

収録されなかった原稿

Pierre Schapira

Résumé

Inference Vol. 7, No. 3 に掲載された Pierre Schapira による書評 “A Truncated Manuscript” の翻訳.

2023/01/09

厳密に言うと、この小文は、Alexander Grothendieck による *Récolts et Semailles* (収穫と蒔いた種と) の書評のためだけのものではない¹⁾。全体として、本については、Grothendieck の仕事と人生とともに、ここで論じられはするけれど、本稿 (小文) の大部分は、Grothendieck が原文全体を通して重ねた主張を論駁するのに充てられている。この点については重要な支持者がいる。著者本人である。今度の新版には収録されていない重要な追記のなかで、Grothendieck は自身の言いがかりのうちのいくつかを撤回している。

Grothendieck という人物は、20 世紀後半の間、数学の多くの部分を支配した。彼の仕事の本質的には代数幾何学に関連するのだとしても、その視野と手法は代数幾何学を超えて大きく広まった。それは、代数的位相幾何学、表現論、複素幾何学、シンプレクティック幾何学、代数解析学、そして近年においては、計算幾何学にさえも及ぶ。端的に言って、力学系や確率論、そしてリーマン幾何学やハミルトン幾何学のような純粋に幾何学的な幾何学を除く、あらゆる線形的な数学である。

導来圏や層理論がこれらの分野において建設されたのは、彼の影響下においてである。直観に優れ、導来圏の理論の根幹を形作ったのも Grothendieck である。彼は自身の学生である Jean-Louis Verdier に、学位論文として、理論の詳細を全て書き出させた。その学位論文において、Verdier は三角圏の鍵となる概念を明確化した²⁾。しかし、後述するように、導来圏の理論の枠組みで層理論と六則演算を作ったのは Grothendieck である。

1). Leila Schneps の批判的かつ建設的な忠告に感謝する。

2). Alexander Grothendieck, *Récoltes et Semailles : I, II. Réflexions et témoignage sur un passé de mathématicien* (Paris : Gallimard, 2022), 439.

1950 年から 1970 年まで、関数あるいは一般化関数は、フーリエ変換を用いて、実または複素多様体の、とりわけユークリッド空間の上で研究されていた。ところが、複素多様体の上では、我々が関数というとき実際には正則関数を意味するが、この関数が重大な困難をもたらす。どういうことかということ、存在しないのである。射影直線のようなコンパクト多様体上の正則関数は、少なくとも大域的には、もちろん定数関数は除いて、存在しない。したがって、実可微分多様体とは異なり、大域的な知識は何の情報ももたらさず、局所的に調べるしかない。この目的のための非凡な道具がある。層理論である。これは Jean Leray が 1941 年から 1945 年までの間ドイツで戦争捕虜になっていた時に発明された³⁾。Leray の原論文はどこか読みづらいところがあったが、のちに Henri Cartan と Jean-Pierre Serre によって整理され、Théorie des Faisceaux (層の理論)⁴⁾ という Roger Godement の有名な本にまとめられた。Cartan と Serre はこの道具を次元 ≥ 1 における正則関数を調べるという、岡潔による金字塔以来の研究にそれぞれ用いて、Cartan の定理 A, B と Serre による重要な論文 “Faisceaux algébrique cohérents” (代数的接続層)⁵⁾ が生まれた。

1955 年頃に Grothendieck が代数幾何学に着手し、東北数学雑誌から出版された基礎的な論文⁶⁾において層コホモロジーの基礎づけを与えたのは、この文脈においてである。この論文において、圏論の重大な困難、すなわち宇宙の問題という Grothendieck により SGA4 で解決される問題が暗に現れている。

その解決は快刀乱麻を断つ方法でなされた^{[訳注] 7)}。Grothendieck は、どの集合もある宇宙に含まれるという公理を付け加えたのである。宇宙は到達不能基数という、圏論を運用することができる範囲を超えたものとしても知られる。この問題が原因で、ブルバキは圏論を扱うことを諦め、Grothendieck はブルバキを離れたのだと思われる。この問題については Ralf Krömer が素晴らしい記事⁸⁾を書いている。

3). Christian Houzel による歴史に関する次の記事を参照せよ。 “Les début de la théorie des faisceaux,” in Masaki Kashiwara and Pierre Schapira, *Sheaves on Manifolds, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, vol. 292* (Berlin : Springer-Verlag, 1990), doi :10.1007/978-3-662-02661-8.

