

ゼミノート（2024/10/23 発表分）

大柴寿浩

2024 年 10 月 23 日

1 フーリエ・佐藤変換（復習）[KS90, §3.7]

系 1 ([KS90, Corollary 3.7.3]). U を X の開集合とする. X 内の任意の \mathbf{R}^+ 軌道 b に対し, $b \cap U$ が可縮である (よってとくに空でない) とする. さらに, 任意の $x \in X$ に対し, 集合 $\{t \in \mathbf{R}^+; \mu(x, t) \in U\}$ が可縮であると仮定する. このとき, $F \in D_{\mathbf{R}_{>0}}^+(X)$ に対し, 制限射 $R\Gamma(X; F) \rightarrow R\Gamma(U; F)$ は同型となる.

コメント 2. 「さらに」から始まる文は Schapira のホームページにある errata による.

定理 1.1 ([KS90, Theorem 3.7.7]). $D_{\mathbf{R}_{>0}}^+(E)$ から $D_{\mathbf{R}_{>0}}^+(E^*)$ への関手 $\tilde{\Phi}_{P'}$ と $\tilde{\Psi}_P$ は自然に同型である.

証明. $\tilde{\Phi}_{P'}(F) = R p_{2!}(p_1^{-1}F)_{P'}$, $\tilde{\Psi}_P(F) = R p_{2*} R\Gamma_P(p_1^{-1}F)$ なので, これらを同型で結ぶ.

$$\begin{aligned}\tilde{\Phi}_{P'}(F) &= R p_{2!}(p_1^{-1}F)_{P'} \\ &\cong R p_{2!} R\Gamma_P(p_1^{-1}F)_{P'} \\ &\cong R p_{2!}(R\Gamma_P(p_1^{-1}F)_{P'}) \\ &\cong R p_{2*}(R\Gamma_P(p_1^{-1}F)_{P'}) \\ &\cong R p_{2*} R\Gamma_P(p_1^{-1}F).\end{aligned}$$

□

定義 1.2 ([KS90, Definition 3.7.8]). $F \in D_{\mathbf{R}_{>0}}^+(E)$ とする. F のフーリエ・佐藤変換 (Fourier-Sato transform) F^\wedge を

$$\begin{aligned}F^\wedge &:= \tilde{\Phi}_{P'}(F) \quad (= R p_{2!}(p_1^{-1}F)_{P'}) \\ &\quad \left(\cong \tilde{\Psi}_P(F) = R p_{2*} R\Gamma_P(p_1^{-1}F) \right)\end{aligned}$$

で定める.

$G \in D_{\mathbf{R}_{>0}}^+(E^*)$ とする. G の逆フーリエ・佐藤変換 (inverse Fourier-Sato transform) G^\vee を

$$\begin{aligned}G^\vee &:= \tilde{\Psi}_{P'}(F) \quad (= R p_{1*} R\Gamma_{P'}(p_2^!G)) \\ &\quad \left(\cong \tilde{\Phi}_P(G) = R p_{1!}(p_2^!G)_P \right)\end{aligned}$$

で定める.

定理 1.3 ([KS90, Theorem 3.7.9]). $D_{\mathbf{R}_{>0}}^+(E)$ から $D_{\mathbf{R}_{>0}}^+(E^*)$ への関手 $^\wedge$ と $D_{\mathbf{R}_{>0}}^+(E^*)$ から $D_{\mathbf{R}_{>0}}^+(E)$ への関手 $^\vee$ は圏同値であり, 互いに準逆である. とくに, F と F' を $D_{\mathbf{R}_{>0}}^+(E)$ の対象とすると,

$$\mathrm{Hom}_{D_{\mathbf{R}_{>0}}^+(E)}(F', F) \cong \mathrm{Hom}_{D_{\mathbf{R}_{>0}}^+(E)}(F'^\wedge, F^\wedge)$$

が成り立つ.

補題 1.4 ([KS90, Lemma 3.7.10]). (i) γ を E の固有閉凸錐で零切断を含むものとする. このとき, 次が成り立つ.

$$(A_\gamma)^\wedge \cong A_{\mathrm{Int} \gamma^\circ}.$$

(ii) U を E の開凸錐とする. このとき次が成り立つ.

$$(A_U)^\wedge \cong A_{U^\circ a} \otimes \mathrm{or}_{E^*/Z}[-n].$$

注意 3 ([KS90, Remark 3.7.11]). RMK

命題 1.5 ([KS90, Proposition 3.7.12]). $F \in D_{\mathbf{R}_{>0}}^+(E)$ とする.

