ゼミノート（2024/10/16 発表分）

大柴寿浩

2024 年 10 月 15 日

1　フーリエ・佐藤変換（復習）[KS90, §3.7]

定理 1.1 ([KS90, Theorem 3.7.7])**.**　$\mathsf{D}^+_{\mathbf{R}_{>0}}(E)$ から $\mathsf{D}^+_{\mathbf{R}_{>0}}(E^*)$ への関手 $\widetilde{\Phi}_{P'}$ と $\widetilde{\Psi}_P$ は自然に同型である．

証明. $\widetilde{\Phi}_{P'}(F) = \mathrm{R}p_{2!}\left(p_1^{-1}F\right)_{P'}$, $\widetilde{\Psi}_P(F) = \mathrm{R}p_{2*}\mathrm{R}\Gamma_P(p_1^{-1}F)$ なので，これらを同型で結ぶ．

$$\begin{aligned}\widetilde{\Phi}_{P'}(F) &= \mathrm{R}p_{2!}\left(p_1^{-1}F\right)_{P'}\\ &\cong \mathrm{R}p_{2!}\mathrm{R}\Gamma_P\left(p_1^{-1}F\right)_{P'}\\ &\cong \mathrm{R}p_{2!}\left(\mathrm{R}\Gamma_P\left(p_1^{-1}F\right)_{P'}\right)\\ &\cong \mathrm{R}p_{2*}\left(\mathrm{R}\Gamma_P\left(p_1^{-1}F\right)_{P'}\right)\\ &\cong \mathrm{R}p_{2*}\mathrm{R}\Gamma_P(p_1^{-1}F).\end{aligned}$$

□

定義 1.2 ([KS90, Definition 3.7.8])**.**　$F \in \mathsf{D}^+_{\mathbf{R}_{>0}}(E)$ とする．F の**フーリエ・佐藤変換** (Fourier-Sato transform) $F^\wedge$ を

$$\begin{aligned}F^\wedge &\coloneqq \widetilde{\Phi}_{P'}(F)\ \left(= \mathrm{R}p_{2!}\left(p_1^{-1}F\right)_{P'}\right)\\ &\left(\cong \widetilde{\Psi}_P(F) = \mathrm{R}p_{2*}\mathrm{R}\Gamma_P(p_1^{-1}F)\right)\end{aligned}$$

で定める．

$G \in \mathsf{D}^+_{\mathbf{R}_{>0}}(E^*)$ とする．G の**逆フーリエ・佐藤変換** (inverse Fourier-Sato transform) $G^\vee$ を

$$\begin{aligned}G^\vee &\coloneqq \widetilde{\Psi}_{P'}(F)\ \left(= \mathrm{R}p_{1*}\mathrm{R}\Gamma_{P'}(p_2^!G)\right)\\ &\left(\cong \widetilde{\Phi}_P(G) = \mathrm{R}p_{1!}\left(p_2^!G\right)_P\right)\end{aligned}$$

で定める．

定理 1.3 ([KS90, Theorem 3.7.9]). $\mathsf{D}^+_{\mathbf{R}_{>0}}(E)$ から $\mathsf{D}^+_{\mathbf{R}_{>0}}(E^*)$ への関手 $^\wedge$ と $\mathsf{D}^+_{\mathbf{R}_{>0}}(E^*)$ から $\mathsf{D}^+_{\mathbf{R}_{>0}}(E)$ への関手 $^\vee$ は圏同値であり，互いに準逆である．とくに，F と F' を $\mathsf{D}^+_{\mathbf{R}_{>0}}(E)$ の対象とするとき，

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{D}^+_{\mathbf{R}_{>0}}(E)}(F', F) \cong \mathrm{Hom}_{\mathsf{D}^+_{\mathbf{R}_{>0}}(E)}(F'^\wedge, F^\wedge)$$