4). Roger Godement, *Théorie des faisceaux* (Paris : Hermann, 1958).

5). Jean-Pierre Serre, “Faisceaux algébrique cohérents,” *Annals of Mathematics, 2nd Series* 61, no. 2. (1955) : 197–278, doi :10.2307/1969915.

6). Alexander Grothendieck, “Sur quelques points d’algèbre homologique,” *Tôhoku Mathematical journal* 9, no. 3 (1957) : 119–21, doi :10.2748/tmj/1178244774. この記事は Rick Jardine が詳細に分析している。 “Tôhoku,” *Inference* 1, no. 3 (2015), doi :10.37282/991819.15.13.

[訳注]. 原文では「もう一人のアレクサンダー（大王）がゴルディアスの結び目を断つ方法でなされた」という、Grothendieck のファーストネームをもじった表現になっている

7). Mike Artin, Alexandre Grothendieck, and Jean-Louis Verdier, *Theorie des topos et cohomologie étale des schémas, Lecture Notes in Mathematics*, vols. 269, 270, 305 (Berlin : Springer-Verlag, 1972–73).

8). Ralf Krömer, “La « machine de Grothendieck » se fonde-t-elle seulement sur des vocables métamathématiques? Bourbaki et les catégories au cours des années cinquante,” *Revue d’histoire des mathématiques* 12 (2006) :119–62.

2023/01/10

1940 年代から 1950 年代の間に起きたものの、その重要性がすぐには理解されなかった 2 つの概念の革命がある。上で述べた層理論と圏論である。後者の革命を起こしたのは Samuel Eilenberg と Saunders Mac Lane である⁹⁾。もっと言うと、圏論的な視点は、Claude Lévi-Strauss の構造主義思想や Noam Chomsky の言語学に代表される大きな思想運動の一部である。圏論は、何らかの構造を備えた集合を考えるのではなく、対象間に存在しうる関係に焦点を当てる。どういうことかという、圏 C は、集合が元の族であるのと同じように対象の族であるのだが、2 つの対象 X と Y が与えられると、そこには $\text{Hom}_C(X, Y)$ と呼ばれる、 X から Y への射を表す集合が最初から存在する。これらのデータは、もちろん射の合成や恒等射などいくつかの公理に従う。新しい一步は、関手と呼ばれる、圏の間の射に注目することにある。そして、随伴関手や終対象と始対象、極限と余極限といった、重要な諸概念が生まれ、数学の根底にある多くのアイデアに対し、正確で統一的な意味づけを与えるのである。

圏の族のうち、中心的な役割を担うものがあるそれは、加法圏、そしてその中のアーベル圏という環上の加群の圏をモデルとする圏である。ところが、体上のベクトル空間を環上の加群に取り替えると、テンソル積をとる関手や内部 Hom をとる関手が存在しなくなってしまう。つまり、それらの操作によって、完全列は完全列にうつらない。部分空間が補空間をもつとは限らない。そこで、線形代数の自然な一般化であるホモロジー代数の領域に入る。ここで、Grothendieck の東北論文にとって代わられる前の初期の参考文献は Cartan と Eilenberg によるものであった¹⁰⁾。しかし、2 つの関手の合成に対する導来関手を求めるためには、Leray のスペクトル系列という、しばしば煩雑な計算を要するものを用いなければならなかった。ここで導来圏がその力を発揮する。この言葉の元では、あらゆることが驚くほど単純になる。

六則演算とは何か。通常の関数については、和の他に 3 つの自然な演算がある。積と、実多様体の間の対応 $f: X \rightarrow Y$ によって、技術的な細部を省いていうと、 X 上の関数を Y 上の関数にうつす積分、そして、 Y 上の関数を X 上の関数にうつす、 f の合成である。層理論においては、テンソル積 \otimes^L は積の類似、固有順像 $Rf_!$ が積分の類似、そして、逆像 f^{-1} は f の合成の類似である。ところが、テンソル積には Rhom という右随伴が、関手 f^{-1} には順像 Rf_*

9). Samuel Eilenberg and Saunders Mac Lane, “Natural Isomorphisms in Group Theory,” *Proceedings of the National Academy of Sciences* 28 (1942) : 537–43, doi :10.1073/pnas.28.12.537; Samuel Eilenberg and Saunders Mac Lane, “General Theory of Natural Equivalences,” *Transactions of the American Mathematical Society* 58 (1945) : 231–94, doi :10.1090/S0002-9947-1945-0013131-6.

