2024/01/11 セミナー資料

大柴寿浩

2024/01/11

1 [KS90, 3.1] の続き

X と Y を局所コンパクト空間とし，$X \times Y$ から X と Y への射影をそれぞれ q_1, q_2 で表す．

命題 1.1 ([KS90, Proposition 3.1.15])**.** Y の c 柔軟次元は有限であるとする．$F \in \mathsf{D}^+(A_X)$, $G \in \mathsf{D}^{\mathrm{b}}(A_X)$ とする．このとき，次の自然な同型が成り立つ．

$$\mathrm{R}\Gamma(X \times Y; \mathrm{R}\mathscr{H}\!om(q_2^{-1}G, q_1^! F)) \cong \mathrm{R}\mathscr{H}\!om\left(\mathrm{R}\Gamma_c\left(Y; G\right), \mathrm{R}\Gamma\left(X; F\right)\right).$$

証明. 次の図式を考える．

$$\begin{tikzcd} X \times Y \arrow[r, "q_2"] \arrow[d, "q_1"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & Y \arrow[d, "\mathrm{a}_Y"] \\ X \arrow[r, "\mathrm{a}_X"'] & \{\mathrm{pt}\}. \end{tikzcd}$$

このとき，

$$\begin{aligned}
&\mathrm{R}\Gamma(X \times Y; \mathrm{R}\mathscr{H}\!om(q_2^{-1}G, q_1^! F)) \\
&\cong \mathrm{R}\mathrm{a}_{X \times Y *}\, \mathrm{R}\mathscr{H}\!om(q_2^{-1}G, q_1^! F) && \text{（切断を 1 点への射影で表す．）} \\
&\cong \mathrm{R}\mathrm{a}_{X*}\mathrm{R}q_{1*}\, \mathrm{R}\mathscr{H}\!om(q_2^{-1}G, q_1^! F) && (\mathrm{a}_{X \times Y} = \mathrm{a}_X \circ q_1.) \\
&\cong \mathrm{R}\mathrm{a}_{X*}\, \mathrm{R}\mathscr{H}\!om(\mathrm{R}q_{1!}q_2^{-1}G, F) && \text{（ポアンカレ・ヴェルディエ双対．）} \\
&\cong \mathrm{R}\mathrm{a}_{X*}\, \mathrm{R}\mathscr{H}\!om(\mathrm{a}_X^{-1}\mathrm{R}\mathrm{a}_{Y!}G, F) && \text{（固有基底変換．）} \\
&\cong \mathrm{R}\mathscr{H}\!om(\mathrm{R}\mathrm{a}_{Y!}G, \mathrm{R}\mathrm{a}_{X*}F) && \text{（順像と逆像の随伴．）} \\
&\cong \mathrm{R}\mathscr{H}\!om(\mathrm{R}\Gamma_c\left(Y; G\right), \mathrm{R}\Gamma\left(X; F\right)). && \text{（順像を切断で表す．）}
\end{aligned}$$

□

定義 1.2 ([KS90, Definition 3.1.16])**.** (i) $f\colon Y \to X$ を連続写像とし，$f_!$ のコホモロジー次元は有限であるとする．

$$\omega_{Y/X} \coloneqq f^! A_X \in \mathsf{D}^+(A_Y)$$

とおき，**相対双対化複体** (relative dualizing complex) という．ω_f ともかく．$X = \{\mathrm{pt}\}$ のとき，$\omega_Y = \omega_{Y/\{\mathrm{pt}\}}$ とおき，双対化複体とよぶ．

(ii) X の c 柔軟次元が有限であるとする．$F \in \mathsf{D}^{\mathrm{b}}(X)$ とする．このとき，

$$\mathrm{D}_X F = \mathrm{R}\mathscr{H}om(F, \omega_X),$$
$$\mathrm{D}'_X F = \mathrm{R}\mathscr{H}om(F, A_X)$$