(i) $F^{\wedge\wedge} \cong F^a \otimes \mathrm{or}_{E/Z}[-n]$.

(ii) U を E^* の開凸集合とすると

$$\mathrm{R}\Gamma(U; F^\wedge) \cong \mathrm{R}\Gamma_{U^\circ}(\tau^{-1}\pi(U); F) \cong \mathrm{R}\Gamma_{U^\circ}(E; F).$$

(iii) γ を E^* の固有閉凸錐で零切断を含むものとする

$$\mathrm{R}\Gamma_\gamma(E^*; F^\wedge) \cong \mathrm{R}\Gamma(\mathrm{Int} \gamma^{\circ a}; F \otimes \mathrm{or}_{E/Z}[-n]).$$

(iv) 次が成り立つ.

$$(D'F)^\vee \cong D'(F^\wedge), \quad (DF)^\vee \cong D(F^\wedge).$$

証明. (ii)

$$\begin{aligned} \mathrm{R}\Gamma(U; F^\wedge) &\cong \mathrm{RHom}_{A_{E^*}}(A_U, F^\wedge) \\ &\cong \dots \\ &\cong \mathrm{R}\Gamma_{U^\circ}(\tau^{-1}(\pi(U)); F) \\ &\cong \mathrm{R}\Gamma_{U^\circ}(E; F) \end{aligned}$$

後半の

$$\mathrm{R}\Gamma_{U^\circ}(\tau^{-1}(\pi(U)); F) \cong \mathrm{R}\Gamma_{U^\circ}(E; F)$$

について, $\tau^{-1}(\pi(U))$ は次の 2 条件

- 各 $\mathbf{R}_{>0}$ 軌道 b に対し, $b \cap \tau^{-1}(\pi(U))$ が可縮である

- 任意の $v \in E$ に対し, 集合 $\{t \in \mathbf{R}_{>0}; \mu(v, t) \in \tau^{-1}(\pi(U))\}$ が可縮である

をみたす. したがって, 系 1 から, 制限射が同型であることが従う.

(iii)

$$\begin{aligned}
\mathrm{R}\Gamma_\gamma(E^*; F^\wedge) &\cong \mathrm{RHom}(A_\gamma, F^\wedge) \\
&\stackrel{\cong}{\underset{\text{Thm.3.7.9}}{=}} \mathrm{RHom}((A_\gamma)^\wedge, F^{\wedge\wedge}) \\
&\stackrel{\cong}{\underset{\text{Thm.3.7.10(i);(i)}}{=}} \mathrm{RHom}(A_{\mathrm{Int} \gamma^\circ}, F^a \otimes \mathrm{or}_{E/Z}[-n]) \\
&\cong \mathrm{RHom}(A_{\mathrm{Int} \gamma^{\circ a}}, F \otimes \mathrm{or}_{E/Z}[-n]) \\
&\cong \mathrm{R}\Gamma(\mathrm{Int} \gamma^{\circ a}; F \otimes \mathrm{or}_{E/Z}[-n]).
\end{aligned}$$

(iv) D の方について示す.

$$\begin{aligned}
\mathrm{R}\mathcal{H}om_{A_E}(F^\wedge, \omega_{E^*/Z}) &= \mathrm{R}\mathcal{H}om_{A_E}(\mathrm{R}p_{2!}(p_1^{-1}F)_{P'}, \omega_{E^*/Z}) \\
&= \mathrm{R}p_{2*} \mathrm{R}\mathcal{H}om_{A_E}((p_1^{-1}F)_{P'}, p_2^! \omega_{E^*/Z}) \\
&= \mathrm{R}p_{2*} \mathrm{R}\Gamma_{P'} \mathrm{R}\mathcal{H}om_{A_E}(p_1^{-1}F, p_2^! \omega_{E^*/Z}) \\
&= \mathrm{R}p_{2*} \mathrm{R}\Gamma_{P'} \mathrm{R}\mathcal{H}om_{A_E}(p_1^{-1}F, p_1^! \omega_{E/Z}) \\
&= \mathrm{R}p_{2*} \mathrm{R}\Gamma_{P'} p_1^! \mathrm{R}\mathcal{H}om_{A_E}(F, \omega_{E/Z}) \\
&= (\mathrm{D}F)^\vee
\end{aligned}$$

