

複素トーラスと複素射影直線

大柴 寿浩

概要

本レポートは4章からなる。第1章では、複素多様体とリーマン面を定義し、その間の射を定義する。第2章では、リーマン面として自明でないもののうち、最も簡単な例である複素射影直線を定義する。第3章では、その次に簡単なリーマン面である複素トーラス（楕円曲線）を定義する。ガウス平面上定義された有理型関数のうち、実数上一次独立な2つの周期を持つ関数を楕円関数というが、これは複素トーラス上で定義された有理型関数というのと同じことである。この事実を示したのち、楕円関数の具体例として、Weierstrass の \wp 関数を定義する。第4章では、まず、リーマン面の間の射が与えられたとき、その分岐点と写像度が定まることを（紙面の都合上証明抜きで）述べる。最後に Weierstrass の \wp 関数を用いて、複素トーラスから複素射影直線への正則射を定義する。これが4点で分岐する2重被覆であることを示すことが目的である。

凡例

次の記号・用語について断りなく用いることがある．

- 添字： I を添字集合とする何らかの族 $(x_i)_{i \in I}$ を $(x_i)_i$ や (x_i) のように略記することがある．
- 位相空間 X に対し $\text{Aut}_{\text{Top}}(X) := \{X \text{ 上の自己同相写像}\}$ とかく．
- \mathbf{C} 内の、点 α を中心とする半径 r の開円板を $D(\alpha; r) := \{z \in \mathbf{C}; |z - \alpha| < r\}$ で表す．
- 領域：位相空間 X の部分集合 U が空でない連結開集合であるとき、 U を領域という．

1 リーマン面

1.1 複素多様体とリーマン面

\mathbf{C}^n での座標が $z = (z^1, \dots, z^n)$ であるとき、複素数空間 \mathbf{C}^n を \mathbf{C}_z^n とか $\mathbf{C}_{(z^1, \dots, z^n)}^n$ とかく． U を \mathbf{C}^n の空でない開集合とする．このとき、 U で定義された複素数値関数 f は標準座標を用いて $f(z) = f(z^1, \dots, z^n)$ とかける．

f が U で正則であるとは、 $f(z)$ が U で連続であり、各変数 z^j ($j = 1, \dots, n$) について正則であることをいう．

定義 1.1 (n 次元複素多様体, リーマン面). X を位相空間とする． $(\varphi_i: U_i \rightarrow \mathcal{U}_i)_{i \in I}$ を写像の族とする．このとき、対 $(X, (\varphi_i)_i)$ が次の条件 (1)–(4) をみたすとき、 X を台集合とし $(\varphi_i)_i$ を座標近傍系とする n 次元複素多様体 (n -dimensional complex manifold) という．

- (1) X は空集合でなく、第 2 可算公理を満たす連結なハウスドルフ空間である．
- (2) すべての $i \in I$ に対して U_i は X の空でない開集合であり、 $(U_i)_i$ は X の開被覆である．
- (3) すべての $i \in I$ に対して、 \mathcal{U}_i は $\mathbf{C}_{(z^1, \dots, z^n)}^n$ の空でない開集合であり $\varphi_i: U_i \rightarrow \mathcal{U}_i$ は同相である．
- (4) 任意の $i \neq j \in I$ で $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ をみたすものに対して $\mathcal{U}_{ij} := \varphi_j(U_i \cap U_j) \subset \mathcal{U}_j$ とおくと、 $\varphi_{ij} := \varphi_i \circ \varphi_j^{-1}|_{\mathcal{U}_{ij}}: \mathcal{U}_{ij} \rightarrow \mathcal{U}_i$ は正則である．

とくに、1 次元複素多様体をリーマン面 (Riemann surface) という．

例 1.2. 1. \mathbf{C}^n の領域 U は $(\text{id}_U: U \rightarrow U)$ を座標近傍系とする n 次元複素多様体である．

2. $X = (X, (\varphi_i: U_i \rightarrow \mathcal{U}_i)_{i \in I})$ を n 次元複素多様体とし、 U を X の領域とする． $J := \{i \in I; U \cap U_i \neq \emptyset\}$ とおく． U は $(\varphi_j|_{U \cap U_j})_{j \in J}$ を座標近傍系とする n 次元複素多様体になる．この多様体 U を開部分 (複素) 多様体という．

台空間がコンパクトなリーマン面をとくにコンパクトリーマン面とか閉リーマン面という．例 1.2.2 のように、リーマン面 X の領域 U はリーマン面になる．この U を X の開リーマン面と

いう。

1.2 複素多様体とリーマン面の射

定義 1.3. X を n 次元複素多様体, Y を m 次元複素多様体とする. $f: X \rightarrow Y$ を X から Y への連続写像とする.

