2024/03/15 セミナー資料

大柴寿浩

記号

- 恒等射を id や 1 で表す．
- 集合 U の開近傍系を I_U とかき，点 x の開近傍系を I_x とかく．
- $\mathbf{R}^+$: 正の実数のなす乗法群．

1　フーリエ・佐藤変換 [KS90, section 3.7]

まず錐状層を定義する．そのために作用つきの空間を考える．X を局所コンパクト空間で $\mathbf{R}^+$ の作用 μ が入っているとする．つまり，連続写像 $\mu\colon X \times \mathbf{R}^+ \to X$ で

$$\begin{aligned}\mu(x, t_1t_2) &= \mu(\mu(x,t_1), t_2)\\ \mu(x,1) &= x\end{aligned}$$

をみたすものが与えられているとする．

定義 1.1 ([KS90, Definition 3.7.1])**.**
(i) 層 $F \in \mathrm{Mod}(A_X)$ が**錐状** (conic) であるとは，X の各軌道 b への制限 $F|_b$ が局所定数層であることをいう．$\mathrm{Mod}(A_X)$ の充満部分圏 $\mathrm{Mod}_{\mathbf{R}^+}(A_X)$ を錐状層からなるものとして定める．
(ii) $\mathsf{D}^+_{\mathbf{R}^+}(X)$ を，各 $j \in \mathbf{Z}$ に対して $H^j(F)$ が錐状のものからなる $\mathsf{D}^+(X)$ の充満部分圏として定める．

錐状層がどのように特徴づけられるかを調べる．次の連続写像を考える．

$$X \xhookrightarrow{j} X \times \mathbf{R}^+ \overset{\mu}{\underset{p}{\rightrightarrows}} X.$$

$j\colon X \to X \times \mathbf{R}^+$ は $x \in X$ を $X \times \mathbf{R}^+$ に $(x,1)$ として埋め込む写像であり．$p\colon X \times \mathbf{R}^+ \to X$ は X への第 1 射影である．これらの連続写像を用いて，$F \in \mathsf{D}^+(X)$ に対し，次の 2 つの射を構成する．

$$\mu^{-1}F \xleftarrow{\alpha} p^{-1}\mathrm{R}p_*\mu^{-1}F \xrightarrow{\beta} p^{-1}F.$$

α は随伴 $(p^{-1}, \mathrm{R}p_*)$ の余単位 $p^{-1}\mathrm{R}p_* \to 1_{\mathsf{D}^+(X)}$ を $\mu^{-1}F$ に適用することで得られる．β は次のように構成される．

$$\begin{aligned} p^{-1}\mathrm{R}p_*\mu^{-1}F &\to p^{-1}\mathrm{R}p_*\mathrm{R}j_*j^{-1}\mu^{-1}F \\ &\cong p^{-1}\mathrm{R}(p\circ j)_*(\mu\circ j)^{-1}F \\ &\cong p^{-1}\mathrm{R}1_{X*}1_X^{-1}F \\ &\cong p^{-1}F. \end{aligned}$$

> **命題 1.2** ([KS90, Proposition 3.7.2])**.** $F \in \mathsf{D}^+(X)$ に対し次の条件 (i)–(v) は同値である．
>
> (i) $F \in \mathsf{D}^+_{\mathbf{R}^+}(X)$
>
> (ii) α と β はどちらも同型である．
>
> (iii) すべての $j \in \mathbf{Z}$ に対し，$H^j(\mu^{-1}F)$ が p の各ファイバーで局所定数層となる．
>
> (iv) $p^{-1}F \cong \mu^{-1}F$.
>
> (v) $p^!F \cong \mu^!F$.

