Poincaré-Verdier 双対性

大柴寿浩

はじめに

X, Y を局所コンパクト空間とし，$f\colon Y \to X$ を連続写像とする．A を大域次元が有限な可換環とする．$F \in \mathsf{D}^+(A_X)$, $G \in \mathsf{D}^+(A_Y)$ とする．

$\mathrm{R}f_!\colon \mathsf{D}^+(A_Y) \to \mathsf{D}^+(A_X)$ の右随伴関手 $f^!\colon \mathsf{D}^+(A_X) \to \mathsf{D}^+(A_Y)$ を構成するのが目標.

1　例

随伴を仮定した場合，層を具体的に設定するとどのような結果が従うか見てみる．$X = \{\mathrm{pt}\}$, $F = A_{\{\mathrm{pt}\}}$, $G = A_Y$ のとき，

$$\begin{aligned}\mathrm{RHom}_{A_X}(\mathrm{R}a_{Y!}A_Y, A) &= \mathrm{RHom}_{A_Y}(A_Y, a_Y^! A)\\ &= \mathrm{R}\Gamma\left(Y; \mathrm{R}\mathscr{H}om_{A_Y}(A_Y, a_Y^! A)\right)\\ &= \mathrm{R}\Gamma\left(Y; a_Y^! A\right)\end{aligned}$$

である．$\omega_Y\colon a_Y^! A$ とおく．開集合 $U \subset Y$ に対し，

$$\begin{aligned}\mathrm{R}\Gamma(U; \omega_Y) &\cong \mathrm{R}\Gamma\left(U; \mathrm{R}\mathscr{H}om_A(A_U, a_Y^! A)\right)\\ &\cong \mathrm{RHom}_{A_U}(A_U, A)\end{aligned}$$

なので，

$$\begin{aligned}\mathrm{RHom}_{A_U}(A_U, a_Y^! A) &\cong \mathrm{RHom}_A(\mathrm{R}\Gamma_c(Y; A_U), A)\\ &\cong \mathrm{RHom}_A(\mathrm{R}\Gamma_c(U; A_U), A).\end{aligned}$$

ここで，U が $\mathbf{R}^n$ と同相であるとすると，

$$\mathrm{R}\Gamma_c(U; A_U) \cong A[-n]$$

したがって，

$$\cong \mathrm{RHom}_A(\mathrm{R}\Gamma_c(U; A_U), A) \cong A[n]$$

である．つまり，$\omega_Y = a_Y^! A$ は

$$H^k(\omega_Y) = \begin{cases} 0 & (k \neq -n)\\ \mathrm{rank} = 1 \text{ の局所定数層} & (k = -n)\end{cases}$$

2 構成

2.1 構成

X, Y を局所コンパクト空間とし，$f\colon Y \to X$ を連続写像とする．A を大域次元が有限な可換環とする．$F \in \mathsf{D}^+(A_X)$, $G \in \mathsf{D}^+(A_Y)$ とする．

$\mathrm{R}\, f_!\colon \mathsf{D}^+(A_Y) \to \mathsf{D}^+(A_X)$ の右随伴関手 $f^!\colon \mathsf{D}^+(A_X) \to \mathsf{D}^+(A_Y)$ を構成する．まず，開集合 $V \subset Y$ に対し，$f^!F$ の V 上の切断に関する条件を見てみる．

$$\mathrm{R}\Gamma(V; f^!F) = \mathrm{RHom}_{A_Y}(A_V, f^!F) = \mathrm{RHom}_{A_X}(\mathrm{R}\, f_! A_V, F)$$

となることから，$f^!F$ は $V \mapsto \mathrm{RHom}_{A_X}(\mathrm{R}\, f_! A_V, F)$ という対応でなければならない．$\mathrm{R}\, f_!$ を計算するには c 柔軟分解 $A_V \sim K$ を取ればよく，さらに F が入射的であれば，

$$\mathrm{RHom}_{A_X}(\mathrm{R}\, f_! A_V, F) = \mathrm{Hom}_{A_X}(f_! K_V, F)$$

