2024/01/25 セミナー資料

大柴寿浩

2024/01/25

あとで使う定理（復習）

命題 0.1 ([KS90, Proposition 3.1.8])**.** $f\colon Y\to X$，$g\colon Z\to Y$ を局所コンパクト空間の間の連続写像とする．$f_!$ と $g_!$ のコホモロジー次元が有限であるとする．このとき，$(f\circ g)_!$ のコホモロジー次元は有限で
$$(f\circ g)^! \cong g^! \circ f^!$$
である．

命題 0.2 ([KS90, Proposition 3.1.12])**.** $f\colon Y\to X$ を Y から X の局所閉集合 Z の上への同相写像とする．このとき，
$$f^! \cong f^{-1}\circ \mathrm{R}\Gamma_{f(Y)}(\cdot)$$
である．

命題 0.3 ([KS90, Proposition 3.3.2])**.** $f\colon Y\to X$ をファイバー次元 l の位相的沈めこみとする．

(i) $k\neq -l$ に対し $H^k(f^!A_X)=0$ であり，局所的に $H^{-l}(f^!A_X)\cong A_Y$ である．
(ii) $f^{-1}(\cdot)\otimes\omega_{Y/X}\to f^!(\cdot)$ は同型である．

層の例（[KS90, §2.9] から）

0.1 向きづけ，微分形式，密度

C^0 多様体 M 上の層として，向きづけ層 or_M を考えることも必要になってくる．or_M は $\mathbf{Z}_M$ と局所的に同型な層であり，M の向きが存在する場合，その向きを選ぶことと同型 $\mathrm{or}_M\cong\mathbf{Z}_M$ を選ぶことが同義となるようなものである．or_M については次章で詳しくしらべる．

いま，$\alpha = \infty$ または $\alpha = \omega$ とし，p を整数とする．C_M^α を係数にもつ p 次微分形式の層を $C_M^{\alpha,(p)}$ とおく．また外微分を $d\colon C_M^{\alpha,(p)} \to C_M^{\alpha,(p+1)}$ で表す．

$(x_1, \dots, x_n)$ が M 上の局所座標系であるとする．このとき，p 形式 f は次の形にただ一通りに表されるのであった．

$$f = \sum_{|I|=p} f_I dx_I,$$

ここに，$I = \{i_1, \dots, i_p\} \subset \{1, \dots, n\}$, $(i_1 < i_2 < \cdots < i_p)$, $dx_I = dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}$ で，f_I は C_M^α の切断である．このとき，

$$df = \sum_{i=1}^{n} \sum_{|I|=p} \frac{\partial f_I}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_I$$

となるのであった．もうひとつ層を導入する．

$$\mathscr{V}_M^\alpha \coloneqq C_M^{\alpha,(n)} \otimes \mathrm{or}_M$$

（$\alpha = \infty$ または $\alpha = \omega$）とおき，M 上の C^α 密度の層とよぶ．

コンパクト台をもつ C^∞ 密度は積分することができる．$\int_M \cdot$ で積分写像

$$\int_M \cdot \colon \Gamma_c(M; \mathscr{V}_M^\infty) \to \mathbf{C} \tag{0.1}$$

を表す．$C_M^{\alpha,(p)}$ と $\mathscr{V}_M^\alpha$ は C_M^α 加群の層である．

「1 の分割」の存在から，層 C_M^α，$C^{\alpha,(p)}$，$\mathscr{V}_M^\alpha$ は $\alpha \neq \omega$ に対しては c 柔軟であることが従う．層 C_M^ω，$C^{\omega,(p)}$，$\mathscr{V}_M^\omega$ は関手 $\Gamma(M; \cdot)$ に対し非輪状，すなわち $j > 0$ に対し $H^j(M; C_M^\omega) = 0$ である．Grauert[G58] を参照．

0.2　分布と超関数

C^∞ 多様体 M 上にはシュワルツ分布の層 $\mathscr{D}b_M$ が自然に定まる（Schwartz[S66], de Rham[R55] を参照）．$\mathscr{D}b_M$ は c 柔軟層であり，$\Gamma_c(M; \mathscr{D}b_M)$ は $\Gamma(M; \mathscr{V}_M^\infty)$ の双対位相線形空間である．ただし，$\Gamma(M; \mathscr{V}_M^\infty)$ にはフレシェ空間としての自然な位相を入れている．

