カレントまとめノート [*]

Toshi2019

2024 年 1 月 20 日

用語について

- distribution は分布と訳す．

1　いろんな本の記述

[Hor89, Chap.6. Notes] の記述

> As indicated at the end of Section 6.3 one can define $\mathscr{D}'(X)$ when X is a manifold as the dual of the space of C^∞ densities of compact support. This is a special case of the theory of currents of de Rham [1], which also contains a study of distribution valued differential forms of arbitrary degree. The results in Section 6.1 are thus essentially contained in de Rham's theory, for composition with a map f having surjective differential can locally be split into a tensor product with the function 1 in some new variables and a change of variables in the domain of f. The formula (6.1.5) is from John [5] though.

和訳は

> 6.3 節で述べたように，X が多様体であるときの $\mathscr{D}'(X)$ を，コンパクト台を持つ C^∞ 密度の空間の双対として定義することができる．これは de Rham [1] のカレントの理論の特別な場合である．この本には，分布に値を取る任意の次数の微分形式の議論も含まれている．従って，6.1 節の結果は本質的には de Rham の理論に含まれる．微分が全射である写像 f との合成は局所的に，新しい変数に関する関数 1 とのテンソル積と f の定義域での変数変換に分解できる．ただし，公式 (6.1.5) は John [5] からの引用である．

■[Hor63, Hor89] の場合　[Hor63] を見ると，次の Remark が見つかった．

---

[*] 2024/01/20 執筆開始

$\mathscr{D}'(\varOmega)$ may also be defined as the space of all continuous linear forms on the space of infinitely differentiable densities with compact support. Here a density means a linear form L on the space $C_0^\infty(\varOmega)$ of functions in $C^\infty(\varOmega)$ with compact support, such that to every coordinate system κ there exists a function $L^\kappa \in C^\infty(\tilde{\varOmega}_\kappa)$ for which

$$L(\varphi) = \int L^\kappa(\varphi \circ \kappa^{-1})dx \quad \text{if} \quad \varphi \in C_0^\infty(\varOmega).$$

For details we refer to DE RHAM [1][*1]where a density is called odd form of degree n and a distribution is an even current of degree 0. [*2]

de Rham[1] では密度を n 次の奇形式，分布を 0 次の偶カレントと呼んでいる．

シュワルツ

カレントの理論は. . . 多様体上の超函数微分形式の理論によって単純かつ完全にされる．カレントの完全な理論 (超函数微分形式の意味で) は de Rham の最近の書物に述べられている．

2 シュワルツの本

梗概

§1 では（境界のある）可微分多様体とそれの上の常形式または捩形式の意味を想起する．人々はしばしば，捩形式を用いることを避ける；それを避けるには，多様体が単に向きづけ可能なだけではなく，向きづけされていると仮定しなければならないが，それはかなり窮屈なことである；しかも捩形式のとり扱いは非常に容易である．

さて §2 では多様体上で通常の，または捩れたカレントを定義する．いくつかの例，特に物理学からの例（電流）を述べる．向きづけされた多様体の場合に，両種のカレントは差異がなくなる．この節の終りには，有限次元のベクトル空間をファイバーとするファイバー空間の超函数断面を定義する．

§3 ではカレントの上での演算：外積，ベクトル馬との内積，双対境界または外微分と種々の例，無限小変換による微分についてしらべる．この節の最後ではカレントのコホモロジーを述べる（一般化された de Rham の定理)．

§4 では写像によるカレントの順像を研究する．定理 2 でその主要な性質をまとめ，次に例を与える．定理 2 の 2 は実用上有用な同型写像を与える．

§5 ではカレントの逆像，すなわちカレントにおける変数変換を研究する．この逆像は順次に導入され，その性質は定理 3 においてまとめられる．この定理がいかなる場合に適用可能かを見な

[*1] de Rham, “Variétés différentiables” のこと．

[*2] [Hor63, p.28]

ければならない．まず局所微分同相写像の場合をとり扱い，例を挙げる．次にファイバー多様体上で，微分形式のファイバー上での偏微分の概念を研究する；これからさらに一般的な多様体 U^m から n 次元の多様体 V^n の中への階数 n の写像による変数変換の場合に導かれる（定理 4）．例が与えられる．

§6 では不変な形の Fourier 変換，すなわち有限次元ベクトル空間上の偶および奇の緩いカレントの Fourier 変換を研究する．これは前に Scarfiello[1] により研究された．

