

2024/05/27 セミナー資料

大柴寿浩

記号

- 恒等射を id や 1 で表す.
- 集合 U の開近傍系を I_U とかき, 点 x の開近傍系を I_x とかく.
- \mathbf{R}^+ : 正の実数のなす乗法群.

1 局所台切断

もうひとつ, X の局所閉部分集合 Z に対して関手的に定まる層がある. U を X の開集合とし, Z を U の閉集合とする.

$$(1.1) \quad \Gamma_Z(U; F) := \text{Ker}(F(U) \rightarrow F(U - Z))$$

とおく. すなわち, $\Gamma_Z(U; F)$ は切断の台が Z に含まれるものからなる $\Gamma(U; F)$ の部分群である.

V を U の開集合で Z を閉集合として含むものとする. 制限射 $\rho_{V,U}: \Gamma(U; F) \rightarrow \Gamma(V; F)$ から自然な射

$$\tilde{\rho}_{V,U}: \Gamma_Z(U; F) \rightarrow \Gamma_Z(V; F)$$

が誘導される. 実際 $s \in \Gamma_Z(U; F)$ が $s|_{U-Z} = 0$ をみたすとき

$$\rho_{V-Z,V} \circ \rho_{V,U}(s) = \rho_{V-Z,U}(s) = \rho_{V-Z,U-Z} \circ \rho_{U-Z,U}(s) = 0$$

となる. したがって $\rho_{V,U}|_{\text{Ker } \rho_{V,U}}$ の像は $\rho_{V-Z,V}$ の核に含まれる. こうして定まる射 $\Gamma_Z(U; F) \rightarrow \Gamma_Z(V; F)$ は同型である. 実際, $\tilde{\rho}_{V,U}$ が全単射であることが次のように示される.

単射性 $s \in \Gamma_Z(U; F)$ が $\tilde{\rho}_{V,U}(s) = 0$ となると仮定する. これは $s|_V = 0$ かつ $s|_{U-Z} = 0$ ということである. $U - Z$ と V は U を被覆するので, F が層であることから, s は U 上の切断として 0 である. よってとくに $\Gamma_Z(U; F)$ の元としても 0 である. すなわち, $\tilde{\rho}_{V,U}$ は単射である.

全射性 $t \in \Gamma_Z(V; F)$ とする. 定義より $t|_{V-Z} = 0$ である. 0 を $U - Z$ 上の切断とみなせば, $U - Z$ と V は $V - Z = (U - Z) \cap V$ をみたす U の被覆なので, F が層であることから, U 上の切断 s で $s|_{U-Z} = 0$ となるものが定まる. したがって $\tilde{\rho}_{V,U}$ は全射である.

Z を閉集合として含む X の任意の開集合 U, V に関して $\Gamma_Z(U; F) \rightarrow \Gamma_Z(V; F)$ が同型であることが示されたので, X の局所閉集合 Z に対し, Z を閉集合として含む X の任意の開集合 U を用いることで, $\Gamma_Z(X; F)$ を $\Gamma_Z(U; F)$ として定めることができる. 前層 $U \mapsto \Gamma_{Z \cap U}(U; F)$ は層となる.

証明. 切断の様子: まず $\Gamma_{Z \cap U}(U; F)$ の意味について確認する. U を全体集合としてみたとき, $Z \cap U$ を局所閉集合として含む. 実際, X の開集合 V と閉集合 A を用いて, $Z = V \cap A$ とかくとき, $Z \cap U$ は $(V \cap U) \cap (A \cap U)$ とかける. U の相対位相について $V \cap U$ は開で $A \cap U$ は閉なので, $Z \cap U$ は局所閉である. この U と $Z \cap U \subset U$ の組に対して上の $\Gamma_Z(X; F)$ を考えたものが $\Gamma_{Z \cap U}(U; F)$ である.