1. P を X の点とする. $P, f(P)$ の近傍での f のある座標表示 $w_j = f_{ij}(z_i)$, あるいは $(w_j^1, \dots, w_j^m) = (f_{ij}^1(z_i^1, \dots, z_i^n), \dots, f_{ij}^m(z_i^1, \dots, z_i^n))$ が $z_i(P) = (z_i^1(P), \dots, z_i^n(P))$ で正則であるとき, f は P で正則であるという.

2. f がすべての点 $P \in X$ で正則であるとき f を正則写像 (holomorphic mapping) とか正則射 (holomorphism) という. また \mathbf{C} への正則写像を正則関数 (holomorphic function) という.

X と Y がともにリーマン面であるとき, f をリーマン面の射 (morphism) ともいう.

3. U を X の空でない開集合とする. U 上の関数 f は U の各連結成分上正則であるとき U 上の正則関数という. ここで, 複素多様体の領域は例 1.2.2 の方法で複素多様体とみなしている.

定義 1.4. X をリーマン面とし, U を X の領域, S を X の離散閉部分集合とする. S の各点でしか極をもたない $U - S$ 上の正則関数を有理型関数 (meromorphic function) という.

リーマン面 X 上の有理型関数は X から \mathbf{P}^1 へのリーマン面の射と見做せる.

定義 1.5. X と Y を n 次元複素多様体とする. $f: X \rightarrow Y$ を正則写像とする. 正則写像 $g: Y \rightarrow X$ で $g \circ f = \text{id}_X$ かつ $f \circ g = \text{id}_Y$ をみたすものが存在するとき, f を双正則写像 (biholomorphic mapping) という. X から Y への双正則写像が存在するとき, X と Y は同形 (isomorphic) であるという.

2 複素射影直線

2.1 複素射影直線の定義

\mathbf{C}^2 から原点 $0 = (0, 0)$ を除いた集合 $\mathbf{C}^2 - \{0\}$ の点 $(a_0, a_1), (b_0, b_1)$ に対し次の関係を考える.

$$(a_0, a_1) \sim (b_0, b_1) \iff (a_0, a_1) = c \cdot (b_0, b_1) \text{ となる複素数 } c \neq 0 \text{ が存在する.} \quad (2.1)$$

これは同値関係である. (a_0, a_1) の同値類 $\{c \cdot (a_0, a_1); c \in \mathbf{C} - \{0\}\}$ を $[a_0: a_1]$ とかく.

定義 2.1. $\mathbf{P}^1 := (\mathbf{C}^2 - \{0\}) / \sim$ を複素射影直線 (complex projective line) という.

定義 2.2. 次の写像の組を考える. $\mathbf{C}^2 - \{0\} \xrightarrow[\text{pr}_2=X_1]{\text{pr}_1=X_0} \mathbf{C}; (a_0, a_1) \mapsto a_0, a_1$. この組を $\mathbf{C}^2 - \{0\}$ の標準座標, \mathbf{P}^1 の同次座標という.

\mathbf{P}^1 は商写像 $\pi: \mathbf{C}^2 - \{0\} \rightarrow (\mathbf{C}^2 - \{0\}) / \sim$ による商位相により位相空間になる. この定義か

ら π の連続性が従う.

\mathbf{P}^1 の位相空間としての性質を調べるために, 次の部分集合を定義する.

$$U_0 = \{[a_0 : a_1] \in \mathbf{P}^1; a_0 \neq 0\}, \quad U_1 = \{[a_0 : a_1] \in \mathbf{P}^1; a_1 \neq 0\}.$$

このとき次が成り立つ.

$$U_0 \cup U_1 = \mathbf{P}^1, \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} U_0 \cap U_1 &= \{[a_0 : a_1] \in \mathbf{P}^1; a_0, a_1 \neq 0\} \\ &= U_0 - \{[1 : 0]\} \\ &= U_1 - \{[0 : 1]\}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

補題 2.3. 1. 商写像 $\pi: \mathbf{C}^2 - \{0\} \rightarrow (\mathbf{C}^2 - \{0\})/\sim$ は開写像である.

2. U_0 と U_1 は \mathbf{P}^1 の開集合であり,

$$\begin{aligned} \varphi_0: U_0 &\xrightarrow{\sim} \mathbf{C}; [a_0 : a_1] \mapsto a_1/a_0, \\ \varphi_1: U_1 &\xrightarrow{\sim} \mathbf{C}; [a_0 : a_1] \mapsto a_0/a_1 \end{aligned}$$

はともに同相写像である.

3. 任意の $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in GL(2, \mathbf{C})$ は自己同相写像

$$p_A: \mathbf{P}^1 \xrightarrow{\sim} \mathbf{P}^1; \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix}$$

を引き起こす.

4. \mathbf{P}^1 は第 2 可算公理をみたす連結なコンパクトハウスドルフ空間である.

