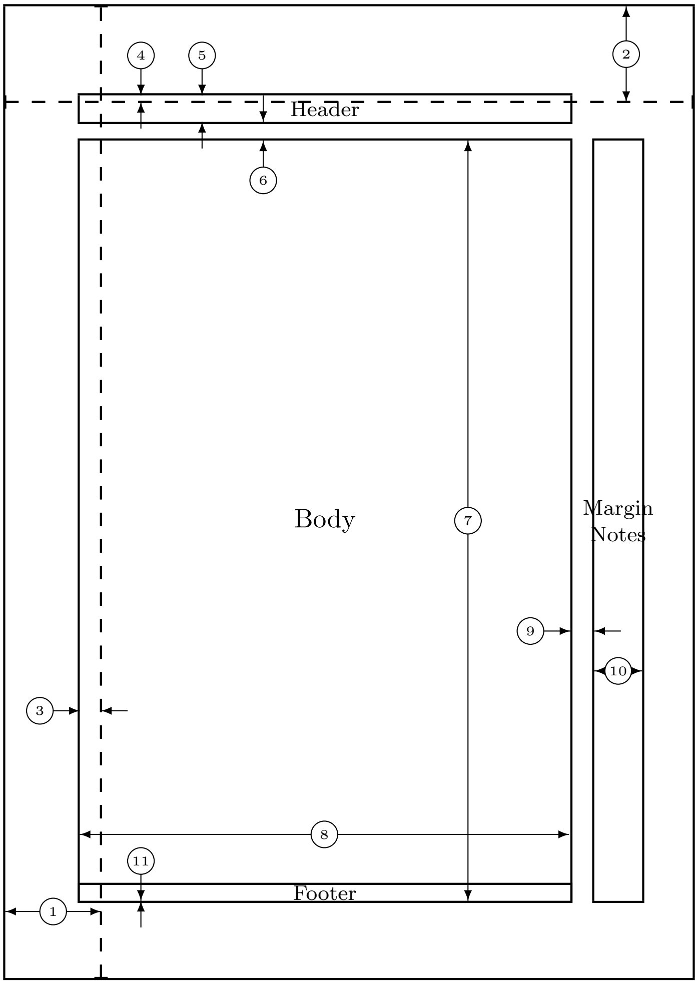
層理論まとめノート

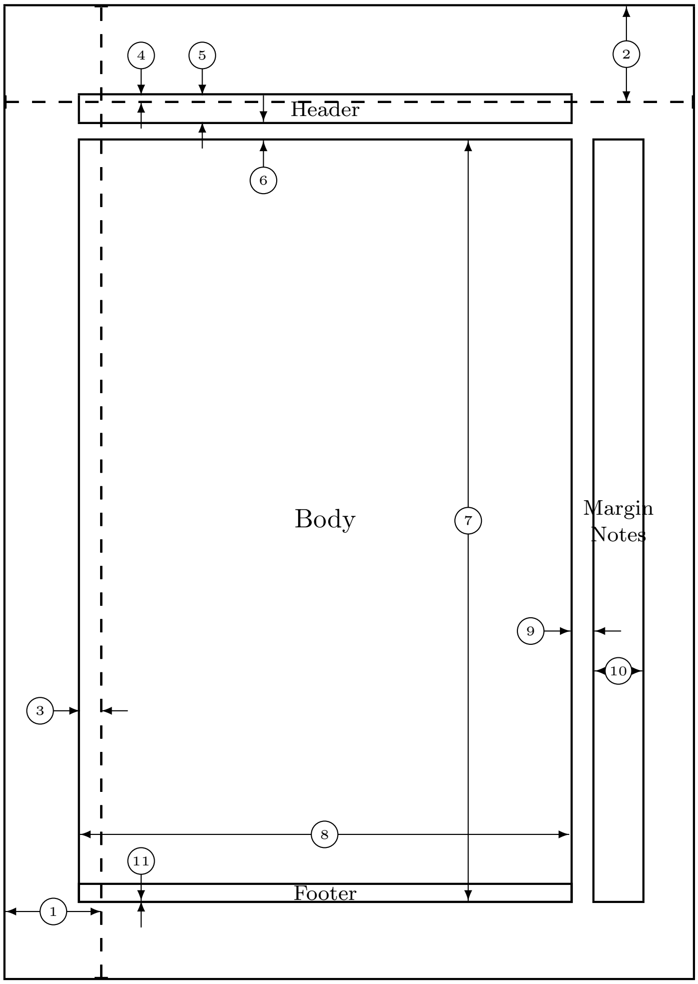
大柴寿浩

2023 年 9 月 5 日

目次



1	one inch + \hoffset	2	one inch + \voffset
3	\oddsidemargin = -16pt	4	\topmargin = -5pt
5	\headheight = 20pt	6	\headsep = 14pt
7	\textheight = 572pt	8	\textwidth = 369pt
9	\marginparsep = 18pt	10	\marginparwidth = 36pt
11	\footskip = 0pt		\marginparpush = 16pt (not shown)
	\hoffset = 0pt		\voffset = 0pt
	\paperwidth = 517pt		\paperheight = 731pt



1	one inch + \hoffset	2	one inch + \voffset
3	\oddsidemargin = -16pt	4	\topmargin = -5pt
5	\headheight = 20pt	6	\headsep = 14pt
7	\textheight = 572pt	8	\textwidth = 369pt
9	\marginparsep = 18pt	10	\marginparwidth = 36pt
11	\footskip = 0pt		\marginparpush = 16pt (not shown)
	\hoffset = 0pt		\voffset = 0pt
	\paperwidth = 517pt		\paperheight = 731pt

第 1 章

層

規約 1.0.1. 次のことは断りなく用いる.

- 環といえば，結合則をみたす積をもち単位元をもつ環とする.
- 位相空間 X に対し，X 上の環や加群の層をたんに X 上の環とか X 上の加群という.
- 層の記号は $\mathcal{F}, \mathscr{F}$ のようにはせず，$F, G, H, \ldots$ のようにローマン体とする

1.1 アーベル圏の層

層の圏における完全列等の概念を明確化しておく．アーベル圏 $\mathcal{C}$ に値を取る位相空間 X 上の層を**アーベル層** (abelian sheaf) ということがある．アーベル層の圏 $\mathsf{Sh}(X,\mathcal{C})$ はアーベル圏になる．すなわち，アーベル層の圏における核と余核が定まる．実際アーベル層 $F, G \in \mathsf{Sh}(X,\mathcal{C})$ の間の射 $\varphi\colon F \to G$ に対し，