前層になること: 次に $U \mapsto \Gamma_{Z \cap U}(U; F)$ が前層となることを示す. $V \subset U$ を X の開集合とする. $Z \cap U$ を閉集合として含む U の開集合 U' と $Z \cap V$ を閉集合として含む V の開集合 V' を選び

$$\Gamma_{Z \cap U}(U; F) = \Gamma_{Z \cap U}(U'; F), \quad \Gamma_{Z \cap V}(U; F) = \Gamma_{Z \cap V}(V'; F)$$

とする. このとき $V' \subset U'$ としてよい. 実際 $Z \cap V \subset V'$ と $Z \cap U \subset U'$ に対して, $V'' = V' \cap U'$ とすれば, V'' は

$$Z \cap V = Z \cap (V \cap U) = (Z \cap V) \cap (Z \cap U) \subset V' \cap U' = V'' \subset U'$$

をみたす. この設定のもとで制限射

$$\rho_{V,U} = \rho_{V',U'}: \Gamma_{Z \cap U}(U; F) = \Gamma_{Z \cap U}(U'; F) \rightarrow \Gamma_{Z \cap V}(V; F) = \Gamma_{Z \cap V}(V'; F)$$

が F の制限射 $\rho'_{V',U'}: F(U') \rightarrow F(V')$ から誘導される. 実際, $s \in \Gamma_{Z \cap U}(U'; F)$ に対し, $\rho'_{V',U'}(s)$ は

$$\begin{aligned} \rho'_{V',U'}(s)|_{V'-Z \cap V} &= \rho'_{V'-Z \cap V, V'} \circ \rho'_{V',U'}(s) \\ &= \rho'_{V'-Z \cap V, U'}(s) \\ &= \rho'_{V'-Z \cap V, U'-Z \cap U} \circ \rho'_{U'-Z \cap U, U'}(s) = 0 \end{aligned}$$

となる. $\rho_{V',U'}$ が関手性をみたすことを示せばよい.

$$\rho_{U',U'} = \rho'_{U',U'}|_{\Gamma_{Z \cap U}(U'; F)} = \text{id}_{F(U')}|_{\Gamma_{Z \cap U}(U'; F)} = \text{id}_{\Gamma_{Z \cap U}(U'; F)}$$

である. また, $W \subset V \subset U$ を X の開集合とし, W の開集合 W' を $Z \cap W$ を閉集合として含み, $W' \subset V' \subset U'$ となるように選ぶ. このとき

$$\begin{aligned} \rho_{W',V'} \circ \rho_{V',U'} &= (\rho'_{W',V'} \circ \rho'_{V',U'})|_{\Gamma_{Z \cap U}(U'; F)} \\ &= \rho'_{W',V'}|_{\Gamma_{Z \cap V}(V'; F)} \circ \rho'_{V',U'}|_{\Gamma_{Z \cap U}(U'; F)} \\ &= \rho'_{W',U'}|_{\Gamma_{Z \cap U}(U'; F)} \\ &= \rho_{V',U'} \end{aligned}$$

が成り立つ．よって $U \mapsto \Gamma_{Z \cap U}(U; F)$ は前層となる．

層になること：前層 $U \mapsto \Gamma_{Z \cap U}(U; F)$ が層となることを示す． U を X の開集合とし， $(U_i)_{i \in I}$ を U の開被覆とする． U' を U の開集合で $Z \cap U$ を閉集合として含むものとする．このとき $U'_i = U' \cap U_i$ とおくと， $(U'_i)_{i \in I}$ は U' の開被覆で，各 i に対し U'_i は $Z \cap U_i$ を閉集合として含む．実際， $Z \cap U_i = Z \cap (U_i \cap U) = (Z \cap U) \cap U_i$ なので， $U_i \subset U$ の相対位相について $Z \cap U$ は閉である．したがって，この U' と $(U'_i)_{i \in I}$ に対して貼り合わせの条件が成り立つことを示せばよい．

$$\Gamma_{Z \cap U}(U'; F) \rightarrow \prod_{i \in I} \Gamma_{Z \cap U_i}(U'_i; F)$$

が単射であることを示す． $s \in \Gamma_{Z \cap U}(U'; F)$ が $\rho'_{U'_i, U'}$ であるとする． F の貼り合わせの条件から U' 上の切断として $s = 0$ である．

$$\Gamma_{Z \cap U}(U'; F) \rightarrow \prod_{i \in I} \Gamma_{Z \cap U_i}(U'_i; F) \rightarrow \prod_{i, j \in I} \Gamma_{Z \cap U_i \cap U_j}(U'_i \cap U'_j; F)$$

