# Sheaves on Manifolds

大柴寿浩

## 1　ホモロジー代数

### 1.3　複体の圏

$\mathscr{C}$ を加法圏とする．

**注意．** 加法圏とは次の 3 つの条件 (1)–(3) をみたす圏のことである．

(1) どの対象 $X, Y \in \mathscr{C}$ に対しても $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, Y)$ が加法群になり，どの対象 $X, Y, Z \in \mathscr{C}$ に対しても合成 $\circ\colon \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(Y, Z) \times \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, Z)$ が双線型である．
(2) 零対象 $0 \in \mathscr{C}$ が存在する．さらに $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(0, 0) = 0$ が成り立つ．
(3) 任意の対象 $X, Y \in \mathscr{C}$ に対して積と余積が存在し，さらにそれらは同型になる．（それらを $X \oplus Y$ とかく．）

圏 $\mathscr{C}$ から，$\mathscr{C}$ の対象の複体の圏 $\mathrm{C}(\mathscr{C})$ を作ることができる．まず複体の定義をする．圏 $\mathscr{C}$ の対象のと射の列

$$\cdots \longrightarrow X^{n-1} \xrightarrow{d_X^{n-1}} X^n \xrightarrow{d_X^n} X^{n+1} \longrightarrow \cdots \tag{1.1}$$

を考える．この列 $X = ((X^n)_{n \in \mathbf{Z}}, (d_X^n)_{n \in \mathbf{Z}})$ が**複体** (complex) であるとは，任意の $n \in \mathbf{Z}$ に対し

$$d_X^{n+1} \circ d_X^n = 0 \tag{1.2}$$

が成り立つことをいう．

圏 $\mathscr{C}$ の対象の複体 $X = ((X^n), (d_X^n))$, $Y = ((Y^n), (d_Y^n))$ の間の射を，$\mathscr{C}$ の射の族 $(f^n\colon X^n \to Y^n)_{n \in \mathbf{Z}}$ で，図式

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots & \longrightarrow & X^n & \xrightarrow{d_X^n} & X^{n+1} & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow{\scriptstyle f^n} & & \downarrow{\scriptstyle f^{n+1}} & & \\
\cdots & \longrightarrow & Y^n & \xrightarrow{d_Y^n} & Y^{n+1} & \longrightarrow & \cdots
\end{array}$$

を可換にする，すなわちどの番号 $n \in \mathbf{Z}$ に対しても

$$d_Y^n \circ f^n = f^{n+1} \circ d_X^n \tag{1.3}$$

が成り立つものとして定める．

# 2 層

層については，[Sh16, KS90] にまとまった解説がある．

## 2.1 簡単な例から

層を考える雛形として，ガウス平面上の関数環を考える．$\mathbf{C}$ をガウス平面とする．$\mathbf{C}$ の開集合 $U$ に対し，

$$\mathcal{O}_{\mathbf{C}}(U) \coloneqq \{U \text{ 上の正則関数 }\} \tag{2.1}$$

とおく．$\mathcal{O}_{\mathbf{C}}(U)$ の加法と乗法を $(f+g)(z) = f(z) + g(z)$, $(fg)(z) = f(z)g(z)$ で定めることで，$\mathcal{O}_{\mathbf{C}}(U)$ は環になる．複素数倍 $(cf)(z) = cf(z)$ も考えれば線型空間，もっというと $\mathbf{C}$ 代数にもなっている．

$U$ と $V$ を $V \subset U$ をみたす $\mathbf{C}$ の開集合とする．$f \in \mathcal{O}_{\mathbf{C}}(U)$ に対し $f|_V \in \mathcal{O}_{\mathbf{C}}(V)$ を対応させることで環の射

$$\rho_{VU}\colon \mathcal{O}_{\mathbf{C}}(U) \to \mathcal{O}_{\mathbf{C}}(V); \quad \rho_{VU}(f) = f|_V \tag{2.2}$$

が定まる．この射を包含写像のひきおこす**制限射** (restriction morphism) とよぶ．

今度は $U$ と $V$ を $U \cap V \neq \varnothing$ をみたす $\mathbf{C}$ の開集合とする．複素関数論では，次の事実を学ぶ．$f \in \mathcal{O}_{\mathbf{C}}(U)$, $g \in \mathcal{O}_{\mathbf{C}}(V)$ に対し，$U \cap V$ で $f = g$ となるとき，$U \cup V$ で定義された正則関数 $h \in \mathcal{O}_{\mathbf{C}}(U \cup V)$ で

$$h|_U = f, \quad h|_V = g$$

となるものがただ一つ（！）存在する．

以上の現象を眺めるために，ここで線形代数の眼鏡をかける．$U$ と $V$ を $U \cap V \neq \varnothing$ をみたす $\mathbf{C}$ の開集合とする．次の列を考える．