とおく．$\mathrm{D}_X F$ を F の**ヴェルディエ双対** (Verdier dual) という．

次がある．

$$f^{-1}(\cdot) \otimes \omega_{Y/X} \to f^!(\cdot). \tag{1.1}$$

証明． [KS90, Proposition 3.1.11] の式

$$f^!(\cdot) \otimes^{\mathrm{L}}_{A_Y} f^{-1}(\cdot) \to f^! \left(\cdot \otimes^{\mathrm{L}}_{A_X} \cdot\right)$$

の第 1 引数に A_X を入れると次の射が得られる．

$$f^! A_X \otimes^{\mathrm{L}}_{A_Y} f^{-1}(\cdot) \to f^! \left(A_X \otimes^{\mathrm{L}}_{A_X} \cdot\right) \cong f^!(\cdot).$$

□

ポアンカレ・ヴェルディエ双対定理から，$F \in \mathsf{D}^{\mathrm{b}}(A_X)$ に対して次が成り立つ．

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{D}^{\mathrm{b}}(A_X)}(F, \omega_X) \cong \mathrm{Hom}_{\mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathrm{Mod}(A))}(\mathrm{R}\Gamma_c(X; F), A), \tag{1.2}$$
$$\mathrm{RHom}(F, \omega_X) \cong \mathrm{RHom}(\mathrm{R}\Gamma_c(X; F), A). \tag{1.3}$$

実際，$\omega_X = \mathrm{a}_X^! A$ に対応する $\mathrm{Ra}_{X!}F$ を切断で表せばよい．

とくに，局所閉集合 Z に対し $F = A_Z$ を考えると

$$\begin{aligned}\mathrm{R}\Gamma_Z(X; \omega_X) &\cong \mathrm{RHom}(A_Z, \omega_X) \\ &\cong \mathrm{RHom}(\mathrm{R}\Gamma_c(Z; A_Z), A)\end{aligned}$$

となる．

2 多様体における消滅定理 [KS90, 3.2]

V を n 次元実ベクトル空間とする．[*1]

補題 2.1. $F \in \mathrm{Sh}(V)$ とすると，

$$H^j_c(V; F) = 0. \quad (j > n)$$

*1 ユークリッド空間の意味で言っている？

証明． まず $n=1$ の場合に示す．$i\colon V\to[0,1]$ を V から $]0,1[\,\subset[0,1]$ への同相写像とする．$\widetilde{F}:=i_!F$ とおくと，

$$H^j_c(V;F)\xrightarrow{\sim}H^j([0,1];\widetilde{F})$$

が成り立つ．

> **同型のチェック**
>
> $$\begin{aligned}H^j_c(V;F)&\cong H^j\,\mathrm{R}\Gamma_c(V;F)\\&\cong H^j\mathrm{Ra}_{V!}F\end{aligned}$$
>
> と
>
> $$\begin{aligned}H^j([0,1];\widetilde{F})&\cong H^j\,\mathrm{R}\Gamma([0,1];\mathrm{R}i_!F)\\&\cong H^j\mathrm{Ra}_{[0,1]_*}\mathrm{R}i_!F\end{aligned}$$
>
> より，$\mathrm{Ra}_{V!}\cong\mathrm{Ra}_{[0,1]_*}\mathrm{R}i_!$ であればよいが，これは $\mathrm{a}_{[0,1]}$ が固有ならば成り立つ．$\mathrm{a}_{[0,1]}$ は固有なので，同型．

よって，[KS90, Proposition 2.7.3 (i)]*2 より，

$$0=H^j([0,1];\widetilde{F})\cong H^j_c(V;F)$$

である．

次に，一般の場合に示す．V' を $(n-1)$ 次元ベクトル空間とし，$f\colon V\to V'$ を全射線形写像とする．先の結果から $\mathrm{R}^jf_!F=0.\quad(j\neq 0,1)$