が完全であることを示す．ところで， $U'_i \cap U'_j$ は $Z \cap U_i \cap U_j$ を閉集合として含む．実際 $Z \cap (U_i \cap U_j) = (Z \cap U_i) \cap (Z \cap U_j) \subset U'_i, U'_j$ なので，とくに $Z \cap (U_i \cap U_j) = (Z \cap U_i) \cap (Z \cap U_j) \cap (U'_i \cap U'_j)$ である． $U'_i \cap U'_j \subset U'_i$ の相対位相に関して $Z \cap (U_i \cap U_j)$ は閉である．さて， $(s_i)_{i \in I}$ を U'_i 上の切断で $s_i|_{U'_i - Z \cap U_i} = 0$ となるものの族とし，各 $i, j \in I$ に対して

$$s_i|_{U'_i \cap U'_j} = s_j|_{U'_i \cap U'_j}$$

が成り立つとする．このとき， F の貼り合わせの条件から， U' 上の切断 s で各 $i \in I$ に対し $s|_{U'_i} = s_i$ となるものが存在する． $s|_{U' - Z \cap U} = 0$ となることを示す．

$$\begin{aligned} U' - Z \cap U &= U' \cap U - Z \cap U \\ &= (U' - Z) \cap U \\ &= (U' - Z) \cap \bigcup_{i \in I} U_i \\ &= \bigcup_{i \in I} (U' - Z) \cap U_i \\ &= \bigcup_{i \in I} (U' \cap U_i - Z \cap U_i) \\ &= \bigcup_{i \in I} (U'_i - Z \cap U_i) \end{aligned}$$

なので $(U'_i - Z \cap U_i)_{i \in I}$ は $U' - Z \cap U$ を被覆する．各 $U'_i - Z \cap U_i$ 上で $s|_{U'_i - Z \cap U_i} = s_i|_{U'_i - Z \cap U_i} = 0$ なので $s|_{U' - Z \cap U} = 0$ である．□

定義 1.1. 層 $U \mapsto \Gamma_{Z \cap U}(U; F)$ を Z に台をもつ F の切断の層とよび $\Gamma_Z(F)$ で表す^{*1}．

^{*1} 本多ノートだと local support functor と呼んでいるので Z が明らかなきは局所台切断の層とも呼ぶのもアリか？．

命題 1.2. Z を X の局所閉部分集合とし, F を X 上の層とする.

- (i) $\text{Sh}(X)$ から Ab への関手 $\Gamma_Z(X; \cdot): F \mapsto \Gamma_Z(X; F)$ と $\text{Sh}(X)$ から $\text{Sh}(X)$ への関手 $\Gamma_Z: F \mapsto \Gamma_Z(F)$ は左完全である. さらに次が成り立つ.

$$\Gamma_Z(X; \cdot) = \Gamma(X; \cdot) \circ \Gamma_Z.$$

- (ii) Z' を Z とは別の X の局所閉部分集合とする. このとき次が成り立つ.

$$\Gamma_{Z'} \circ \Gamma_Z = \Gamma_{Z \cap Z'}.$$

- (iii) Z が X の開集合であるとし, $i: Z \hookrightarrow X$ を Z の X への包含写像とする. このとき次が成り立つ.

$$\Gamma_Z = i_* i^{-1} F$$

- (iv) Z' を Z の閉部分集合とする. このとき, 次の列は完全である.

$$0 \rightarrow \Gamma_{Z'}(F) \rightarrow \Gamma_Z(F) \rightarrow \Gamma_{Z-Z'}(F).$$

- (v) U_1 と U_2 を X の開部分集合とする. このとき列

$$0 \rightarrow \Gamma_{U_1 \cup U_2}(F) \xrightarrow{\alpha} \Gamma_{U_1}(F) \oplus \Gamma_{U_2}(F) \xrightarrow{\beta} \Gamma_{U_1 \cap U_2}(F)$$

は完全である. ただし $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ と $\beta = (\beta_1, -\beta_2)$ はそれぞれ自然な射 $\Gamma_{U_1 \cup U_2}(F) \rightarrow \Gamma_{U_i}(F)$ と $\Gamma_{U_i}(F) \rightarrow \Gamma_{U_1 \cap U_2}(F)$ ($i = 1, 2$) から引きおこされるものである.