となって，結局

$$\mathrm{R}\Gamma(V; f^!F) = \mathrm{Hom}_{A_X}(f_! K_V, F)$$

とできる．

■f に関する仮定

定義 2.1. Y 上の層 G が f 柔軟であるとは，各点 $x \in X$ に対し，$G|_{f^{-1}(x)}$ が c 柔軟であることをいう．

G が f 柔軟であることと，任意の開部分集合 $V \subset Y$ と $j \neq 0$ に対し，$\mathrm{R}^j f_! G_V = 0$ となることと同値である．

次を仮定する．

$$f_!\colon \mathrm{Mod}(\mathbf{Z}_Y) \to \mathrm{Mod}(\mathbf{Z}_X) \text{ のコホモロジー次元は有限である．} \tag{2.1}$$

つまり，整数 $r \geqq 0$ で，全ての $j > r$ に対し $\mathrm{R}^j f_! = 0$ となるものが存在する．(2.1) は次の条件と同値である．

$$\begin{cases} \text{任意の } G \in \mathrm{Sh}(Y) \text{ に対し，完全列} \\ 0 \to G \to G^0 \to \cdots \to G^r \to 0 \\ \text{で，どの } G^j \text{ も } f \text{ 柔軟であるものが存在する．} \end{cases} \tag{2.2}$$

$$\begin{cases} \text{完全列 } G^0 \to \cdots \to G^r \to 0 \\ \text{において，} j < r \text{ に対し } G^j \text{ が } f \text{ 柔軟ならば，} \\ G^r \text{ が } f \text{ 柔軟となる．} \end{cases} \tag{2.3}$$

$f_!$ のコホモロジー次元が $\leqq r$ となるのは，任意の $x \in X$ に対し，$\Gamma_c(f^{-1}(x); \cdot)$ のコホモロジー次元が $\leqq r$ となるときである．実際，$f_!|_{f^{-1}(x)} F = \Gamma_c(f^{-1}(x); F) = 0$ となるので．

■**構成**　以上の仮定は，

$$\mathrm{R}\Gamma(V; f^! F) = \mathrm{Hom}_{A_X}(f_! K_V, F)$$

の構成をするためだった．$f_! K_V$ の分解をしたくて，その長さが有限になるという仮定である．

さて，K を $\mathbf{Z}_Y$ 加群，F を A_X 加群とする．このとき，A 加群の前層 $f^!_K F$ を次で定める．$V \in \mathsf{Open}(Y)$ に対し，

$$(f^!_K F)(V) \coloneqq \mathrm{Hom}_{A_X}\left(f_!\left(A_Y \underset{\mathbf{Z}_Y}{\otimes} K_V\right), F\right)$$

とする．制限射は $K_{V'} \to K_V$ から引き起こされるもの．

補題 2.2.　K を平坦かつ f 柔軟な $\mathbf{Z}_Y$ 加群とする．

(i) Y 上の任意の層 G に対し $G \otimes_{\mathbf{Z}_Y} K$ は f 柔軟である．

(ii) $G \mapsto f_!(G \otimes_{\mathbf{Z}_Y} K)$ は $\mathrm{Mod}(\mathbf{Z}_Y)$ から $\mathrm{Mod}(\mathbf{Z}_X)$ への完全関手である．

証明. (i) Y 上の任意の層 G に対し，[KS90, Prop.2.4.12] の証明から，分解

$$\to G^{-r} \to \cdots \to G^0 \to G \to 0$$

で，各 G^j が $\mathbf{Z}_V$ の直和となるものが存在する．

復習：　$G \in \mathrm{Mod}(\mathbf{Z}_Y)$ に対し，

$$\mathfrak{S} \coloneqq \{(V, s); V \in \mathsf{Open}(Y), s \in \Gamma(V; G)\}$$

