

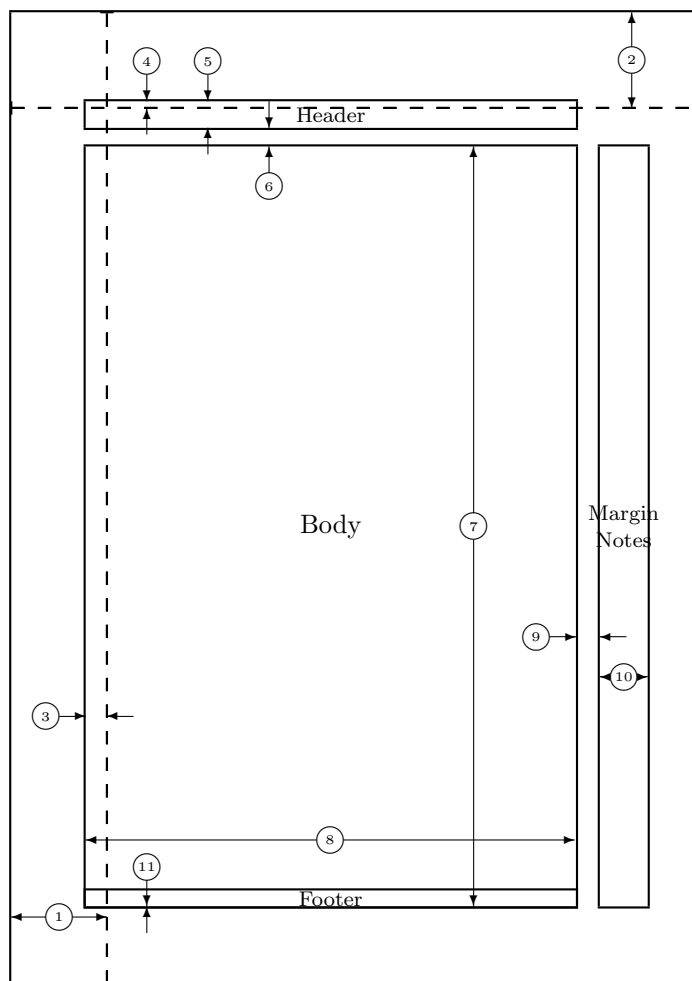
層理論まとめノート

Toshi2019

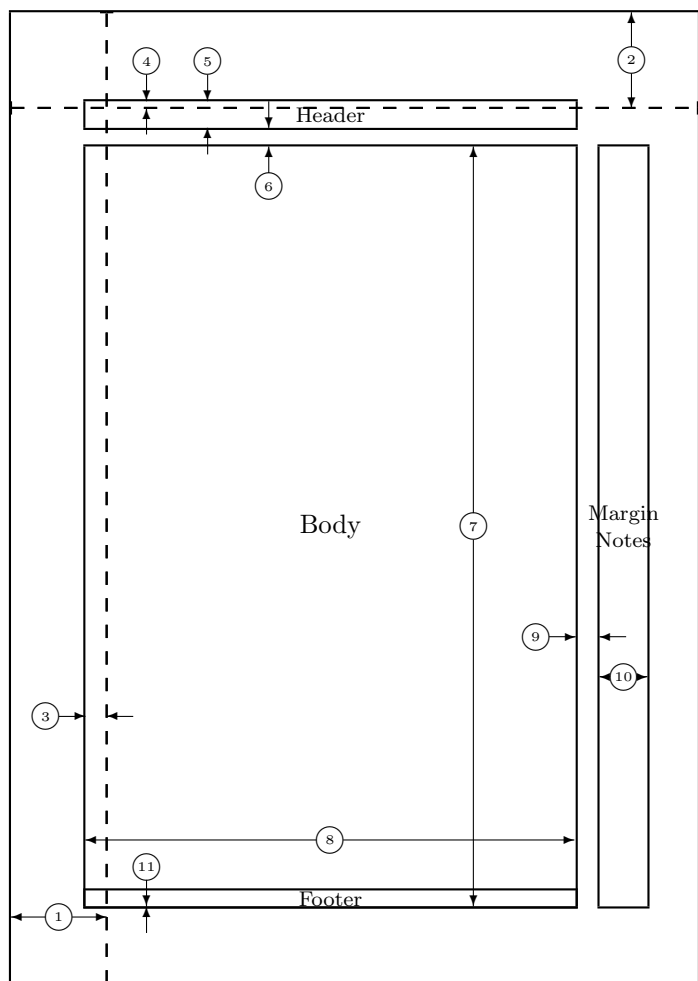
2023 年 10 月 26 日

目次

第 1 章	層	1
1.1	アーベル圏の層	1
1.2	完全性	2
1.3	各操作の関係	6
参考文献		7



- | | | | |
|----|------------------------|----|-----------------------------------|
| 1 | one inch + \hoffset | 2 | one inch + \voffset |
| 3 | \oddsidemargin = -16pt | 4 | \topmargin = -5pt |
| 5 | \headheight = 20pt | 6 | \headsep = 14pt |
| 7 | \textheight = 572pt | 8 | \textwidth = 369pt |
| 9 | \marginparsep = 18pt | 10 | \marginparwidth = 36pt |
| 11 | \footskip = 0pt | | \marginparpush = 16pt (not shown) |
| | \hoffset = 0pt | | \voffset = 0pt |
| | \paperwidth = 517pt | | \paperheight = 731pt |



- | | | | |
|----|------------------------|----|-----------------------------------|
| 1 | one inch + \hoffset | 2 | one inch + \voffset |
| 3 | \oddsidemargin = -16pt | 4 | \topmargin = -5pt |
| 5 | \headheight = 20pt | 6 | \headsep = 14pt |
| 7 | \textheight = 572pt | 8 | \textwidth = 369pt |
| 9 | \marginparsep = 18pt | 10 | \marginparwidth = 36pt |
| 11 | \footskip = 0pt | | \marginparpush = 16pt (not shown) |
| | \hoffset = 0pt | | \voffset = 0pt |
| | \paperwidth = 517pt | | \paperheight = 731pt |

第 1 章

層

規約 1.0.1. 次のことは断りなく用いる.

- 環といえば, 結合則をみたす積をもち単位元をもつ環とする.
- 位相空間 X に対し, X 上の環や加群の層をたんに X 上の環とか X 上の加群という.
- 層の記号は \mathcal{F}, \mathcal{A} のようにはせず, F, G, H, \dots のようにローマン体とする

1.1 アーベル圏の層

