2024/02/15 セミナー資料

大柴寿浩

記号

- $\overline{\mathbf{R}} \coloneqq [-\infty, +\infty] = \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$
- 集合 U の開近傍系を I_U とかき，点 x の開近傍系を I_x とかく．

1　コホモロジー構成可能層

1.1　理想複体

A を可換環とする．$M \in \mathsf{D}^{\mathrm{b}}(A) \coloneqq \mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathrm{Mod}(A))$ を A 加群の導来圏の対象とする．M が**理想対象**[*1] (perfect object) であるとは，有限生成射影的 A 加群の有界複体と擬同型であることをいう．

命題 1.1 ([KS90, Exercise I.30])**.**　A を可換環とする．

(i) $X \to Y \to Z \underset{+1}{\to}$ が $\mathsf{D}^{\mathrm{b}}(A)$ における完全三角で，X と Y が理想的ならば，Z も理想的である．

(ii) 理想対象の直和因子も理想対象である．

(iii) $M \in \mathsf{D}^{\mathrm{b}}(A)$ を理想対象とする．$M^* \coloneqq \mathrm{RHom}_A(M, A)$ とおく．M^* は理想対象であり，標準的な射 $M \to M^{**}$ は同型である．

A がネーター環で大域次元が有限であるとする．

(iv) $\mathrm{Mod}^{\mathrm{f}}(A)$ の導来圏 $\mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathrm{Mod}^{\mathrm{f}}(A))$ の任意の対象は理想的である．

(v) $\mathsf{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{f}}(A)$ で各コホモロジーが $\mathrm{Mod}^{\mathrm{f}}(A)$ に属す対象の導来圏を表す．$\mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathrm{Mod}^{\mathrm{f}}(A)) \to \mathsf{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{f}}(\mathrm{Mod}(A))$ は圏同値である．■

証明は略.

擬連接かつ tor 次元が有限であることと同値らしい．([SP, lem 15.74.2])

---

*1 [Ue] による訳にしたがった．定訳は未だ無いと思われる．

2 γ 位相

■錐（体） [KS90] に錐の定義が書いてなかったのでまとめておく．[BouTVS, Mo76] を参考にした．

定義 2.1. n 次元実ベクトル空間 V の部分集合 γ が次の条件をみたすとき，錐（あるいは錐体）(cone) であるという．

$$\text{任意の実数 } t > 0 \text{ に対し}, v \in \gamma \Longrightarrow tv \in \gamma.$$

コメント 2.2. [Mo76] では $\gamma \neq 0$ も課している．空集合は錐である．

$$\gamma = \left\{(x_1, x2) \in \mathbf{R}^2; 0 < \arg(x_1, x_2) < 7\pi/4\right\}$$

は錐である．（図 1）．

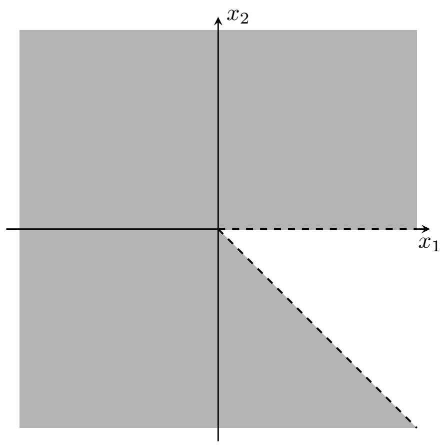

図 1 錐の例

次の例を見ると，有界でないことが大事っぽい．

例 2.3. $\gamma := \left\{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2; 0 < \arg(x_1, x_2) < \pi/3, \|(x_1, x_2)\| < 1\right\}$ は錐ではない．（図 2）

■γ 位相 γ から定まる位相を定義する．

> **定義 2.4.** V を n 次元実ベクトル空間とし，γ を 0 を頂点とする閉凸錐とする．V の γ 位相 (γ-topology) とは，V の位相であって，その開集合 $\Omega \subset V$ が次の条件 (i)–(ii) をみたすものをいう．
>
> (i) Ω は V の元の位相に関して開集合である．
>
> (ii) $\Omega + \gamma = \Omega$.