C^ω 多様体 M 上にも同様に佐藤超関数の層 $\mathscr{B}_M$ が自然に定まる（佐藤 [Sa59] を参照）．$\mathscr{B}_M$ は脆弱層であり，$\Gamma_c(M; \mathscr{B}_M)$ は $\Gamma(M; \mathscr{V}_M^\omega)$ の双対位相線形空間である．ただし，$\Gamma(M; \mathscr{V}_M^\omega)$ には DFS 空間としての自然な位相を入れている（Martineau と Schapira に詳細な解説がある）．しかし，佐藤による構成は純粋にコホモロジーによるものである．後ほど**??**項で復習する．

積分写像 (0.1) はペアリング

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(M; C_M^\infty) \times \Gamma_c(M; \mathscr{V}_M^\infty) & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ (f, g) & \longmapsto & \displaystyle\int_M fg \end{array} \tag{0.2}$$

を定める．このペアリングから C^∞_M から $\mathscr{D}b_M$ への層の射がひきおこされ，この射が単射であることも示せる．さらに，実解析多様体 M の上では，単射 $\Gamma(M;\mathscr{V}^\omega_M) \to \Gamma(M;\mathscr{V}^\infty_M)$ から射 $\mathscr{D}b_M \to \mathscr{B}_M$ が引き起こされ，こちらも単射であることがわかる．

分布係数の p 形式の層 $\mathscr{D}b^{(p)}_M := C^{\infty,(p)}_M \otimes_{C^\infty_M} \mathscr{D}b_M$ や超関数係数の p 形式の層 $\mathscr{B}^{(p)}_M := C^{\omega,(p)}_M \otimes_{C^\omega_M} \mathscr{B}_M$ も定義することができる．$\mathscr{D}b^{(p)}_M$ は c 柔軟層，$\mathscr{B}^{(p)}_M$ は脆弱層である．

1 向きづけと双対性 [KS90, 3.3]

命題 1.1 ([KS90, Prop3.3.6])**.** X を n 次元 C^0 多様体とする．

(i) or_X は前層 $U \mapsto \mathrm{Hom}(H^n_c(U;A_X),A)$ から誘導された層である．

(ii) $x \in X$ に対し，標準的な同型 $\mathrm{or}_{X,x} \cong \mathrm{Hom}\left(H^n_{\{x\}}(X;A_X),A\right) \cong H^n_{\{x\}}(X;A_X)$ が存在する．

(iii) X が向きづけられた可微分多様体であるとする．このとき，同型 $\mathrm{or}_X \cong A_X$ が存在する．この同型は X の向きをとりかえることで符号が変わる．

補題 1.2 ([KS90, Prop3.3.7])**.** E をユークリッド空間 $\mathbf{R}^n$ とし，同型 $\mathrm{or}_E \cong A_E$ を固定する．U と V を E の開集合とし，$f\colon U \to V$ を微分同相写像とする．このとき，次の図式は可換である．

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{or}_U \arrow[r, dash, "\sim"] & \mathrm{or}_{E/U} \arrow[r, dash, "\sim"] & A_U \\
f^{-1}(\mathrm{or}_V) \arrow[u, "f^\sharp_{\mathrm{or}}"] \arrow[r, dash, "\sim"] & f^{-1}(\mathrm{or}_{E/V}) \arrow[r, dash, "\sim"] & f^{-1}(A_V) \arrow[u, "f^\sharp_A"']
\end{tikzcd}$$

（ただし，射 $f^\sharp_{\mathrm{or}}$ と $f^\sharp_A$ は次のように定義する．a_U と a_V を U と V から $\{\mathrm{pt}\}$ への射影とする．このとき $f^\sharp_A$ は同型 $f^{-1} \circ a_V^{-1} \xrightarrow{\sim} a_U^{-1}$ で $f^\sharp_{\mathrm{or}}$ は同型 $f^{-1} \circ a_V^{-1}[-n] \xrightarrow{\sim} f^! \circ a_V^![-n] \xrightarrow{\sim} \circ a_U^{-1}$ である．$f^{-1} \cong f^!$ である．）

$f\colon Y \to X$ を C^0 多様体の間の射とする．f を閉うめ込み $j\colon Y \hookrightarrow Y \times X$ としずめ込み $p\colon Y \times X \to X$ の合成に分解して

$$f\colon Y \overset{j}{\hookrightarrow} Y \times X \xrightarrow{p} X \tag{3.3.5}$$