- (vi) Z_1 と Z_2 を X の閉部分集合とする. このとき列

$$0 \rightarrow \Gamma_{Z_1 \cap Z_2}(F) \xrightarrow{\gamma} \Gamma_{Z_1}(F) \oplus \Gamma_{Z_2}(F) \xrightarrow{\delta} \Gamma_{Z_1 \cup Z_2}(F)$$

は完全である. ただし $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ と $\delta = (\delta_1, -\delta_2)$ はそれぞれ自然な射 $\Gamma_{Z_1 \cap Z_2}(F) \rightarrow \Gamma_{Z_i}(F)$ と $\Gamma_{Z_i}(F) \rightarrow \Gamma_{Z_1 \cup Z_2}(F)$ ($i = 1, 2$) から引きおこされるものである.

各操作の関係

ここまで定義してきた圏 $\text{Sh}(X)$ 上の関手 $\mathcal{H}om(\cdot, \cdot)$, $\cdot \otimes \cdot$, f_* , f^{-1} , $(\cdot)_Z$, Γ_Z , $\Gamma(X; \cdot)$ の関係を調べる.

命題 1.3. \mathcal{R} を X 上の環の層とし, $F \in \text{Mod}(\mathcal{R})$ とする. Z を X の局所閉部分集合とするとき, 次の自然な同型が存在する.

$$(1.2) \quad \mathcal{R}_Z \otimes F \cong F_Z,$$

$$(1.3) \quad \mathcal{H}om_{\mathcal{R}}(\mathcal{R}_Z, F) \cong \Gamma_Z(F).$$

証明. (1.2) : 左辺が (??) をみたすことを示す.

$$\begin{aligned} \left(\mathcal{R}_Z \otimes_{\mathcal{R}} F \right) \Big|_Z &\cong (\mathcal{R}_Z|_Z) \otimes_{\mathcal{R}|_Z} (F|_Z) \\ &\cong (\mathcal{R}|_Z) \otimes_{\mathcal{R}|_Z} (F|_Z) \\ &\cong \left(\mathcal{R} \otimes F \right) \Big|_Z \cong F|_Z \end{aligned}$$

である. また,

$$\left(\mathcal{R}_Z \otimes_{\mathcal{R}} F \right) \Big|_{X-Z} \cong (\mathcal{R}_Z|_{X-Z}) \otimes_{\mathcal{R}|_{X-Z}} (F|_{X-Z}) \cong 0 \otimes_{\mathcal{R}|_{X-Z}} (F|_{X-Z}) \cong 0$$

であるから, 左辺は (??) をみたす. よって命題?? (i) より (1.2) がしたがう.

(1.3) : まず Z が開集合の場合と閉集合の場合に示す. その後開集合と閉集合の共通部分として表したときに示す.

Z が開集合のとき, あとでかく.

Z が閉集合のとき, 完全列

$$0 \rightarrow \mathcal{R}_{X-Z} \rightarrow \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}_Z \rightarrow 0$$

に対して $\mathcal{H}om_{\mathcal{R}}(\cdot, F)$ を適用すると, $X-Z$ に開集合の場合を適用したものと命題 1.2 (iv) の完全列とあわせて次の図式を得る.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{H}om_{\mathcal{R}}(\mathcal{R}_Z, F) & \longrightarrow & \mathcal{H}om_{\mathcal{R}}(\mathcal{R}, F) & \longrightarrow & \mathcal{H}om_{\mathcal{R}}(\mathcal{R}_{X-Z}, F) \\ \parallel & & \downarrow & & \parallel & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & \Gamma_Z(F) & \longrightarrow & F & \longrightarrow & \Gamma_{X-Z}(F) \end{array}$$

したがって, 左に 0 を付け加えた

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \mathcal{H}om_{\mathcal{R}}(\mathcal{R}_Z, F) & \longrightarrow & \mathcal{H}om_{\mathcal{R}}(\mathcal{R}, F) & \longrightarrow & \mathcal{H}om_{\mathcal{R}}(\mathcal{R}_{X-Z}, F) \\ \parallel & & \parallel & & \downarrow & & \parallel & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \Gamma_Z(F) & \longrightarrow & F & \longrightarrow & \Gamma_{X-Z}(F) \end{array}$$

に五項補題を適用することで (1.3) がしたがう.