とし，各 $(V, s) \in \mathfrak{S}$ に対し，$\mathbf{Z}_Y(V, s) \coloneqq \mathbf{Z}_V \in \mathrm{Mod}(\mathbf{Z}_Y)$ とおき，$P \coloneqq \bigoplus_{(V,s)\in\mathfrak{S}} \mathbf{Z}_Y(V, s)$ とおく．$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}_Y}(\mathbf{Z}_V, G) \cong \Gamma(V; G)$ より，各 $\varphi \colon \mathbf{Z}_V \to G$ に対し，$s \in G(V)$ がただ一つある．これにより全射 $P \twoheadrightarrow G$ が得られる．各 $y \in Y$ に対し，$P_y = \bigoplus_{(V,s), y\in V} \mathbf{Z}$ である．(復習終わり)

$\mathrm{Ker}(P \to G)$ に対し，同様に $\mathbf{Z}_Y$ の直和からの全射が構成できる．これを繰り返して，分解

$$\to G^{-r} \to \cdots \to G^0 \to G \to 0$$

で，$\mathbf{Z}_V$ の直和となるものが得られる．よって，どの j についても，$G^j \otimes_{\mathbf{Z}_Y} K$ は f 柔軟である．実際，$(\bigoplus \mathbf{Z}_V) \otimes_{\mathbf{Z}_Y} K \cong \bigoplus(\mathbf{Z}_V \otimes_{\mathbf{Z}_Y} K) \cong \bigoplus K_V$ であり，茎ごとに c 柔軟なので．この分解に $- \otimes_{\mathbf{Z}_Y} K$ をあてた

$$\to G^{-r} \otimes_{\mathbf{Z}_Y} K \to \cdots \to G^0 \otimes_{\mathbf{Z}_Y} K \to G \otimes_{\mathbf{Z}_Y} K \to 0$$

は K が平坦なので完全である．したがって，r を十分大きくとれば，$f_!$ のコホモロジー次元が有限であるという仮定から，(2.3) を用いて，$G \otimes_{\mathbf{Z}_Y} K$ も f 柔軟であることが従う．

(ii) $\mathrm{Sh}(Y)$ の完全列

$$0 \to G_1 \to G_2 \to G_3 \to 0$$

に対し，

$$0 \to G_1 \otimes_{\mathbf{Z}_Y} K \to G_2 \otimes_{\mathbf{Z}_Y} K \to G_3 \otimes_{\mathbf{Z}_Y} K \to 0$$

は f 柔軟である．いま，

$$0 \to f_!(G_1 \otimes_{\mathbf{Z}_Y} K) \to f_!(G_2 \otimes_{\mathbf{Z}_Y} K) \to f_!(G_3 \otimes_{\mathbf{Z}_Y} K) \to 0$$

のストーク

$$0 \to (f_!(G_1 \otimes_{\mathbf{Z}_Y} K))_x \to (f_!(G_2 \otimes_{\mathbf{Z}_Y} K))_x \to (f_!(G_3 \otimes_{\mathbf{Z}_Y} K))_x \to 0 \tag{$\natural$}$$

を考えると，これらは，$W = f^{-1}(x)$ とおくとき

$$0 \to \Gamma_c(W; (G_1 \underset{\mathbf{Z}_Y}{\otimes} K)|_W) \to \Gamma_c(W; (G_2 \underset{\mathbf{Z}_Y}{\otimes} K)|_W) \to \Gamma_c(W; (G_3 \underset{\mathbf{Z}_Y}{\otimes} K)|_W) \to 0$$

である．$G_j \underset{\mathbf{Z}_Y}{\otimes} K$ たちは f 柔軟なので，これらは W で c 柔軟であり，$f_!$ が完全であることから，($\natural$) は完全である．よって，もとの層の系列も完全である． □

補題 2.3. K を平坦かつ f 柔軟な $\mathbf{Z}_Y$ 加群とし，F を A_X 入射加群とする．

(i) 前層 $f_K^! F$ は層である．

(ii) $G \in \mathrm{Mod}(A_Y)$ に関して関手的な自然同型

$$\mathrm{Hom}_{A_X}(f_!(G \otimes_{\mathbf{Z}_Y} K), F) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{A_Y}(G, f_K^! F)$$