が成りたつ．

補題 1.4 ([KS90, Lemma 3.7.10]). (i) γ を E の固有閉凸錐で零切断を含むものとする．このとき，次が成り立つ．

$$(A_\gamma)^\wedge \cong A_{\mathrm{Int}\,\gamma^\circ}.$$

(ii) U を E の開凸錐とする．このとき次が成り立つ．

$$(A_U)^\wedge \cong A_{U^{\circ a}} \otimes \mathrm{or}_{E^*/Z}[-n].$$

注意 1 ([KS90, Remark 3.7.11]). RMK

命題 1.5 ([KS90, Proposition 3.7.12]). $F \in \mathsf{D}^+_{\mathbf{R}_{>0}}(E)$ とする．

(i) $F^{\wedge\wedge} \cong F^a \otimes \mathrm{or}_{E/Z}[-n]$.
(ii) U を E^* の開凸集合とすると

$$\mathrm{R}\Gamma(U; F^\wedge) \cong \mathrm{R}\Gamma_{U^\circ}(\tau^{-1}\pi(U); F) \cong \mathrm{R}\Gamma_{U^\circ}(E; F).$$

(iii) γ を E^* の固有閉凸錐で零切断を含むものとすると

$$\mathrm{R}\Gamma_\gamma(E^*; F^\wedge) \cong \mathrm{R}\Gamma(\mathrm{Int}\,\gamma^{\circ a}; F) \otimes \mathrm{or}_{E/Z}[-n].$$

(iv) 次が成り立つ．

$$(\mathrm{D}'F)^\vee \cong \mathrm{D}'(F^\wedge), \quad (\mathrm{D}F)^\vee \cong \mathrm{D}(F^\wedge).$$

命題 1.6 ([KS90, Proposition 3.7.13]). (i) $F \in \mathsf{D}^+_{\mathbf{R}_{>0}}(E)$ とする．このとき次が成り立つ．

$$(f_\tau^! F)^\wedge \cong f_\pi^!(F^\wedge), \quad (f_\tau^{-1} F)^\wedge \cong f_\pi^{-1}(F^\wedge).$$

(ii) $G \in \mathsf{D}^+_{\mathbf{R}_{>0}}(E')$ とする．このとき次が成り立つ．

$$(\mathrm{R}f_{\tau *}G)^\wedge \cong \mathrm{R}f_{\pi *}(G^\wedge), \quad (\mathrm{R}f_{\tau !}G)^\wedge \cong \mathrm{R}f_{\pi !}(G^\wedge),$$

命題 1.7 ([KS90, Proposition 3.7.14])**.** (i) $F \in \mathsf{D}^+_{\mathbf{R}_{>0}}(E_1)$ とする．このとき次が成り立つ．

$$\begin{aligned}{}^t f^{-1}(F^\wedge) &\cong (\mathrm{R}f_! F)^\wedge,\\ {}^t f^!(F^\vee) &\cong (\mathrm{R}f_* F)^\vee,\\ {}^t f^!(F^\wedge) &\cong (\mathrm{R}f_* F)^\wedge \otimes \omega_{E_2^*/E_1^*},\\ {}^t f^!(F^\vee) &\cong (\mathrm{R}f_! F)^\vee \otimes \omega_{E_2^*/E_1^*}.\end{aligned}$$

(ii) $G \in \mathsf{D}^+_{\mathbf{R}_{>0}}(E_2)$ とする．このとき次が成り立つ．

$$\begin{aligned}(f^{-1}F)^\vee &\cong \mathrm{R}^t f_!(G^\vee),\\ (f^! F)^\wedge &\cong \mathrm{R}^t f_*(G^\wedge),\\ (\omega_{E_1/E_2} \otimes f^! G)^\vee &\cong \mathrm{R}^t f_*(G^\vee),\\ (\omega_{E_1/E_2} \otimes f^{-1} G)^\wedge &\cong \mathrm{R}^t f_!(G^\wedge).\end{aligned}$$

命題 1.8 ([KS90, Proposition 3.7.15])**.** $F_i \in \mathsf{D}^+_{\mathbf{R}_{>0}}(E_i)$, $i = 1, 2$ とする．このとき次が成り立つ．

$$F_1^\wedge \overset{\mathrm{L}}{\underset{Z}{\boxtimes}} F_2^\wedge \cong \left(F_1 \overset{\mathrm{L}}{\underset{Z}{\boxtimes}} F_2 \right)^\wedge.$$

2 特殊化（復習）[KS90, §4.2]