□

命題 1.6 ([KS90, Proposition 3.7.13]). (i) $F \in \mathrm{D}_{\mathbf{R}_{>0}}^+(E)$ とする. このとき次が成り立つ.

$$(f_\tau^! F)^\wedge \cong f_\pi^!(F^\wedge), \quad (f_\tau^{-1} F)^\wedge \cong f_\pi^{-1}(F^\wedge).$$

(ii) $G \in \mathrm{D}_{\mathbf{R}_{>0}}^+(E')$ とする. このとき次が成り立つ.

$$(\mathrm{R}f_{\tau*} G)^\wedge \cong \mathrm{R}f_{\pi*}(G^\wedge), \quad (\mathrm{R}f_{\tau!} G)^\wedge \cong \mathrm{R}f_{\pi!}(G^\wedge),$$

命題 1.7 ([KS90, Proposition 3.7.14]). (i) $F \in \mathrm{D}_{\mathbf{R}_{>0}}^+(E_1)$ とする. このとき次が成り立つ.

$$\begin{aligned}
{}^t f^{-1}(F^\wedge) &\cong (\mathrm{R}f_! F)^\wedge, \\
{}^t f^!(F^\vee) &\cong (\mathrm{R}f_* F)^\vee, \\
{}^t f^!(F^\wedge) &\cong (\mathrm{R}f_* F)^\wedge \otimes \omega_{E_2^*/E_1^*}, \\
{}^t f^!(F^\vee) &\cong (\mathrm{R}f_! F)^\vee \otimes \omega_{E_2^*/E_1^*}.
\end{aligned}$$

(ii) $G \in \mathrm{D}_{\mathbf{R}_{>0}}^+(E_2)$ とする. このとき次が成り立つ.

$$\begin{aligned}
(f^{-1}F)^\vee &\cong \mathrm{R}^t f_!(G^\vee), \\
(f^! F)^\wedge &\cong \mathrm{R}^t f_*(G^\wedge), \\
(\omega_{E_1/E_2} \otimes f^! G)^\vee &\cong \mathrm{R}^t f_*(G^\vee), \\
(\omega_{E_1/E_2} \otimes f^{-1} G)^\wedge &\cong \mathrm{R}^t f_!(G^\wedge).
\end{aligned}$$

命題 1.8 ([KS90, Proposition 3.7.15]). $F_i \in D_{\mathbf{R}_{>0}}^+(E_i)$, $i = 1, 2$ とする. このとき次が成り立つ.

$$F_1^\wedge \boxtimes_Z F_2^\wedge \cong \left(F_1 \boxtimes_Z F_2 \right)^\wedge.$$

2 特殊化 (復習) [KS90, §4.2]

定理 2.1 ([KS90, Thm 4.2.3]). $F \in D^b(X)$ とする.

- (i) $\nu_M(F) \in D_{\mathbf{R}^+}^b(T_M X)$ であり, $\text{supp}(\nu_M(F)) \subset C_M(\text{supp}(F))$ である.
- (ii) V を $T_M X$ の錐状開集合とする. このとき

$$H^j(V; \nu_M(F)) \cong \varinjlim_U H^j(U; F)$$

である. ただし U は $C_M(X - U) \cap V = \emptyset$ となる X の開集合の族を走る. とくに $v \in T_M X$ ならば,

$$H^j(\nu_M(F))_v \cong \varinjlim_U H^j(U; F)$$

である. ただし U は $v \notin C_M(X - U)$ となる X の開集合の族を走る.

- (iii) A を $T_M X$ の錐状閉集合とする. このとき

$$H_A^j(T_M X; \nu_M(F)) \cong \varinjlim_{Z, U} H_{Z \cap U}^j(U; F)$$

である. ただし U は M の X における開近傍の族を走り, Z は $C_M(Z) \subset A$ となる X の閉集合を走る.

