リーマン面

大柴 寿浩

概要

本レポートは 4 章からなる．第 1 章では，複素多様体とリーマン面を定義し，その間の射を定義する．第 2 章では，リーマン面として自明でないもののうち，最も簡単な例であるリーマン球面（射影直線）を定義する．第 3 章では，その次に簡単なリーマン面である複素トーラス（楕円曲線）を定義する．ガウス平面上定義された有理形関数のうち，実数上一次独立な 2 つの周期を持つ関数を楕円関数というが，これは複素トーラス上で定義された有理形関数というのと同じことである．この事実を示したのち，楕円関数の具体例として，Weierstrass の $\wp$ 関数を定義する．第 4 章では，まず，リーマン面の間の射が与えられたとき，その分岐点と写像度が定まることを（紙面の都合上証明抜きで）述べる．最後に Weierstrass の $\wp$ 関数を用いて，複素トーラスからリーマン球面への正則射を定義する．これが 4 点で分岐する 2 重被覆であることを示すことが目的である．

記号

次の記号について断りなく用いることがある．

- 添字 : I を添字集合とする何らかの族 $(x_i)_{i\in I}$ を $(x_i)_i$ や (x_i) のように略記することがある．
- 位相空間 X に対し $\mathrm{Aut}_{\mathsf{Top}}(X) \coloneqq \{X$ 上の自己同相写像 $\}$ とかく．
- ガウス平面に含まれる，点 α を中心とする半径 r の開円板を $D(\alpha; r) \coloneqq \{z \in \mathbf{C}; |z-\alpha| < r\}$ で表す．

1 リーマン面

1.1 複素多様体とリーマン面

$\mathbf{C}^n$ での座標が $z = (z^1, \ldots, z^n)$ であるとき，複素数空間 $\mathbf{C}^n$ を $\mathbf{C}^n_z$ とか $\mathbf{C}^n_{(z^1,\ldots,z^n)}$ とかく．$\mathcal{U}$ を $\mathbf{C}^n$ の空でない開集合とする．このとき，$\mathcal{U}$ で定義された複素数値関数 f は標準座標を用いて $f(z) = f(z^1, \ldots, z^n)$ とかける．

f が $\mathcal{U}$ で**正則**であるとは，$f(z)$ が $\mathcal{U}$ で連続であり，各変数 z^j $(j = 1, \ldots, n)$ について正則であることをいう．

定義 1.1 (n 次元複素多様体，リーマン面)**.** X を位相空間とする．$(\varphi_i\colon U_i \to \mathcal{U}_i)_{i\in I}$ を写像の族とする．このとき，対 $(X, (\varphi_i)_i)$ が次の条件 (1)–(4) をみたすとき，X を台集合とし $(\varphi_i)_i$ を座標近傍系とする n **次元複素多様体** (n-dimensional complex manifold) という．

(1) X は空集合でなく，第 2 可算公理を満たす連結なハウスドルフ空間である．
(2) すべての $i \in I$ に対して U_i は X の空でない開集合であり，$(U_i)_i$ は X の開被覆である．
(3) すべての $i \in I$ に対して，$\mathcal{U}_i$ は $\mathbf{C}^n_{(z^1,\ldots,z^n)}$ の空でない開集合であり $\varphi_i\colon U_i \to \mathcal{U}_i$ は同相である．
(4) 任意の $i \neq j \in I$ で $U_i \cap U_j \neq \varnothing$ をみたすものに対して $\mathcal{U}_{ij} \coloneqq \varphi_j(U_i \cap U_j) \subset \mathcal{U}_j$ とおくとき，$\varphi_{ij} \coloneqq \varphi_i \circ \varphi_j^{-1}|_{\mathcal{U}_{ij}} : \mathcal{U}_{ij} \to \mathcal{U}_{ji}$ は正則である．

とくに，1 次元複素多様体を**リーマン面** (Riemann surface) という．

例 1.2. 1. $\mathbf{C}^n$ の領域 $\mathcal{U}$ は $(\mathrm{id}_{\mathcal{U}}\colon \mathcal{U} \to \mathcal{U})$ を座標近傍系とする n 次元複素多様体である．

2. $X = (X, (\varphi_i\colon U_i \to \mathcal{U}_i)_{i\in I})$ を n 次元複素多様体とし，U を X の領域とする．$J \coloneqq \{i \in I; U \cap U_i \neq \varnothing\}$ とおく．U は $(\varphi_j|_{U\cap U_j})_{j\in J}$ を座標近傍系とする n 次元複素多様体になる．この多様体 U を開部分（複素）多様体という．

台空間がコンパクトなリーマン面をとくにコンパクトリーマン面とか閉リーマン面という．例 1.2.2 のように，リーマン面 X の領域 U はリーマン面になる．この U を X の開リーマン面と