が存在する．また，$f_K^! F$ は A_Y 入射加群である．

証明. (i) $- \otimes_{\mathbf{Z}_Y} K$ をたんに $- \otimes K$ で表す．V を Y の開集合とし，$(V_j)_j$ を V の開被覆とする．

$$\bigoplus_{j,k} A_{V_j \cap V_k} \to \bigoplus_j A_{V_j} \to A_V \to 0$$

は完全である．[*1] これに完全関手 $f_!(- \otimes K)$ をあてて完全列

$$\bigoplus_{j,k} f_!(A_{V_j \cap V_k} \otimes K) \to \bigoplus_j f_!(A_{V_j} \otimes K) \to f_!(A_V \otimes K) \to 0$$

を得る．さらに左完全な反変関手 $\mathrm{Hom}_{A_X}(-, F)$ をあてて，完全列

$$0 \to \mathrm{Hom}_{A_X}(f_!(A_V \otimes K), F) \to \mathrm{Hom}_{A_X}(\bigoplus_j f_!(A_{V_j} \otimes K), F) \to \mathrm{Hom}_{A_X}(\bigoplus_{j,k} f_!(A_{V_j \cap V_k} \otimes K), F)$$

を得る．これは極限を交換すれば

$$0 \to f_K^! F(V) \to \prod_j f_K^! F(V_j) \to \prod_{j,k} f_K^! F(V_j \cap V_k)$$

[*1] 開集合は小さい方から大きい方へ随伴射が生える．$A_{jk} \to A_j, A_k$ はそれぞれ $s_{jk} \mapsto s_{jk}$ と $s_{jk} \mapsto -s_{jk}$ で定める．A_{V_j} の台は V に含まれるので，各切断の和の台も被覆の条件から V に含まれるので全射の方も成り立つ．

であり，$f_K^! F$ が層であることが示された．

(ii) アーベル群の射

$$\alpha(G)\colon \operatorname{Hom}_{A_X}(f_!(G\otimes K),F)\to \operatorname{Hom}_{A_Y}(G,f_K^! F)$$

を定める．$\phi\in \operatorname{Hom}_{A_X}(f_!(G\otimes K),F)$ とする．$V\in \mathsf{Open}(Y)$ に対し，次 A_X 加群の射がある．

$$\begin{aligned} G(V)\otimes f_!(A_Y\otimes K_V) &\xrightarrow[?]{} f_!(G\otimes K_V)\\ &\xrightarrow[\text{adj.}]{} f_!(G\otimes K)\\ &\xrightarrow[\phi]{} F. \end{aligned}$$

よって，Hom・テンソル随伴から，$G(V)$ から $f_K^! F(V)=\operatorname{Hom}(f_!(A_Y\otimes K_V),F)$ への射を得る．この射は $V\in \mathsf{Open}(Y)$ について関手的．よって，$\alpha(G)(\phi)\in \operatorname{Hom}_{A_Y}(G,f_K^! F)$.

$\alpha(G)$ が同型であることを

(a) $G=A_V$ の場合，
(b) $G=\bigoplus_j A_{V_j}$ の場合，
(c) 一般の場合

の 3 段階で示す．

(a) $G=A_V$ のとき，

$$\begin{aligned} \operatorname{Hom}_{A_X}(f_!(G\otimes K),F) &\cong \operatorname{Hom}_{A_X}(f_!(A_V\otimes K),F)\\ &\cong (f_K^! F)(V)\\ &\cong \operatorname{Hom}_{A_Y}(A_V,f_K^! F)\\ &= \operatorname{Hom}_{A_Y}(G,f_K^! F) \end{aligned}$$

なので同型．

(b) $G=\bigoplus_j A_{V_j}$ のとき，$\alpha(G)=\prod_j \alpha(A_{V_j})$ なので，(a) の結果からこれも同型．

(c) G が一般のとき，[KS90, Prop.2.4.12] より，完全列

$$0\to G''\to G'\to G\to 0$$

で，$G'\cong \bigoplus_j A_{V_j}$ となるものがある．（G'' は全射 $G'\twoheadrightarrow G$ の核として得られる．）よって，(b) より $\alpha(G')$ は同型．次の可換図式を考える．