Z が一般の局所閉集合のとき, 開集合 U と閉集合 A を用いて $Z = U \cap A$ と表す. このとき, 開

集合と閉集合の場合を用いて

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}om_{\mathcal{R}}(\mathcal{R}_Z, F) &\cong \mathcal{H}om_{\mathcal{R}}(\mathcal{R}_{U \cap A}, F) \\
&\cong \mathcal{H}om_{\mathcal{R}}((\mathcal{R}_U)_A, F) \\
&\cong \mathcal{H}om_{\mathcal{R}}\left(\mathcal{R}_U \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{R}_A, F\right) \\
&\cong \mathcal{H}om_{\mathcal{R}}(\mathcal{R}_U, \mathcal{H}om_{\mathcal{R}}(\mathcal{R}_A, F)) \\
&\cong \mathcal{H}om_{\mathcal{R}}(\mathcal{R}_U, \Gamma_A(F)) \\
&\cong \Gamma_A(\Gamma_A(F)) \\
&\cong \Gamma_{U \cap A}(F)
\end{aligned}$$

となる. □

注意 1.4. 命題を用いることで他にも多くの射や同型が得られる. 例えば, $f: Y \rightarrow X$ を連続写像, \mathcal{R} を Z を X の局所閉部分集合とし, F, F_1, F_2 を \mathcal{R} 加群の層, G, G_1, G_2 を $f^{-1}\mathcal{R}$ 加群の層とする. (テンソル積を考える場合は F_1, G, G_1 は右加群とする.) このとき, 以下のような射や同型が存在する.

$$(1.4) \quad \left(F_1 \otimes_{\mathcal{R}} F_2\right)_Z \cong F_1 \otimes_{\mathcal{R}} (F_2)_Z \cong (F_1)_Z \otimes_{\mathcal{R}} F_2, \quad (\text{in } \text{Mod}(\mathbf{Z}_X))$$

$$(1.5) \quad \mathcal{H}om_{\mathcal{R}}((F_1)_Z, F_2) \cong \mathcal{H}om_{\mathcal{R}}(F_1, \Gamma_Z(F_2)) \cong \Gamma_Z \mathcal{H}om_{\mathcal{R}}(F_1, F_2)$$

$$(1.6) \quad f^{-1}F_Z \cong (f^{-1}F)_{f^{-1}(Z)},$$

$$(1.7) \quad \Gamma_Z f_* G \cong f_* \Gamma_{f^{-1}(Z)}(G),$$

$$(1.8) \quad f_* G \otimes_{\mathcal{R}} F \rightarrow f_* \left(G \otimes_{f^{-1}\mathcal{R}} f^{-1}F \right),$$

$$(1.9) \quad f_* G_1 \otimes_{\mathcal{R}} f_* G_2 \rightarrow f_* \left(G_1 \otimes_{f^{-1}\mathcal{R}} G_2 \right),$$

$$(1.10) \quad f_* \mathcal{H}om_{f^{-1}\mathcal{R}}(G_1, G_2) \rightarrow \mathcal{H}om_{\mathcal{R}}(f_* G_1, f_* G_2),$$

$$(1.11) \quad f^{-1} \mathcal{H}om_{\mathcal{R}}(F_1, F_2) \rightarrow \mathcal{H}om_{f^{-1}\mathcal{R}}(f^{-1}F_1, f^{-1}F_2).$$

証明. (1.4) : \mathbf{Z}_X 加群の層として

$$\begin{aligned}
\left(F_1 \otimes_{\mathcal{R}} F_2\right)_Z &\cong \mathbf{Z}_Z \otimes_{\mathbf{Z}_X} \left(F_1 \otimes_{\mathcal{R}} F_2\right) \cong \left(\mathbf{Z}_Z \otimes_{\mathbf{Z}_X} F_1\right) \otimes_{\mathcal{R}} F_2 \cong (F_1)_Z \otimes_{\mathcal{R}} F_2, \\
\left(F_1 \otimes_{\mathcal{R}} F_2\right)_Z &\cong \left(F_1 \otimes_{\mathcal{R}} F_2\right) \otimes_{\mathbf{Z}_X} \mathbf{Z}_Z \cong F_1 \otimes_{\mathcal{R}} \left(F_2 \otimes_{\mathbf{Z}_X} \mathbf{Z}_Z\right) \cong F_1 \otimes_{\mathcal{R}} (F_2)_Z
\end{aligned}$$

である.