証明. 1. U を $\mathbf{C}^2 - \{0\}$ の開集合とする. $\pi(U)$ が \mathbf{P}^1 の開集合であること, すなわち $\pi^{-1}(\pi(U))$ が $\mathbf{C}^2 - \{0\}$ の開集合であることを示す. いま, 任意の開集合 $U \subset \mathbf{C}^2 - \{0\}$ に対し, 複素数 $c \neq 0$ を用いて

$$cU = \{(ca_0, ca_1); (a_0, a_1) \in \mathbf{C}^2 - \{0\}\}$$

とおくと, cU は $\mathbf{C}^2 - \{0\}$ の開集合であり,

$$\pi^{-1}(\pi(U)) = \bigcup_{c \in \mathbf{C} - \{0\}} cU$$

なので, $\pi^{-1}(\pi(U))$ は $\mathbf{C}^2 - \{0\}$ の開集合である.

2. まず U_0, U_1 が \mathbf{P}^1 の開集合であることを示す. $U_0 = \{[a_0 : a_1]; a_0 \neq 0\}$ は $V_0 = \{(a_0, a_1); a_0 \neq 0\}$ の π による像であり, V_0 は $\mathbf{C}^2 - \{0\}$ の開集合であるから, U_0 は \mathbf{P}^1 の開集合である. 同様に U_1 も \mathbf{P}^1 の開集合である.

$\varphi_0: U_0 \rightarrow \mathbf{C}$ が連続であることを示す. V を \mathbf{C} の開集合とする. $V = \varphi_0 \circ \pi(V_0) (= \widetilde{\varphi_0}(V_0)$ とおく) である. $\widetilde{\varphi_0}^{-1}(V) = \pi^{-1}(\varphi_0^{-1}(V))$ は V_0 の開集合である. したがって, これは $\mathbf{C}^2 - \{0\}$ の開集合であり, 商位相の定義から $\varphi_0^{-1}(V) \subset U_0$ は開集合である.

φ_0 が同相であることを示す. $\psi_0: \mathbf{C} \rightarrow U_0$ を $\psi_0(z) = [1: z]$ で定める. このとき $\psi_0 \circ \varphi_0([a_0: a_1]) = \psi_0(a_1/a_0) = [1: a_1/a_0] = [a_0: a_1]$ である. また $\varphi_0 \circ \psi_0(z) = \varphi_0([1: z]) = z/1 = z$. したがって, $\psi_0 \circ \varphi_0 = \text{id}_{U_0}$ かつ $\varphi_0 \circ \psi_0 = \text{id}_{\mathbf{C}}$ であり, $\psi_0 = \varphi_0^{-1}$ である. $\psi_0 = \varphi_0^{-1}$ は自然な単射 $\mathbf{C} \hookrightarrow \mathbf{C}^2 - \{0\}$ と π の合成であり, これらは連続なので, その合成である ψ_0 も連続である. 以上より φ_0 は同相である.

3. $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ を可逆な行列とする. A を自己同形 $\mathbf{C}^2 \rightarrow \mathbf{C}^2$ とみたとき, それを $\mathbf{C}^2 - \{0\}$ に制限した $A|_{\mathbf{C}^2 - \{0\}}: \mathbf{C}^2 - \{0\} \rightarrow \mathbf{C}^2 - \{0\}$ は自己同相であり, 逆写像は $A^{-1}|_{\mathbf{C}^2 - \{0\}}$ で与えられる. 一般に $A(cx) = cAx$ なので, A から可逆な写像 p_A が不備なく定まり, 逆写像は $p_{A^{-1}}$ で与えられる.

p_A が連続であることを示す. V を \mathbf{P}^1 の開集合とする. 次の図式が可換であり, π と A は連続写像であるから, $\pi^{-1}(p_A^{-1}(V)) = A^{-1}(\pi^{-1}(V))$ は $\mathbf{C}^2 - \{0\}$ の開集合である.

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{C}^2 - \{0\} & \xrightarrow{A} & \mathbf{C}^2 - \{0\} \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ \mathbf{P}^1 & \xrightarrow{p_A} & \mathbf{P}^1 \end{array}$$

\mathbf{P}^1 の商位相の定義より $\pi^{-1}(V)$ は $\mathbf{C}^2 - \{0\}$ の開集合である. したがって p_A で連続である. p_A^{-1} が連続であることも同様である.

4. 第 2 可算公理をみたすこと :

$$\mathbf{Q}(\sqrt{-1}) = \{a + b\sqrt{-1}; a, b \in \mathbf{Q}\}$$

に属する点 z と有理数 p に対し $U_p(z)$ を考えると $(U_p(z))_{p \in \mathbf{Q}, z \in \mathbf{C}}$ は \mathbf{C} の位相空間としての基底になる. したがって \mathbf{C} は第 2 可算公理をみたす. 直積集合 \mathbf{C}^2 も第 2 可算であるから, 1 点を除いた $\mathbf{C}^2 - \{0\}$ もそうであり, これに全射 π を適用した \mathbf{P}^1 も第 2 可算公理をみたす.