いう．

1.2 複素多様体とリーマン面の射

定義 1.3. X を n 次元複素多様体, Y を m 次元複素多様体とする．$f\colon X \to Y$ を X から Y への連続写像とする．

1. P を X の点とする．P, $f(P)$ の近傍での f のある座標表示 $w_j = f_{ij}(z_i)$, あるいは $(w_j^1, \dots, w_j^m) = \bigl(f_{ij}^1(z_i^1, \dots, z_i^n), \dots, f_{ij}^m(z_i^1, \dots, z_i^n)\bigr)$ が $z_i(P) = (z_i^1(P), \dots, z_i^n(P))$ で正則であるとき，f は P で**正則**であるという．

2. f がすべての点 $P \in X$ で正則であるとき f を**正則写像** (holomorphic mapping) とか**正則射** (holomorphism) という．また $\mathbf{C}$ への正則写像を**正則関数** (holomorphic function) という．

   X と Y がともにリーマン面であるとき，f をリーマン面の**射** (morphism) ともいう．

3. U を X の空でない開集合とする．U 上の関数 f は U の各連結成分上正則であるとき U 上の正則関数という．ここで，複素多様体の領域は例 1.2.2 の方法で複素多様体とみなしている．

定義 1.4. X と Y を n 次元複素多様体とする．$f\colon X \to Y$ を正則写像とする．正則写像 $g\colon Y \to X$ で $g \circ f = \mathrm{id}_X$ かつ $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ をみたすものが存在するとき，f を**双正則写像** (biholomorphic mapping) とか**双正則射** (biholomorphism) という．X から Y への双正則写像が存在するとき，X と Y は**同形** (isomorphic) とか**双正則同値** (biholomorphically equivalent), またはたんに**双正則** (biholomorhic) であるという．

2 リーマン球面

2.1 リーマン球面の定義

$\mathbf{C}^2$ から原点 $0 = (0,0)$ を除いた集合 $\mathbf{C}^2 - \{0\}$ の点 $(a_0, a_1), (b_0, b_1)$ に対し次の関係を考える．

$$(a_0, a_1) \sim (b_0, b_1) \iff (a_0, a_1) = c \cdot (b_0, b_1) \text{ となる複素数 } c \neq 0 \text{ が存在する．} \tag{2.1}$$

これは同値関係である．(a_0, a_1) の同値類 $\{c \cdot (a_0, a_1); c \in \mathbf{C} - \{0\}\}$ を $[a_0 \colon a_1]$ とかく．

同値関係 $\sim$ の定める商写像を用いて次の集合を定義する．

定義 2.1. $\mathbf{P}^1 \coloneqq \bigl(\mathbf{C}^2 - \{0\}\bigr)/\!\sim$ を**リーマン球面** (Riemann sphere) という．

定義 2.2. 次の写像の組を考える． $\mathbf{C}^2 - \{0\} \overset{\mathrm{pr}_1 = X_0}{\underset{\mathrm{pr}_2 = X_1}{\rightrightarrows}} \mathbf{C}$; $(a_0, a_1) \mapsto a_0, a_1$. この組を $\mathbf{C}^2 - \{0\}$ の標準座標，$\mathbf{P}^1$ の同次座標という．

$\mathbf{P}^1$ は商写像 $\pi\colon \mathbf{C}^2 - \{0\} \to \bigl(\mathbf{C}^2 - \{0\}\bigr)/\!\sim$ による商位相により位相空間になる．この定義から π の連続性が従う．

$\mathbf{P}^1$ の位相空間としての性質を調べるために，次の部分集合を定義する．

$$U_0 = \{[a_0 \colon a_1] \in \mathbf{P}^1; a_0 \neq 0\}, \quad U_1 = \{[a_0 \colon a_1] \in \mathbf{P}^1; a_1 \neq 0\}.$$

このとき次が成り立つ.

$$\begin{aligned} U_0 \cup U_1 &= \mathbf{P}^1, && (2.2)\\ U_0 \cap U_1 &= \{[a_0 \colon a_1] \in \mathbf{P}^1; a_0, a_1 \neq 0\} && (2.3)\\ &= U_0 - \{[1 \colon 0]\}\\ &= U_1 - \{[0 \colon 1]\}. \end{aligned}$$

補題 2.3. 1. 商写像 $\pi \colon \mathbf{C}^2 - \{0\} \to \left(\mathbf{C}^2 - \{0\}\right)/\sim$ は開写像である.

2. U_0 と U_1 は $\mathbf{P}^1$ の開集合であり,

$$\begin{aligned} \varphi_0 \colon U_0 &\xrightarrow{\sim} \mathbf{C};\ [a_0 \colon a_1] \mapsto a_1/a_0,\\ \varphi_1 \colon U_1 &\xrightarrow{\sim} \mathbf{C};\ [a_0 \colon a_1] \mapsto a_0/a_1 \end{aligned}$$

はともに同相写像である.

3. 任意の $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in GL(2, \mathbf{C})$ は自己同相写像

$$p_A \colon \mathbf{P}^1 \xrightarrow{\sim} \mathbf{P}^1; \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix}$$

を引き起こす.