定理 2.1 ([KS90, Thm 4.2.3])**.** $F \in \mathsf{D}^{\mathrm{b}}(X)$ とする．

(i) $\nu_M(F) \in \mathsf{D}^{\mathrm{b}}_{\mathbf{R}^+}(T_M X)$ であり，$\mathrm{supp}(\nu_M(F)) \subset C_M(\mathrm{supp}(F))$ である．

(ii) V を $T_M X$ の錐状開集合とする．このとき

$$H^j(V; \nu_M(F)) \cong \varinjlim_{U} H^j(U; F)$$

である．ただし U は $C_M(X - U) \cap V = \varnothing$ となる X の開集合の族を走る．とくに $v \in T_M X$ ならば,

$$H^j(\nu_M(F))_v \cong \varinjlim_{U} H^j(U; F)$$

である．ただし U は $v \notin C_M(X - U)$ となる X の開集合の族を走る．

(iii) A を $T_M X$ の錐状閉集合とする．このとき

$$H^j_A(T_M X; \nu_M(F)) \cong \varinjlim_{Z,U} H^j_{Z \cap U}(U; F)$$

である．ただし U は M の X における開近傍の族を走り，Z は $C_M(Z) \subset A$ となる X の閉集合を走る．

(iv) 次の同型が成り立つ．

$$\nu_M(F)|_M \cong \mathrm{R}\tau_*(\nu_M(F)) \cong F|_M,$$
$$(\mathrm{R}\Gamma_M(\nu_M(F)))|_M \cong \mathrm{R}\tau_!(\nu_M(F)) \cong \mathrm{R}\Gamma_M(F)|_M.$$

(v) $\mathrm{R}\dot{\tau}_*(\nu_M(F)|_{\dot{T}_M X}) \cong \mathrm{R}\Gamma_{X-M}(F)|_M$ である．

証明. (i)：$\tilde{p}^{-1}F$ が錐状層であることを示せば，$\mathrm{R}j_*$ と s^{-1} が錐状層を錐状層に送ることから結果が従う．各次数 $j \in \mathbf{Z}$ に対し，$H^j(\tilde{p}^{-1}F)$ が各ファイバー $(x', x'', t) \in \Omega$ の $\mathbf{R}^+$ 軌道 $b = \mathbf{R}^+(x', x'', t)$ 上で局所定数であることを示す．$(cx', x'', c^{-1}t) \in b$ とする．このとき

$$\begin{aligned}
\left(H^j(\tilde{p}^{-1}F)\big|_b\right)_{(cx',x'',c^{-1}t)} &\cong \left(H^j(\tilde{p}^{-1}F)\right)_{(cx',x'',c^{-1}t)} \\
&\cong \left(\tilde{p}^{-1}H^j(F)\right)_{(cx',x'',c^{-1}t)} \\
&\cong \left(H^j(F)\right)_{\tilde{p}(cx',x'',c^{-1}t)} \\
&\cong H^j(F)_{\tilde{p}(x',x'')}
\end{aligned}$$

であり，b の全ての点での茎が同型となる．よって各実数 $c > 0$ に対し，$(cx', x'', c^{-1}t)$ の十分小さい近傍 $B_c \subset \Omega$ で $H^j(\tilde{p}^{-1}F)\big|_{b\cap B_c}$ が定数層 $\left(H^j(F)_{\tilde{p}(x',x'')}\right)_{b\cap B_c}$ となるものが存在する．$b = \bigcup_{c\in\mathbf{R}^+} B_c \cap b$ である．よって $H^j(\tilde{p}^{-1}F)$ は錐状層である．

$(x''; v) \in T_M X - C_M(\mathrm{supp}(F))$ とする．各 $j \in \mathbf{Z}$ に対し

$$H^j(F)_{(x'';v)} = 0$$

であるから $(x, 0) = (x''; v) \in T_M X = t^{-1}(0)$ として，

$$\left(H^j(s^{-1}\mathrm{R}j_*\tilde{p}^{-1}F)\right)_{(x,0)} = s^{-1}\mathrm{R}j_*\tilde{p}^{-1}H^j(F)_{(x'';v)} = 0$$