2.1　無限回可微分多様体上の偶形式と奇形式

■偶または常形式　可微分多様体の主な性質は既知とする．そして冗長さと複雑さを避けるために，しばしば証明は概略だけを述べる[*3]．特に断らないかぎり，**次のものを多様体とよぶことにする：無限遠点で可算な，分離的な，実数体上の無限回可微分多様体．**

n 次元多様体（境界をもつものでもよい[*4]）の上では，m 回連続的微分可能（すなわち C^m 級）函数とか，無限回微分可能（すなわち C^∞ 級）函数という概念が定まっているのであった．さらにまた，1 つの多様体から他の多様体への無限回微分可能な写像という概念も定まっている．

とくに，逆写像もまた無限回微分可能であるような無限回微分可能写像を微分同相写像という．

さらに V の局所座標系とは，V の開集合—局所座標系[*5]の定義域—および，その定義域から $\mathbf{R}^n$ または $\mathbf{R}^n_-$（$\mathbf{R}^n$ の部分空間 $x_1 \leqq 0$）の開集合の上への微分同相写像 H の与えられた組である．

参考文献

[GP74] Victor Guillemin, Alan Pollack, *Differential Topology*, Prentice-Hall, 1974.

---

*3 多様体の研究のためには，たとえば de Rham[3], Helgason[1] を参照することができる．

*4 境界をもった無限回可微分多様体という概念は暗によく知られてはいるが，書物に必ずしもはっきり書かれてはいない．境界点の近傍の局所座標系はその近傍を位相空間 $\mathbf{R}^n_-$（$\mathbf{R}^n$ の $x_1 \leqq 0$ なる部分空間）の開集合の上に表現するものである．そのとき V^n 上の可微分函数という概念は $\mathbf{R}^n_-$ 上の可微分函数という概念に帰着する；$\mathbf{R}^n_-$ で定義された函数に対しては，偏微分係数はただちに定義できる（超平面 $x_1 = 0$ の点での，x_1 に関する偏微分の計算には，単に関数の定義域 $x_1 \leqq 0$ での函数値のみが関与する）．$\mathbf{R}^n_-$ 上の m 回連続的微分可能な任意の函数 φ は，$\mathbf{R}^n$ 上の m 回連続的微分可能なある函数 $\varPhi$ を $\mathbf{R}^n_-$ に制限したものになっている，という知識がしばしば必要になる．そのような拡張 $\varPhi$ は，もし m が有限ならば，全く初歩的な方法で作ることができる：それには，$x_1 > 0$ に対して次のようにおく：

$$\varPhi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{\nu=0}^{m} C_\nu \varphi(-\nu x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n),$$

ここに C_ν は Vandermonde の連立方程式：$\displaystyle\sum_{\nu=0}^{m} C_\nu(-\nu)^k = 1,\ k = 0, 1, 2, \ldots, m;$ が成立するように選ぶ，したがって $x_1 > 0$ での m 回までの微係数は，$x_1 \to 0$ のとき φ の微係数とうまく接続する．もし φ がコンパクトな台をもてば $\varPhi$ もそうである．m が無限であると事情はもっと難しい．たとえば，Whitney[4] の 65 頁，定理 1 すなわち拡張定理または，Selly[1] の定理を適用することができる．Whitney[1] は $x_1 > 0$ で解析的な拡張 $\varPhi$ を与えたが，ここではその必要はない；もし φ がコンパクトな台をもち，α が $\mathbf{R}^n$ の関数で $\mathscr{D}$ に属し，φ の台の近傍で 1 ならば $\alpha\varphi$ もまた φ の拡張であり，その台はコンパクトである．

*5 [訳注] 微分同相写像は difféomorpisme，局所座標系は carte，座標系は atlas，部分座標系は atlas partiel.

[Hor63] Lars Hörmander, *Linear Pertial Differential Operators*, Fourth Printing, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 116, Springer, 1963.

[Hor89] Lars Hörmander, *The Analysis of Linear Pertial Differential Operators I*, Second Edition, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 256, Springer, 1989.

[KS90] Masaki Kashiwara, Pierre Schapira, *Sheaves on Manifolds*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 292, Springer, 1990.

[Le13] John M. Lee, *Introduction to Smooth Manifolds*, Second Edition, Graduate Texts in Mathematics, **218**, Springer, 2013.

[Sp65] Michael Spivak, *Calculus on Manifolds*, Benjamin, 1965.