いま，

$$\begin{gathered}\mathrm{R}^0f_!F\cong\tau^{\leqq 0}\mathrm{R}f_!F,\\\tau^{\geqq 1}\mathrm{R}f_!F\cong\mathrm{R}^1f_!F[-1]\end{gathered}$$

である．

> **前半のチェック**
>
> $$\cdots\to 0\to(\mathrm{R}f_!F)^0\to(\mathrm{R}f_!F)^1\to 0\to\cdots\quad\text{in }\mathsf{D}^+(V')$$
>
> の切り落とし $\tau^{\leqq 0}\mathrm{R}f_!F$ は，
>
> $$\cdots\to 0\to\mathrm{Ker}\,d^0\to 0\to 0\to\cdots\quad\text{in }\mathsf{D}^+(V')$$
>
> である．他方，$\mathrm{R}^0f_!F$ は
>
> $$\mathrm{R}^0f_!F\cong H^0(\mathrm{R}f_!F)\cong\mathrm{Ker}\,d^0/0=\mathrm{Ker}\,d^0$$
>
> である．これを 0 次に集中した複体と見れば $\tau^{\leqq 0}\mathrm{R}f_!F$ と一致する．

*2 $I=[0,1]\subset\mathbf{R}$ とする．$F\in\mathrm{Sh}(I)$ に対し，$H^j(I;F)=0.\quad(j>1)$

> 後半のチェック
>
> $$\cdots \to 0 \to (\mathrm{R}f_!F)^0 \to (\mathrm{R}f_!F)^1 \to 0 \to \cdots \quad \text{in } \mathsf{D}^+(V')$$
>
> の切り落とし $\tau^{\geqq 1}\mathrm{R}f_!F$ は
>
> $$\cdots \to 0 \to 0 \to \operatorname{Coker} d^0 \to 0 \to \cdots \quad \text{in } \mathsf{D}^+(V')$$
>
> である．他方，$\mathrm{R}^1 f_!F$ は
>
> $$\mathrm{R}^1 f_!F \cong H^1(\mathrm{R}f_!F) \cong \operatorname{Ker} d^1 / \operatorname{Im} d^0 \cong (\mathrm{R}f_!F)^1 / \operatorname{Im} d^0 \cong \operatorname{Coker} d^0$$
>
> である．これを 0 次に集中した複体と見ると
>
> $$\cdots \to 0^{(-1)} \to \operatorname{Coker} d^0 \to 0^{(1)} \to 0^{(2)} \to \cdots \quad \text{in } \mathsf{D}^+(V')$$
>
> となる．この複体に $[-1]$ を適用すると $\tau^{\geqq 1}\mathrm{R}f_!F$ に一致する．

よって，特三角

$$\mathrm{R}^0 f_!F \to \mathrm{R}f_!F \to \mathrm{R}^1 f_!F[-1] \xrightarrow{+1}$$

を得る．(cf. [KS90, (1.7.2)]) この特三角に $\mathrm{R}\Gamma_c(V'; \cdot)$ を適用すると，長完全列

$$\cdots \to H^j(V'; \mathrm{R}^0 f_!F) \to H^j(V; F) \to H^{j-1}(V'; \mathrm{R}^1 f_!F) \to \cdots$$

が得られる．よって，n に関する帰納法から，$H^j_c(V; F) = 0$ が $j > n$ に対して成り立つ． □

3 向きづけと双対性 [KS90, 3.3]

(1.1) が同型になるための十分条件を調べる．

定義 3.1. $f \colon Y \to X$ を局所コンパクト空間の間の連続写像とする．f がファイバー次元 l の位相的沈めこみ (topological submersion) であるとは，Y の各点 y に対して，y の開近傍 $V \in I_y$ で，$U = f(V)$ が X の開集合であり，次の図式が可換になることをいう．

$$\begin{tikzcd} U \times \mathbf{R}^l \arrow[r, "h", "\sim"'] \arrow[dr, "\mathrm{pr}_1"'] & V \arrow[d, "f|_V"] \\ & U. \end{tikzcd}$$