$$\operatorname{Ker}\varphi(U) \coloneqq \operatorname{Ker}(\varphi_U), \quad \operatorname{Coker}\varphi(U) \coloneqq a_X\left(\operatorname{Coker}(\varphi_U)\right)$$

として定めると，これらは $\mathsf{Sh}(X,\mathcal{C})$ における核と余核になる.

これらを用いて，$\mathsf{Sh}(X,\mathcal{C})$ における短完全列を次のように定める.

定義 1.1.1.

$$0 \to F \xrightarrow{\varphi} G \xrightarrow{\psi} H \to 0 \quad \text{in } \mathsf{Sh}(X,\mathcal{C})$$

が完全であるとは，次の条件 (i)–(iii) が成り立つことをいう.

(i) $\operatorname{Ker}\phi \cong 0$.
(ii) $\operatorname{Ker}\psi \cong \operatorname{Im}\varphi$.
(iii) $\operatorname{Im}\psi \cong H$.

$\mathcal{C} = \mathsf{Ab}$ のとき，$\mathsf{Sh}(X) = \mathsf{Sh}(X, \mathsf{Ab})$ とかく.

命題 1.1.2 (層の同形は茎ごとの同形)**.**　$\mathsf{Sh}(X)$ の射 $\phi\colon F \to G$ が同形となるのは，各点 $x \in X$ に対し ϕ_x が同形となるときである．

1.2　完全性

諸々の操作の完全性についてまとめる．X を位相空間とし，R を X 上の環とする．

1.2.1　茎

命題 1.2.1 (茎は完全)**.**　各点 $x \in X$ に対し，

$$\begin{array}{cccc} \cdot_x\colon & \mathrm{Mod}(R) & \longrightarrow & \mathrm{Mod}(R_x) \\ & \Psi & & \Psi \\ & F & \longmapsto & F_x \end{array}$$

は完全関手である．

証明.

$$0 \to F \overset{\varphi}{\to} G \overset{\psi}{\to} H \to 0 \quad \text{in } \mathsf{Sh}(X, \mathcal{C})$$

を完全列とする．命題 1.1.2 から，各点 $x \in X$ に対し次の条件 (i)–(iii) が成り立つ．

(i) $(\operatorname{Ker}\phi)_x \cong 0$.
(ii) $(\operatorname{Ker}\psi)_x \cong (\operatorname{Im}\varphi)_x$.
(iii) $(\operatorname{Im}\psi)_x \cong H_x$.

