超関数の理論

1　はじめに

2　層

層については，[Sh16, KS90] にまとまった解説がある．

X を位相空間とし，$\mathsf{Open}(X)$ で X の開集合全体のなす集合を表す．$\mathsf{Open}(X)$ は開集合を対象とし包含写像を射とする圏になる．

層を考える雛形として，ガウス平面上の関数環を考える．$\mathbf{C}$ をガウス平面とする．$\mathbf{C}$ の開集合 U に対し，

$$\mathcal{O}_{\mathbf{C}}(U) \coloneqq \{U \text{ 上の正則関数 }\} \tag{2.1}$$

とおく．$\mathcal{O}_{\mathbf{C}}(U)$ の加法と乗法を $(f+g)(z) = f(z) + g(z)$, $(fg)(z) = f(z)g(z)$ で定めることで，$\mathcal{O}_{\mathbf{C}}(U)$ は環になる．

U と V を $V \subset U$ をみたす $\mathbf{C}$ の開集合とする．$f \in \mathcal{O}_{\mathbf{C}}(U)$ に対し $f|_V \in \mathcal{O}_{\mathbf{C}}(V)$ を対応させることで環の射

$$\rho_{VU} \colon \mathcal{O}_{\mathbf{C}}(U) \to \mathcal{O}_{\mathbf{C}}(V); \quad \rho_{VU}(f) = f|_V \tag{2.2}$$

が定まる．この射を包含写像のひきおこす**制限射** (restriction morphism) とよぶ．

今度は U と V を $U \cap V \neq \varnothing$ をみたす $\mathbf{C}$ の開集合とする．複素関数論では，次の事実を学ぶ．$f \in \mathcal{O}_{\mathbf{C}}(U)$, $g \in \mathcal{O}_{\mathbf{C}}(V)$ に対し，$U \cap V$ で $f = g$ となるとき，$U \cup V$ で定義された正則関数 $h \in \mathcal{O}_{\mathbf{C}}(U \cup V)$ で

$$h|_U = f, \quad h|_V = g$$

となるものがただ一つ（！）存在する．

以上の現象を完全列の言葉を用いて眺める．U と V を $V \subset U$ をみたす $\mathbf{C}$ の開集合とする．次の列を考える．

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{C}}(U \cup V) \xrightarrow{\rho_{U(U \cup V)} \oplus \rho_{V(U \cup V)}} \mathcal{O}_{\mathbf{C}}(U) \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{C}}(V) \xrightarrow{\rho_{(U \cap V)U} - \rho_{(U \cap V)V}} \mathcal{O}_{\mathbf{C}}(U \cap V). \tag{2.3}$$

ここで，$\rho_{U(U \cup V)} \oplus \rho_{V(U \cup V)} \colon \mathcal{O}_{\mathbf{C}}(U \cup V) \to \mathcal{O}_{\mathbf{C}}(U) \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{C}}(V)$ は $U \cup V$ 上の関数 f に対し $f|_U$ と $f|_V$ の組 $(f|_U, f|_V)$ を対応させる射である．ただし環 A と B に対し，$A \oplus B$ は単位元を持つ環と単位元を保つ射の圏 Ring における有限積である．

環の圏についてのコメント　環の圏における積は一般には直積 $A \times B$ であり，有限の積が直和 $A \oplus B$ である．積の添字圏として有限圏を取れば $A \oplus B$ と $A \times B$ は一致する．（直和は Ring の余積ではない！）Ring における余積はテンソル積 $A \otimes_{\mathbf{Z}} B$ である．一般に $A \times B$ と $A \otimes B$ は同形ではないため，Ring はアーベル圏ではないことにも注意．（始対象は $\mathbf{Z}$ で終対象は 0．したがって Ring には零対象が存在しないのでアーベル圏ではないという議論もできる．）

定義 2.1. X を位相空間とする．X 上の **(アーベル群の) 前層** (presheaf) $\mathcal{F}$ は次のデータからなる．

- X の各開部分集合 U に対するアーベル群 $\mathcal{F}(U)$
- 部分開集合の各組 $V \subset U$ に対する群準同型 $\rho_{UV} \colon \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$ で, 次の条件 (1)–(3) を満たすもの．
  (1) $\mathcal{F}(\varnothing) = 0$,
  (2) $\rho_{UU} = \mathrm{id}$,
  (3) $W \subset V \subset U$ ならば, $\rho_{UW} = \rho_{VW} \circ \rho_{UV}$.

元 $s \in \mathcal{F}(U)$ を $\mathcal{F}$ の U 上の**切断** (section) という．$s|_V$ で $\rho_{UV}(s) \in \mathcal{F}(V)$ を表し, s の V への**制限** (restriction) とよぶ.

つまり，$\mathsf{Open}(X)$ から Ab への反変関手で始対象 $\varnothing$ を終対象 0 にうつすものが前層である．

3　超関数

参考文献

[Sh16] 志甫淳, 層とホモロジー代数, 共立出版, 2016.

[KS90] Masaki Kashiwara, Pierre Schapira, *Sheaves on Manifolds*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 292, Springer, 1990.