# 向きづけ層

toshi2019

2024 年 10 月 11 日

## 1 局所自由層

$X$ を局所コンパクト空間とする．$\mathcal{A}$ を $X$ 上の環とする．まず，局所自由層を定義しよう．

> **定義 1.1** (局所自由層)**.** $k \geqq 0$ を整数とし，$\mathcal{L}$ を $\mathcal{A}$ 加群とする．$X$ の開被覆 $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ で，どの $i \in I$ に対しても $\mathcal{L}|_{U_i} \cong \mathcal{A}|_{U_i}^{\oplus k}$ となるものが存在するとき，$\mathcal{L}$ は階数 $k$ の**局所自由層** (locally free sheaf) であるという．階数 1 の局所自由層のことを**可逆層** (invertible sheaf) とよぶ.

$\mathbf{k}$ を大域次元が有限な環とする．$\mathcal{A} = \mathbf{k}_X$ のとき，局所自由層は局所定数層である．可逆層は局所的に $\mathbf{k}_X$ と同型な層である．

$L \in \mathrm{Mod}(\mathbf{k}_X)$ とする．$L^{\otimes -1} := \mathrm{R}\mathscr{H}om_{\mathbf{k}_X}(L, \mathbf{k}_X)$ とおく．$\mathbf{k}$ が体ならば，$\mathbf{k}_X$ は入射的なので，$\mathrm{R}\mathscr{H}om_{\mathbf{k}_X}(L, \mathbf{k}_X) = \mathscr{H}om_{\mathbf{k}_X}(L, \mathbf{k}_X)$ が成り立つ.

## 2 超関数

$$\mathrm{R}\Gamma_M(\mathcal{O}_X) \otimes \mathrm{or}_M[n] \cong \mathrm{R}\mathscr{H}om_{\mathbf{C}_X}(\mathrm{D}'_M \mathbf{C}_{X\,M}, \mathcal{O}_X). \tag{2.1}$$

**証明.** まず $\mathrm{D}'_X \mathbf{C}_{X\,M} \cong \mathrm{or}_M[-n]$ より，右辺は

$$\mathrm{R}\mathscr{H}om_{\mathbf{C}_X}(\mathrm{D}'_M \mathbf{C}_{X\,M}, \mathcal{O}_X) \cong \mathrm{R}\mathscr{H}om_{\mathbf{C}_X}(\mathrm{or}_M, \mathcal{O}_X)[n]$$

である．一方左辺は

$$\mathrm{R}\Gamma_M(\mathcal{O}_X) \otimes \mathrm{or}_M \cong \mathrm{R}\mathscr{H}om(\mathbf{C}_{X\,M}, \mathcal{O}_X) \otimes \mathrm{or}_M$$

である．よって (2.1) が成り立つのは

$$\mathrm{R}\mathscr{H}om(\mathbf{C}_{X\,M}, \mathcal{O}_X) \otimes \mathrm{or}_M \cong \mathrm{R}\mathscr{H}om_{\mathbf{C}_X}(\mathrm{or}_M, \mathcal{O}_X) \tag{$*$}$$

となるときである． □

**■質問について** 可逆層で同型が ±1 なので，$\mathrm{or}_M \cong \mathrm{or}_M^{\otimes -1}$

($*$) は

$$\mathrm{R}\mathscr{H}om_{\mathbf{C}_X}(\mathrm{or}_M^{\otimes -1}, \mathcal{O}_X) \to \mathrm{R}\mathscr{H}om(\mathbf{C}_{X\,M}, \mathcal{O}_X) \otimes \mathrm{or}_M$$

右は

$$\begin{aligned}\mathrm{R}\mathscr{H}om(\mathbf{C}_{X\,M}, \mathcal{O}_X) \otimes \mathrm{or}_M &\to \mathrm{R}\mathscr{H}om(\mathbf{C}_{X\,M}, \mathcal{O}_X \otimes \mathrm{or}_M^{\otimes -1}) \\ &\to \mathrm{R}\mathscr{H}om(\mathbf{C}_{X\,M}, \mathrm{R}\mathscr{H}om(\mathrm{or}_M, \mathcal{O}_X)) \\ &\cong \mathrm{R}\mathscr{H}om(\mathbf{C}_{X\,M} \otimes \mathrm{or}_M^{\otimes -1}, \mathcal{O}_X)\end{aligned}$$