層の圏における完全列等の概念を明確化しておく. アーベル圏 \mathcal{C} に値を取る位相空間 X 上の層をアーベル層 (abelian sheaf) ということがある. アーベル層の圏 $\mathrm{Sh}(X, \mathcal{C})$ はアーベル圏になる. すなわち, アーベル層の圏における核と余核が定まる. 実際アーベル層 $F, G \in \mathrm{Sh}(X, \mathcal{C})$ の間の射 $\varphi: F \rightarrow G$ に対し,

$$\mathrm{Ker} \varphi(U) := \mathrm{Ker}(\varphi_U), \quad \mathrm{Coker} \varphi(U) := a_X(\mathrm{Coker}(\varphi_U))$$

として定めると, これらは $\mathrm{Sh}(X, \mathcal{C})$ における核と余核になる.

これらを用いて, $\mathrm{Sh}(X, \mathcal{C})$ における短完全列を次のように定める.

定義 1.1.1.

$$0 \rightarrow F \xrightarrow{\varphi} G \xrightarrow{\psi} H \rightarrow 0 \quad \text{in } \mathrm{Sh}(X, \mathcal{C})$$

が完全であるとは, 次の条件 (i)–(iii) が成り立つことをいう.

- (i) $\mathrm{Ker} \phi \cong 0$.
- (ii) $\mathrm{Ker} \psi \cong \mathrm{Im} \varphi$.
- (iii) $\mathrm{Im} \psi \cong H$.

$\mathcal{C} = \mathrm{Ab}$ のとき, $\mathrm{Sh}(X) = \mathrm{Sh}(X, \mathrm{Ab})$ とかく.

命題 1.1.2 (層の同形は茎ごとの同形). $\mathrm{Sh}(X)$ の射 $\phi: F \rightarrow G$ が同形となるのは, 各点 $x \in X$ に対し ϕ_x が同形となるときである.

1.2 完全性

諸々の操作の完全性についてまとめる. X を位相空間とし, R を X 上の環とする.

1.2.1 茎

命題 1.2.1 (茎は完全). 各点 $x \in X$ に対し,

$$\begin{array}{ccc} \cdot_x: \mathrm{Mod}(R) & \longrightarrow & \mathrm{Mod}(R_x) \\ \downarrow & & \downarrow \\ F & \longmapsto & F_x \end{array}$$

は完全関手である.

証明.

$$0 \rightarrow F \xrightarrow{\varphi} G \xrightarrow{\psi} H \rightarrow 0 \quad \text{in } \mathrm{Sh}(X, \mathcal{C})$$

を完全列とする. 命題 1.1.2 から, 各点 $x \in X$ に対し次の条件 (i)–(iii) が成り立つ.

- (i) $(\mathrm{Ker } \phi)_x \cong 0$.
- (ii) $(\mathrm{Ker } \psi)_x \cong (\mathrm{Im } \varphi)_x$.
- (iii) $(\mathrm{Im } \psi)_x \cong H_x$.