- (iv) 次の同型が成り立つ.

$$\begin{aligned} \nu_M(F)|_M &\cong R\tau_*(\nu_M(F)) \cong F|_M, \\ (R\Gamma_M(\nu_M(F)))|_M &\cong R\tau_!(\nu_M(F)) \cong R\Gamma_M(F)|_M. \end{aligned}$$

- (v) $R\dot{\tau}_*(\nu_M(F)|_{\dot{T}_M X}) \cong R\Gamma_{X-M}(F)|_M$ である.

証明. (i) : $\tilde{p}^{-1}F$ が錐状層であることを示せば, Rj_* と s^{-1} が錐状層を錐状層に送ることから結果が従う. 各次数 $j \in \mathbf{Z}$ に対し, $H^j(\tilde{p}^{-1}F)$ が各ファイバー $(x', x'', t) \in \Omega$ の \mathbf{R}^+ 軌道 $b = \mathbf{R}^+(x', x'', t)$ 上で局所定数であることを示す. $(cx', x'', c^{-1}t) \in b$ とする. このとき

$$\begin{aligned} (H^j(\tilde{p}^{-1}F)|_b)_{(cx', x'', c^{-1}t)} &\cong (H^j(\tilde{p}^{-1}F))_{(cx', x'', c^{-1}t)} \\ &\cong (\tilde{p}^{-1}H^j(F))_{(cx', x'', c^{-1}t)} \\ &\cong (H^j(F))_{\tilde{p}(cx', x'', c^{-1}t)} \\ &\cong H^j(F)_{\tilde{p}(x', x'')} \end{aligned}$$

であり, b の全ての点での茎が同型となる. よって各実数 $c > 0$ に対し, $(cx', x'', c^{-1}t)$ の十分小さい近傍

$B_c \subset \Omega$ で $H^j(\tilde{p}^{-1}F)|_{b \cap B_c}$ が定数層 $(H^j(F)_{\tilde{p}(x',x'')})_{b \cap B_c}$ となるものが存在する. $b = \bigcup_{c \in \mathbf{R}^+} B_c \cap b$ である. よって $H^j(\tilde{p}^{-1}F)$ は錐状層である.

$(x''; v) \in T_M X - C_M(\text{supp}(F))$ とする. 各 $j \in \mathbf{Z}$ に対し

$$H^j(F)_{(x'';v)} = 0$$

であるから $(x, 0) = (x''; v) \in T_M X = t^{-1}(0)$ として,

$$(H^j(s^{-1}Rj_*\tilde{p}^{-1}F))_{(x,0)} = s^{-1}Rj_*\tilde{p}^{-1}H^j(F)_{(x'';v)} = 0$$

である. したがって $(x''; v) \in T_M X - \text{supp}(\nu_M(F))$ である.

(ii) : U を X の開集合で $C_M(X - U) \cap V = \emptyset$ となるものとする. 次の射がある.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{R}\Gamma(U; F) \xrightarrow{(1)} \text{R}\Gamma(p^{-1}(U); p^{-1}F) \\ \xrightarrow{(2)} \text{R}\Gamma(p^{-1}(U) \cap \Omega; p^{-1}F) \\ \xrightarrow{(3)} \text{R}\Gamma(\tilde{p}^{-1}(U) \cup V; Rj_*j^{-1}p^{-1}F) \\ \xrightarrow{(4)} \text{R}\Gamma(V; \nu_M(F)). \end{array} \right. \quad (2.1)$$

ただし, それぞれの射は次のように定まる.

(1) $F \rightarrow Rp_*p^{-1}F$ から定まる.

(2) 制限射. もっというと $A_{p^{-1}(U) \cap \Omega} \rightarrow A_{p^{-1}(U)}$ から定まる.

(3) まず $p^{-1}F \rightarrow Rj_*j^{-1}p^{-1}F$ から $\text{R}\Gamma(\tilde{p}^{-1}(U); Rj_*j^{-1}p^{-1}F)$ への射が定まる. Ω で台を切り落としてい
るので $\text{R}\Gamma(\tilde{p}^{-1}(U); Rj_*j^{-1}p^{-1}F)$ を V の $\bar{\Omega}$ での開近傍 $\tilde{p}^{-1}(U) \cup V$ に広げてもよい.

