コンパクトリーマン面の種数の有限性

1　[Fo81, §14] の和訳

本節では任意のコンパクトリーマン面 X に対しコホモロジー群 $H^1(X,\mathcal{O})$ が有限次元複素ベクトル空間になることを示す．この次元を X の種数と呼ぶ．この有限性定理の結果のひとつに各コンパクトリーマン面上の定数でない有理型関数の存在がある．3 章での更なる応用を鑑みてコンパクトリーマン面に対してのみならず任意のリーマン面の相対コンパクト部分集合に対しても議論する．

14.1　正則関数の L^2 ノルム

$D \subset \mathbf{C}$ を開集合とする．正則関数 $f \in \mathcal{O}(D)$ に対し L^2 ノルムを

$$\|f\|_{L^2(D)} \coloneqq \left(\iint_D |f(x+iy)|^2 dxdy\right)^{1/2}$$

で定める．このとき $\|f\|_{L^2} \in \mathbf{R}_+ \cup \{\infty\}$ である．$\|f\|_{L^2} < \infty$ であるとき，f は二乗可積分であるという．D 上の二乗可積分正則関数全体のなすベクトル空間を $L^2(D,\mathcal{O})$ で表す．

$$\mathrm{Vol}(D) \coloneqq \iint_D dxdy < \infty$$

であるとき，各有界関数 $f \in \mathcal{O}(D)$ に対し

$$\|f\|_{L^2} \leqq \sqrt{\mathrm{Vol}(D)}\|f\|_D$$

が成り立つ．ここで，$\|f\|_D \coloneqq \sup\{|f(z)| : z \in D\}$ は上限ノルムを表す．

$f, g \in L^2(D,\mathcal{O})$ に対し，内積 $\langle f, g\rangle \in \mathbf{C}$ を

$$\langle f, g\rangle \coloneqq \iint_D f\bar{g}\ dxdy$$

で定められる．この積分の存在は各 $z \in D$ に対し

$$|f(x)\overline{g(z)}| \leqq \frac{1}{2}\left(|f(z)|^2 + |g(z)|^2\right)$$

が成り立つことから従う．この内積により $L^2(D,\mathcal{O})$ はユニタリベクトル空間[*1]となり特に直交性の概念が定まる．いま $B=B(a,r)\coloneqq\{z\in\mathbf{C}:|z-a|<r\}$ を a を中心とする半径 $r>0$ の円盤とする．このとき単項式 $(\psi_n)_{n\in\mathbf{N}}$ を

$$\psi_n(z)\coloneqq(z-a)^n$$

で定めると $(\psi_n)_{n\in\mathbf{N}}$ は $L^2(B,\mathcal{O})$ の直交系を成し，全ての $n\in\mathbf{N}$ に対し

$$\|\psi_n\|_{L^2(B)}=\frac{\sqrt{\pi}r^{n+1}}{\sqrt{n+1}}$$

となることが，極座標を用いることで容易に確かめられる．$f\in L^2(B,\mathcal{O})$ であり

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n$$

を f の a のまわりでのテイラー展開とするとき，ピタゴラスの定理から

$$\|f\|^2_{L^2(B)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\pi r^{2n+2}}{n+1}|c_n|^2 \tag{$*$}$$

となることが従う．

14.2　定理

$D\subset\mathbf{C}$ を開集合，$r>0$ を実数とし

$$D_r\coloneqq\{z\in\mathbf{C}:B(z,r)\subset D\}$$

を D の点で境界からの距離が r 以上であるものの集合とする．このとき任意の $f\in L^2(D,\mathcal{O})$ に対し

$$\|f\|_{D_r}\leqq\frac{1}{\sqrt{\pi}r}\|f\|_{L^2(D)}$$

が成り立つ．

証明． $a\in D_r$ とし $f(z)=\sum c_n(z-a)^n$ を a のまわりでの f のテイラー展開とする．$(*)$ を用いて

$$|f(a)|=|c_0|\leqq\frac{1}{\sqrt{\pi}r}\|f\|_{L^2(B(a,r))}\leqq\|f\|_{L^2(D)}$$

を得る．$\|f\|_{D_r}=\sup\{|f(a)|:a\in D_r\}$ より結論が従う． □

特に，定理 14.2 より，$(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ が $L^2(D,\mathcal{O})$ 内のコーシー列ならば，D の任意のコンパクト部分集合で一様収束することが従う．したがって，その極限の関数は正則である．よって $L^2(D,\mathcal{O})$ は完備であり，したがってヒルベルト空間となる．

次の補題はシュワルツの補題のある種の一般化と考えられる．

---

*1　[訳注] 複素内積空間（エルミート空間）のこと．

14.3 補題

$D' \Subset D$ を $\mathbf{C}$ の開集合とする.

2 [Og02, 例題 6.8(4)] の解についてのコメント

149 ページの最後

$$\begin{aligned}\iint_U |f-f_n|^2 dxdy &= \sup_K \iint_K |f-f_n|^2 dxdy \\ &= \sup_K \limsup_{m\to\infty} \iint_K |f_n - f_m|^2 dxdy \\ &\leq \sup_K \limsup_{m\to\infty} \iint_U |f_n - f_m|^2 dxdy \\ &= \limsup_{m\to\infty} \|f_n - f_m\|^2_{L^2(U)} dxdy \overset{n\to\infty}{\to} 0\end{aligned}$$

となっているが院生室の先輩と話したところ

$$\begin{aligned}\iint_U |f-f_n|^2 dxdy &= \sup_K \iint_K |f-f_n|^2 dxdy \\ &= \sup_K \lim_{m\to\infty} \iint_K |f_n - f_m|^2 dxdy \\ &\leq \sup_K \lim_{m\to\infty} \iint_U |f_n - f_m|^2 dxdy \\ &= \lim_{m\to\infty} \|f_n - f_m\|^2_{L^2(U)} dxdy \overset{n\to\infty}{\to} 0\end{aligned}$$

で良いという結論になった.

参考文献

[Og02] 小木曽啓示, 代数曲線論, 朝倉書店, 2022.

[Fo81] Otto Forster, *Lectures on Riemann Surfaces*, Springer, 1981.