証明． 次の順に証明する．

$$\begin{tikzcd}
(\mathrm{i}) \arrow[r, Leftrightarrow, "1"] & (\mathrm{iii}) \arrow[dr, Rightarrow, "5"'] & & (\mathrm{iv}) \arrow[ll, Rightarrow, "4"'] \arrow[r, Leftrightarrow, "2"] & (\mathrm{v}) \\
& & (\mathrm{ii}) \arrow[ur, Rightarrow, "3"'] & &
\end{tikzcd}.$$

1. (i) $\Leftrightarrow$ (iii): まず，$x \in X$ の $\mathbf{R}^+$ 軌道は $\mu\left(p^{-1}(x)\right)$ と表せることに注意する．実際，x の $\mathbf{R}^+$ 軌道 b は
$$b = \left\{\mu(x,t); t \in \mathbf{R}^+\right\}$$
であり，これは x での p のファイバー
$$p^{-1}(x) = \left\{(x,t); t \in \mathbf{R}^+\right\}$$
の μ による像
$$\mu\left(p^{-1}(x)\right) = \left\{\mu(x,t); (x,t) \in p^{-1}(x)\right\}$$
である．
$$\begin{aligned} j_{p^{-1}(x)} &\colon p^{-1}(x) \hookrightarrow X \times \mathbf{R}^+ \\ j_{\mu(p^{-1}(x))} &\colon \mu\left(p^{-1}(x)\right) \hookrightarrow X \end{aligned}$$
をそれぞれ包含写像とすると
$$j_{\mu(p^{-1}(x))} \circ \mu = \mu \circ j_{p^{-1}(x)}$$

が成り立つ．したがって，

$$
\begin{aligned}
H^j\left(\mu^{-1}F\right) &\cong H^j\left(\mu^{-1}F\right)|_{p^{-1}(x)} \\
&\cong j_{p^{-1}(x)}^{-1} H^j\left(\mu^{-1}F\right) \\
&\cong j_{p^{-1}(x)}^{-1} \mu^{-1} H^j\left(F\right) \\
&\cong \left(\mu \circ j_{p^{-1}(x)}\right)^{-1} H^j\left(F\right) \\
&\cong \left(j_{\mu(p^{-1}(x))} \circ \mu\right)^{-1} H^j\left(F\right) \\
&\cong \mu^{-1} j_{\mu(p^{-1}(x))}^{-1} H^j\left(F\right) \\
&\cong \mu^{-1}\left(H^j\left(F\right)|_{\mu(p^{-1}(x))}\right)
\end{aligned}
$$

である．引き戻しが定数層なら元の層も定数層であり，定数層の引き戻しも定数層[*1]なので，$H^j(\mu^{-1}F)$ が p の各ファイバーで局所定数層となるのは，$H^j\left(F\right)$ が $\mu\left(p^{-1}(x)\right)$ で，すなわち x の $\mathbf{R}^+$ 軌道で局所定数層となるときである．

2. (iv) ⇔ (v): $p^{-1}F \cong p^{-1} \overset{\mathrm{L}}{\otimes} \omega_{X\times\mathbf{R}^+/X}$ と $\mu^{-1}F \cong \mu^{-1} \overset{\mathrm{L}}{\otimes} \omega_{X\times\mathbf{R}^+/X}$ が成り立つ．
3. (ii) ⇔ (iv): α と β が同型なので，互いに逆射となる射

$$
\beta\alpha^{-1}\colon \mu^{-1}F \to p^{-1}F, \quad \alpha\beta^{-1}\colon p^{-1}F \to \mu^{-1}F
$$

が得られる．したがって，$p^{-1}F \cong \mu^{-1}F$ である．

4. (iv) ⇔ (iii): $\mu^{-1}F \cong p^{-1}F$ とする．$x \in X$ とする．$p^{-1}(x) = \{x\} \times \mathbf{R}^+$ に対し

$$
i_{p^{-1}(x)}\colon p^{-1}(x) \hookrightarrow X \times \mathbf{R}^+, \quad i_x\colon \{x\} \hookrightarrow X
$$