4. $\mathbf{P}^1$ は第 2 可算公理をみたす連結なコンパクトハウスドルフ空間である.

証明. 1. U を $\mathbf{C}^2 - \{0\}$ の開集合とする. $\pi(U)$ が $\mathbf{P}^1$ の開集合であること, すなわち $\pi^{-1}(\pi(U))$ が $\mathbf{C}^2 - \{0\}$ の開集合であることを示す. いま, 任意の開集合 $U \subset \mathbf{C}^2 - \{0\}$ に対し, 複素数 $c \neq 0$ を用いて

$$cU = \left\{(ca_0, ca_1); (a_0, a_1) \in \mathbf{C}^2 - \{0\}\right\}$$

とおくと, cU は $\mathbf{C}^2 - \{0\}$ の開集合であり,

$$\pi^{-1}(\pi(U)) = \bigcup_{c \in \mathbf{C} - \{0\}} cU$$

なので, $\pi^{-1}(\pi(U))$ は $\mathbf{C}^2 - \{0\}$ の開集合である.

2. まず U_0, U_1 が $\mathbf{P}^1$ の開集合であることを示す. $U_0 = \{[a_0 : a_1]; a_0 \neq 0\}$ は $V_0 = \{(a_0, a_1); a_0 \neq 0\}$ の π による像であり, V_0 は $\mathbf{C}^2 - \{0\}$ の開集合であるから, U_0 は $\mathbf{P}^1$ の開集合である. 同様に U_1 も $\mathbf{P}^1$ の開集合である.

$\varphi_0 \colon U_0 \to \mathbf{C}$ が連続であることを示す. V を $\mathbf{C}$ の開集合とする. $V = \varphi_0 \circ \pi(V_0)(= \widetilde{\varphi_0}(V_0)$ とおく）である. $\widetilde{\varphi_0}^{-1}(V) = \pi^{-1}\left(\varphi_0^{-1}(V)\right)$ は V_0 の開集合である. したがって, これは $\mathbf{C}^2 - \{0\}$ の開集合であり, 商位相の定義から $\varphi_0^{-1}(V) \subset U_0$ は開集合である.

φ_0 が同相であることを示す．$\psi_0\colon \mathbf{C} \to U_0$ を $\psi_0(z) = [1\colon z]$ で定める．このとき $\psi_0 \circ \varphi_0\left([a_0\colon a_1]\right) = \psi_0\left(a_1/a_0\right) = [1\colon a_1/a_0] = [a_0\colon a_1]$ である．また $\varphi_0 \circ \psi_0(z) = \varphi_0([1\colon z]) = z/1 = z$. したがって，$\psi_0 \circ \varphi_0 = \mathrm{id}_{U_0}$ かつ $\varphi_0 \circ \psi_0 = \mathrm{id}_{\mathbf{C}}$ であり，$\psi_0 = \varphi_0^{-1}$ である．$\psi_0 = \varphi_0^{-1}$ は自然な単射 $\mathbf{C} \hookrightarrow \mathbf{C}^2 - \{0\}$ と π の合成であり，これらは連続なので，その合成である ψ_0 も連続である．以上より φ_0 は同相である．

3. $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ を可逆な行列とする．A を自己同形 $\mathbf{C}^2 \to \mathbf{C}^2$ とみたとき，それを $\mathbf{C}^2 - \{0\}$ に制限した $A|_{\mathbf{C}^2-\{0\}}\colon \mathbf{C}^2 - \{0\} \to \mathbf{C}^2 - \{0\}$ は自己同相であり，逆写像は $A^{-1}\big|_{\mathbf{C}^2-\{0\}}$ で与えられる．一般に $A(cx) = cAx$ なので，A から可逆な写像 p_A が不備なく定まり，逆写像は $p_{A^{-1}}$ で与えられる．

p_A が連続であることを示す．V を $\mathbf{P}^1$ の開集合とする．次の図式が可換であり，π と A は連続写像であるから，$\pi^{-1}\left(p_A^{-1}(V)\right) = A^{-1}\left(\pi^{-1}(V)\right)$ は $\mathbf{C}^2 - \{0\}$ の開集合である．

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{C}^2 - \{0\} \arrow[r, "A"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathbf{C}^2 - \{0\} \arrow[d, "\pi"] \\
\mathbf{P}^1 \arrow[r, "p_A"'] & \mathbf{P}^1
\end{tikzcd}$$

$\mathbf{P}^1$ の商位相の定義より $\pi^{-1}(V)$ は $\mathbf{P}^1$ の開集合である．したがって p_A で連続である．p_A^{-1} が連続であることも同様である．