である．したがって $(x''; v) \in T_M X - \mathrm{supp}(\nu_M(F))$ である．

(ii)：U を X の開集合で $C_M(X - U) \cap V = \varnothing$ となるものとする．次の射がある．

$$\begin{cases}
\mathrm{R}\Gamma(U; F) & \underset{(1)}{\to} \mathrm{R}\Gamma(p^{-1}(U); p^{-1}F) \\
& \underset{(2)}{\to} \mathrm{R}\Gamma(p^{-1}(U) \cap \Omega; p^{-1}F) \\
& \underset{(3)}{\to} \mathrm{R}\Gamma(\tilde{p}^{-1}(U) \cup V; \mathrm{R}j_*j^{-1}p^{-1}F) \\
& \underset{(4)}{\to} \mathrm{R}\Gamma(V; \nu_M(F)).
\end{cases} \tag{2.1}$$

ただし，それぞれの射は次のように定まる．

(1) $F \to \mathrm{R}p_*p^{-1}F$ から定まる．
(2) 制限射．もっというと $A_{p^{-1}(U)\cap\Omega} \to A_{p^{-1}(U)}$ から定まる．
(3) まず $p^{-1}F \to \mathrm{R}j_*j^{-1}p^{-1}F$ から $\mathrm{R}\Gamma(\tilde{p}^{-1}(U); \mathrm{R}j_*j^{-1}p^{-1}F)$ への射が定まる．Ω で台を切り落としているので $\mathrm{R}\Gamma(\tilde{p}^{-1}(U); \mathrm{R}j_*j^{-1}p^{-1}F)$ を V の $\bar{\Omega}$ での開近傍 $\tilde{p}^{-1}(U) \cup V$ に広げてもよい．
(4) $\mathrm{R}j_*j^{-1}p^{-1}F \to \mathrm{R}s_*s^{-1}\mathrm{R}j_*j^{-1}p^{-1}F$ と $s^{-1}A_{\tilde{p}^{-1}(U)\cup V} = A_{s^{-1}(\tilde{p}^{-1}(U)\cup V)} = A_V$ から定まる．

コホモロジーをとって，帰納極限の普遍性を考えると次の射が定まる．

$$\varinjlim_{U} H^k(U; F) \to H^k(V; \nu_M(F)).$$

この射が同型であることを示す．いま

$$\begin{aligned} H^k(V;\nu_M(F)) &\cong \varinjlim_{W\in I_V} H^k(W,\mathrm{R}j_*j^{-1}p^{-1}F) \quad (\because \text{注意 } 2.6.9)\\ &\cong \varinjlim_{W\in I_V} H^k(W\cap \Omega, p^{-1}F) \quad (\because j^{-1}\dashv \mathrm{R}j_*,\ j_!\dashv j^{-1}) \end{aligned}$$

である．命題**??**より，$p\colon W\cap\Omega\to p(W\cap\Omega)$ の各ファイバーは連結，すなわち $\mathbf{R}$ と同相としてよい．このとき，

(i) p は位相的沈めこみである．

(ii) $\mathrm{R}p_!p^!\mathbf{Z}_{p(W\cap\Omega)}\to\mathbf{Z}_{W\cap\Omega}$ は同型である．実際，ファイバーが $\mathbf{R}$ と同相であることから，注意 3.3.10 の式 (3.3.13)

$$\mathbf{Z}\xrightarrow{\sim}\mathrm{R}\Gamma(p^{-1}(x);\mathbf{Z}_{p^{-1}(x)})$$

が成り立つ．

したがって命題 3.3.9 を p に適用すると $F\to\mathrm{R}p_!p^!F$ となることから

$$H^k(W\cap\Omega;p^{-1}F)\cong H^k(p(W\cap\Omega);F)$$

である．命題**??** (i) より，W を走らせたときの $U=p(W\cap\Omega)$ は $C_M(X-U)\cap V=\varnothing$ となる X の開集合を走る．したがって上の同型が示された．