10). Henri Cartan and Samuel Eilenberg, *Homological Algebra* (Princeton, NJ : Princeton University Press, 1956).

という右随伴が、そして、関手 $Rf_!$ には右随伴 $f^!$ が存在する。

関手 $f^!$ は他の 5 つとは異なり、導来圏の枠組みの中でしか存在しない。これはエタールコホモロジーの文脈で Grothendieck が発見し、その後局所コンパクト空間の場合に Verdier が定式化した。Grothendieck が見通したように、 $f^!$ は Poincaré 双対の広い一般化になっており、いまや中心的な役割を担っている。しかし、エタール位相よりも局所コンパクト空間の方が頻出するため、双対性に残っているのは、Verdier 一人の名前ではないものの、Poincaré-Verdier という名前である。この名前の帰属のさせ方は大いに不公平であり、Grothendieck はいくらか苦い思いをしたであろうが無理もないことである¹¹⁾。

このような抽象的な枠組みによって、具体的な計算が必要なくなると考える向きもあるかもしれないが、それは誤解である。簡単にいうと、計算の仕方がまるっきり異なるのである。順像関手を用いても積文を明示的に求められはしないとしても、六則演算の定式化によって得られるのは、やはりホモロジー空間の次元の計算のような洗練された数値結果である。Riemann-Roch-Hilzebruch-Grothendieck の定理は美しい例である。

同じく Grothendieck の基本的な発見の 1 つに、層理論を圏の上に、したがって特に、点を一切もたない空間の上に構築するというものがある。層が存在するためには何が必要であろうか。それは、開集合とその包含関係のデータと、被覆の概念である。圏の対象に開集合の役割を担わせてはならない理由など何処にもなく、このとき、この圏は前景（準景）と呼ばれる。あとは被覆が何かを公理的に定めれば、景、すなわち、Grothendieck 位相の入った圏が得られる。このように普通の位相空間を自然に一般化しておくことは、非常に役立つことが示される。そして、解析学者もそこから発想を得ることができるであろう。実多様体上には、開集合の淵で何が起こるかを調べようとすると、あまりにも多くの病的な開集合とあまりにも多くの被覆が現れる。

そしてトポス理論というに至る。—トポイというのを知っているかもしれない。その根底にあるのは、空間、今の場合の景だが、これは景上の層の圏から復元できるというアイデアである。これは特別な場合について Israel Gelfand まで遡る。このときトポスは層のなす圏と同値な圏である。例えば、集合の圏は、1 点をトポスとみなしたものに他ならない。しかし、連続体仮説の独立性に関する Paul Cohen による新しい証明にトポス理論が用いられたとしても、数学における応用は不確かなままである。ここで紹介した Grothendieck の代表的な仕事の選び方は完全とはほど遠く、評者の興味しか反映していない。R&S において Grothendieck は、自身の仕事において鍵となる、自分の思う 12 の考え方を列挙し、自分の一覧も載せている¹²⁾。

1955 年ごろからの関数解析についての彼の初仕事や、代数幾何学に革命をもたらした

11). Grothendieck, *Récoltes et Semailles*, 158.

12). Grothendieck, *Récoltes et Semailles*, 42, 377.

(一新した) 概形 (スキーム) 理論, 部分的に予想し, のちに Pierre Deligne や Vladimir Voevodsky, Joseph Ayoub, 他にも多くの人々の手によって発展した理論である, モチーフについての直観についてももちろん言及しなければならない. Grothendieck が ∞ 圏とホモトピー代数についての礎を築いた重要な論文 “*A la poursuite des champs*” についても述べるべきである¹³⁾. 実は, 三角圏は驚くほど単純で効果的な道具であるとしても, 例えば, 貼り合わせの問題など適用範囲が限られるという欠点がある. この欠点に関係しているのは次の事実である. ある射は同型なものを除いてただ一つしか存在しないのだが, その同型は一意的ではないのである! この ∞ 圏という新理論には, Jacob Lurie, Graeme Segel, Bertrand Toën, 他にも多くの人が名を連ねるが, それは, 導来圏の古典的な理論に完全に取って代わられる最中にある. それでも, 当面は, それは控えめに言ってとっつきづらいものである.

2023/01/11 (2023/08/30 に入力.)