(1.5) : \mathcal{R} 加群として

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}om_{\mathcal{R}}((F_1)_Z, F_2) &\cong \mathcal{H}om_{\mathcal{R}}\left(\mathcal{R}_Z \otimes_{\mathcal{R}} F_1, F_2\right) \\
&\cong \mathcal{H}om_{\mathcal{R}}(F_1, \mathcal{H}om_{\mathcal{R}}(\mathcal{R}_Z, F_2)) \\
&\cong \mathcal{H}om_{\mathcal{R}}(F_1, \Gamma_Z(F_2)), \\
\mathcal{H}om_{\mathcal{R}}((F_1)_Z, F_2) &\cong \mathcal{H}om_{\mathcal{R}}\left(\mathcal{R}_Z \otimes_{\mathcal{R}} F_1, F_2\right) \\
&\cong \mathcal{H}om_{\mathcal{R}}(\mathcal{R}_Z \mathcal{H}om_{\mathcal{R}}(F_1, F_2)) \\
&\stackrel{(1.3)}{\cong} \Gamma_Z \mathcal{H}om_{\mathcal{R}}(F_1, F_2)
\end{aligned}$$

である. この変形でテンソル積を用いている部分があるが, F_1 は左 \mathcal{R} 加群としている.

(1.6) : $f^{-1}F_Z$ が (??) をみたすことを示す. Y の点 y に対して,

$$(f^{-1}(F_Z))_y \cong (F_Z)_{f(y)} \cong \begin{cases} F_{f(y)} & f(y) \in Z \quad \text{すなわち} \quad y \in f^{-1}(Z) \\ 0 & f(y) \in X - Z \quad \text{すなわち} \quad y \in Y - f^{-1}(Z) \end{cases}$$

である. よって $F_Z|_{f^{-1}(Z)}$ は $f^{-1}F|_{f^{-1}(Z)}$ と同型であり $F_Z|_{Y-f^{-1}(Z)}$ は 0 である. したがって, 命題?? (i) より (1.6) が成り立つ.

(1.7) : 任意の \mathcal{R} 加群の層 F に対して

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}om_{\mathcal{R}}(F, \Gamma_Z(f_*G)) &\stackrel{(1.5)}{\cong} \mathcal{H}om_{\mathcal{R}}(F_Z, f_*G) \\
&\cong \mathcal{H}om_{f^{-1}\mathcal{R}}(f^{-1}F_Z, G) \\
&\stackrel{(1.6)}{\cong} \mathcal{H}om_{f^{-1}\mathcal{R}}((f^{-1}F)_{f^{-1}(Z)}, G) \\
&\stackrel{(1.5)}{\cong} \mathcal{H}om_{f^{-1}\mathcal{R}}(f^{-1}F, \Gamma_{f^{-1}(Z)}(G)) \\
&\cong \mathcal{H}om_{\mathcal{R}}(F, f_*\Gamma_{f^{-1}(Z)}(G))
\end{aligned}$$

が成り立つ. したがって米田の補題から (1.7) がしたがう.

(1.8) : 次の射の列を考える.

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}om(G \otimes f^{-1}F, G \otimes f^{-1}F) &\xrightarrow{(\eta_G \otimes f^{-1}F)^*} \mathcal{H}om(f^{-1}f_*G \otimes f^{-1}F, G \otimes f^{-1}F) \\
&\cong \mathcal{H}om(f^{-1}(f_*G \otimes F), G \otimes f^{-1}F) \\
&\cong \mathcal{H}om(f_*G \otimes F, f_*(G \otimes f^{-1}F)).
\end{aligned}$$

ただし, 最初の $(\eta_G \otimes f^{-1}F)^*$ は随伴の余単位 $\eta_G: f^{-1}f_*G \rightarrow G$ に $f^{-1}F$ の恒等射を掛けたものの引き戻しである. 以上の射の合成による $G \otimes f^{-1}F$ の恒等射の像が

$$f_*G \otimes F \rightarrow f_*(G \otimes f^{-1}F)$$

を定める.