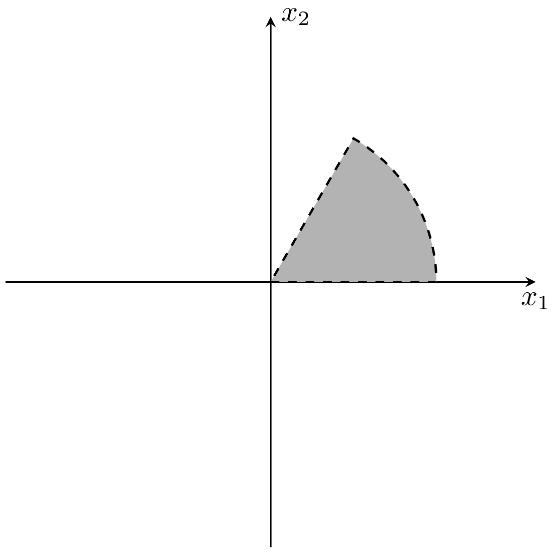

図 2　錐でない例

例 2.5.　$X=\mathbf{R}$, $\gamma=[0,+\infty[$ のとき，$\mathbf{R}$ の γ 位相に関する開集合は，$-\infty \leqq c \leqq +\infty$ を用いて $]c,+\infty[$ とかかれるものである．

> $\because$ $\mathbf{R}$ の開区間 $\Omega \coloneqq]c,d[$ に対し，
>
> $$\begin{aligned}\Omega+\gamma &= \{x+x' \in \mathbf{R} \mid x \in \Omega, x' \in \gamma\} \\ &= \{x+x' \in \mathbf{R} \mid c < x < d, 0 < x' < \infty\} \\ &= \{x+x' \in \mathbf{R} \mid c < x+x' < \infty\} \\ &=]c,+\infty[.\end{aligned}$$

γ に対し，**反転錐** (opposite cone) γ^a を

$$\gamma^a \coloneqq -\gamma$$

で定める．[*2]

γ 位相に関する開集合・閉集合・近傍をそれぞれ γ 開集合・γ 閉集合・γ 近傍とよぶ．

γ 位相に関する開集合 X はもとの V の位相に関する開集合になるので，γ 位相は元の位相よりも荒い．したがって，X を γ 位相に関する開集合と考えるとき，X_γ とかくことにすると，自然な連続写像 $\phi_\gamma\colon X \to X_\gamma$ が定まる．

> **命題 2.6.**　X_γ を V_γ の開集合とし，F を X_γ 上の層とする．

[*2] あとで導入する体蹠点写像 $a\colon X \to X; x \mapsto -x$ の像としてもよい（はず？）.

(i) $U \subset X$ を凸開集合とすると，

$$\mathrm{R}\Gamma(U+\gamma; F) \to \mathrm{R}\Gamma(U; \phi_\gamma^{-1}F)$$

は同型である．

(ii) $K \subset X$ を凸コンパクト集合とすると，

$$\mathrm{R}\Gamma(K+\gamma; F) \to \mathrm{R}\Gamma(K; \phi_\gamma^{-1}F)$$

は同型である．

(iii) $F \to \mathrm{R}\phi_{\gamma_*}\phi_\gamma^{-1}F$ は同型である．

(i) の射の構成は以下の通り．$U+\gamma$ は $U+\gamma+\gamma = U+\gamma$ をみたすので，U の γ 開近傍である．したがって，F の切断の射 $\Gamma(U+\gamma; F) \to \varinjlim_{U+\gamma \in I_U} \Gamma(U+\gamma; F) = \phi_\gamma^p F(U)$ が存在する．これに層化から定まる射 $\phi_\gamma^p F(U) \to \phi_\gamma^{-1}F(U)$ を合成することで

$$\Gamma(U+\gamma; F) \to \Gamma(U; \phi_\gamma^{-1}F)$$

を得る．これを導来圏に持ち上げれば，(i) の射が得られる．

証明． 次の 5 段階に分けて証明する．

(a) $\psi\colon \Gamma(U+\gamma; F) \to \Gamma(U; \phi_\gamma^{-1}F)$ が同型であることを示す．
(b) コンパクト凸集合 K に対し $\Gamma(K+\gamma; \phi_\gamma^{-1}F) \to \Gamma(K; \phi_\gamma^{-1}F)$ が同型であることを示す．
(c) 随伴から定まる射 $F \xrightarrow{\sim} \phi_{\gamma_*}\phi_\gamma^{-1}F$ が同型であることを示す．
(d) F が脆弱層ならば，$\mathrm{R}\Gamma(U+\gamma; F) \cong \mathrm{R}\Gamma(U; \phi_\gamma^{-1}F)$ である．
(e) 一般の F に対し $\mathrm{R}\Gamma(U+\gamma; F) \cong \mathrm{R}\Gamma(U; \phi_\gamma^{-1}F)$ である．

(a) $\psi\colon \Gamma(U+\gamma; F) \to \Gamma(U; \phi_\gamma^{-1}F)$ が同型であることを示す．
単射性：
全射性： □