(4) $Rj_*j^{-1}p^{-1}F \rightarrow Rs_*s^{-1}Rj_*j^{-1}p^{-1}F$ と $s^{-1}A_{\tilde{p}^{-1}(U) \cup V} = A_{s^{-1}(\tilde{p}^{-1}(U) \cup V)} = A_V$ から定まる.

コホモロジーをとって, 帰納極限の普遍性を考えると次の射が定まる.

$$\varinjlim_U H^k(U; F) \rightarrow H^k(V; \nu_M(F)).$$

この射が同型であることを示す. いま

$$\begin{aligned} H^k(V; \nu_M(F)) &\cong \varinjlim_{W \in I_V} H^k(W, Rj_*j^{-1}p^{-1}F) \quad (\because \text{注意 2.6.9}) \\ &\cong \varinjlim_{W \in I_V} H^k(W \cap \Omega, p^{-1}F) \quad (\because j^{-1} \dashv Rj_*, j! \dashv j^{-1}) \end{aligned}$$

である. 命題??より, $p: W \cap \Omega \rightarrow p(W \cap \Omega)$ の各ファイバーは連結, すなわち \mathbf{R} と同相としてよい. このとき,

(i) p は位相的沈めこみである.

(ii) $Rp_!p^!\mathbf{Z}_{p(W \cap \Omega)} \rightarrow \mathbf{Z}_{W \cap \Omega}$ は同型である. 実際, ファイバーが \mathbf{R} と同相であることから, 注意 3.3.10 の式 (3.3.13)

$$\mathbf{Z} \xrightarrow{\sim} \text{R}\Gamma(p^{-1}(x); \mathbf{Z}_{p^{-1}(x)})$$

が成り立つ.

したがって命題 3.3.9 を p に適用すると $F \rightarrow R p_! p^! F$ となることから

$$H^k(W \cap \Omega; p^{-1}F) \cong H^k(p(W \cap \Omega); F)$$

である。命題?? (i) より、 W を走らせたときの $U = p(W \cap \Omega)$ は $C_M(X - U) \cap V = \emptyset$ となる X の開集合を走る。したがって上の同型が示された。

(iii) : U を M の X における開近傍、 Z を $C_M(Z) \subset A$ となる X の閉集合とする。次の射の列がある。

$$\begin{aligned} R\Gamma_{Z \cap U}(U; F) &\xrightarrow{(1)} R\Gamma_{p^{-1}(Z \cap U)}(p^{-1}(U); p^{-1}F) \\ &\xrightarrow{(2)} R\Gamma_{p^{-1}(Z \cap U) \cap \Omega}(p^{-1}(U) \cap \Omega; p^{-1}F) \\ &\xrightarrow{(3)} R\Gamma_{(p^{-1}(Z \cap U) \cap \Omega) \cup A}(p^{-1}(U); Rj_* j^{-1} p^{-1}F) \\ &\xrightarrow{(4)} R\Gamma_A(T_M X; \nu_M(F)). \end{aligned}$$

ただし、それぞれの射は次のように定まる。

- (1) $F \rightarrow R p_* p^{-1}F$ に $R\Gamma_{Z \cap U}(U; \cdot)$ を適用。
- (2) $p^{-1}F \rightarrow Rj_* j^{-1} p^{-1}F$ に $R\Gamma_{p^{-1}(Z \cap U)}(p^{-1}(U); \cdot)$ を適用。
- (3) 切り落としと台の随伴と微妙なやつ。
- (4) s^{-1} を当てる。 $T_M X$ 上の切断は A に台を持つことから。

以上の合成と切除の三角を考えると、次の可換図式が得られる。

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & \varinjlim_U H^{k-1}(U - Z; F) & \longrightarrow & \varinjlim_U H^k_{U-Z}(U; F) & \longrightarrow & \varinjlim_U H^k(U; F) \longrightarrow \cdots \\ & & \downarrow \gamma_{k-1} & & \downarrow \alpha_k & & \downarrow \beta_k \\ \cdots & \longrightarrow & H^{k-1}(T_M X - A; \nu_M F) & \longrightarrow & H^k_A(T_M X; \nu_M F) & \longrightarrow & H^k(T_M X; \nu_M F) \longrightarrow \cdots \end{array}$$