例. X, Y が C^1 級多様体で f を C^1 沈めこみとすると，f は位相的沈めこみである．

命題 3.2. $f \colon Y \to X$ をファイバー次元 l の位相的沈めこみとする．

(i) $k \neq -l$ に対し $H^k(f^! A_X) = 0$ であり，局所的に $H^{-l}(f^! A_X) \cong A_Y$ である．
(ii) $f^{-1}(\cdot) \otimes \omega_{Y/X} \to f^!(\cdot)$ は同型である．

証明． まず $Y=\mathbf{R}^l$, $X=\{\mathrm{pt}\}$ の場合に (i) を示す．(1.3) より任意の開集合 $U\subset Y$ に対し，

$$\mathrm{R}\Gamma(U;f^!A_X)\cong \mathrm{RHom}(\mathrm{R}\Gamma_c(U;A_Y),A)$$

である．さらに，$U\approx\mathbf{R}^l$ なら

$$\mathrm{R}\Gamma_c(U;A_Y)\cong A[-l]$$

であり，

$$H^j(U;f^!A_X)\cong 0\quad(j\neq -l)$$
$$\Gamma(U;H^{-l}(f^!A_X))\cong \mathrm{Hom}(H^l_c(U;A_Y),A)$$

である．

一般の場合，局所的に考えて $Y=\mathbf{R}^l\times X$ とし，$f=\mathrm{pr}_2$ とする．$p=\mathrm{pr}_1\colon Y\to\mathbf{R}^l$ とおく．

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{R}^l\times X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & Y \arrow[d, "\mathrm{a}_X"] \\
X \arrow[r, "\mathrm{a}_{\mathbf{R}^l}"'] & \{\mathrm{pt}\}.
\end{tikzcd}$$

固有基底変換から $p^{-1}\mathrm{a}^!_{\mathbf{R}^l}=p^{-1}\omega_{\mathbf{R}^l}\to f^!A_X=f^!\mathrm{a}_X^{-1}A$ がある．任意の $F\in\mathsf{D}^+(A_X)$ に対し次の射がある．

$$p^{-1}\omega_{\mathbf{R}^l}A\otimes f^{-1}F\to f^!A_X\otimes f^{-1}F\to f^{-1}F. \tag{3.1}$$

これが同型になることを示す．$U\subset\mathbf{R}^l$, $V\subset X$ とする．$h\colon U\approx\mathbf{R}^l$ のとき，位相的沈めこみの図式は

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{R}^l\times V \arrow[r, "h\times\mathrm{id}_X", "\sim"'] \arrow[dr, "\mathrm{pr}_2"'] & U\times V \arrow[d, "f|_{U\times V}"] \\
 & V
\end{tikzcd}$$

となっている．

$$\begin{aligned}
&\mathrm{R}\Gamma(U\times V;f^!F)\\
&\cong \mathrm{RHom}_Y(A_{U\times V},f^!F) && \Gamma\text{ の定義}\\
&\cong \mathrm{RHom}_X(\mathrm{R}f_!A_{U\times V},F) && \text{ポアンカレ・ヴェルディエ双対}\\
&\cong \mathrm{RHom}_X(\mathrm{R}\Gamma_c(U;A_U)\otimes^{\mathrm{L}}A_V,F)\\
&\cong \mathrm{RHom}(\mathrm{R}\Gamma_c(U;A_U),A)\otimes^{\mathrm{L}}\mathrm{R}\mathscr{H}om(A_V,F)\\
&\cong \mathrm{R}\Gamma(U;\omega_{\mathbf{R}^l})\otimes^{\mathrm{L}}\mathrm{R}\Gamma(V;F) && \text{上で示した}
\end{aligned}$$

となる．よって同型．(ii) から (i) が従う．$\square$

参考文献

[KS90] Masaki Kashiwara, Pierre Schapira, *Sheaves on Manifolds*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 292, Springer, 1990.