(1.9) : 次の射の列を考える.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{f^{-1}\mathcal{R}} \left(G_1 \otimes_{f^{-1}\mathcal{R}} G_2, G_1 \otimes_{f^{-1}\mathcal{R}} G_2 \right) &\rightarrow \mathrm{Hom}_{f^{-1}\mathcal{R}} \left(f^{-1}f_*G_1 \otimes_{f^{-1}\mathcal{R}} f^{-1}f_*G_2, G_1 \otimes_{f^{-1}\mathcal{R}} G_2 \right) \\
&\cong \mathrm{Hom}_{f^{-1}\mathcal{R}} \left(f^{-1} \left(f_*G_1 \otimes_{\mathcal{R}} f_*G_2 \right), G_1 \otimes_{f^{-1}\mathcal{R}} G_2 \right) \\
&\cong \mathrm{Hom}_{f^{-1}\mathcal{R}} \left(f_*G_1 \otimes_{\mathcal{R}} f_*G_2, f_* \left(G_1 \otimes_{f^{-1}\mathcal{R}} G_2 \right) \right)
\end{aligned}$$

最初の射は随伴の余単位のテンソル積

$$\eta_{G_1} \otimes \eta_{G_2} : G_1 \otimes_{f^{-1}\mathcal{R}} G_2 \rightarrow f^{-1}f_*G_1 \otimes_{f^{-1}\mathcal{R}} f^{-1}f_*G_2$$

による引き戻しの定める射である. 以上の射の合成による $G_1 \otimes_{f^{-1}\mathcal{R}} G_2$ の恒等射の像が

$$f_*G_1 \otimes_{\mathcal{R}} f_*G_2 \rightarrow f_* \left(G_1 \otimes_{f^{-1}\mathcal{R}} G_2 \right)$$

を定める.

(1.10) : Y の開集合 V に対し,

$$\mathrm{Hom}_{(f^{-1}\mathcal{R})|_V} (G_1|_V, G_2|_V) \otimes_{f^{-1}\mathcal{R}(V)} G_1(V) \rightarrow G_2(V)$$

が

$$(\varphi|_V : G_1|_V \rightarrow G_2|_V) \otimes s \mapsto (\varphi|_V)_V(s) = \varphi_V(s)$$

により定まる. したがって, $f^{-1}\mathcal{R}$ 加群の層の射

$$\alpha : \mathcal{H}om_{f^{-1}\mathcal{R}}(G_1, G_2) \otimes_{f^{-1}\mathcal{R}} G_1 \rightarrow G_2$$

が存在する. 次の射の列を考える.

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Hom}_{f^{-1}\mathcal{R}} \left(\mathcal{H}om_{f^{-1}\mathcal{R}}(G_1, G_2) \otimes_{f^{-1}\mathcal{R}} G_1, G_2 \right) \\
&\rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{R}} \left(f_* \left(\mathcal{H}om_{f^{-1}\mathcal{R}}(G_1, G_2) \otimes_{f^{-1}\mathcal{R}} G_1 \right), f_*G_2 \right) \\
&\rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{R}} \left(f_* \mathcal{H}om_{f^{-1}\mathcal{R}}(G_1, G_2) \otimes_{\mathcal{R}} f_*G_1, f_*G_2 \right) \\
&\cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{R}} (f_* \mathcal{H}om_{f^{-1}\mathcal{R}}(G_1, G_2), \mathcal{H}om_{\mathcal{R}}(f_*G_1, f_*G_2)).
\end{aligned}$$

最初の射は順像関手の定める射である. 2 番目の射は $\mathcal{H}om_{f^{-1}\mathcal{R}}(G_1, G_2)$ と G_1 に (1.9) を適用した

$$f_* \mathcal{H}om_{f^{-1}\mathcal{R}}(G_1, G_2) \otimes_{\mathcal{R}} f_*G_1 \rightarrow f_* \left(\mathcal{H}om_{f^{-1}\mathcal{R}}(G_1, G_2) \otimes_{f^{-1}\mathcal{R}} G_1 \right)$$