各行は完全であり、 γ_k と β_k は (ii) より同型である。したがって、 α_k も同型である。

(iv) : $k: M \hookrightarrow T_M X$ を零切断とみなす閉埋め込みとする。このとき、

$$\begin{aligned} F|_M &= i^{-1}F \cong k^{-1}s^{-1}p^{-1}F \\ &\rightarrow k^{-1}s^{-1}Rj_* j^{-1}p^{-1}F \\ &\cong k^{-1}\nu_M F \\ &= \nu_M F|_M \end{aligned}$$

と

$$\begin{aligned} k^! \nu_M F &= k^! s^! j_! j^! p^! F \\ &\rightarrow k^! s^! p^! F \\ &= i^! F = i^{-1} R\Gamma_M F \end{aligned}$$

という射が得られる。これらは (ii), (iii) から同型である。($v \in T_M X$ として 0 を取ればよい.) 残りの同型は $i^{-1} \cong R\tau_*$ と $i^! \cong R\tau_!$ から従う。

(v)：次の三角の射がある．

$$\begin{array}{ccccccc}
 R\Gamma_M(F)|_M & \longrightarrow & F|_M & \longrightarrow & R\Gamma_{X-M}(F)|_M & \longrightarrow & +1 \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 R\Gamma_M(\nu_M F)|_M & \longrightarrow & R\tau_*\nu_M F & \longrightarrow & R\dot{\tau}_*(\nu_M F|_{\dot{T}_M X}) & \longrightarrow & +1.
 \end{array}$$

左と真ん中が同型なので右も同型である．

□

命題 2.2 ([KS90, Prop.4.2.4]). $G \in D^b(Y)$ とする．

(i) 標準的な射による可換図式

$$\begin{array}{ccc}
 R(T_N f)_! \nu_N(G) & \longrightarrow & R(f_! G) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 R(T_N f)_* \nu_N(G) & \longleftarrow & R(f_* G)
 \end{array}$$

が存在する．

(ii) さらに, $\text{supp}(G) \rightarrow X$ と $C_N(\text{supp}(G)) \rightarrow T_M X$ が固有かつ $\text{supp}(G) \cap f^{-1}(M) \subset N$ ならば, 以上の射はすべて同型である．

とくに $f^{-1}(M) = N$ かつ, f が M に関して斉かつ $\text{supp}(G)$ 上固有のとき, 以上の射はすべて同型である．

証明. (ii) $\overline{\tilde{p}_Y^{-1}(\text{supp}(G))}$ が \tilde{X}_M 上固有ならば, $R\tilde{f}'_*$ と $R(T_N f)_*$ をそれぞれ $R\tilde{f}'_!$ と $R(T_N f)_!$ に置き換えることができるので, 射はすべて同型となる．したがって, Y の閉部分集合 Z に対し, Z が X 上固有であること, $C_N(Z)$ が $T_M X$ 上固有であること, そして $Z \cap f^{-1}(M) \subset N$ であることを仮定したとき, $\overline{\tilde{p}_Y^{-1}(Z)}$ が \tilde{X}_M 上固有であることを示せばよい． $\overline{\tilde{p}_Y^{-1}(Z)} \rightarrow \tilde{X}_M$ のファイバーはコンパクトなので, 閉写像であることを示せば十分である． $\{u_n\}_n$ を $\overline{\tilde{p}_Y^{-1}(Z)}$ の点列で $\{\tilde{f}'(u_n)\}_n$ が収束するものとする． $\{u_n\}_n$ の部分列で収束するものが存在することを示せばよい． $\{\tilde{p}_Y(u_n)\}_n$ が収束すると仮定してよい． $\tilde{p}_Y^{-1}(Z) - T_N Y \rightarrow \tilde{X}_M - T_M X$ は固有なので, $\{\tilde{f}'(u_n)\}_n$ は $T_M X$ の点に収束するとしてよい．このとき, $\{\tilde{p}_Y(u_n)\}_n$ の極限点は $Z \cap f^{-1}(M)$ に含まれるので N に含まれる．