とかくことができる．$j(y) = (y, f(y))$ で $p(y,x) = x$ である．命題 0.1–0.3 を適用すると，$F \in \mathsf{D}^+(A_X)$ に対し，

$$\begin{aligned} f^! F \cong (p \circ j)^! F &\underset{\text{命題 } 0.1}{\cong} j^! p^! F \\ &\underset{\text{命題 } 0.2}{\cong} j^{-1}\,\mathrm{R}\Gamma_{j(Y)}\left(p^! F\right) \\ &\underset{\text{命題 } 0.3\ \text{(ii)}}{\cong} j^{-1}\,\mathrm{R}\Gamma_{j(Y)}\,p^{-1}F \otimes \omega_{(Y\times X)/X} \\ &\cong j^{-1}\,\mathrm{R}\Gamma_{j(Y)}\,p^{-1}F \otimes \mathrm{or}_{(Y\times X)/X}[\dim Y \times X - \dim X] \\ &\cong j^{-1}\,\mathrm{R}\Gamma_{j(Y)}\,p^{-1}F \otimes \mathrm{or}_Y[\dim Y], \end{aligned}$$

すなわち

$$f^! F \cong j^{-1}\,\mathrm{R}\Gamma_{j(Y)}\,p^{-1}F \otimes \mathrm{or}_Y[\dim Y] \tag{3.3.6}$$

である．$F = A_X$ のとき，

$$\mathrm{or}_{Y/X} \cong j^{-1}\left(H^{\dim Y}_{j(Y)}(A_{Y\times X})\right) \otimes \mathrm{or}_Y \tag{3.3.7}$$

である．さらに $f = \mathrm{id}_X$ のときは，

$$\mathrm{or}_X \cong H^{\dim X}_X(A_{X\times X})|_X \tag{3.3.8}$$

である（X と $X \times X$ の対角集合を同一視した）．

記号 1.3 ([KS90, Notation 3.3.8])**.**　本書では X 章 §3 をのぞき，実多様体 X の次元を $\dim X$ で表す．$f\colon Y \to X$ を C^0 多様体の射とするとき，次のようにおく．

$$\dim Y/X \coloneqq \dim Y - \dim X. \tag{3.3.9}$$

Y が部分多様体のとき，

$$\mathrm{codim}_X Y \coloneqq -\dim Y/X$$

のようにもかく．混同する恐れがないときは $\mathrm{codim}_X Y$ を $\mathrm{codim}\,Y$ と略記する．次が成り立つ．

$$\omega_{Y/X} \cong \mathrm{or}_{Y/X}[\dim Y/X]. \tag{3.3.10}$$

このとき，次のようにおくと自然．

$$\begin{aligned} \omega^{\otimes -1}_{Y/X} &\coloneqq \mathrm{R}\mathscr{H}\!om(\omega_{Y/X}, A_Y), \\ &\cong \mathrm{or}_{Y/X}[-\dim Y/X]. \end{aligned} \tag{3.3.11}$$

命題 1.4 ([KS90, Proposition 3.3.9]). $f\colon Y \to X$ を局所コンパクト空間の間の連続写像とする．次の条件が成りたつとする．

(i) f は位相的しずめ込みである．

(ii) $\mathrm{R}f_! f^! \mathbf{Z}_X \to \mathbf{Z}_X$ は同型である．

このとき，$F \in \mathsf{D}^+(\mathbf{Z}_X)$ に対し，射 $F \to \mathrm{R}f_* f^{-1}$ は同型である．

注意 1.5. $f\colon Y \to X$ を局所コンパクト空間の間の連続写像とし，f はファイバー次元 l の位相的しずめ込みであるとする．このとき，命題 1.4 の条件 (ii) が成りたつためには任意の $x \in X$ に対し，次の同型が成り立つことが必要十分である．

$$\mathrm{R}\Gamma_c(f^{-1}(x); \omega_{f^{-1}(x)}) \xrightarrow{\sim} \mathbf{Z}. \tag{3.3.12}$$

この同型は次の同型と同値である．

$$\mathbf{Z} \xrightarrow{\sim} \mathrm{R}\Gamma(f^{-1}(x); \mathbf{Z}_{f^{-1}(x)}). \tag{3.3.13}$$