(iii)：U を M の X における開近傍，Z を $C_M(Z)\subset A$ となる X の閉集合とする．次の射の列がある．

$$\begin{aligned} \mathrm{R}\Gamma_{Z\cap U}(U;F) &\underset{(1)}{\to} \mathrm{R}\Gamma_{p^{-1}(Z\cap U)}(p^{-1}(U);p^{-1}F)\\ &\underset{(2)}{\to} \mathrm{R}\Gamma_{p^{-1}(Z\cap U)\cap\Omega}(p^{-1}(U)\cap\Omega;p^{-1}F)\\ &\underset{(3)}{\to} \mathrm{R}\Gamma_{(p^{-1}(Z\cap U)\cap\Omega)\cup A}(p^{-1}(U);\mathrm{R}j_*j^{-1}p^{-1}F)\\ &\underset{(4)}{\to} \mathrm{R}\Gamma_A(T_MX;\nu_M(F)). \end{aligned}$$

ただし，それぞれの射は次のように定まる．

(1) $F\to\mathrm{R}p_*p^{-1}F$ に $\mathrm{R}\Gamma_{Z\cap U}(U;\ \cdot\ )$ を適用．
(2) $p^{-1}F\to\mathrm{R}j_*j^{-1}p^{-1}F$ に $\mathrm{R}\Gamma_{p^{-1}(Z\cap U)}(p^{-1}(U);\ \cdot\ )$ を適用．
(3) 切り落としと台の随伴と微妙なやつ．
(4) s^{-1} を当てる．T_MX 上の切断は A に台を持つことから．

以上の合成と切除の三角を考えると，次の可換図式が得られる．

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & \varinjlim_U H^{k-1}(U-Z;F) \arrow[r] \arrow[d, "\gamma_{k-1}"] & \varinjlim_U H^k_{U-Z}(U;F) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_k"] & \varinjlim_U H^k(U;F) \arrow[r] \arrow[d, "\beta_k"] & \cdots \\ \cdots \arrow[r] & H^{k-1}(T_MX-A;\nu_MF) \arrow[r] & H^k_A(T_MX;\nu_MF) \arrow[r] & H^k(T_MX;\nu_MF) \arrow[r] & \cdots . \end{tikzcd}$$

各行は完全であり，γ_k と β_k は (ii) より同型である．したがって，α_k も同型である．

(iv)：$k\colon M \hookrightarrow T_MX$ を零切断とみなす閉埋め込みとする．このとき，

$$\begin{aligned} F|_M = i^{-1}F &\cong k^{-1}s^{-1}p^{-1}F \\ &\to k^{-1}s^{-1}\mathrm{R}j_*j^{-1}p^{-1}F \\ &\cong k^{-1}\nu_M F \\ &= \nu_M F|_M \end{aligned}$$

と

$$\begin{aligned} k^!\nu_M F &= k^!s^!j_!j^!p^!F \\ &\to k^!s^!p^!F \\ &= i^!F = i^{-1}\,\mathrm{R}\Gamma_M\,F \end{aligned}$$

という射が得られる．これらは (ii), (iii) から同型である．（$v \in T_MX$ として 0 を取ればよい．）残りの同型は $i^{-1} \cong \mathrm{R}\tau_*$ と $i^! \cong \mathrm{R}\tau_!$ から従う．

(v)：次の三角の射がある．

$$\begin{tikzcd} \mathrm{R}\Gamma_M(F)|_M \arrow[r] \arrow[d] & F|_M \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{R}\Gamma_{X-M}(F)|_M \arrow[r] \arrow[d] & +1 \\ \mathrm{R}\Gamma_M(\nu_M F)|_M \arrow[r] & \mathrm{R}\tau_*\nu_M F \arrow[r] & \mathrm{R}\dot{\tau}_*(\nu_M F|_{\dot{T}_MX}) \arrow[r] & +1. \end{tikzcd}$$

左と真ん中が同型なので右も同型である． □

前回飛ばしたところ

命題 2.2 ([KS90, Prop.4.2.4])**.** $G \in \mathsf{D}^{\mathrm{b}}(Y)$ とする．

(i) 標準的な射による可換図式

$$\begin{tikzcd} \mathrm{R}(T_Nf)_!\nu_N(G) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{R}(f_!G) \arrow[d] \\ \mathrm{R}(T_Nf)_*\nu_N(G) & \mathrm{R}(f_*G) \arrow[l] \end{tikzcd}$$