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \longrightarrow & \operatorname{Hom}(f_!(G\otimes K),F) & \longrightarrow & \operatorname{Hom}(f_!(G'\otimes K),F) & \longrightarrow & \operatorname{Hom}(f_!(G''\otimes K),F) \\ & \downarrow{\scriptstyle \alpha(G)} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha(G')} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha(G'')} \\ 0 \longrightarrow & \operatorname{Hom}(G,f_K^! F) & \longrightarrow & \operatorname{Hom}(G',f_K^! F) & \longrightarrow & \operatorname{Hom}(G'',f_K^! F). \end{array}$$

補題 2.2 より，2 つの行はどちらも完全．$\alpha(G')$ は同型なので，左の可換性から $\alpha(G)$ は単射．同じことを $\alpha(G'')$ にやれば $\alpha(G'')$ は単射．よって，五項補題から $\alpha(G)$ は同型．（左に 0 の同型を追加する．）

$\mathrm{Hom}_{A_Y}(-, f_K^! F)$ が完全関手であることから，$f_K^! F$ が入射加群であることもわかる． $\square$

$f_!$ のコホモロジー次元を $\leqq r$ とする．

補題 2.4. $\mathbf{Z}_Y$ に対し，分解 $0 \to \mathbf{Z}_Y \to K^0 \to \cdots \to K^r \to 0$ で，各 K^j が平坦かつ f 柔軟な $\mathbf{Z}_Y$ 加群となるものが存在する．

証明. 入射分解と同じように分解を構成する．

入射分解の復習 $\hat{Y} \coloneqq (Y, P(Y))$ を Y に離散位相を入れた空間とし，$p\colon \hat{Y} \to Y$ を自然な連続写像とする．F を $\mathbf{Z}_Y$ 加群とする．$p^{-1}F \in \mathrm{Mod}(\mathbf{Z}_{\hat{Y}})$ に対し，入射加群 $I \in \mathrm{Mod}(\mathbf{Z}_{\hat{Y}})$ への単射

$$0 \to p^{-1}F \to I$$

があったとする．この I と単射に対し，左完全関手 p_* を適用すると，$0 \to F \to p_* I$ は $\mathrm{Mod}(\mathbf{Z}_Y)$ における完全列である．（ここに $p_* p^{-1} F = (\mathrm{id}_Y)_* (\mathrm{id}_Y)^{-1} = F$ である．）p_* は入射的対象を保つので，$p_* I$ は入射加群である．

最初の完全列を構成する．$F' \in \mathrm{Mod}(\mathbf{Z}_{\hat{Y}})$ とすると，各点 $y \in Y$ に対し，$\mathrm{Mod}(\mathbf{Z}_{\hat{Y},y}) = \mathrm{Mod}(\mathbf{Z})$ における完全列

$$0 \to F'_y \to I_y$$

が存在する．（$\mathrm{Mod}(\mathbf{Z})$ は充分入射的対象を持つのだった．）単射の積は単射なので，Y 全体で積を取った

$$0 \to \prod_{y \in Y} F'_y \to \prod_{y \in Y} I_y$$

も完全である．したがって，$\mathrm{Mod}(\mathbf{Z}_{\hat{Y}})$ での入射加群 $I = \prod_{y \in Y} I_y$ への単射 $F \to I$ が得られた．

この操作を余核に対して繰り返し行えば，$F \in \mathrm{Mod}(\mathbf{Z}_Y)$ の入射分解が得られる．

(復習終わり)

$\mathbf{Z}_Y$ の入射分解を

$$0 \to \mathbf{Z}_Y \to K^0 \to \cdots \to K^r \to 0$$

とする．入射加群は c 柔軟であり，したがって f 柔軟である．したがって，この分解は c 柔軟分解である．

各項の平坦性を見る． $\square$

参考文献

[KS90] Masaki Kashiwara, Pierre Schapira, *Sheaves on Manifolds*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 292, Springer, 1990.