連結かつコンパクトであること : $S^3 = \{P = (a_0, a_1) \in \mathbf{C}^2; |a_0|^2 + |a_1|^2 = 1\} \subset \mathbf{C}^2 - \{0\}$ であり, $\mathbf{C}^2 - \{0\}$ の相対位相により, S^3 は有界閉集合つまりコンパクト集合であり, 連結である. 全射連続写像 $\pi|_{S^3}: S^3 \rightarrow \mathbf{P}^1$ により \mathbf{P}^1 は連結かつコンパクトである. $\pi|_{S^3}$ が全射であることは

$$[a_0: a_1] = \left[\frac{a_0}{\sqrt{a_0^2 + a_1^2}} : \frac{a_1}{\sqrt{a_0^2 + a_1^2}} \right]$$

であることからしう.

ハウスドルフであること : $P \neq Q$ を \mathbf{P}^1 の点とする. $p: GL(2, \mathbf{C}) \rightarrow \text{Aut}_{\text{Top}}(\mathbf{P}^1)$ は全射. したがって, $U_0 \subset \mathbf{P}^1$ から, 任意の $p_A \in \text{Aut}_{\text{Top}}(U_0)$ に対し $A \in GL(2, \mathbf{C})$ が存在する. つまり

$p_A(P), p_A(Q) \in U_0$ となる $A \in GL(2, \mathbf{C})$ が存在する. $U_0 \cong \mathbf{C}$ であり \mathbf{C} はハウスドルフなので, $p_A(P)$ の開近傍 U_P と $p_A(Q)$ の開近傍 U_Q で $U_P \cap U_Q = \emptyset$ をみたすものが存在する. U_P と U_Q は $U_0 \subset \mathbf{P}^1$ の開集合であり, p_A が同相なので $p_A^{-1}(U_P), p_A^{-1}(U_Q)$ は \mathbf{P}^1 における P, Q の開近傍で $p_A^{-1}(U_P) \cap p_A^{-1}(U_Q) = \emptyset$ をみたす. よって \mathbf{P}^1 はハウスドルフである. \square

2.2 貼りあわせ関数

補題 2.3.2 から $\varphi_0: U_0 \xrightarrow{\sim} \mathbf{C}, \varphi_1: U_1 \xrightarrow{\sim} \mathbf{C}$ である. ここで, $\varphi_0(U_0)$ の標準座標を w , $\varphi_1(U_1)$ の標準座標を z で表すことにする. 定義 2.2 のようにかくと

$$\begin{aligned} z: \varphi_1(U_1) = \mathbf{C} &\rightarrow \mathbf{C}; (a) \mapsto a \\ w: \varphi_0(U_0) = \mathbf{C} &\rightarrow \mathbf{C}; (b) \mapsto b \end{aligned}$$

のようになる. 複素数の一つ組に対し第一成分を対応させるということである. これによって点 (a) と座標値 $z(a)$ を同一視し, 点を単に z と書いたりする. ガウス平面 \mathbf{C} に, そこでの標準座標をつけて $\mathbf{C}_z, \mathbf{C}_w$ のように表すと, $\mathbf{C}_w \subset \mathbf{P}^1, \mathbf{C}_z \subset \mathbf{P}^1$ とみなせる. z も w も 0 でないとき, \mathbf{C}_z と \mathbf{C}_w の間には,

$$z = \frac{1}{w} \quad (2.4)$$

の関係がある. $z, w \neq 0$ は (2.3) より $[z: w] \in U_0 \cap U_1$ ということである. $[z: w] \in U_0 \cap U_1$ のとき z は w の正則関数になっている. $\varphi_0(U_0 \cap U_1) = \mathbf{C}_w - \{0\} = \mathbf{C}_w \cap \mathbf{C}_z = \mathbf{C}_z - \{0\} = \varphi_1(U_0 \cap U_1)$ なので, この正則関数を $\varphi_{10}: \mathbf{C}_w - \{0\} = \varphi_0(U_0 \cap U_1) \rightarrow \mathbf{C}_z - \{0\} = \varphi_1(U_0 \cap U_1)$ とかくことにすると, 次の図式が可換になる.

$$\begin{array}{ccc} U_0 \cap U_1 & \xrightarrow{[1: w]=[z: 1]} & U_0 \cap U_1 \\ \uparrow \varphi_0^{-1} & & \downarrow \varphi_1 \\ \mathbf{C}_w - \{0\} & \xrightarrow{\varphi_{10}} & \mathbf{C}_z - \{0\} \end{array}$$

つまり, $\varphi_{10} = \varphi_1 \circ \varphi_0^{-1}$ である. また, $\varphi_{01} = \varphi_0 \circ \varphi_1^{-1}: \varphi_1(U_0 \cap U_1) \rightarrow \varphi_0(U_0 \cap U_1)$ も $w = 1/z$ として同様に定まる. これは正則であり φ_{10} の逆関数でもある.