Grothendieck の生涯については Pierre Cartier が素晴らしい記事を書いており, ここで言いかえても無意味である.¹⁴⁾ Allyn Jackson と Winfried Scharlau による, これまた素晴らしい記事もある. 全て Leila Schneps の運営しているサイト The Grothendieck Circle にリンクがある.¹⁵⁾

それでも, この話題について少しでも述べておくのは無駄なことではない. Grothendieck の父親 Sacha Schapiro はロシアの無政府主義者で, 1905 年の中止された革命に参加していた. そこから, 1917 年の革命によって解放されるまで, ニコライ 2 世刑務所に 10 年間拘留されていた. はじめは英雄として尊敬されていたにも関わらず, Schapiro はまもなく人民の敵とされてしまったのである.²⁾ 彼はその後フランスで旅する写真家になるまでは, スペイン人民戦争の間, 連邦の近くで戦った. 1939 年にフランス領のル・ヴェルネ収容所に送られた. 1942 年にヴィシー警察によりナチスに引き渡され, アウシュヴィッツに送られた.

Grothendieck の母親 Hanka は 1920 年代の間, ドイツの極左過激派であったが, Adolf Hitler が台頭してくるとフランスへ亡命した.¹⁶⁾ 息子は 1938 年に 10 歳になるまで母親と行動

13). Alexander Grothendieck, “*A la poursuite des champs*,” (1987).

14). Pierre Cartier, “A Country Known Only by Name,” *Inference* 1, no. 1 (2014), doi:10.37282/991819.14.7. 追加の詳細については “Sascha Shapiro,” Wikipedia をご覧いただきたい.

15). Allyn Jackson, “Comme Appelé du Néant—As if Summoned from the Void : The Life of Alexandre Grothendieck,” *Notices of the AMS* 51, no. 4 and 51, no. 10 (2004) : 1,038—54 and 1,196—212; Winfried Scharlau, “Who is Alexander Grothendieck?,” *Notices of the AMS* 55, no. 8 (2008) : 930—41; Leila Schneps, “The Grothendieck Circle” (grothendieckcircle.org).

2). 以下 2023/01/12 (2023/08/30 に入力.)

16). 一世紀の時代の変遷から言って「1920 年代のドイツにおける極左過激派」という言葉遣いが当時と全く同じ意味を持つわけではない.

を共にせず、ドイツの牧場で隠遁していた。Grothendieck はルシャンボン・シュル・リニョンでの戦争の一部を、非常に多くのユダヤ人の子供を救ったことで有名なコレージュセブノールで過ごした。

Grothendieck の数学研究は 1950 年代にナンシーで始まった。そこでは、Jean Dieudonné と Laurent Schwartz が彼の面倒を見た。いまでも関数解析において根幹とされる初めての仕事の後、代数幾何に分野を変え大成功した。今ではよく知られている話である。

Grothendieck は 1959 年にフランス高等科学研究院 (IHES) に招致された最初の二人の教授の一人である。彼の結果のほとんどをそこで得て、IHES のもう一人の教授 Jean Dieudonné の助力により、かの有名な『代数幾何学原論』(EGA) を出版した。彼は代数幾何のセミナーを主導し、その結果を自身の学生数名との共著により 5000 ページを超える出版物としてまとめた。これは SGA (Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie³⁾) として知られている。Grothendieck は 1966 年の国際数学会議でフィールズメダルを受賞したが、それを受け取るためにモスクワまで赴くことはなかった。1988 年には、権威のある、基金も多い Grafoord 賞を受賞したが、彼はそれを辞退した。

IHES が軍から献金を受け取っていたことが判明すると、Grothendieck は機関を離れ、自ら環境保護活動を始めた。はじめは Survive, その後 Survive et vivre という雑誌を通じたものであった。しかし、Grothendieck は IHES を去ったのみならず、数学の世界から、とりわけ自身の学生からも離れてしまったのである。⁴⁾ 1983 年に数学に戻ってきたが、そのやり方はまるっきり異なるものであった。それは “Esquisse d’un programme” (プログラムの概要) と “A la poursuite des champs” (スタック⁵⁾ の探究) という出版物である。¹⁷⁾ コレージュ・ド・フランスで一年勤務したのち、モンペリエールに任命され、1988 年に退官するまでそこで働いた。彼は最後の時をほとんど一人きり、郊外で過ごし、2014 年に 86 歳で亡くなった。

2023/01/16 (2023/08/30 に入力。)

ここまで見てきたように、Grothendieck は尋常ならざる量の数学著作の筆者である。しかし、彼は重要な文学作品の著者でもある。R & S もそれに含まれる。これは、Grothendieck が 1986 年に原文を書いてから、インターネットを通じて広く配布し、2022 年 1 月にガリマール (Gallimard) から出版された。1900 ページ以上にもわたるこの本は数多くの話題を扱っている。著者の数学者としての生涯、情熱、誤解と幻滅、創造の過程、その他多くの事項などが

3). [訳注] マリーの森の数学セミナー

4). 以降 2023/01/16

5). [訳注] 辻雄一『収穫と巻いた種と』による訳語「園」(シャン) は定着しているとは言い難い。“champ” は社会学における用語としても用いられており、「界」という訳語が定着している。

17). Grothendieck, “A la poursuite des champs.”