■ここから新しい話． $\phi_\gamma^{-1}\mathrm{R}\phi_{\gamma_*}F$ を得る別の方法について述べる．$X = V$ のとき，

$$Z(\gamma) := \{(x,y) \in X \times X; y - x \in \gamma\} \tag{2.1}$$

とおき，q_1, q_2 を $X \times X$ から X への射影とする．
例えば，$X = \mathbf{R}$ で $\gamma = [0, \infty[$ のとき，

$$\begin{aligned} Z(\gamma) &= \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2; y - x \in [0,\infty[\right\} \\ &= \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2; y - x \geqq 0\right\} \end{aligned}$$

である．（図 3）

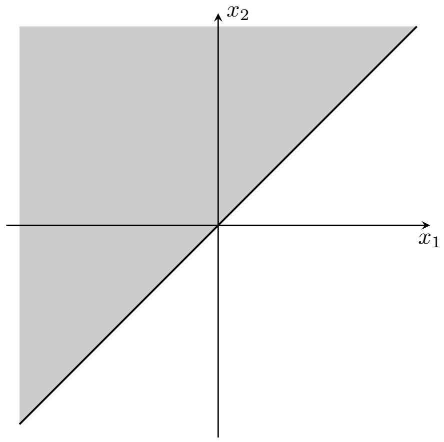

図 3　$Z(\gamma)$ の例

命題 2.7.　$F \in \mathsf{D}^+(X)$ に対し，

$$\mathrm{R}q_{1*}\left(\left(q_2^{-1}F\right)_{Z(\gamma)}\right) \cong \phi_\gamma^{-1}\mathrm{R}\phi_{\gamma*}F$$

が成り立つ．

証明. 証明の方針は，

- 射を作って，
- 擬同形であることを示す．

$\widetilde{q_j} \colon Z(\gamma) \to X$ を q_j の制限とする．このとき，X の任意の γ 開集合 $\varOmega$ に対し，

$$\widetilde{q_1}^{-1}\varOmega = \{(x,y) \in X \times X; x \in \varOmega, y \in x+\gamma\} \subset \widetilde{q_2}^{-1}\varOmega$$

が成り立つ．

□

参考文献

[BouTVS] ブルバキ, 位相線形空間 1, 東京図書, 1968.

[B+84] Borel, *Intersection Cohomology*, Progress in Mathematics, 50, Birkhäuser, 1984.

[G58] Grauert, *On Levi's problem and the embedding of real analytic manifolds*, Ann. Math. 68, 460–472 (1958).

[GP74] Victor Guillemin, Alan Pollack, *Differential Topology*, Prentice-Hall, 1974.

[KS90] Masaki Kashiwara, Pierre Schapira, *Sheaves on Manifolds*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 292, Springer, 1990.

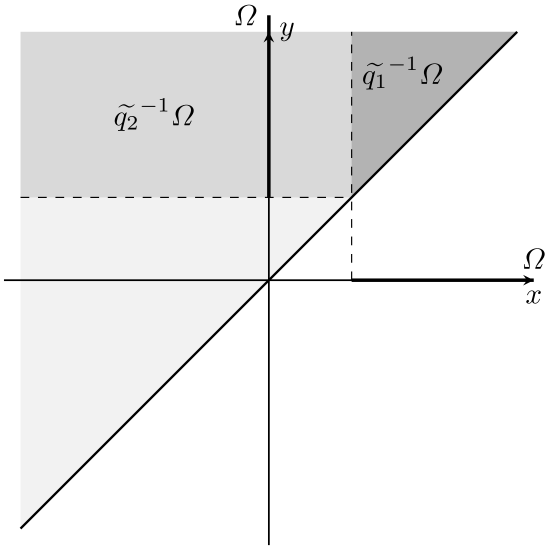

図 4　$\widetilde{q_1}^{-1}\Omega \subset \widetilde{q_2}^{-1}\Omega$

[KS06] Masaki Kashiwara, Pierre Schapira, *Categories and Sheaves*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 332, Springer, 2006.

[Le13] John M. Lee, *Introduction to Smooth Manifolds*, Second Edition, Graduate Texts in Mathematics, **218**, Springer, 2013.

[Mo76] 森本光生, 佐藤超函数入門, 共立出版, 1976.

[R55] de Rham, *Variétés différentiables*, Hermann, Paris, 1955.

[Sa59] Mikio Sato, *Theory of Hyperfunctions*, 1959–60.

[S66] Schwartz, *Théorie de distributions*, Hermann, Paris, 1966.

[Sh16] 志甫淳, 層とホモロジー代数, 共立出版, 2016.

[SP] The Stacks Project.

[Sp65] Michael Spivak, *Calculus on Manifolds*, Benjamin, 1965.

[Ike21] 池祐一, 超局所層理論概説, 2021.

[Tak17] 竹内潔, $\mathcal{D}$ 加群, 共立出版, 2017.

[Ue] 植田一石, ホモロジー的ミラー対称性, `https://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~kazushi/course/hms.pdf` 2024/02/04 最終閲覧.