4. 第 2 可算公理をみたすこと：

$$\mathbf{Q}(\sqrt{-1}) = \{a + b\sqrt{-1}; a, b \in \mathbf{Q}\}$$

に属する点 z と有理数 p に対し $U_p(z)$ を考えると $\left(U_p(z)\right)_{p\in\mathbf{Q}, z\in\mathbf{C}}$ は $\mathbf{C}$ の位相空間としての基底になる．したがって $\mathbf{C}$ は第 2 可算公理をみたす．直積集合 $\mathbf{C}^2$ も第 2 可算であるから，1 点を除いた $\mathbf{C}^2 - \{0\}$ もそうであり，これに全射 π を適用した $\mathbf{P}^1$ も第 2 可算公理をみたす．

連結かつコンパクトであること：$S^3 = \{P = (a_0, a_1) \in \mathbf{C}^2; |a_0|^2 + |a_1|^2 = 1\} \subset \mathbf{C}^2 - \{0\}$ であり，$\mathbf{C} - \{0\}$ の相対位相により，S^3 は有界閉集合つまりコンパクト集合であり，連結である．全射連続写像 $\pi|_{S^3}\colon S^3 \to \mathbf{P}^1$ により $\mathbf{P}^1$ は連結かつコンパクトである．$\pi|_{S^3}$ が全射であることは

$$[a_0\colon a_1] = \left[\frac{a_0}{\sqrt{a_0^2 + a_1^2}}\colon \frac{a_1}{\sqrt{a_0^2 + a_1^2}}\right]$$

であることからしたがう．

ハウスドルフであること：$P \neq Q$ を $\mathbf{P}^1$ の点とする．$p\colon GL(2, \mathbf{C}) \to \mathrm{Aut}_{\mathsf{Top}}(\mathbf{P}^1)$ は全射．したがって，$U_0 \subset \mathbf{P}^1$ から，任意の $p_A \in \mathrm{Aut}_{\mathsf{Top}}(U_0)$ に対し $A \in GL(2, \mathbf{C})$ が存在する．つまり $p_A(P), p_A(Q) \in U_0$ となる $A \in GL(2, \mathbf{C})$ が存在する．$U_0 \cong \mathbf{C}$ であり $\mathbf{C}$ はハウスドルフなので，$p_A(P)$ の開近傍 U_P と $p_A(Q)$ の開近傍 U_Q で $U_P \cap U_Q = \varnothing$ をみたすものが存在する．U_P と U_Q

は $U_0 \subset \mathbf{P}^1$ の開集合であり，p_A が同相なので $p_A^{-1}(U_P), p_A^{-1}(U_Q)$ は $\mathbf{P}^1$ における P, Q の開近傍で $p_A^{-1}(U_P) \cap p_A^{-1}(U_Q) = \varnothing$ をみたす．よって $\mathbf{P}^1$ はハウスドルフである． $\square$

2.2 貼りあわせ関数

補題 2.3.2 から $\varphi_0 \colon U_0 \xrightarrow{\sim} \mathbf{C}$, $\varphi_1 \colon U_1 \xrightarrow{\sim} \mathbf{C}$ である．ここで，$\varphi_0(U_0)$ の標準座標を w, $\varphi_1(U_1)$ の標準座標を z で表すことにする．定義 2.2 のようにかくと

$$z \colon \varphi_1(U_1) = \mathbf{C} \to \mathbf{C}; (a) \mapsto a$$
$$w \colon \varphi_0(U_0) = \mathbf{C} \to \mathbf{C}; (b) \mapsto b$$

のようになる．複素数の一つ組に対し第一成分を対応させるということである．これによって点 (a) と座標値 $z(a)$ を同一視し，点を単に z と書いたりする．ガウス平面 $\mathbf{C}$ に，そこでの標準座標をつけて $\mathbf{C}_z$, $\mathbf{C}_w$ のように表すと，$\mathbf{C}_w \subset \mathbf{P}^1$, $\mathbf{C}_z \subset \mathbf{P}^1$ とみなせる．z も w も 0 でないとき，$\mathbf{C}_z$ と $\mathbf{C}_w$ の間には，

$$z = \frac{1}{w} \tag{2.4}$$

の関係がある．$z, w \neq 0$ は (2.3) より $[z \colon w] \in U_0 \cap U_1$ ということである．$[z \colon w] \in U_0 \cap U_1$ のとき z は w の正則関数になっている．$\varphi_0(U_0 \cap U_1) = \mathbf{C}_w - \{0\} = \mathbf{C}_w \cap \mathbf{C}_z = \mathbf{C}_z - \{0\} = \varphi_1(U_0 \cap U_1)$ なので，この正則関数を $\varphi_{10} \colon \mathbf{C}_w - \{0\} = \varphi_0(U_0 \cap U_1) \to \mathbf{C}_z - \{0\} = \varphi_1(U_0 \cap U_1)$ とかくことにすると，次の図式が可換になる．

$$\begin{tikzcd}
U_0 \cap U_1 \arrow[r, equal, "{[1 \colon w]=[z \colon 1]}"] & U_0 \cap U_1 \arrow[d, "\varphi_1"] \\
\mathbf{C}_w - \{0\} \arrow[u, "\varphi_0^{-1}"'] \arrow[r, "\varphi_{10}"'] & \mathbf{C}_z - \{0\}
\end{tikzcd}$$