以上から次が従う.

命題 2.4. 複素射影直線 \mathbf{P}^1 は, \mathbf{P}^1 を台集合とし, $(\varphi_0: U_0 \rightarrow \mathbf{C}_w, \varphi_1: U_1 \rightarrow \mathbf{C}_z)$ を座標近傍系とするコンパクトリーマン面である.

証明. コンパクト性は補題 2.3.4 で示した. 定義 1.1 の (1)–(4) で $n = 1$ としたものが成り立つことを示す.

(1) 補題 2.3.4 からしたがう.

(2) (2.2) と (2.3) からしたがう.

(3) 補題 2.3.2 からしたがう.

(4) 上で説明した.

□

ここでは 2 枚の被覆で座標近傍系を定めたが、以下断りなく極大座標近傍系を考える.

3 複素トーラス

3.1 複素トーラスの定義

ω_1, ω_2 を \mathbf{R} 上一次独立な複素数とする. ω_1, ω_2 に対し, ガウス平面 \mathbf{C} の加法部分群 Ω を

$$\Omega := \{n_1\omega_1 + n_2\omega_2; n_1, n_2 \in \mathbf{Z}\}$$

で定める. $E := \mathbf{C}/\Omega$ とおく. 商写像を $p: \mathbf{C} \rightarrow E$ とかく. また, $S := \{a\omega_1 + b\omega_2; 0 \leq a, b < 1\}$ とおく. このとき, p は E と S の間の 1 対 1 対応を定める. 実際, $x = x_1\omega_1 + x_2\omega_2, y = y_1\omega_1 + y_2\omega_2 \in S$ とし, $p(x) = p(y)$ とする. このとき, $p(x-y) = [0]$, つまり, $x-y = n_1\omega_1 + n_2\omega_2$ となる整数 n_1, n_2 が存在する. $0 \leq x_1, x_2, y_1, y_2 < 1$ なので $n_1 = n_2 = 0$ となる必要がある. したがって, $x = y$ となる. つまり p は単射である. p が全射であることは, 次の補題 3.1.1 から従う.

補題 3.1. 1. p は全射かつ連続な開写像である.

2. E は第 2 可算公理をみたす連結なコンパクトハウスドルフ空間である.

証明. 1. p は全射かつ連続であること: α を E の点とする. α に対し, $\alpha + 0\omega_1 + 0\omega_2$ は $\alpha = p(\alpha + 0\omega_1 + 0\omega_2)$ をみたす. p の連続性は商位相の定義より従う.

p が開写像であること: U を \mathbf{C} の空でない開集合とする.

$$p^{-1}(p(U)) = \bigcup_{\omega \in \Omega} (U + \omega)$$

であり, $U + \omega$ は \mathbf{C} の開集合なので, その合併である $p^{-1}(p(U))$ も \mathbf{C} の開集合である. したがって, $p(U)$ は E の開集合である.

2. 第 2 可算であること: p が全射かつ連続な開写像なので, \mathbf{C} の位相空間としての基底の p による像は E の基底になる. 実際, $x \in E$ とし, U を E における x の開近傍とする. このとき, p は全射なので $p^{-1}(x)$ は空でなく, $p^{-1}(U) \subset \mathbf{C}$ は p の連続性から $p^{-1}(x)$ の元たちの開近傍である. \mathbf{C} の基底の元 V で $p^{-1}(U)$ に含まれ, $p^{-1}(x)$ を含むものが存在する. この V に対し, p が連続な開写像であることから, $p(V)$ は E の開集合であり, $x \in p(V) \subset U$ が成り立つ. よって, \mathbf{C} が第 2 可算であることから E も第 2 可算である.

連結かつコンパクトであること: S の閉包 \bar{S} は連結かつコンパクトである. また, $p(\bar{S}) = E$ でもある. p の連続性によって, E は連結かつコンパクトである.

