多様体上の積分 *

Toshi2019

2024 年 2 月 1 日

用語について

- distribution は分布と訳す．

1　向き

1.1　ベクトル空間の向き

V を n 次元ベクトル空間とする．V の基底全体に次の同値関係を入れる．

$$B = (b_1, \dots, b_n) \sim B' = (b'_1, \dots, b'_n) \Longleftrightarrow \det(B \to B') > 0.$$

ここで，$(B \to B')$ は B から B' への基底の変換行列である．この同値関係に関する同値類 $\mu = [B] = [b_1, \dots, b_n]$ を**向き** (orientation) といい，B と B' が同値であるとき，B と B' は同じ向きを定めるという．向きは $\det(B \to B')$ の符号に応じて 2 つある．

$\mathbf{R}^n$ を n 次元ユークリッド空間とし，$e_1, \dots, e_n$ を $\mathbf{R}^n$ の標準基底とする．$e_1, \dots, e_n$ の属する同値類（向き）を $\mathbf{R}^n$ の**自然な向き**という．

1.2　多様体の向き

M を n 次元 C^1 多様体とする．M の各点 x における接空間 T_xM の基底 $B_x = ((b_1)_x, \dots, (b_n)_x)$ に対し，向き μ_x が定まる．M が向きの族 $(\mu_x)_{x \in M}$ が一貫しているとは，全ての局所座標 $\varphi\colon U \to \mathbf{R}^n$ と各点 $x, x' \in U$ に対し，$\mu_{d\varphi_x(B_x)} = \mu_{d\varphi_{x'}(B_{x'})}$ が成り立つことをいう．一貫した向きの族が存在するとき，M は**向きづけ可能**であるという．

■別？ の定義　向きづけ可能の定義が少し？ 違うものもある．M が向きづけ可能であるとは，座標近傍系 $((U_\alpha, \varphi_\alpha))_{\alpha \in A}$ で，各 (U_α, φ) と (U_β, φ_β) に対し，$U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$ ならば $\dfrac{\partial \varphi_\alpha}{\partial \varphi_\beta} > 0$ となるものが存在することをいう．

---

* 2024/02/01 執筆開始

これは同値．元の定義で座標を局所座標系にしたのがこちらの定義で，こちらの定義を $U_\alpha = U_\beta$ とした場合，元の定義と一致する．

M の向きづけとは，向きが一貫するような座標近傍系 $((U_\alpha, \varphi_\alpha))_{\alpha \in A}$ を固定することである．向きづけをした多様体を向きづけられた多様体とか有向多様体とよぶ．

2　体積形式

M を m 次元の可微分多様体とする．ω の M での積分を考えたい．

■ 1 次元の場合　$\mathbf{R}$ における 1 形式 ω の積分を考える．$\mathbf{R}$ の座標 x を取ると $\omega = f(x)dx$ とかける．これの $I = [a, b]$ 上での積分を

$$\int_I \omega = \int_a^b f(x)dx$$

として定義する．これは（同じ向きの）座標の取り方によらない．

$y = y(x)$ と変換する．$\omega = g(y)dy$ とかくと，$dy = \frac{dy}{dx}dx$ なので，$p = y(a), q = y(b)$ として，

$$\int_I \omega = \int_p^q g(y)dy = \int_a^b g(y(x))\frac{dy}{dx}dx = \int_a^b f(x)dx$$

である．

■高次元の場合　$\omega = f(x)dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_m$ の積分を

$$\int_M \omega = \int_{-a}^a \cdots \int_{-a}^a f(x_1, \ldots, x_m)dx_1 \ldots dx_m$$

参考文献

[BT82] Bott-Tu, *Differential Forms and Algebraic Topology*, Graduate Texts in Mathematics, 82, Springer, 1982.

[GP74] Victor Guillemin, Alan Pollack, *Differential Topology*, Prentice-Hall, 1974.

[Hor63] Lars Hörmander, *Linear Pertial Differential Operators*, Fourth Printing, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 116, Springer, 1963.

[Hor89] Lars Hörmander, *The Analysis of Linear Pertial Differential Operators I*, Second Edition, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 256, Springer, 1989.

[KS90] Masaki Kashiwara, Pierre Schapira, *Sheaves on Manifolds*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 292, Springer, 1990.

[Le13] John M. Lee, *Introduction to Smooth Manifolds*, Second Edition, Graduate Texts in Mathematics, **218**, Springer, 2013.

[Sp65] Michael Spivak, *Calculus on Manifolds*, Benjamin, 1965.