つまり，$\varphi_{10} = \varphi_1 \circ \varphi_0^{-1}$ である．また，$\varphi_{01} = \varphi_0 \circ \varphi_1^{-1} \colon \varphi_1(U_0 \cap U_1) \to \varphi_0(U_0 \cap U_1)$ も $w = 1/z$ として同様に定まる．これは正則であり φ_{10} の逆関数でもある．

以上から次が従う．

命題 2.4. リーマン球面 $\mathbf{P}^1$ は，$\mathbf{P}^1$ を台集合とし，$(\varphi_0 \colon U_0 \to \mathbf{C}_w, \varphi_1 \colon U_1 \to \mathbf{C}_z)$ を座標近傍系とするコンパクトリーマン面である．

証明. コンパクト性は補題 2.3.4 で示した．定義 1.1 の (1)–(4) で $n = 1$ としたものが成り立つことを示す．

(1) 補題 2.3.4 からしたがう．

(2) (2.2) と (2.3) からしたがう．

(3) 補題 2.3.2 からしたがう．

(4) 上で説明した． □

ここでは 2 枚の被覆で座標近傍系を定めたが，以下断りなく極大座標近傍系を考える．

3 複素トーラス

3.1 複素トーラスの定義

ω_1, ω_2 を $\mathbf{R}$ 上一次独立な複素数とする．ω_1, ω_2 に対し，ガウス平面 $\mathbf{C}$ の加法部分群 Ω を

$$\Omega \coloneqq \{n_1\omega_1 + n_2\omega_2; n_1, n_2 \in \mathbf{Z}\}$$

で定める．$E \coloneqq \mathbf{C}/\Omega$ とおく．商写像を $p\colon \mathbf{C} \to E$ とかく．また，$S \coloneqq \{a\omega_1 + b\omega_2; 0 \leqq a, b < 1\}$ とおく．このとき，p は E と S の間の 1 対 1 対応を定める．実際，$x = x_1\omega_1 + x_2\omega_2$, $y = y_1\omega_1 + y_2\omega_2 \in S$ とし，$p(x) = p(y)$ とする．このとき，$p(x-y) = [0]$, つまり，$x - y = n_1\omega_1 + n_2\omega_2$ となる整数 n_1, n_2 が存在する．$0 \leqq x_1, x_2, y_1, y_2 < 1$ なので $n_1 = n_2 = 0$ となることが必要である．したがって，$x = y$ となる．つまり p は単射である．p が全射であることは，次の補題 3.1.1 から従う．

補題 3.1. 1. p は全射かつ連続な開写像である．
 2. E は第 2 可算公理をみたす連結なコンパクトハウスドルフ空間である．

証明. 1. p は全射かつ連続であること：α を E の点とする．α に対し，$\alpha + 0\omega_1 + 0\omega_2$ は $\alpha = p(\alpha + 0\omega_1 + 0\omega_2)$ をみたす．p の連続性は商位相の定義より従う．

p が開写像であること：U を $\mathbf{C}$ の空でない開集合とする．

$$p^{-1}(p(U)) = \bigcup_{\omega\in\Omega}(U + \omega)$$

であり，$U + \omega$ は $\mathbf{C}$ の開集合なので，その合併である $p^{-1}(p(U))$ も $\mathbf{C}$ の開集合である．したがって，$p(U)$ は E の開集合である．

2. 第 2 可算であること：p が全射かつ連続な開写像なので，$\mathbf{C}$ の位相空間としての基底の p による像は E の基底になる．実際，$x \in E$ とし，U を E における x の開近傍とする．このとき，p は全射なので $p^{-1}(x)$ は空でなく，$p^{-1}(U) \subset \mathbf{C}$ は p の連続性から $p^{-1}(x)$ の元たちの開近傍である．$\mathbf{C}$ の基底の元 V で $p^{-1}(U)$ に含まれ，$p^{-1}(x)$ を含むものが存在する．この V に対し，p が連続な開写像であることから，$p(V)$ は E の開集合であり，$x \in p(V) \subset U$ が成り立つ．よって，$\mathbf{C}$ が第 2 可算であることから E も第 2 可算である．

連結かつコンパクトであること：S の閉包 $\overline{S}$ は連結かつコンパクトである．また，$p(\overline{S}) = E$ でもある．p の連続性によって，E は連結かつコンパクトである．

ハウスドルフであること：$P \neq Q$ を E の点とする．P, Q に対し，S の点 x, y で $p(x) = P$, $p(y) = Q$ となるものが存在する．$x, y \in \partial S$ のとき，複素数 ε を適当にとって，$x, y \in \mathrm{Int}(S + \varepsilon)$