これは次の条件 (i')–(iii') と同値である.

- (i') $\mathrm{Ker } \phi_x \cong 0$.
- (ii') $\mathrm{Ker } \psi_x \cong \mathrm{Im } \varphi_x$.
- (iii') $\mathrm{Im } \psi_x \cong H_x$.

これは

$$0 \rightarrow F_x \xrightarrow{\varphi_x} G_x \xrightarrow{\psi_x} H_x \rightarrow 0 \quad \text{in } \mathcal{C}$$

が完全であることと同値である. □

とくに, 茎ごとの完全性から層の完全性も出てくるので, 層の完全列の概念が各点 $x \in X$ における完全列

$$0 \rightarrow F_x \xrightarrow{\varphi_x} G_x \xrightarrow{\psi_x} H_x \rightarrow 0 \quad \text{exact in } \mathcal{C}$$

にすり替わる.

1.2.2 切断

命題 1.2.2 (切断は左完全). 開集合 $U \in \text{Open}(X)$ に対し,

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(U; \cdot): \text{Mod}(R) & \longrightarrow & \text{Mod}(R(U)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ F & \longmapsto & \Gamma(U; F) := F(U) \end{array}$$

は左完全関手である. よってとくに $\Gamma(X; \cdot)$ も左完全である.

例 1.2.3 (右完全にならない例). E を 1 次元複素トーラスとする. E 上の層の完全列

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_E \xrightarrow{\iota} \mathcal{O}_E(P) \xrightarrow{\rho_P} \mathbf{C}_P \rightarrow 0 \quad \text{exact in } \text{Mod}(\mathbf{C}_E)$$

を考える. ただし, $\mathcal{O}_E(P)$ は一点 $P \in E$ における 1 位の因子から定まる層である. つまり,

$$\mathcal{O}_E(P)(U) = \{P \text{ でのみ高々 1 位の極を持つ } U \text{ 上の有理形関数}\}$$

によって定まる層である. また \mathbf{C}_P は一点 P にのみ台をもつ摩天楼層である. このとき

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_E(E) \xrightarrow{\iota_E} \mathcal{O}_E(P)(E) \xrightarrow{(r_P)_E} \mathbf{C} \rightarrow 0 \quad \text{in } \text{Mod}(\mathbf{C})$$

は完全ではない. 実際この系列は

$$0 \rightarrow \mathbf{C} \xrightarrow{\text{id}_{\mathbf{C}}} \mathbf{C} \xrightarrow{0} \mathbf{C} \rightarrow 0 \quad \text{in } \text{Mod}(\mathbf{C})$$

となり, 右側の 0 は全射にならない.

1.2.3 内部 Hom

命題 1.2.4 (Hom は左完全). F, G を R 加群とする.

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_R(\cdot, \cdot): \text{Mod}(R)^{\text{op}} \times \text{Mod}(R) & \longrightarrow & \text{Mod}(\mathbf{Z}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (F, G) & \longmapsto & \text{Hom}_R(F, G) \end{array}$$

は左完全な両側関手である.

1.2.4 内部 Hom

命題 1.2.5 (Hom は左完全). F, G を R 加群とする.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}om_R(\cdot, \cdot): \text{Mod}(R)^{\text{op}} \times \text{Mod}(R) & \longrightarrow & \text{Mod}(\mathbf{Z}_X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (F, G) & \longmapsto & \mathcal{H}om_R(F, G) \end{array}$$

は左完全な両側関手である.

1.2.5 内部テンソル積

層化が要る.

命題 1.2.6. F を右 R 加群, G を左 R 加群とする.

$$\begin{array}{ccc} \cdot \otimes_R \cdot : & \text{Mod}(R^{\text{op}}) \times \text{Mod}(R) & \longrightarrow \text{Mod}(\mathbf{Z}_X) \\ & \Downarrow & \Downarrow \\ & (F, G) & \longmapsto F \otimes_R G \end{array}$$

は右完全な両側関手である.

1.2.6 帰納極限

層化が要る.

帰納系 $\alpha: I \rightarrow \text{Mod}(R)$ を考える. 極限を取る操作 $\varinjlim: \text{Mod}(R)^I \rightarrow \text{Mod}(R)$ を

$$\begin{array}{ccc} \varinjlim: & \text{Mod}(R)^I & \longrightarrow \text{Mod}(R) \\ & \Downarrow & \Downarrow \\ & \alpha = (F_i)_i & \longmapsto \varinjlim_{i \in I} F_i \end{array}$$

のようにかく.

命題 1.2.7.

$$\begin{array}{ccc} \varinjlim: & \text{Mod}(R)^I & \longrightarrow \text{Mod}(R) \\ & \Downarrow & \Downarrow \\ & \alpha = (F_i)_i & \longmapsto \varinjlim_{i \in I} F_i \end{array}$$

は右完全関手である.