とおくと次の図式が可換になる．

$$
\begin{tikzcd}
p^{-1}(x) \arrow[r, hook, "i_{p^{-1}(x)}"] \arrow[d, "p|_{p^{-1}(x)}"'] & X \times \mathbf{R}^+ \arrow[d, "p"] \\
\{x\} \arrow[r, hook, "i_x"'] & X
\end{tikzcd}
.
$$

したがって，j を整数とすると

$$
\begin{aligned}
H^j\left(p^{-1}F\right)\Big|_{p^{-1}(x)} &\cong p^{-1}\ H^j\left(F\right)\Big|_{p^{-1}(x)} \\
&\cong i_{p^{-1}(x)}^{-1} p^{-1} H^j\left(F\right) \\
&\cong \left(p \circ i_{p^{-1}(x)}\right)^{-1} H^j\left(F\right) \\
&\cong \left(i_x \circ p|_{p^{-1}(x)}\right)^{-1} H^j\left(F\right) \\
&\cong \left(p|_{p^{-1}(x)}\right)^{-1} i_x^{-1} H^j\left(F\right) \\
&\cong \left(p|_{p^{-1}(x)}\right)^{-1} H^j\left(F\right)_x \\
&\cong \left(H^j\left(F\right)_x\right)_{p^{-1}(x)}
\end{aligned}
$$

[*1] $f\colon Y \to X$ を位相空間の間の連続写像とし，M を加群とする．X 上の層 F の引き戻し $f^{-1}F$ が Y 上の定数層 M_Y になったとすると，$\mathrm{a}_Y = \mathrm{a}_X \circ f$ より，$f^{-1}F \cong M_Y \cong \mathrm{a}_Y^{-1}M \cong f^{-1}\mathrm{a}_X^{-1}M \cong f^{-1}M_X$ である．逆像関手は conservative なので（ホンマか？）$F \cong M_X$ である．

で，定数層となる（よって特に局所定数層となる）.

5. (iii) $\Leftrightarrow$ (ii):

$\square$

参考文献

[BouTVS] ブルバキ, 位相線形空間 1, 東京図書, 1968.

[B+84] Borel, *Intersection Cohomology*, Progress in Mathematics, 50, Birkhäuser, 1984.

[G58] Grauert, *On Levi's problem and the embedding of real analytic manifolds*, Ann. Math. 68, 460–472 (1958).

[GP74] Victor Guillemin, Alan Pollack, *Differential Topology*, Prentice-Hall, 1974.

[HS23] Andreas Hohl, Pierre Schapira, *Unusual Functorialities for weakly constructible sheaves*, 2023.

[KS90] Masaki Kashiwara, Pierre Schapira, *Sheaves on Manifolds*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 292, Springer, 1990.

[KS06] Masaki Kashiwara, Pierre Schapira, *Categories and Sheaves*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 332, Springer, 2006.

[Le13] John M. Lee, *Introduction to Smooth Manifolds*, Second Edition, Graduate Texts in Mathematics, **218**, Springer, 2013.

[Mo76] 森本光生, 佐藤超函数入門, 共立出版, 1976.

[R55] de Rham, *Variétés différentiables*, Hermann, Paris, 1955.

[Sa59] Mikio Sato, *Theory of Hyperfunctions*, 1959–60.

[S66] Schwartz, *Théorie de distributions*, Hermann, Paris, 1966.

[Sh16] 志甫淳, 層とホモロジー代数, 共立出版, 2016.

[SP] The Stacks Project.

[Sp65] Michael Spivak, *Calculus on Manifolds*, Benjamin, 1965.

[Ike21] 池祐一, 超局所層理論概説, 2021.

[Tak17] 竹内潔, $\mathcal{D}$ 加群, 共立出版, 2017.

[Ue] 植田一石, ホモロジー的ミラー対称性, https://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~kazushi/course/hms.pdf 2024/02/04 最終閲覧.