これは次の条件 (i′)–(iii′) と同値である．

(i′) $\operatorname{Ker}\phi_x \cong 0$.
(ii′) $\operatorname{Ker}\psi_x \cong \operatorname{Im}\varphi_x$.
(iii′) $\operatorname{Im}\psi_x \cong H_x$.

これは

$$0 \to F_x \xrightarrow{\varphi_x} G_x \xrightarrow{\psi_x} H_x \to 0 \quad \text{in } \mathcal{C}$$

が完全であることと同値である．　□

とくに，茎ごとの完全性から層の完全性も出てくるので，層の完全列の概念が各点 $x \in X$ における完全列

$$0 \to F_x \xrightarrow{\varphi_x} G_x \xrightarrow{\psi_x} H_x \to 0 \quad \text{exact in } \mathcal{C}$$

にすり替わる．

1.2.2 切断

命題 1.2.2 (切断は左完全). 開集合 $U \in \mathsf{Open}(X)$ に対し,

$$\begin{array}{cccc} \Gamma(U;\cdot)\colon & \mathrm{Mod}(R) & \longrightarrow & \mathrm{Mod}(R(U)) \\ & \Uparrow & & \Uparrow \\ & F & \longmapsto & \Gamma(U;F) \coloneqq F(U) \end{array}$$

は左完全関手である. よってとくに $\Gamma(X;\cdot)$ も左完全である.

例 1.2.3 (右完全にならない例). E を 1 次元複素トーラスとする. E 上の層の完全列

$$0 \to \mathcal{O}_E \xrightarrow{\iota} \mathcal{O}_E(P) \xrightarrow{\rho_P} \mathbf{C}_P \to 0 \quad \text{exact in } \mathrm{Mod}(\mathbf{C}_E)$$

を考える. ただし, $\mathcal{O}_E(P)$ は一点 $P \in E$ における 1 位の因子から定まる層である. つまり,

$$\mathcal{O}_E(P)(U) = \left\{ P \text{ でのみ高々 1 位の極を持つ } U \text{ 上の有理形関数} \right\}$$

によって定まる層である. また $\mathbf{C}_P$ は一点 P にのみ台をもつ摩天楼層である. このとき

$$0 \to \mathcal{O}_E(E) \xrightarrow{\iota_E} \mathcal{O}_E(P)(E) \xrightarrow{(r_P)_E} \mathbf{C} \to 0 \quad \text{in } \mathrm{Mod}(\mathbf{C})$$

は完全ではない. 実際この系列は

$$0 \to \mathbf{C} \xrightarrow{\mathrm{id}_{\mathbf{C}}} \mathbf{C} \xrightarrow{0} \mathbf{C} \to 0 \quad \text{in } \mathrm{Mod}(\mathbf{C})$$

となり, 右側の 0 は全射にならない.

1.2.3 内部 Hom

命題 1.2.4 (Hom は左完全). F, G を R 加群とする.

$$\begin{array}{cccc} \mathrm{Hom}_R(\cdot,\cdot)\colon & \mathrm{Mod}(R)^{\mathrm{op}} \times \mathrm{Mod}(R) & \longrightarrow & \mathrm{Mod}(\mathbf{Z}) \\ & \Uparrow & & \Uparrow \\ & (F,G) & \longmapsto & \mathrm{Hom}_R(F,G) \end{array}$$

は左完全な両側関手である.

1.2.4 内部 Hom

命題 1.2.5 (Hom は左完全). F, G を R 加群とする.

$$\begin{array}{cccc} \mathscr{H}om_R(\cdot,\cdot)\colon & \mathrm{Mod}(R)^{\mathrm{op}} \times \mathrm{Mod}(R) & \longrightarrow & \mathrm{Mod}(\mathbf{Z}_X) \\ & \Uparrow & & \Uparrow \\ & (F,G) & \longmapsto & \mathscr{H}om_R(F,G) \end{array}$$

は左完全な両側関手である.