ハウスドルフであること: $P \neq Q$ を E の点とする. P, Q に対し, S の点 x, y で $p(x) = P, p(y) = Q$ となるものが存在する. $x, y \in \partial S$ のとき, 複素数 ε を適当にとつて, $x, y \in \text{Int}(S + \varepsilon)$ となるようにできるので, x, y は S の内点としてよい. このとき, $S \subset \mathbf{C}$ がハウスドルフであることから, 実数 $r > 0$ で, $D(x; r), D(y; r) \subset S$ かつ $D(x; r) \cap D(y; r) = \emptyset$ をみたすものが存在する. この r に対し, $P \in p(D(x; r))$ かつ $Q \in p(D(y; r))$ であり, $p(D(x; r)) \cap p(D(y; r)) = \emptyset$ が成り立つ. \square

E の複素構造を定める. P を E の点とする. 複素数 ε と $P = p(x)$ となる点 $x \in \mathbf{C}$ と x の開近傍 \mathcal{U}_x で $\mathcal{U}_x \subset S + \varepsilon$ となるものが存在する. $U_P := p(\mathcal{U}_x)$ とおくと, U_P は P の E における開近傍である. $p^{-1}(U_P) = \bigsqcup_{\omega \in \Omega} \mathcal{U}_x + \omega$ であり, 任意の $\omega \in \Omega$ に対し, $p|_{\mathcal{U}_x + \omega} : \mathcal{U}_x + \omega \rightarrow U_P$ は同相写像である. $p|_{\mathcal{U}_x}$ の逆写像を $\varphi_{P,x} : U_P \rightarrow \mathcal{U}_x$ とおく. このとき, $(\varphi_{P,x})_{P \in E, x \in p^{-1}(P)}$ は E の座標近傍系である. 実際, P, Q を E の点とし, \mathbf{C} の点 x, y を $P = p(x), Q = p(y)$ をみたすものとする. このとき, $\varphi_{Q,y} \circ \varphi_{P,x}^{-1} : \varphi_{P,x}(U_P \cap U_Q) \rightarrow \varphi_{Q,y}(U_P \cap U_Q)$ は x に何らかの $\omega \in \Omega$ を足して y に並行移動させる写像 $y = x + \omega$ なので正則である.

したがって, 次が成り立つ.

命題 3.2. $(E, (\varphi_{P,x})_{P \in E, x \in p^{-1}(P)})$ はコンパクトリーマン面である.

証明. (1) 補題 3.1.2 で示した.

(2) $E = \bigcup_{P \in E} U_P$ と補題 3.1.1 から従う.

(3), (4) 上で示した. \square

コンパクトリーマン面 E を複素トーラスという.

3.2 楕円関数

3.1 節の記号を用いる.

定義 3.3. f を \mathbf{C} 上定義された有理型関数とする. f が ω_1 と ω_2 を周期とするとき, f は 2 重周期 ω_1 と ω_2 をもつ, あるいは Ω を周期とする楕円関数 (elliptic function) であるという.

補題 3.4. 商写像 $p: \mathbf{C} \rightarrow E$ の引き戻し $p^*: f \mapsto f \circ p$ は $\{E \text{ 上の有理型関数}\}$ から $\{\Omega \text{ を周期とする } \mathbf{C} \text{ 上の楕円関数}\}$ への 1 対 1 対応を定める.

証明. f を E 上の有理型関数とする. p^*f は \mathbf{C} 上の有理型関数である. p^*f の 2 重周期性を示す. $z \in \mathbf{C}, \omega \in \Omega$ とする.

$$p^*f(z + \omega) = f(p(z + \omega)) = f(p(z)) = p^*f(z)$$

である.

p^* が 1 対 1 対応となることを示す. f, g を E 上の有理型関数で $p^*f = p^*g$ をみたすものとする. p は全射なので, $f(p(z)) = g(p(z))$ から $f = g$ である. よって, p^* は単射である.

g を Ω を周期とする楕円関数とする. P を E の点とする. $\varphi_{P,x}: U_P \rightarrow \mathcal{U}_x$ に対し, f^P を $g|_{\mathcal{U}_x}$ を局所座標表示とする $U_P \subset E$ 上の有理型関数とする. g の 2 重周期性から, f^P は x の取り方によらない. $Q \in E$ を $U_P \cap U_Q \neq \emptyset$ となる点とすると, $f^P|_{U_P \cap U_Q} = f^Q|_{U_P \cap U_Q}$ が成り立つ. $(f^P)_{P \in E}$ を貼り合わせることで, E 上の有理型関数 f が定まる. $(f|_{U_P} := f^P)$ この f に対し, $p^*f = g$ が成り立つ. \square

定理 3.5.

$$\wp(u) := \sum_{\substack{\omega \in \Omega, \\ \omega \neq 0}} \left(\frac{1}{(u - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right) \quad (3.1)$$

は Ω にのみ 2 位の極を持つ楕円関数である.

$\wp(u)$ を Weierstrass の \wp 関数という.

