}\left(f^{-1}\mathscr{H}om_{\mathscr{R}}(F_1,F_2)\underset{f^{-1}\mathscr{R}}{\otimes}f^{-1}F_1, f^{-1}F_2\right)\\
&\cong \mathrm{Hom}_{f^{-1}\mathscr{R}}\left(f^{-1}\mathscr{H}om_{\mathscr{R}}(F_1,F_2), \mathscr{H}om_{f^{-1}\mathscr{R}}(f^{-1}F_1, f^{-1}F_2)\right).
\end{aligned}$$

(1.10) の証明で構成した α と同様にして $\mathscr{R}$ 加群の層の射

$$\beta\colon\ \mathscr{H}om_{\mathscr{R}}(F_1,F_2)\underset{\mathscr{R}}{\otimes}F_1 \to F_2$$

が定まる．射の列の合成による β の像が

$$f^{-1}\mathscr{H}om_{\mathscr{R}}(F_1,F_2) \to \mathscr{H}om_{f^{-1}\mathscr{R}}(f^{-1}F_1, f^{-1}F_2)$$

をひきおこす． □

参考文献

[BouTG1] ブルバキ, 位相 1, 東京図書, 1968.

[BouTVS] ブルバキ, 位相線形空間 1, 東京図書, 1968.

[B+84] Borel, *Intersection Cohomology*, Progress in Mathematics, 50, Birkhäuser, 1984.

[G58] Grauert, *On Levi's problem and the embedding of real analytic manifolds*, Ann. Math. 68, 460–472 (1958).

[GP74] Victor Guillemin, Alan Pollack, *Differential Topology*, Prentice-Hall, 1974.

[HS23] Andreas Hohl, Pierre Schapira, *Unusual Functorialities for weakly constructible sheaves*, 2023.

[KS90] Masaki Kashiwara, Pierre Schapira, *Sheaves on Manifolds*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 292, Springer, 1990.

[KS06] Masaki Kashiwara, Pierre Schapira, *Categories and Sheaves*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 332, Springer, 2006.

[Le13] John M. Lee, *Introduction to Smooth Manifolds*, Second Edition, Graduate Texts in Mathematics, **218**, Springer, 2013.

[Mo76] 森本光生, 佐藤超函数入門, 共立出版, 1976.

[R55] de Rham, *Variétés différentiables*, Hermann, Paris, 1955.

[Sa59] Mikio Sato, *Theory of Hyperfunctions*, 1959–60.

[S66] Schwartz, *Théorie de distributions*, Hermann, Paris, 1966.

[Sh16] 志甫淳, 層とホモロジー代数, 共立出版, 2016.

[SP] The Stacks Project.

[Sp65] Michael Spivak, *Calculus on Manifolds*, Benjamin, 1965.

[Ike21] 池祐一, 超局所層理論概説, 2021.

[Tak17] 竹内潔, $\mathcal{D}$ 加群, 共立出版, 2017.

[Ue] 植田一石, ホモロジー的ミラー対称性, `https://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~kazushi/course/hms.pdf` 2024/02/04 最終閲覧.