1.2.5　内部テンソル積

層化が要る．

命題 1.2.6.　F を右 R 加群，G を左 R 加群とする．

$$\begin{array}{cccc} \cdot\otimes_R\cdot\colon & \mathrm{Mod}(R^{\mathrm{op}})\times\mathrm{Mod}(R) & \longrightarrow & \mathrm{Mod}(\mathbf{Z}_X) \\ & \Cup & & \Cup \\ & (F,G) & \longmapsto & F\otimes_R G \end{array}$$

は右完全な両側関手である．

1.2.6　帰納極限

層化が要る．

帰納系 $\alpha\colon I\to\mathrm{Mod}(R)$ を考える．極限を取る操作 $\varinjlim\colon\mathrm{Mod}(R)^I\to\mathrm{Mod}(R)$ を

$$\begin{array}{cccc} \varinjlim\colon & \mathrm{Mod}(R)^I & \longrightarrow & \mathrm{Mod}(R) \\ & \Cup & & \Cup \\ & \alpha=(F_i)_i & \longmapsto & \varinjlim_{i\in I}F_i \end{array}$$

のようにかく．

命題 1.2.7.

$$\begin{array}{cccc} \varinjlim\colon & \mathrm{Mod}(R)^I & \longrightarrow & \mathrm{Mod}(R) \\ & \Cup & & \Cup \\ & \alpha=(F_i)_i & \longmapsto & \varinjlim_{i\in I}F_i \end{array}$$

は右完全関手である．

1.2.7　射影極限

射影系 $\beta\colon I^{\mathrm{op}}\to\mathrm{Mod}(R)$ を考える．極限を取る操作 $\varprojlim\colon\mathrm{Mod}(R)^{I^{\mathrm{op}}}\to\mathrm{Mod}(R)$ を

$$\begin{array}{cccc} \varprojlim\colon & \mathrm{Mod}(R)^{I^{\mathrm{op}}} & \longrightarrow & \mathrm{Mod}(R) \\ & \Cup & & \Cup \\ & \beta=(F_i)_i & \longmapsto & \varprojlim_{i\in I}F_i \end{array}$$

のようにかく．

命題 1.2.8.

$$\begin{array}{cccc} \varprojlim\colon & \mathrm{Mod}(R)^{I^{\mathrm{op}}} & \longrightarrow & \mathrm{Mod}(R) \\ & \Cup & & \Cup \\ & \beta=(F_i)_i & \longmapsto & \varprojlim_{i\in I}F_i \end{array}$$

は左完全関手である.

1.2.8　順像

$f\colon X \to Y$ を連続写像とする.

命題 1.2.9.

$$\begin{array}{cccc} f_*\colon & \mathsf{Sh}(X) & \longrightarrow & \mathsf{Sh}(Y) \\ & \Cup & & \Cup \\ & F & \longmapsto & f_*F \end{array}$$

は左完全関手である.

R を X 上の環とする.

命題 1.2.10.

$$\begin{array}{cccc} f_*\colon & \mathrm{Mod}(R) & \longrightarrow & \mathrm{Mod}(f_*R) \\ & \Cup & & \Cup \\ & F & \longmapsto & f_*F \end{array}$$

は左完全関手である.

1.2.9　逆像

層化が要る.

$f\colon X \to Y$ を連続写像とする.

命題 1.2.11.

$$\begin{array}{cccc} f^{-1}\colon & \mathsf{Sh}(Y) & \longrightarrow & \mathsf{Sh}(X) \\ & \Cup & & \Cup \\ & G & \longmapsto & f^{-1}G \end{array}$$

は完全関手である.

S を Y 上の環とする.

命題 1.2.12.

$$\begin{array}{cccc} f^{-1}\colon & \mathrm{Mod}(S) & \longrightarrow & \mathrm{Mod}(f^{-1}S) \\ & \Cup & & \Cup \\ & G & \longmapsto & f^{-1}G \end{array}$$

は完全関手である.

1.3　各操作の関係

諸々の操作の間の関係についてまとめる.

1.3.1　茎と極限

茎と帰納極限は可換

茎と有限射影極限は可換

1.3.2　切断と極限

切断と帰納極限は可換とは限らない．有限は？

切断と射影極限は可換

参考文献

[KS90] Masaki Kashiwara, Pierre Schapira, *Sheaves on Manifolds*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 292, Springer, 1990.

[KS06] Masaki Kashiwara, Pierre Schapira, *Categories and Sheaves*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 332, Springer, 2006.

[Sh16] 志甫淳, 層とホモロジー代数, 共立出版, 2016.