数学解析 — 偏微分方程式をみたす関数の正則領域 *

マルティン・ツェルナー

1971 年 6 月 7 日

コーシー・コワレフスキーの定理から簡単に従う幾何学的な結果を明示する．我々の用いる主張はこの定理のルレーによる定式化からすぐに従う結果である*1.

記号． — $a(x, \partial/\partial x)$ は開集合 $\Omega \subset \mathbf{C}^n$ 上の解析関数を係数とする微分作用素とする．m をその階数とし g をその主要部とする．$\mathbf{C}^n$ にエルミートノルムを入れる．次のようにおく：

$$\theta(x, \xi) = g(x, \xi)\|\xi\|^{-m}.$$

定理． — 任意のコンパクト集合 $K \subset \Omega$ に対し，$C > 0$ で次の性質を満たすものが存在する：

任意の $x_0 \in K, \xi \in \mathbf{C}^n$ で $\theta(x_0, \xi) \neq 0, r > 0$ をみたすものに対し，方程式

$$\langle x - x_0, \xi \rangle = 0$$

で定義される超曲面の上で初期データをみたす任意のコーシー問題のただ一つの解であって，この超平面内の半径 r の球において正則なものは，x_0 を中心とし，

$$C\theta(x_0, \xi) \min(\theta(x_0, \xi), r)$$

を半径とする球において正則である．

定義 1． — （ノルム空間の）開集合 Ω が点 $x \in \partial\Omega$ において**良い台** (bon appui) をもつとは，x を通る超平面 H と x に収束する点列 x_ν で，x_ν を通り H に平行な超平面 H_ν と H_ν における x_ν を中心とする $H_\nu \cap \Omega$ に含まれる球のうち最大のものの半径 ρ_ν に対して $\lim\|x - x_\nu\|/\rho_\nu = 0$ が成り立つことをいう．

もちろん H を**良い超平面台** (hyperplan de bon appui) という．

コメント 1． — Ω が凸ならば，良い台をもつ点において，古典的な意味で台である超平面は一意であり，良い超平面台としても一意である（凸性が無いと，良い超平面台は一意ではなくなる．例：2 つの開集合の合併は同じ点でそれぞれ良い台を持つ）．

---

* Zerner, M.: *Domaine d'holomorphie des fonctions vérifiant une équation aux dérivées partielles* C. R. Acad. Sc. Paris, t. **272**, 1646 (1971). の和訳 (2023/10/11).

*1 コーシーデータをもつ多様体の近くでの解析的な線形コーシー問題の解の一意性 [Problème de Cauchy, I (Bull. Soc. math. Fr., 85, 1957, p. 389–429)]. 他の結果の簡単な証明は筆者が 1968 年にニースで行ったセミナーの抄録に書いてある．

定義 2. — （距離空間の）開集合 Ω が点 $x \in \partial\Omega$ において**有限の内部曲率** (courbure interne finie) をもつ（内部曲率が有限である）とは，Ω に含まれる球で x を境界にもつものが存在することをいう．この性質を持つ球の半径の上界を x における**内部曲率半径** (rayon de courbure interne) と呼ぶ．

コメント 2. — ユークリッド空間において，開集合は内部曲率が有限である全ての点において良い台をもつ．この開集合に含まれる球の境界にその境界上の点で接する超平面は良い超平面台である．

定義 3. — $\mathbf{C}^n$ における実の意味での超平面が点 $x \in \Omega$ において**特性的** (caractéristique) であるとは，それを含む複素の意味での超平面が一意なことをいう．

命題 1. — $U \subset \Omega$ を開集合とし x を Ω における U の境界の元で，x において U が特性的でない良い超平面台をもつものとする．このとき x の近傍 V で，

$$a\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) u(x) = 0 \tag{1}$$

をみたす全ての U 上の解析関数 u と y を $U \cup V$ の被覆の上の解析関数に延長できるものが存在する．

コメント 3. — この被覆は以下では考えないが，$U \cup \{x\}$ が単連結でなくとも U が単連結になりうるという事実による．

系 1. — 開集合 $U \subset \Omega$ が (1) の解の正則領域でありその境界が U の実 $2n-1$ 次元正則部分多様体 S であるとすると，S に接する超平面は特性的である．

コメント 4. — S のレヴィ形式が 0 ならば，S は特性的な解析的超曲面の合併である．

系 2. — U_1, U_2 が一般の位置にある実 $2n-1$ 次元正則部分多様体 S_1, S_2 を境界にもち $U_1 \cup U_2$ が (1) をみたす関数の正則領域であるとき，$S_1 \cap S_2$ は特性的な解析多様体となる．

命題 2. — (1) をみたす関数の正則領域である凸開集合に対し，境界の各点における超平面台のうち少なくとも一つは特性的である．

系. — 有界な凸開集合で境界の各点における超平面台が一意であるものは第 2 項を持たない定数係数偏微分方程式の解の正則領域にはなり得ない（非自明）．

方程式

$$\langle x - x_0, \xi \rangle = 0$$

で定義される複素超平面が x_0 で**単純特性的** (caractéristique simple) であるとは

$$g(x_0, \xi) = 0 \quad \text{だが} \quad \mathrm{grad}_\xi\, g(x_0, \xi) \neq 0$$

となることであった．

実超平面が（複素）超平面で x_0 において単純特性的であるものを含むとき，実超平面は x_0 において単純特性的であるという．

命題 3. — a を定数係数の作用素とする．Ω を凸開集合で $\partial\Omega$ の稠密な集合の各点において，単純特性的な超平面台が存在するものとする．このとき，Ω は (1) をみたす関数の正則領域である．

注意 1. — 同様の、しかし異なる結果がキーセルマン[*2]とシャピラ（私信）によって得られている．

[*2] Bull. Soc. math Fr., 97, 1969, p.329–356.