扱われている。陰陽や男女の数学の仕方、母と父と子、夢などに関する長い文章も含まれる。原著の大部分を占めるのは、1976年に彼が得たと言われる天啓と、それに続く長い瞑想の期間についての文章である。それはかなり妄想めいたと言わざるを得ない自己分析のようなものである。繰り返し登場する話題は、かつての学生に対する、裏切られたという感覚であり、それは彼の仕事が蔑ろにされ、忘れられていくことに対して感じたものである。「埋葬」、「亡き」、「大量虐殺」、「墓荒らし」といった単語が目次で最初に登場してから、すぐに至る所で現れるようになる。より一般に、数学界全体で倫理観が欠如していることを本書は訴えている。

Grothendieck は読者に、数学は「かつて（すなわち、1960 年以前）はもっと良かった」と、まるで昔の世代に非の打ち所がないかのように述べている！ 実際はその逆で、1990 年代以降、数学ははるかに公正になっているといい。この奇跡の根源には名前がある。arXiv である。他人のアイデアを横取りするのは、もちろんできないことはないが、いまだかつてないほどに難しくなっているのが現状である。数学の研究機関それ自体も大いに改善しているか、少なくとも変化している。Grothendieck が一切煩わされず、一言も言及しなかったフランス数学界に 1970 年代まで献金していた官僚システムはほとんど無くなったのである。

原著全体を通して非常に自己批判的である Grothendieck だが 1960 年代と 1970 年代の全盛期の頃は傲慢であった、あるいは周りを軽蔑していたかもしれないと考え込むことがある。こうした思慮にも関わらず、彼が読者の機嫌を取ることにあまり考えていなかったのは明らかである。それどころか、彼は 1900 ページ以上の本を出し、他方では、IHES ができたばかりの頃、図書館についての質問に対する回答の中で次のように述べている。「我々は本を読むのではない。書くのである！」¹⁸⁾R&S には多くの矛盾が含まれており、（一連の付記によって）訂正されているのはその一部のみである。その訂正についても、それなりの重要性があるのにも関わらずこの新版に収録されていないものがある。これらの矛盾を適切に改定すると、原文を完全に書き直すことを余儀なくされたであろうことに疑いはない。

Grothendieck は謙虚さを欠いていたために麻痺していたのでは決してない。

⁶⁾私から離れた数学者で、このような多種多様の革新的なアイデア、しかもそれぞれが多少でも離れてもおらず、壮大で統一的な構想の一部としてのアイデアになっているものを提唱した人間（物理学や宇宙論におけるニュートンやアインシュタイン、生物学におけるダーウィンやパスツールのように）は、私よりも歴史に精通している友人や同僚の噂からでさえも耳にしていないことに私は衝撃を受けた。¹⁹⁾

別のところでは次のように書いている。「私の中に生まれた壮大で統一的な構想に身を捧げるべき人間としてはその起源から現在までの数学の歴史において、自分こそ「その種の一人」

18). Jackson, “Comme Appelé du Néant,” 1,050.

6). 2023/08/31

19). Grothendieck, Récoltes et Semailles, 935.

であるように思う。」²⁰⁾ 7)

2023/08/31

書き口は発想に乏しいわけではないが、それでも不公平であり、時には（故意に）馴れ馴れしい感じである。Grothendieck はサン・シモン公⁸⁾ではない。

以下の考察では、数学と数学界に関する内容のみに焦点を絞る。

原著において、Grothendieck は長い文章を費やして彼のアイデアがかつての学生により、言及もないままに盗まれたことやそのアイデアが単純に抹消されたり忘れられたりしていることに対する意義を唱えている。

20). Grothendieck, *Récoltes et Semailles*, 94.

7). [訳注] 辻雄一訳では「私の中に生まれた広大な統一的ビジョンの奉仕者として、起源から今日に至るまでの数学の歴史において、私は「この種のものとしては唯一」であるように思えます。」(92 ページ)。

8). [訳注] 『回想録』との類比