となるようにできるので，x, y は S の内点としてよい．このとき，$S \subset \mathbf{C}$ がハウスドルフであることから，実数 $r > 0$ で，$D(x;r), D(y;r) \subset S$ かつ $D(x;r) \cap D(y;r) = \varnothing$ をみたすものが存在する．この r に対し，$P \in p(D(x;r))$ かつ $Q \in p(D(y;r))$ であり，$p(D(x;r)) \cap p(D(y;r)) = \varnothing$ が成り立つ． □

E の複素構造を定める．P を E の点とする．複素数 ε と $P = p(x)$ となる点 $x \in \mathbf{C}$ と x の開近傍 $\mathcal{U}_x$ で $\mathcal{U}_x \subset S + \varepsilon$ となるものが存在する．$U_P := p(\mathcal{U}_x)$ とおくと，U_P は P の E における開近傍である．$p^{-1}(U_P) = \coprod_{\omega \in \Omega} \mathcal{U}_x + \omega$ であり，任意の $\omega \in \Omega$ に対し，$p|_{\mathcal{U}_x + \omega} : \mathcal{U}_x + \omega \to U_P$ は同相写像である．$p|_{\mathcal{U}_x}$ の逆写像を $\varphi_{P,x} \colon U_P \to \mathcal{U}_x$ とおく．このとき，$(\varphi_{P,x})_{P \in E, x \in p^{-1}(P)}$ は E の座標近傍系である．実際，P, Q を E の点とし，$\mathbf{C}$ の点 x, y を $P = p(x)$, $Q = p(y)$ をみたすものとする．このとき，$\varphi_{Q,y} \circ \varphi_{P,x}^{-1} \colon \varphi_{P,x}(U_P \cap U_Q) \to \varphi_{Q,y}(U_P \cap U_Q)$ は x に何らかの $\omega \in \Omega$ を足して y に並行移動させる写像 $y = x + \omega$ なので正則である．

したがって，次が成り立つ．

命題 3.2. $\left(E, (\varphi_{P,x})_{P \in E, x \in p^{-1}(P)}\right)$ はコンパクトリーマン面である．

証明. (1) 補題 3.1.2 で示した．

(2) $E = \bigcup_{P \in E} U_P$ と補題 3.1.1 から従う．

(3), (4) 上で示した． □

コンパクトリーマン面 E を複素トーラスという．

3.2 楕円関数

3.1 節の記号を用いる．

定義 3.3. f を $\mathbf{C}$ 上定義された有理形関数とする．f が ω_1 と ω_2 を周期とするとき，f は 2 重周期 ω_1 と ω_2 をもつ楕円関数であるとか，Ω を周期とする楕円関数という．

補題 3.4. 商写像 $p \colon \mathbf{C} \to E$ の引き戻し $p^* \colon f \mapsto f \circ p$ は $\{E$ 上の有理形関数 $\}$ から $\{\Omega$を周期とする $\mathbf{C}$ 上の楕円関数 $\}$ への 1 対 1 対応を定める．

証明. f を E 上の有理形関数とする．$p^* f$ は $\mathbf{C}$ 上の有理形関数である．$p^* f$ の 2 重周期性を示す．$z \in \mathbf{C}$, $\omega \in \Omega$ とする．

$$p^* f(z + \omega) = f(p(z + \omega)) = f(p(z)) = p^* f(z)$$

である．

p^* が 1 対 1 対応となることを示す．f,g を E 上の有理形関数で $p^* f = p^* g$ をみたすものとする．p は全射なので，$f(p(z)) = g(p(z))$ から $f = g$ である．よって，p^* は単射である．

g を Ω を周期とする楕円関数とする．P を E の点とする．$\varphi_{P,x} \colon U_P \to \mathcal{U}_x$ に対し，f^P を $g|_{\mathcal{U}_x}$ を局所座標表示とする $U_P \subset E$ 上の有理形関数とする．g の 2 重周期性から，f^P は x の取り方

によらない．$Q \in E$ を $U_P \cap U_Q \neq \varnothing$ となる点とすると，$f^P\big|_{U_P \cap U_Q} = f^Q\big|_{U_P \cap U_Q}$ が成り立つ．$(f^P)_{P \in E}$ を貼り合わせることで，E 上の有理形関数 f が定まる．($f|_{U_P} \coloneqq f^P$) この f に対し，$p^* f = g$ が成り立つ． □

定理 3.5.

$$\wp(u) \coloneqq \sum_{\substack{\omega \in \Omega, \\ \omega \neq 0}} \left(\frac{1}{(u-\omega)^2} - \frac{1}{\omega} \right) \tag{3.1}$$

は Ω にのみ 2 位の極を持つ楕円関数である．

$\wp(u)$ を Weierstrass の $\wp$ 関数という．

証明. $\wp(u)$ が $\mathbf{C} - \Omega$ で正則であり，Ω では 2 位の極をもつこと：$M \geqq 0$ を実数とする．$D(0; 2M)$ は $\mathbf{C}$ のコンパクト集合であり，Ω は離散閉集合なので，$\Omega \cap D(0; 2M)$ は有限集合である．

$$\wp(z) = \left(\frac{1}{z^2} + \sum_{\substack{\omega \in \Omega - \{0\}, \\ |\omega| \leqq 2M}} \left(\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right) \right) + \sum_{\substack{\omega \in \Omega - \{0\}, \\ |\omega| > 2M}} \left(\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right)$$

