

コンパクトリーマン面の種数の有限性

1 [Fo81, §14] の和訳

本節では任意のコンパクトリーマン面 X に対しコホモロジー群 $H^1(X, \mathcal{O})$ が有限次元複素ベクトル空間になることを示す. この次元を X の種数と呼ぶ. この有限性定理の結果のひとつに各コンパクトリーマン面上の定数でない有理型関数の存在がある. 3 章での更なる応用を鑑みてコンパクトリーマン面に対してのみならず任意のリーマン面の相対コンパクト部分集合に対しても議論する.

14.1 正則関数の L^2 ノルム

$D \subset \mathbf{C}$ を開集合とする. 正則関数 $f \in \mathcal{O}(D)$ に対し L^2 ノルムを

$$\|f\|_{L^2(D)} := \left(\iint_D |f(x+iy)|^2 dx dy \right)^{1/2}$$

で定める. このとき $\|f\|_{L^2} \in \mathbf{R}_+ \cup \{\infty\}$ である. $\|f\|_{L^2} < \infty$ であるとき, f は二乗可積分であるという. D 上の二乗可積分正則関数全体のなすベクトル空間を $L^2(D, \mathcal{O})$ で表す.

$$\text{Vol}(D) := \iint_D dx dy < \infty$$

であるとき, 各有界関数 $f \in \mathcal{O}(D)$ に対し

$$\|f\|_{L^2} \leq \sqrt{\text{Vol}(D)} \|f\|_D$$

が成り立つ. ここで, $\|f\|_D := \sup \{|f(z)| : z \in D\}$ は上限ノルムを表す.

$f, g \in L^2(D, \mathcal{O})$ に対し, 内積 $\langle f, g \rangle \in \mathbf{C}$ を

$$\langle f, g \rangle := \iint_D f \bar{g} dx dy$$

で定められる．この積分の存在は各 $z \in D$ に対し

$$|f(x)\overline{g(z)}| \leq \frac{1}{2} (|f(z)|^2 + |g(z)|^2)$$

が成り立つことから従う．この内積により $L^2(D, \mathcal{O})$ はユニタリベクトル空間^{*1}となり特に直交性の概念が定まる．いま $B = B(a, r) := \{z \in \mathbf{C} : |z - a| < r\}$ を a を中心とする半径 $r > 0$ の円盤とする．このとき単項式 $(\psi_n)_{n \in \mathbf{N}}$ を

$$\psi_n(z) := (z - a)^n$$

で定めると $(\psi_n)_{n \in \mathbf{N}}$ は $L^2(B, \mathcal{O})$ の直交系を成し，全ての $n \in \mathbf{N}$ に対し

$$\|\psi_n\|_{L^2(B)} = \frac{\sqrt{\pi}r^{n+1}}{\sqrt{n+1}}$$

となることが，極座標を用いることで容易に確かめられる． $f \in L^2(B, \mathcal{O})$ であり

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n$$

を f の a のまわりでのテイラー展開とするととき，ピタゴラスの定理から

$$\|f\|_{L^2(B)}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi r^{2n+2}}{n+1} |c_n|^2 \quad (*)$$

となることが従う．

14.2 定理

$D \subset \mathbf{C}$ を開集合， $r > 0$ を実数とし

$$D_r := \{z \in \mathbf{C} : B(z, r) \subset D\}$$

を D の点で境界からの距離が r 以上であるものの集合とする．このとき任意の $f \in L^2(D, \mathcal{O})$ に対し

$$\|f\|_{D_r} \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}r} \|f\|_{L^2(D)}$$

が成り立つ．

^{*1} [訳注] 複素内積空間（エルミート空間）のこと．

証明. $a \in D_r$ とし $f(z) = \sum c_n(z-a)^n$ を a のまわりでの f のテイラー展開とする. (*)
を用いて

$$|f(a)| = |c_0| \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}r} \|f\|_{L^2(B(a,r))} \leq \|f\|_{L^2(D)}$$

を得る. $\|f\|_{D_r} = \sup \{|f(a)| : a \in D_r\}$ より結論が従う. □

特に, 定理 14.2 より, $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ が $L^2(D, \mathcal{O})$ 内のコーシー列ならば, D の任意のコンパクト部分集合で一様収束することが従う. したがって, その極限の関数は正則である. よって $L^2(D, \mathcal{O})$ は完備であり, したがってヒルベルト空間となる.

次の補題はシュワルツの補題のある種の一般化と考えられる.

14.3 補題

$D' \Subset D$ を \mathbf{C} の開集合とする.

参考文献

[Og02] 小木曾啓示, 代数曲線論, 朝倉書店, 2022.

[Fo81] Otto Forster, *Lectures on Riemann Surfaces*, Springer, 1981.