による引き戻しの定める射である．以上の射の列の合成による α の像が

$$f_* \mathcal{H}om_{f^{-1}\mathcal{R}}(G_1, G_2) \rightarrow \mathcal{H}om_{\mathcal{R}}(f_* G_1, f_* G_2)$$

をひきおこす．

(1.11) : 次の射の列を考える．

$$\begin{aligned} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{R}} \left(\mathcal{H}om_{\mathcal{R}}(F_1, F_2) \otimes_{\mathcal{R}} F_1, F_2 \right) \\ & \rightarrow \mathrm{Hom}_{f^{-1}\mathcal{R}} \left(f^{-1} \left(\mathcal{H}om_{\mathcal{R}}(F_1, F_2) \otimes_{\mathcal{R}} F_1 \right), f^{-1} F_2 \right) \\ & \cong \mathrm{Hom}_{f^{-1}\mathcal{R}} \left(f^{-1} \mathcal{H}om_{\mathcal{R}}(F_1, F_2) \otimes_{f^{-1}\mathcal{R}} f^{-1} F_1, f^{-1} F_2 \right) \\ & \cong \mathrm{Hom}_{f^{-1}\mathcal{R}} (f^{-1} \mathcal{H}om_{\mathcal{R}}(F_1, F_2), \mathcal{H}om_{f^{-1}\mathcal{R}}(f^{-1} F_1, f^{-1} F_2)) . \end{aligned}$$

(1.10) の証明で構成した α と同様にして \mathcal{R} 加群の層の射

$$\beta: \mathcal{H}om_{\mathcal{R}}(F_1, F_2) \otimes_{\mathcal{R}} F_1 \rightarrow F_2$$

が定まる．射の列の合成による β の像が

$$f^{-1} \mathcal{H}om_{\mathcal{R}}(F_1, F_2) \rightarrow \mathcal{H}om_{f^{-1}\mathcal{R}}(f^{-1} F_1, f^{-1} F_2)$$

をひきおこす． □

参考文献

- [BouTG1] ブルバキ, 位相 1, 東京図書, 1968.
- [BouTVS] ブルバキ, 位相線形空間 1, 東京図書, 1968.
- [B+84] Borel, *Intersection Cohomology*, Progress in Mathematics, 50, Birkhäuser, 1984.
- [G58] Grauert, *On Levi's problem and the embedding of real analytic manifolds*, Ann. Math. 68, 460–472 (1958).
- [GP74] Victor Guillemin, Alan Pollack, *Differential Topology*, Prentice-Hall, 1974.
- [HS23] Andreas Hohl, Pierre Schapira, *Unusual Functorialities for weakly constructible sheaves*, 2023.
- [KS90] Masaki Kashiwara, Pierre Schapira, *Sheaves on Manifolds*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 292, Springer, 1990.
- [KS06] Masaki Kashiwara, Pierre Schapira, *Categories and Sheaves*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 332, Springer, 2006.
- [Le13] John M. Lee, *Introduction to Smooth Manifolds*, Second Edition, Graduate Texts in Mathematics, **218**, Springer, 2013.

- [Mo76] 森本光生, 佐藤超函数入門, 共立出版, 1976.
- [R55] de Rham, *Variétés différentiables*, Hermann, Paris, 1955.
- [Sa59] Mikio Sato, *Theory of Hyperfunctions*, 1959–60.
- [S66] Schwartz, *Théorie de distributions*, Hermann, Paris, 1966.
- [Sh16] 志甫淳, 層とホモロジー代数, 共立出版, 2016.
- [SP] The Stacks Project.
- [Sp65] Michael Spivak, *Calculus on Manifolds*, Benjamin, 1965.
- [Ike21] 池祐一, 超局所層理論概説, 2021.
- [Tak17] 竹内潔, \mathcal{D} 加群, 共立出版, 2017.
- [Ue] 植田一石, ホモロジー的ミラー対称性, <https://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~kazushi/course/hms.pdf> 2024/02/04 最終閲覧.