X と Y の局所座標系を (4.1.10) のようにとり, $u_n = (y'_n, y''_n, t_n)$ とおく．このとき, $t_n \xrightarrow{n} 0$, $t_n y'_n \xrightarrow{n} 0$ である．さらに $t_n > 0$ (すなわち $u_n \in \tilde{p}_Y^{-1}(z)$) としてよい． $\{y''_n\}_n$ は収束するので, $\{|y'_n|\}_n$ が有界であることを示せばよい．いま, $|y'_n| \xrightarrow{n} \infty$ だったと仮定して矛盾を導く．部分列を取り出すことで, $\{y'_n/|y'_n|\}_n$ は 0 でないベクトル v に収束する．このとき $\{(y'_n/|y'_n|, y''_n, t_n|y'_n|)\}_n$ は $\tilde{p}_Y^{-1}(Z)$ に属し, 点 $p \in T_N Y$ で零切断に属さないものに収束する．他方, $\tilde{f}'(u_n) = \left(\frac{1}{t_n} f_1(t_n, y'_n, y''_n), f_2(t_n, y'_n, y''_n) \right)$ は収束し $\left\{ \frac{1}{t_n|y'_n|} f_1(t_n, y'_n, y''_n) \right\}_n$ は 0 に収束する．これより $T_N f(p)$ は $T_M X$ の零切断に属することが従う．したがって $C_N(Z) \cap (T_N f)^{-1}(T_N f(p)) \supset \mathbf{R}_{\geq 0} p$ となる．これは $C_N(Z) \rightarrow T_M X$ が固有であるという事実にムジュンする．

□

3 超局所化 [KS90, §4.3]

定義 3.1 ([KS90, Def 4.3.1]). $F \in D^b(X)$ とする. $\nu_M(F)$ のフーリエ佐藤変換

$$\mu_M(F) := \nu_M(F)^\wedge$$

を F の M に沿った超局所化 (microlocalization) という.

定理 4.2.3 と III §7 の結果を適用することで次が得られる.

定理 3.2 ([KS90, Thm 4.3.2]). $F \in D^b(X)$ とする.

- (i) $\mu_M(F) \in D_{\mathbf{R}^+}^b(T_M X)$ である.
- (ii) V を $T_M^* X$ の錐状開集合とする. このとき

$$H^j(V; \mu_M(F)) \cong \varinjlim_{U, Z} H_{Z \cap U}^j(U; F)$$

である. ただし U は $U \cap M = \pi(V)$ となる X の開集合の族を走り, Z は X の閉集合で $C_M(Z)_{\pi(p)} \subset \{v \in (T_M X)_{\pi(p)}; \langle v, p \rangle > 0\} \cup \{0\}$ となるものの族を走る.

- (iii) Z を $T_M X$ の固有閉凸錐で零切断を含むものとする. このとき

$$H_Z^j(T_M^* X; \mu_M(F) \otimes \text{or}_{M/X}) \cong \varinjlim_U H^{j-l}(U; F)$$

である. ただし U は X の開集合で $C_M(X - U) \cap \text{Int } Z^{\text{oa}} = \emptyset$ となるものの族を走る.

- (iv) 次の同型が成り立つ.

$$\begin{aligned} \mu_M(F)|_M &\cong R\pi_*(\mu_M(F)) \cong R\Gamma_M(F)|_M \cong i^! F, \\ R\Gamma_M(\mu_M(F)) &\cong R\pi_!(\mu_M(F)) \cong i^{-1} F \otimes \omega_{M/X}. \end{aligned}$$

次が成り立つ.

$$i^{-1} F \otimes \omega_{M/X} = F|_M \otimes \text{or}_{M/X}[-l].$$

最後の結果を完全三角

$$R\Gamma_M(\mu_M(F)) \rightarrow R\pi_* \mu_M(F) \rightarrow R\dot{\pi}_* \mu_M(F) \rightarrow +1$$

に適用することで, 完全三角

$$F|_M \otimes \omega_{M/X} \rightarrow R\Gamma_M(F)|_M \rightarrow R\dot{\pi}_* \mu_M(F) \rightarrow +1$$

を得る. いま, $f: Y \rightarrow X$ を多様体の射とし, N を Y の, 余次元 k の閉部分多様体で $f(N) \subset M$ をみたすものとする. 写像 Tf は

参考文献

- [KS90] Masaki Kashiwara, Pierre Schapira, *Sheaves on Manifolds*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 292, Springer, 1990.
- [Sch04] Pierre Schapira, *Sheaves: from Leray to Grothendieck and Sato*, Séminaires et Congrès 9, Soc. Math. France, pp.173–181, 2004.