証明. $\wp(u)$ が $\mathbf{C} - \Omega$ で正則であり, Ω では 2 位の極をもつこと: $M \geq 0$ を実数とする. $D(0; 2M)$ は \mathbf{C} のコンパクト集合であり, Ω は離散閉集合なので, $\Omega \cap D(0; 2M)$ は有限集合である.

$$\wp(z) = \left(\frac{1}{z^2} + \sum_{\substack{\omega \in \Omega - \{0\}, \\ |\omega| \leq 2M}} \left(\frac{1}{(z - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right) \right) + \sum_{\substack{\omega \in \Omega - \{0\}, \\ |\omega| > 2M}} \left(\frac{1}{(z - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right)$$

と 2 つの和に分解する. 第 1 項は有限和なので $\overline{D(0; M)} - \Omega$ で正則かつ $\overline{D(0; M)} \cap \Omega$ で 2 位の極をもつ有理型関数である.

第 2 項が $\overline{D(0; M)}$ で一様収束することを示す. z を $|z| \leq M$ をみたす複素数とする. $|\omega| > 2M \geq 2|z|$ である. したがって

$$\left| \frac{1}{(z - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right| = \frac{|z|}{|\omega|^2} \frac{|z - 2\omega|}{|z - \omega|^2} = \frac{|z|}{|\omega|^3} \frac{|z/\omega - 2|}{|z/\omega - 1|^2} \leq \frac{M}{|\omega|^3} \frac{1/2 + 2}{1/2 - 1|^2} = \frac{10M}{|\omega|^3}$$

が成り立つ. ここで次の補題 3.6 を用いると $\sum_{\substack{\omega \in \Omega, \\ |\omega| > 2M}} \frac{10M}{|\omega|^3}$ が収束することがわかる. したがって,

第 2 項も収束する.

補題 3.6. 実数 $s > 1$ に対し $\sum_{\omega \in \Omega - \{0\}} \frac{1}{|\omega|^{2s}}$ は収束する.

補題の証明. $\varphi(x, y) := |x\omega_1 + y\omega_2|^2$ とおく. このとき,

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) &= (x\omega_1 + y\omega_2) \overline{(x\omega_1 + y\omega_2)} \\ &= x^2|\omega_1|^2 + xy(\omega_2\overline{\omega_1} + \omega_1\overline{\omega_2}) + y^2|\omega_2|^2 \\ &= |\omega_1|^2x^2 + (\overline{\omega_1\omega_2})(\omega_1\overline{\omega_2})xy + |\omega_2|^2y^2 \\ &= |\omega_1|^2x^2 + |\omega_1\overline{\omega_2}|^2xy + |\omega_2|^2y^2 \end{aligned}$$

となり, 実数 a, b, c を用いて, $ax^2 + 2bxy + cy^2$ とかける. すなわち, $\varphi(x, y)$ は実係数 2 次形式であり, ω_1 と ω_2 が独立であることから正定値である. 2 次形式に対応する実対称行列は, 実数の固有値を持つ. いま, φ は正定値なので固有値を $0 < m_1 \leq m_2$ とおいてよい. 実対称行列は直交行列を用いて対角化でき, 任意の $x, y \in \mathbf{R}$ に対し,

$$m_1(x^2 + y^2) \leq \varphi(x, y) \leq m_2(x^2 + y^2)$$

が成り立つ. よって, 2 つの級数

$$\sum_{\omega \in \Omega - \{0\}} \frac{1}{|\omega|^{2s}} = \sum_{(n_1, n_2) \in \mathbf{Z}^2 - \{(0,0)\}} \frac{1}{\varphi(n_1, n_2)^s}, \quad \sum_{(n_1, n_2) \in \mathbf{Z}^2 - \{(0,0)\}} \frac{1}{(n_1 + n_2)^s}$$

の一方が収束するとき, 他方も収束し, 発散も共にする. 十分小さい実数 $\varepsilon > 0$ に対し, 2 つ目の級数と積分

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \iint_{\varepsilon \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq R} \frac{1}{(x^2 + y^2)^s} dx dy$$

を比較すればよい. $r \cos \theta = x, r \sin \theta = y$ とすると, $x^2 + y^2 = r^2, dx dy = r dr d\theta$ から,

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow \infty} \iint_{\varepsilon \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq R} \frac{1}{(x^2 + y^2)^s} dx dy &= \lim_{R \rightarrow \infty} \iint_{\varepsilon \leq r \leq R} \frac{1}{r^{2s}} r dr d\theta \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} 2\pi \int_{\varepsilon}^R \frac{1}{r^{2s-1}} dr \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\pi}{1-s} \left(\frac{1}{R^{2(s-1)}} - \frac{1}{\varepsilon^{2(s-1)}} \right) \end{aligned}$$

