density について

大柴 寿浩 *

2024/01/04

はじめに

密度 (density) について調べたことをまとめたノート．

■[F77] の場合　最初に見つかった和書は藤原 [F77] である．第 7 章 (p.179–196) のタイトルが「超関数と密度の平方根」となっており，とくに

> X は σ コンパクト C^∞ 多様体で，必ずしも向きづけられていないとする．X 上の関数空間に自然な Hermite 内積を定義するのは困難であった．Hörmander は，密度の平方根の概念を導入して，この困難を取り除いた．*1

とある．

■[Hor63, Hor89] の場合　そこで，[Hor63] を見ると，次の Remark が見つかった．

> $\mathscr{D}'(\Omega)$ may also be defined as the space of all continuous linear forms on the space of infinitely differentiable densities with compact support. Here a density means a linear form L on the space $C_0^\infty(\Omega)$ of functions in $C^\infty(\Omega)$ with compact support, such that to every coordinate system κ there exists a function $L^\kappa \in C^\infty(\tilde{\Omega}_\kappa)$ for which
>
> $$L(\varphi) = \int L^\kappa(\varphi \circ \kappa^{-1})dx \quad \text{if} \quad \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$
>
> For details we refer to DE RHAM [1]*2where a density is called odd form of degree n and a distribution is an even current of degree 0. *3

[Hor89, p.145] でも密度の定義が登場する．

---

* 北海道大学大学院理学院数学専攻修士 1 年

*1 [F77, p.183]

*2 de Rham, “Variétés différentiables” のこと．

*3 [Hor63, p.28]

■[Hor85] の場合　この 2 つには密度の平方根は現れていない．4 巻本の第 3 巻 [Hor85, 18 章] に説明が出てくる．

> In Section 6.4 we defined the density bundle Ω on X: a section of Ω expressed in local coordinates $x_1, \dots, x_n$ is a function u such that the measure $u|dx|$ is independent of how they are chosen, $|dx|$ denoting the Lebesgue measure in the local coordinates. For the representation u' in the local coordinates x' we therefore have
>
> $$u'|dx'| = u|dx|.$$
>
> We can define the powers Ω^a of Ω for any $a \in \mathbf{C}$ by just changing the transformation law to
>
> $$u'|dx'|^a = u|dx|^a.$$
>
> or, more formally, we take the transition functions
>
> $$g_{\kappa\kappa'} = |\det(\kappa \circ \kappa'^{-1})'|^a \circ \kappa' \quad \mathrm{in} X_\kappa \cap X_{\kappa'}$$
>
> if κ and κ' are arbitrary local coordinates with coordinate patches X_κ and X_κ. We shall now work out the transformation law for the second term in the symbol of a polyhomogeneous operator acting on half densities, that is, sections of $\Omega^{\frac{1}{2}}$. [*4]

■初出 [Hor71]　では，密度の平方根の初出は何か．これはおそらくフーリエ積分作用素の論文 [Hor71] と思われる．この論文の 117–118 ページの部分に次の記述がある．

> Densities of order α can of course be regarded as sections of a line bundle Ω on Y, defined by the transition functions (中略). The notions of real or positive densities are therefore well defined, and every positive density has a unique positive square root in $\Omega_{\frac{1}{2}}$. (中略) Concerning the terminology we note that Atiyah and Bott [3][*5] have called Ω_1 the volume bundle of Y. [*6]

その他の文献

積分に関連して，体積要素について，金子超関数 [K96, 参考 4.2 (p.161), 参考 4.3 (p.165)] に記述がある．

密度束のことが載っている文献で見つかったのは和書では吉田朋好 [Y98, 2.3.3 項 (p.46–48)]，洋書では [BGV92, p.29], [L13, p.427–434] が見つかった．

[*4] [Hor85, p.92]

[*5] ATIYAH, M. F., BOTT, R., “A Lefschetz fixed point formula for elliptic complexes I.” Ann. of Math., 86 (1967), 374–407. のこと．

[*6] [Hor71, p.117-118]

