■超局所解析学

microlocal analysis　線形の偏微分方程式系はいくつかの未知関数 u_j $(1 \leqq j \leqq N)$ と既知関数 f_i $(1 \leqq i \leqq m)$，および微分作用素 $p_{ij}(x,\partial)$ によって $\displaystyle\sum_{j=1}^{N} p_{ij}(x,\partial)u_j = f_i$ $(1 \leqq i \leqq m)$ と書かれる．ここで $p_{ij}(x,\partial)$ は $\partial_k = \partial/\partial x_k$ $(1 \leqq k \leqq n)$ の多項式である．微分方程式の解の特異性を精密に記述するためには，変数 $x = (x_1, \cdots, x_n)$ のみならず微分 $(\partial_1, \cdots, \partial_n)$ に当たる変数 $\xi = (\xi_1, \cdots, \xi_n)$ を導入して (x, ξ) 空間で考察することが本質的に重要になる．この空間をもとの空間の余接束という．これは解析力学の相空間に相当する．余接束上の解析学を超局所解析学という．

■超関数

generalized function, distribution, hyperfunction　物理学や工学に現れる（ディラックの）デルタ関数のような，通常の意味の関数にはなり得ない対象を関数として取り扱うことを可能にする拡張された関数概念をいう．全く異なった考え方に基づく理論として，関数を積分値によって捉えるシュワルツの超関数（distribution），および正則関数の理想的境界値と捉える佐藤幹夫の超関数（hyperfunction）がある．関数概念の拡張としては後者の方が真に広い．

何回でも微分可能であって，ある有限区間の外で恒等的に 0 になる関数の全体を $\mathcal{D}$ と記す．関数 $f(x)$ に対し

$$T_f(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)dx$$

とおけば $\mathcal{D}$ 上の線形汎関数 $T_f \colon \varphi \mapsto T_f(\varphi)$ が定まる．この関係を抽象化して，$\mathcal{D}$ 上の線形汎関数で適当な連続性を持つもの（すなわち $\mathcal{D}$ の双対空間の元）を関数の拡張とみなし，シュワルツの超関数あるいは分布と呼ぶ．例えば

$$T_\delta(\varphi) = \varphi(0) \quad (\varphi \in \mathcal{D})$$

で定義される超関数をデルタ関数という．$g = df/dx$ として T_g の定義に部分積分の公式を適用すれば，導関数 $(d/dx)f$ に対応する汎関数は $\varphi \mapsto -T_f((d/dx)\varphi)$ である．そこで超関数 T の導関数を

$$\frac{dT}{dx}(\varphi) = -T\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)$$

と定める．この定義によりヘヴィサイド関数 $Y(x)$ の導関数はデルタ関数になる．空間 $\mathcal{D}$ の代わりに別の関数空間をとることにより，さまざまなクラスの超関数を考えることができる．基礎にとる関数空間の元を試験関数あるいはテスト関数という．

佐藤の超関数は正則関数を用いて次のように定義される．$F_\pm(z)$ を上（下）半平面 $\pm \mathrm{Im}\, z > 0$ でそれぞれ正則な関数とする（実軸では特異点を持ってもよい）．組 $(F_+(z), F_-(z))$ の全体を考える．実軸をこめて正則な関数 $G(z)$ があって

$$\widetilde{F}_+(z) - F_+(z) = \widetilde{F}_-(z) - F_-(z) = G(z)$$

が成り立つとき，組 $(\widetilde{F}_+(z), \widetilde{F}_-(z))$ と $(F_+(z), F_-(z))$ は同値であると定める．この同値関係による同値類を形式和

$$F_+(x + i0) - F_-(x - i0)$$

で表し，定義関数 $(F_+(z), F_-(z))$ の定める佐藤超関数と呼ぶ．佐藤超関数の導関数は，定義関数の導関数が定める佐藤超関数と定義する．例えばヘヴィサイド関数は

$$Y(x) = \frac{i}{2\pi}(\log(x + i0) - \log(x - i0)),$$

デルタ関数は

$$\delta(x) = \frac{i}{2\pi}\left(\frac{i}{x + i0} - \frac{i}{x - i0}\right)$$

と定義される．多変数の場合の佐藤超関数は層係数コホモロジーを用いて定義される．

超関数は何回でも微分を考えることができるため，解析学，とりわけ線形偏微分方程式論に著しい応用を持っている．しかし普通の関数と違って超関数どうしの積は一般には意味を持たない．

命題 0.1. 次は同値

1. あああ
2. いいい

証明.

($\Longrightarrow$)　かきくけこ

($\Longleftarrow$)　かきくけこ $\square$

参考文献

[Og02] 小木曽啓示, 代数曲線論, 朝倉書店, 2002.