と 2 つの和に分解する．第 1 項は有限和なので $\overline{D(0; M)} - \Omega$ で正則かつ $\overline{D(0; M)} \cap \Omega$ で 2 位の極をもつ有理形関数である．

第 2 項が $\overline{D(0; M)}$ で一様収束することを示す．z を $|z| \leqq M$ をみたす複素数とする．$|\omega| > 2M \geqq 2|z|$ である．したがって

$$\left| \frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right| = \frac{|z|}{|\omega|^2} \frac{|z - 2\omega|}{|z - \omega|^2} = \frac{|z|}{|\omega|^3} \frac{|z/\omega - 2|}{|z/\omega - 1|^2} \leqq \frac{M|-1/2-2|}{|\omega|^3 |1/2 - 1|^2} = \frac{10M}{|\omega|^3}$$

が成り立つ．ここで次の補題 3.6 を用いると $\displaystyle\sum_{\substack{\omega \in \Omega, \\ |\omega| > 2M}} \frac{10M}{|\omega|^3}$ が収束することがわかる．したがって，第 2 項も収束する．

補題 3.6. 実数 $s > 1$ に対し $\displaystyle\sum_{\omega \in \Omega - \{0\}} \frac{1}{|\omega|^{2s}}$ は収束する．

補題の証明. $\varphi(x, y) \coloneqq |x\omega_1 + y\omega_2|^2$ とおく．このとき，

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) &= (x\omega_1 + y\omega_2)\overline{(x\omega_1 + y\omega_2)} \\ &= x^2|\omega_1|^2 + xy\left(\omega_2\overline{\omega_1} + \omega_1\overline{\omega_2}\right) + y^2|\omega_2|^2 \\ &= |\omega_1|^2 x^2 + \left(\overline{\omega_1\overline{\omega_2}}\right)\left(\omega_1\overline{\omega_2}\right) xy + |\omega_2|^2 y^2 \\ &= |\omega_1|^2 x^2 + |\omega_1\overline{\omega_2}|^2 xy + |\omega_2|^2 y^2 \end{aligned}$$

となり，実数 a, b, c を用いて，$ax^2 + 2bxy + cy^2$ とかける．すなわち，$\varphi(x, y)$ は実係数 2 次形式であり，ω_1 と ω_2 が独立であることから正定値である．2 次形式に対応する実対称行列は，実数の固有値を持つ．いま，φ は正定値なので固有値を $0 < m_1 \leqq m_2$ とおいてよい．実対称行列は直行行列を用いて対角化でき，任意の $x, y \in \mathbf{R}$ に対し，

$$m_1(x^2 + y^2) \leqq \varphi(x, y) \leqq m_2(x^2 + y^2)$$

が成り立つ．よって，2 つの級数

$$\sum_{\omega \in \Omega - \{0\}} \frac{1}{|\omega|^{2s}} = \sum_{(n_1, n_2) \in \mathbf{Z}^2 - \{(0,0)\}} \frac{1}{\varphi(n_1, n_2)^s}, \quad \sum_{(n_1, n_2) \in \mathbf{Z}^2 - \{(0,0)\}} \frac{1}{(n_1 + n_2)^s}$$

の一方が収束するとき，他方も収束し，発散も共にする．十分小さい実数 $\varepsilon > 0$ に対し，2 つ目の級数と積分

$$\lim_{R \to \infty} \iint_{\varepsilon \leqq \sqrt{x^2+y^2} \leqq R} \frac{1}{(x^2 + y^2)^s} \, dxdy$$

を比較すればよい．$r\cos\theta = x$, $r\sin\theta = y$ とすると，$x^2 + y^2 = r^2$, $dxdy = rdrd\theta$ から，

$$\begin{aligned} \lim_{R \to \infty} \iint_{\varepsilon \leqq \sqrt{x^2+y^2} \leqq R} \frac{1}{(x^2 + y^2)^s} \, dxdy &= \lim_{R \to \infty} \iint_{\varepsilon \leqq r \leqq R} \frac{1}{r^{2s}} rdrd\theta \\ &= \lim_{R \to \infty} 2\pi \int_{\varepsilon}^{R} \frac{1}{r^{2s-1}} dr \\ &= \lim_{R \to \infty} \frac{\pi}{1 - s} \left(\frac{1}{R^{2(s-1)}} - \frac{1}{\varepsilon^{2(s-1)}} \right) \end{aligned}$$