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{C}}(U \cup V) \xrightarrow{\rho_{U(U\cup V)} \oplus \rho_{V(U\cup V)}} \mathcal{O}_{\mathbf{C}}(U) \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{C}}(V) \xrightarrow{\rho_{(U\cap V)U} - \rho_{(U\cap V)V}} \mathcal{O}_{\mathbf{C}}(U \cap V). \tag{2.3}$$

ここで，$\rho_{U(U\cup V)} \oplus \rho_{V(U\cup V)}\colon \mathcal{O}_{\mathbf{C}}(U \cup V) \to \mathcal{O}_{\mathbf{C}}(U) \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{C}}(V)$ は $U \cup V$ 上の関数 $f$ に対し $f|_U$ と $f|_V$ の組 $(f|_U, f|_V)$ を対応させる射である．ただし環 $A$ と $B$ に対し，$A \oplus B$ は単位元を持つ環と単位元を保つ射の圏 Ring における有限積である．[*1]

上の列の $\mathcal{O}_{\mathbf{C}}(U \cup V)$ の部分空間（部分環）$\operatorname{Ker}\left(\rho_{U(U\cup V)} \oplus \rho_{V(U\cup V)}\right)$ は $U \cup V$ 上の関数 $h$ で $h|_U$ と $h|_V$ がどちらも $0$ となるもの全体である．そのような $h$ は $0$ しかないので

---

[*1] 環の圏についてのコメント．環の圏における積は一般には直積 $A \times B$ であり，有限の積が直和 $A \oplus B$ である．積の添字圏として有限圏を取れば $A \oplus B$ と $A \times B$ は一致する．（直和は Ring の余積ではない！）Ring における余積はテンソル積 $A \otimes_{\mathbf{Z}} B$ である．一般に $A \times B$ と $A \otimes B$ は同形ではないため，Ring はアーベル圏ではないことにも注意．（始対象は $\mathbf{Z}$ で終対象は $0$．したがって Ring には零対象が存在しないのでアーベル圏ではないという議論もできる．）

$\mathrm{Ker}\left(\rho_{U(U\cup V)}\oplus\rho_{V(U\cup V)}\right)=0$ となる．つまり $0\to\mathscr{O}_{\mathbf{C}}(U\cup V)\to\mathscr{O}_{\mathbf{C}}(U)\oplus\mathscr{O}_{\mathbf{C}}(V)$ は完全である．

今度は $\mathscr{O}_{\mathbf{C}}(U)\oplus\mathscr{O}_{\mathbf{C}}(V)$ の部分に注目する．$\mathrm{Ker}\left(\rho_{(U\cap V)U}-\rho_{(U\cap V)V}\right)$ は $U$ 上の関数 $f$ と $V$ 上の関数 $g$ の組 $(f,g)$ のうち $U\cap V$ 上での値が一致するもの全体である．他方，$\mathrm{Im}\left(\rho_{U(U\cup V)}\oplus\rho_{V(U\cup V)}\right)$ は $U$ 上の関数 $f$ と $V$ 上の関数 $g$ の組 $(f,g)$ のうち，$U\cup V$ 上の関数 $h$ を用いて $f=h|_U$, $g=h|_V$ とかけるもの全体である．$(f,g)$ を $\mathrm{Im}\left(\rho_{U(U\cup V)}\oplus\rho_{V(U\cup V)}\right)$ の元とする．このとき $U\cup V$ 上の関数 $h$ を用いて $(f,g)=(h|_U,h|_V)$ とかける．この $h$ に対し $f|_{U\cap V}=h|_{U\cap V}=g_{U\cap V}$ が成り立つので $(f,g)$ は $\mathrm{Ker}\left(\rho_{(U\cap V)U}-\rho_{(U\cap V)V}\right)$ に属する．したがって，$\mathrm{Im}\left(\rho_{U(U\cup V)}\oplus\rho_{V(U\cup V)}\right)\subset\mathrm{Ker}\left(\rho_{(U\cap V)U}-\rho_{(U\cap V)V}\right)$ が成り立つ．