1.2.7 射影極限

射影系 $\beta: I^{\text{op}} \rightarrow \text{Mod}(R)$ を考える. 極限を取る操作 $\varprojlim: \text{Mod}(R)^{I^{\text{op}}} \rightarrow \text{Mod}(R)$ を

$$\begin{array}{ccc} \varprojlim: & \text{Mod}(R)^{I^{\text{op}}} & \longrightarrow \text{Mod}(R) \\ & \Downarrow & \Downarrow \\ & \beta = (F_i)_i & \longmapsto \varprojlim_{i \in I} F_i \end{array}$$

のようにかく.

命題 1.2.8.

$$\begin{array}{ccc} \varprojlim: & \text{Mod}(R)^{I^{\text{op}}} & \longrightarrow \text{Mod}(R) \\ & \Downarrow & \Downarrow \\ & \beta = (F_i)_i & \longmapsto \varprojlim_{i \in I} F_i \end{array}$$

は左完全関手である.

1.2.8 順像

$f: X \rightarrow Y$ を連続写像とする.

命題 1.2.9.

$$\begin{array}{ccc} f_*: & \text{Sh}(X) & \longrightarrow \text{Sh}(Y) \\ & \Downarrow & \Downarrow \\ & F & \longmapsto f_*F \end{array}$$

は左完全関手である.

R を X 上の環とする.

命題 1.2.10.

$$\begin{array}{ccc} f_*: & \text{Mod}(R) & \longrightarrow \text{Mod}(f_*R) \\ & \Downarrow & \Downarrow \\ & F & \longmapsto f_*F \end{array}$$

は左完全関手である.

1.2.9 逆像

層化が要る.

$f: X \rightarrow Y$ を連続写像とする.

命題 1.2.11.

$$\begin{array}{ccc} f^{-1}: & \text{Sh}(Y) & \longrightarrow \text{Sh}(X) \\ & \Downarrow & \Downarrow \\ & G & \longmapsto f^{-1}G \end{array}$$

は完全関手である.

S を Y 上の環とする.

命題 1.2.12.

$$\begin{array}{ccc} f^{-1}: & \text{Mod}(S) & \longrightarrow \text{Mod}(f^{-1}S) \\ & \Downarrow & \Downarrow \\ & G & \longmapsto f^{-1}G \end{array}$$

は完全関手である.

1.2.10 部分集合から定まる層

$Z \subset X$ を部分集合とし, 包含写像 $j: Z \hookrightarrow X$ の引き戻しで Z に X の誘導位相を入れる.

制限と切断の一般化

逆像関手を用いると $F \in \text{Sh}(X)$ の Z への制限が開集合以外にも一般化できる.

$$\begin{array}{ccc} j^{-1}: & \text{Sh}(X) & \longrightarrow & \text{Sh}(Z) \\ & \Downarrow & & \Downarrow \\ & F & \longmapsto & F|_Z = j^{-1}F \end{array}$$

また, 切断関手の一般化も

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(Z; \cdot): & \text{Mod}(R) & \longrightarrow & \text{Mod}(R(Z)) \\ & \Downarrow & & \Downarrow \\ & F & \longmapsto & \Gamma(Z; F) := \Gamma(Z; F|_Z) \end{array}$$

によって行える.

■2023/09/13 分の行間埋め

自然な射 $\Gamma(X; F) \rightarrow \Gamma(Z; F)$ の存在. j^{-1} と $\Gamma(Z; \cdot)$ を合成すればよい.

$$F \mapsto F|_Z \mapsto \Gamma(Z; F).$$

□

制限の引き戻し

X 上の層 F に対して Z から定まる X 上の新しい層 F_Z を

$$\begin{array}{ccc} \cdot_Z: & \text{Sh}(X) & \longrightarrow & \text{Sh}(X) \\ & \Downarrow & & \Downarrow \\ & F & \longmapsto & F_Z = j_* j^{-1} F \end{array}$$

で定める.

1.3 各操作の関係

諸々の操作の間の関係についてまとめる.

1.3.1 茎と極限

茎と帰納極限は可換

茎と有限射影極限は可換

1.3.2 切断と極限

切断と帰納極限は可換とは限らない. 有限は?

切断と射影極限は可換

参考文献

- [KS90] Masaki Kashiwara, Pierre Schapira, *Sheaves on Manifolds*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 292, Springer, 1990.
- [KS06] Masaki Kashiwara, Pierre Schapira, *Categories and Sheaves*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 332, Springer, 2006.
- [Sh16] 志甫淳, 層とホモロジー代数, 共立出版, 2016.