となる．したがって，$s > 1$ のとき収束し，そうでないときは発散する． □

$\wp(u)$ が 2 重周期関数であること：$\omega \in \{\omega_1, \omega_2\}$ とする．$\wp'(z) = -2\sum_{\omega \in \Omega} \frac{1}{(z-\omega)^3}$ は楕円関数なので，$\wp'(z+\omega) = \wp'(z)$ をみたす．よって，$(\wp(z+\omega) - \wp(z))' = 0$ なので，$\wp(z+\omega) - \wp(z) =: c_\omega$ は $\mathbf{C} - \Omega$ 上の定数関数である．$\omega/2 \notin \Omega$ であり，$\wp(z) = \wp(-z)$ なので，$\wp(\omega/2) = \wp(-\omega/2)$ である．$\omega/2 = -\omega/2 + \omega$ なので，$c_\omega = \wp(-\omega/2 + \omega) - \wp(\omega/2) = \wp(\omega/2) - \wp(\omega/2) = 0$. したがって，$\mathbf{C} - \Omega$ 上 $\wp(z + \omega) - \wp(z) = 0$ が成り立つ．有理形関数の剛性から $\mathbf{C}$ 上 $\wp(z) = \wp(z + \omega)$ が成り立つ． □

4　2 重被覆

4.1　分岐と被覆

証明はしないが次の事実がある．

事実 4.1. X と Y をリーマン面とする．$f\colon X \to Y$ を定値でないリーマン面の射とする．$P \in X$, $Q = f(P) \in Y$ とおく．このとき，P のまわりの局所座標 t と Q のまわりの局所座標 s と正の整数 $n \geqq 1$ で，f 局所座標表示が $s = t^n$ となるものが存在する．また，この n は座標の取り方によらない．

この n を P における f の分岐指数といい，e_P とかく．$e_P > 1$ のとき，P を f の分岐点という．

事実 4.2. X と Y をコンパクトリーマン面とする．$f\colon X \to Y$ を定値でない射とする．このとき，次が成り立つ．

1. 任意の $Q \in Y$ に対し $f^{-1}(Q) \neq \varnothing$ かつ $\# f^{-1}(Q) < \infty$ である．
2. f の分岐点は高々有限個である．
3. Q を Y の点とする．このとき，$d(Q) \coloneqq \sum_{P \in f^{-1}(Q)} e_P$ は一定である．これを $\deg f$ とかく．
4. 分岐点でない点 $Q \in Y$ に対し $\# f^{-1}(Q) = \deg f$ である．分岐点 $Q \in Y$ に対し，$\# f^{-1}(Q) < \deg f$ である．

$d = \deg f$ を f の写像度といい，f を d 重被覆写像という．

4.2 複素トーラスからリーマン球面への 2 重被覆

補題 3.4 より，$\wp$ は E 上の有理形関数と見做せる．さらに，有理形関数は $\mathbf{P}^1$ への射と見做せる．

定理 4.3. $\wp$ の定めるリーマン面の射 $\wp\colon E \to \mathbf{P}^1$; $\wp([z]) = [\wp(z) : 1]$ は 4 点 $[0]$, $[\omega_1/2]$, $[\omega_2/2]$, $[(\omega_1+\omega_2)/2]$ で分岐する 2 重被覆である．これらの点を E の 2 分点と呼ぶ．

証明. $\wp$ は Ω にのみ 2 位の極をもつ楕円関数であったから，$[0]$ のみに 2 位の極をもつ E 上の有理形関数というのと同じである．したがって，$\wp^{-1}(\infty) = \{[0]\}$ であり，事実 4.2 より，$\deg \wp = 2$ である．いま，$\wp$ は偶関数なので，$[a] \in E$ に対し，$\wp([a]) = \wp([-a])$ が成り立つ．$[a]$ が E の 2 分点でなければ，$[a] \neq [-a]$ である．$\deg \wp = 2$ なので，このとき，$\wp^{-1}(\wp([a])) = \{[a], [-a]\}$ と確定する．

$[\omega_1/2]$ の近傍で $\wp$ を局所座標表示する．$\wp$ は ω_1 を周期にもつ偶関数なので $\wp(-z) = \wp(z) = \wp(z+\omega_1)$ をみたす．両辺を微分して，$-\wp'(-z) = \wp'(z+\omega_1)$ となるが，$z = -\omega_1/2$ のとき，$-\wp'(\omega_1/2) = \wp'(\omega_1/2)$ となる．したがって，$\wp'(\omega_1/2) = 0$ となる．よって，$\wp(z)$ の $\omega_1/2$ のまわりでの展開における 1 次の項の係数は 0 である．したがって，$e_{[\omega_1/2]} > 1$ であり，$[\omega_1/2]$ は $\wp$ の分岐点である．$[\omega_2/2]$ と $[(\omega_1+\omega_2)/2]$ についても同様に，$e_{[\omega_2/2]} > 1$, $e_{[(\omega_1+\omega_2)/2]} > 1$ となるので，$\wp$ は E の 2 分点で分岐する 2 重被覆であることが示せた． □

参考文献

[Og02] 小木曽啓示, 代数曲線論, 朝倉書店, 2002.