$(f,g)$ を $\mathrm{Ker}\left(\rho_{(U\cap V)U}-\rho_{(U\cap V)V}\right)$ の元とする．このとき，$f|_{U\cap V}-g|_{U\cap V}=0$ すなわち $f|_{U\cap V}=g|_{U\cap V}$ が成り立つ．上で説明した通り，このとき $U\cup V$ 上の関数 $h$ を用いて $(f,g)=(h|_U,h|_V)$ とかける．したがって，$(f,g)$ は $\mathrm{Im}\left(\rho_{U(U\cup V)}\oplus\rho_{V(U\cup V)}\right)$ に属する．よって，$\mathrm{Ker}\left(\rho_{(U\cap V)U}-\rho_{(U\cap V)V}\right)\subset\mathrm{Im}\left(\rho_{U(U\cup V)}\oplus\rho_{V(U\cup V)}\right)$ も成り立つ．以上より，$\mathrm{Ker}\left(\rho_{(U\cap V)U}-\rho_{(U\cap V)V}\right)=\mathrm{Im}\left(\rho_{U(U\cup V)}\oplus\rho_{V(U\cup V)}\right)$，すなわち，$\mathscr{O}_{\mathbf{C}}(U\cup V)\to\mathscr{O}_{\mathbf{C}}(U)\oplus\mathscr{O}_{\mathbf{C}}(V)\to\mathscr{O}_{\mathbf{C}}(U\cap V)$ も完全である．つまり，正則関数の制限と解析接続に関する以上の現象は，(2.3) が完全列であると言い換えることができる．

## 2.2 層

$X$ を位相空間とし，$\mathsf{Open}(X)$ で $X$ の開集合全体のなす集合を表す．$\mathsf{Open}(X)$ は開集合を対象とし包含写像を射とする圏になる．

**定義 2.1.** $X$ を位相空間とする．$X$ から圏 $\mathscr{C}$ への**前層** (presheaf) とは，$\mathsf{Open}(X)$ から $\mathscr{C}$ への反変関手で始対象 $\varnothing$ を終対象 $\mathrm{pt}_{\mathscr{C}}$ にうつすものである．すなわち，$X$ から圏 $\mathscr{C}$ への前層 $\mathcal{F}$ は次のデータからなる．

– $X$ の各開部分集合 $U$ に対する圏 $\mathscr{C}$ の対象 $\mathcal{F}(U)$,
– 部分開集合の各組 $V\subset U$ に対する $\mathscr{C}$ の射 $\rho_{UV}\colon\mathcal{F}(U)\to\mathcal{F}(V)$ で, 次の条件 (1)–(3) を満たすもの.
  (1) $\mathcal{F}(\varnothing)=0$,
  (2) $\rho_{UU}=\mathrm{id}$,
  (3) $W\subset V\subset U$ ならば, $\rho_{UW}=\rho_{VW}\circ\rho_{UV}$.

元 $s\in\mathcal{F}(U)$ を $\mathcal{F}$ の $U$ 上の**切断** (section) という．$s|_V$ で $\rho_{UV}(s)\in\mathcal{F}(V)$ を表し, $s$ の $V$ への**制限** (restriction) とよぶ.

## 3　超関数

実解析多様体 $M$ 上の超関数の層 $\mathscr{B}_M$ は自然に分布の層 $\mathscr{D}b_M$ を含む．また，$\mathscr{B}_M$ は脆弱層（すなわち，制限射が全射）であるという著しい性質がある．

はじめに $M$ が実数直線 $\mathbf{R}$ の開区間である場合を考える．$X$ を複素直線 $\mathbf{C}$ における $M$ の開近傍で $X \cap \mathbf{R} = M$ をみたすものとする．$\mathcal{O}(U)$ で開集合 $U \subset X$ 上の正則関数の空間を表す．$M$ 上の超関数の空間 $\mathscr{B}_M$ は次で与えられる．

$$\mathscr{B}_M \coloneqq \mathcal{O}(U - M)/\mathcal{O}(U). \tag{3.1}$$

$\mathscr{B}_M$ はここで取った近傍 $U$ に依らない．したがって，次のように余極限を用いて定義するのがよい．

$$\mathscr{B}_M \coloneqq \operatorname*{colim}_{U \supset M} \mathcal{O}(U - M)/\mathcal{O}(U). \tag{3.2}$$

ここでの余極限を $\boldsymbol{F}$

## 参考文献


[Sh16] 志甫淳, 層とホモロジー代数, 共立出版, 2016.

[KS90] Masaki Kashiwara, Pierre Schapira, *Sheaves on Manifolds*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 292, Springer, 1990.

[Og02] 小木曽啓示, 代数曲線論, 朝倉書店, 2022.