となる. したがって, $s > 1$ のとき収束し, そうでないときは発散する. \square

$\wp(u)$ が 2 重周期関数であること: $\omega \in \{\omega_1, \omega_2\}$ とする. $\wp'(z) = -2 \sum_{\omega \in \Omega} \frac{1}{(z-\omega)^3}$ は楕円関数なので, $\wp'(z+\omega) = \wp'(z)$ をみたす. よって, $(\wp(z+\omega) - \wp(z))' = 0$ なので, $\wp(z+\omega) - \wp(z) =: c_\omega$ は $\mathbf{C} - \Omega$ 上の定数関数である. $\omega/2 \notin \Omega$ であり, $\wp(z) = \wp(-z)$ なので, $\wp(\omega/2) = \wp(-\omega/2)$ である. $\omega/2 = -\omega/2 + \omega$ なので, $c_\omega = \wp(-\omega/2 + \omega) - \wp(\omega/2) = \wp(\omega/2) - \wp(\omega/2) = 0$. したがって, $\mathbf{C} - \Omega$ 上 $\wp(z+\omega) - \wp(z) = 0$ が成り立つ. 有理型関数の剛性から \mathbf{C} 上 $\wp(z) = \wp(z+\omega)$ が成り立つ. \square

4 2 重被覆

4.1 分岐と被覆

証明はしないが次の事実がある.

事実 4.1. X と Y をリーマン面とする. $f: X \rightarrow Y$ を定値でないリーマン面の射とする. $P \in X$, $Q = f(P) \in Y$ とおく. このとき, P のまわりの局所座標 t と Q のまわりの局所座標 s と正の整数 $n \geq 1$ で, f 局所座標表示が $s = t^n$ となるものが存在する. また, この n は座標の取り方によらない.

この n を P における f の分岐指数といい, e_P とかく. $e_P > 1$ のとき, P を f の分岐点という.

事実 4.2. X と Y をコンパクトリーマン面とする. $f: X \rightarrow Y$ を定値でない射とする. このとき, 次が成り立つ.

1. 任意の $Q \in Y$ に対し $f^{-1}(Q) \neq \emptyset$ かつ $\#f^{-1}(Q) < \infty$ である.
2. f の分岐点は高々有限個である.
3. Q を Y の点とする. このとき, $d(Q) := \sum_{P \in f^{-1}(Q)} e_P$ は一定である. これを $\deg f$ とかく.
4. 分岐点でない点 $Q \in Y$ に対し $\#f^{-1}(Q) = \deg f$ である. 分岐点 $Q \in Y$ に対し, $\#f^{-1}(Q) < \deg f$ である.

$d = \deg f$ を f の写像度といい, f を d 重被覆写像という.

4.2 複素トーラスから複素射影直線への 2 重被覆

補題 3.4 より, \wp は E 上の有理型関数と見做せる. さらに, 有理型関数は \mathbf{P}^1 への射と見做せる.

定理 4.3. \wp の定めるリーマン面の射 $\wp: E \rightarrow \mathbf{P}^1$; $\wp([z]) = [\wp(z) : 1]$ は 4 点 $[0]$, $[\omega_1/2]$, $[\omega_2/2]$, $[(\omega_1 + \omega_2)/2]$ で分岐する 2 重被覆である. これらの点を E の 2 分点と呼ぶ.

証明. \wp は Ω にのみ 2 位の極をもつ楕円関数であったから, $[0]$ のみに 2 位の極をもつ E 上の有理型関数というのと同じである. したがって, $\wp^{-1}(\infty) = \{[0]\}$ であり, 事実 4.2 より, $\deg \wp = 2$ である. いま, \wp は偶関数なので, $[a] \in E$ に対し, $\wp([a]) = \wp([-a])$ が成り立つ. $[a]$ が E の 2 分点でなければ, $[a] \neq [-a]$ である. $\deg \wp = 2$ なので, このとき, $\wp^{-1}(\wp([a])) = \{[a], [-a]\}$ と確定する.

$[\omega_1/2]$ の近傍で \wp を局所座標表示する. \wp は ω_1 を周期にもつ偶関数なので $\wp(-z) = \wp(z) = \wp(z + \omega_1)$ をみたす. 両辺を微分して, $-\wp'(-z) = \wp'(z + \omega_1)$ となるが, $z = -\omega_1/2$ のとき, $-\wp'(\omega_1/2) = \wp'(\omega_1/2)$ となる. したがって, $\wp'(\omega_1/2) = 0$ となる. よって, $\wp(z)$ の $\omega_1/2$ のまわりでの展開における 1 次の項の係数は 0 である. したがって, $e_{[\omega_1/2]} > 1$ であり, $[\omega_1/2]$ は \wp の分岐点である. $[\omega_2/2]$ と $[(\omega_1 + \omega_2)/2]$ についても同様に, $e_{[\omega_2/2]} > 1$, $e_{[(\omega_1 + \omega_2)/2]} > 1$ となるので, \wp は E の 2 分点で分岐する 2 重被覆であることが示せた. \square

参考文献

[Og02] 小木曾啓示, 代数曲線論, 朝倉書店, 2002.