# Notes on Introduction to Symplectic Topology

大柴寿浩

# はじめに

2023 年度 1 学期の数学独立探求 1 で行う [MS17] のセミナーのノート.
次の記号は断りなく使う.

- 添字：なんらかの族 $(a_i)_{i\in I}$ を $(a_i)_i$ とか $(a_i)$ と略記することがある.

# 第 2 章

# 線形シンプレクティック幾何

## 2.5　線形複素構造

実ベクトル空間 $V$ 上の（**線形**）**複素構造** ((linear) complex structure) とは自己同形

$$J\colon V \to V$$

で

$$J^2 = -\mathbb{1}$$

をみたすものをいう．[*1]複素構造を一つ固定することにより，$J$ に対応する $i = \sqrt{-1}$ の作用で $V$ は複素ベクトル空間になる．すなわち，スカラー倍は

$$\mathbb{C} \times V \to V\colon (s + it, v) \mapsto sv + tJv$$

で与えられる．とくに $V$ は実次元が偶数でなければならない．$V$ 上の線形複素構造の空間[*2]を $\mathcal{J}(V)$ で表す．複素構造の基本的な例としては，行列

$$J_0 := \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}.$$

から定まる $\mathbb{R}^{2n}$ の自己同形が挙げられる．$\mathbb{R}^{2n}$ と $\mathbb{C}^n$ の間には $x, y \in \mathbb{R}^n$ としたとき $(x, y) \mapsto x + iy$ という同形が定まる．これを通じて $\mathbb{R}^{2n}$ と $\mathbb{C}^n$ を同一視すれば，行列 $J_0$ は $i$ を掛けることに対応する．

**■この節の内容**

- 複素構造の空間の性質
- シンプレクティック構造と整合的な複素構造
- シンプレクティック形式で統制された複素構造の集合

---

[*1] $\mathbb{1}$ は単位行列．

[*2] のちに見るように，$\mathcal{J}(V)$ は等質空間になる．ベクトル空間ではない．$(0 \notin \mathcal{J}(V).)$

**■複素構造の空間の性質**　次の命題は，任意の線形複素構造が標準複素構造 $J_0$ と同形であるという主張である．

**命題 2.5.1.**　$V$ を $2n$ 次元実ベクトル空間とし $J$ を $V$ 上の線形複素構造とする．このとき，ベクトル空間の同形 $\Phi\colon \mathbb{R}^{2n} \to V$ で $J\Phi = \Phi J_0$ をみたすものが存在する．

**命題 2.5.2.**　(i) 空間 $\mathcal{J}(\mathbb{R}^{2n})$ は等質空間 $\mathrm{GL}(2n,\mathbb{R})/\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ と微分同相であり，したがって連結成分の数は 2 つである．

(ii) $J_0$ を含む連結成分 $\mathcal{J}^+(\mathbb{R}^{2n})$ は，標準的な向きと整合的な $\mathbb{R}^{2n}$ 上の複素構造全体のなす空間である．

# 参考文献

[MS17] McDuff, Dusa, and Dietmar Salamon, Introduction to Symplectic Topology, 3rd edn (Oxford, 2017).