実際，$M \coloneqq \mathrm{R}\Gamma_c(f^{-1}(x); \omega_{f^{-1}(x)})$ とおき，$M^* \, \mathrm{RHom}(M, \mathbf{Z})$ とおく．このとき，$M^* \cong \mathrm{R}\Gamma(f^{-1}(x); \mathbf{Z}_{f^{-1}(x)})$ であり，$\mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathrm{Mod}(\mathbf{Z}))$ における同型 $M \xrightarrow{\sim} \mathbf{Z}$ は同型 $\mathbf{Z} \xrightarrow{\sim} M^*$ と同じである．

いま，X を n 次元 C^0 多様体とし，a_X で写像 $X \to \{\mathrm{pt}\}$ を表す．射 $\mathrm{R}\mathrm{a}_{X!}\mathrm{a}_X^! A_{\{\mathrm{pt}\}} \to A_{\{\mathrm{pt}\}}$ から射

$$\mathrm{R}\mathrm{a}_{X!}\omega_X \to A \tag{3.3.14}$$

が定まる．0 次コホモロジーをとることで，「積分射」

$$\int_X : H^n_c(X; \mathrm{or}_X) \to A \tag{3.3.15}$$

が定まる．他方で，$A = \mathbf{C}$ かつ X が C^∞ 多様体であるとき，よく知られた射 $H^n_c(X; \mathrm{or}_X) \to \mathbf{C}$ が次のようにして得られる．or_X はド・ラーム複体と擬同形である：

$$0 \to C_X^{\infty,(0)} \otimes \mathrm{or}_X \underset{d}{\to} \cdots \to C_X^{\infty,(n)} \otimes \mathrm{or}_X \to 0.$$

$C_X^{\infty,(j)} \otimes \mathrm{or}_X$ は c 柔軟なので，

$$H^n_c(X; \mathrm{or}_X) \cong \Gamma_c(X; C^{\infty,(n)} \otimes \mathrm{or}_X)/d\Gamma_c(X; C^{\infty,(n-1)} \otimes \mathrm{or}_X)$$

である．ϕ をコンパクト台をもつ密度，すなわち $\Gamma_c(X; C^{\infty,(n)} \otimes \mathrm{or}_X)$ の元とすると，$\int_X \phi$ が意味をもち，ストークスの定理から $\psi \in \Gamma_c(X; C^{\infty,(n-1)} \otimes \mathrm{or}_X)$ で $\phi = d\psi$ となるものが存在するとき $\int_X \phi = 0$ となる．したがって，$\int_X$ は射

$$\int_X : \Gamma_c(X; C^{\infty,(n)} \otimes \mathrm{or}_X)/d\Gamma_c(X; C^{\infty,(n-1)} \otimes \mathrm{or}_X) \to \mathbf{C} \tag{3.3.16}$$

を定める．この射 (3.3.16) は (3.3.15) と 0 でない定数倍を除いて一致する．

命題 1.6. X を C^0 多様体とし，

参考文献

[Le13] John M. Lee, *Introduction to Smooth Manifolds*, Second Edition, Graduate Texts in Mathematics, **218**, Springer, 2013.

[Sp65] Michael Spivak, *Calculus on Manifolds*, Benjamin, 1965.

[B+84] Borel, *Intersection Cohomology*, Progress in Mathematics, 50, Birkhäuser, 1984.

[G58] Grauert, *On Levi's problem and the embedding of real analytic manifolds*, Ann. Math. 68, 460–472 (1958).

[GP74] Victor Guillemin, Alan Pollack, *Differential Topology*, Prentice-Hall, 1974.

[KS90] Masaki Kashiwara, Pierre Schapira, *Sheaves on Manifolds*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 292, Springer, 1990.

[KS06] Masaki Kashiwara, Pierre Schapira, *Categories and Sheaves*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 332, Springer, 2006.

[R55] de Rham, *Vari'et'es différentiables*, Hermann, Paris, 1955.

[Sa59] Mikio Sato, *Theory of Hyperfunctions*, 1959–60.

[S66] Schwartz, *Théorie de distributions*, Hermann, Paris, 1966.

[Sh16] 志甫淳, 層とホモロジー代数, 共立出版, 2016.

[Ike21] 池祐一, 超局所層理論概説, 2021.

[Tak17] 竹内潔, $\mathcal{D}$ 加群, 共立出版, 2017.