が存在する．

(ii) さらに，$\mathrm{supp}(G) \to X$ と $C_N(\mathrm{supp}(G)) \to T_MX$ が固有かつ $\mathrm{supp}(G) \cap f^{-1}(M) \subset N$ ならば，以上の射はすべて同型である．
とくに $f^{-1}(M) = N$ かつ，f が M に関して斉かつ $\mathrm{supp}(G)$ 上固有のとき，以上の射はすべて同型である．

証明. (ii) $\overline{\tilde{p}_Y^{-1}(\mathrm{supp}(G))}$ が $\tilde{X}_M$ 上固有ならば，$\mathrm{R}\tilde{f}'_*$ と $\mathrm{R}(T_Nf)_*$ をそれぞれ $\mathrm{R}\tilde{f}'_!$ と $\mathrm{R}(T_Nf)_!$ に置き換えることができるので，射はすべて同型となる．したがって，Y の閉部分集合 Z に対し，Z が X 上固有であること，$C_N(Z)$ が T_MX 上固有であること，そして $Z \cap f^{-1}(M) \subset N$ であることを仮定したとき，$\overline{\tilde{p}_Y^{-1}(Z)}$ が $\tilde{X}_M$

上固有であることを示せばよい．$\overline{\tilde{p}_Y^{-1}(Z)} \to \tilde{X}_M$ のファイバーはコンパクトなので，閉写像であることを示せば十分である．$\{u_n\}_n$ を $\overline{\tilde{p}_Y^{-1}(Z)}$ の点列で $\{\tilde{f}'(u_n)\}_n$ が収束するものとする．$\{u_n\}_n$ の部分列で収束するものが存在することを示せばよい．$\{\tilde{p}_Y(u_n)\}_n$ が収束すると仮定してよい．$\tilde{p}_Y^{-1}(Z) - T_N Y \to \tilde{X}_M - T_M X$ は固有なので，$\{\tilde{f}'(u_n)\}_n$ は $T_M X$ の点に収束するとしてよい．このとき，$\{\tilde{p}_Y(u_n)\}_n$ の極限点は $Z \cap f^{-1}(M)$ に含まれるので N に含まれる．

X と Y の局所座標系を (4.1.10) のようにとり，$u_n = (y'_n, y''_n, t_n)$ とおく．このとき，$t_n \underset{n}{\to} 0$, $t_n y'_n \underset{n}{\to} 0$ である．さらに $t_n > 0$（すなわち $u_n \in \tilde{p}_Y^{-1}(z)$）としてよい．$\{y''_n\}_n$ は収束するので，$\{|y'_n|\}_n$ が有界であることを示せばよい．いま，$|y'_n| \underset{n}{\to} \infty$ だったと仮定して矛盾を導く．部分列を取り出すことで，$\{y'_n/|y'_n|\}_n$ は 0 でないベクトル v に収束する．このとき $\{(y'_n/|y'_n|, y''_n, t_n|y'_n|)\}_n$ は $\tilde{p}_Y^{-1}(Z)$ に属し，点 $p \in T_N Y$ で零切断に属さないものに収束する．他方，$\tilde{f}'(u_n) = \left(\dfrac{1}{t_n} f_1(t_n, y'_n, y''_n), f_2(t_n, y'_n, y''_n)\right)$ は収束し $\left\{\dfrac{1}{t_n|y'_n|} f_1(t_n, y'_n, y''_n)\right\}_n$ は 0 に収束する．これより $T_N f(p)$ は $T_M X$ の零切断に属することが従う．したがって $C_N(Z) \cap (T_N f)^{-1}(T_N f(p)) \supset \mathbf{R}_{\geqq 0} p$ となる．これは $C_N(Z) \to T_M X$ が固有であるという事実にムジュンする． □

3 超局所化 [KS90, §4.3]

4 μhom[KS90, §4.4]

参考文献

[KS90] Masaki Kashiwara, Pierre Schapira, *Sheaves on Manifolds*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 292, Springer, 1990.

[Sch04] Pierre Schapira, *Sheaves: from Leray to Grothendieck and Sato*, Séminaires et Congres 9, Soc. Math. France, pp.173–181, 2004.