位相空間まとめノート

Toshi2019

2024 年 1 月 21 日 *

位相空間論で調べたことをまとめるノート．

記号など

- X を集合とする．$\complement_X A$ で X の部分集合 A の補集合を表す．X が明らかなときは $\complement A$ ともかく．$X - A$ とか $X \setminus A$ とか $X \setminus A$ ともかく．

1　局所コンパクト

定義 1.1.　X をハウスドルフ空間とする．

1. X の部分集合 $A \subset X$ について，閉包 $\bar{A}$ がコンパクトであるとき，A は**相対コンパクト**であるという．
2. 任意の点 $x \in X$ に対して，x の相対コンパクトな開近傍が存在するとき，X は**局所コンパクト空間**であるという．

定義 1.2.　X を局所コンパクト空間とする．X が**無限遠点で可算** (countable at infinity) であるとは，X が可算個のコンパクト集合の合併であることをいう．

例 1.3.　位相多様体 X は局所コンパクトである．

証明. $x \in X$ の近傍 U_x でユークリッド空間の開集合 U'_x と同相なものが存在する．U_x と U'_x の間の同相写像を $\varphi\colon U_x \to U'_x$ とする．$\varphi(x)$ を中心とする開球 B_x で U'_x に含まれるものが存在する．この B_x に対し，$\overline{B_x}$ はコンパクトである．したがって，$\varphi^{-1}\left(\overline{B_x}\right) = \overline{\varphi^{-1}(B_x)}$ はコンパクトである．すなわち $\varphi^{-1}(B_x)$ は x の相対コンパクトな開近傍である．　□

* 2023/09/21 作成開始

2　パラコンパクト性

定義 2.1 (パラコンパクト)**.**　ハウスドルフ空間 X がパラコンパクトであるとは，任意の開被覆が局所有限な細分をもつことをいう．

定義 2.2 (第 2 可算)**.**　位相空間 X が第 2 可算であるとは，開集合の基底で可算集合であるものが存在することをいう．

定義 2.3 (σ コンパクト)**.**　位相空間 X が σ コンパクトであるとは，コンパクト集合の列 $(U_n)_{n\in\mathbf{N}}$ で X の被覆であるものが存在することをいう．

命題 2.4.　位相多様体に対して次の条件 (1)–(3) は同値である．

(1) 第 2 可算である．
(2) リンデレーフである．
(3) σ コンパクトである．

参考文献

[KS90] Masaki Kashiwara, Pierre Schapira, *Sheaves on Manifolds*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 292, Springer, 1990.

[KS06] Masaki Kashiwara, Pierre Schapira, *Categories and Sheaves*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 332, Springer, 2006.

[Mat65] 松島与三, 多様体入門, 裳華房, 1965.

[Sai09] 斎藤毅, 集合と位相, 東京大学出版会, 2009.
第 2 可算，σ コンパクトの定義と，無限遠点で可算との同値性について．

[Sh16] 志甫淳, 層とホモロジー代数, 共立出版, 2016.