カレントについては，ド・ラームの多様体の本とか，シュワルツの超関数の本とかがいいんでしょう，きっと．秋月調和積分にもカレントは載っている．

他に，幾何学的量子化と関連して，[BW97] が面白そう．

1 Duistermaat から

■ベクトル空間上の密度 E を $\mathbf{R}$ 上の n 次元ベクトル空間とし，$\Lambda^n E$ を E の n ベクトルの空間とする．これは例えば n 交代線形形式 $E^n \to \mathbf{R}$ の空間の双対として定義される．$\Lambda^n E$ は $\mathbf{R}$ 上 1 次元である．任意の $\alpha \in \mathbf{R}$ に対し，写像 $\rho\colon \Lambda^n E - \{0\} \to \mathbf{C}$ で各 $v \in \Lambda^n E - \{0\}$, $\lambda \in \mathbf{R} - \{0\}$ に対し $\rho(\lambda v) = |\lambda|^\alpha \cdot \rho(v)$ をみたすものをそれぞれ階数 α の**複素数値密度** (complex valued density)（または**無向体積** (nonoriented volume)）とよぶ．階数 α の密度全体は $\mathbf{C}$ 上 1 次元のベクトル空間であり，$\Omega_\alpha(E)$ で表す．

■多様体上の密度 今度は X を n 次元 C^∞ 多様体とする．X の $x \in X$ における接空間を $T_x(X)$ で表す．$\Omega_\alpha(T_x(X))$, $x \in X$ は自然に複素 C^∞ ベクトル束のファイバーとなる．このとき，階数 α の C^∞ 密度を C^∞ 切断 $\rho\colon X \to \Omega_\alpha(X)$ として定義する．X 上の階数 α の C^∞ 密度の空間を $C^\infty(X, \Omega_\alpha)$ で表す．至るところ 0 にならない階数 α の標準的な密度を選べば，空間 $C^\infty(X, \Omega_\alpha)$ は $C^\infty(X)$ と同一視できる．X がパラコンパクト（ここでは C^∞ 多様体に対してはいつもパラコンパクトであることを仮定する）であるときには，単位の分割を用いることで，X 上の C^∞ 密度として，常に正の値をとるものをいつでも構成できる．

■分布密度 $\rho \in C^\infty(X, \Omega_\alpha)$, $\sigma \in C^\infty(X, \Omega_\beta)$ のとき，各点での積で積 $\rho \cdot \sigma \in C^\infty(X, \Omega_{\alpha+\beta})$ が定まる．特に

$$(\rho, \sigma) \to \int \rho \cdot \sigma dx$$

とすることで $C^\infty(X, \Omega_\alpha) \times C_0^\infty(X, \Omega_{1-\alpha})$ 上の双線形形式が定まり，これにより $\sigma \to \int(\rho \cdot \sigma)dx$ は $(C_0^\infty(X, \Omega_{1-\alpha}))'$ の元になる．これも ρ で表す．連続なうめこみ $C^\infty(X, \Omega_\alpha) \to (C_0^\infty(X, \Omega_{1-\alpha}))'$ が定まることが分かるので，$(C_0^\infty(X, \Omega_{1-\alpha}))'$ を階数 α の**分布密度** (distribution density) の空間とよび，$\mathcal{D}'(X, \Omega_\alpha)$ で表す．（分布密度は de Rham [20][*7] によって初めて導入された．）

参考文献

[BGV92] Nicole Berline, Ezra Getzler, Michéle Vergne, *Heat Kernels and Dirac Operators*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 298, Springer, 1992.

[BW97] Sean Bates, Alan Weinstein, *Lectures on the Geometry of Quantization*, Berkeley Mathematics Lecture Notes, **8**, 1997.

[*7] de Rham, “Variétés différentiables” のこと．

[F77] 藤原大輔, 線型偏微分方程式論における漸近的方法 I, II, 岩波講座基礎数学 解析学 (II) **viii**, 岩波書店, 1977.

[Hor63] Lars Hörmander, *Linear Pertial Differential Operators*, Fourth Printing, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 116, Springer, 1963.

[Hor71] Lars Hörmander, *Fourier Integral Operators I*, Acta Math. 127, 79–183, (1971).

[Hor89] Lars Hörmander, *The Analysis of Linear Pertial Differential Operators I*, Second Edition, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 256, Springer, 1989.

[Hor85] Lars Hörmander, *The Analysis of Linear Pertial Differential Operators III*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 274, Springer, 1985.

[K96] 金子晃, 新版 超関数入門, 東京大学出版会, 1996.

[L13] John M. Lee, *Introduction to Smooth Manifolds*, Second Edition, Graduate Texts in Mathematics, **218**, Springer, 2013.

[Y98] 吉田朋好, ディラック作用素の指数定理, 共立講座 21 世紀の数学 **22**, 共立出版, 1998.