simplex category（単体圏）について

Toshi2019

概要

単体圏の性質についてまとめる．

記号など

- 1 点から成る集合を $\{\mathrm{pt}\}$ で表す．
- 集合 X の基数を $|X|$ とか $\# X$ とか $\mathrm{Card}\, X$ で表す．
- 圏 $\mathcal{C}$ の始対象を $\varnothing_{\mathcal{C}}$，終対象を $\mathrm{pt}_{\mathcal{C}}$ で表す．
- 圏 $\mathcal{C}$ の対象 X から Y への射の集合を $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ や $\mathcal{C}(X, Y)$ で表す．
- 有限集合とその間の写像のなす圏を $\mathsf{Set}^{\mathsf{f}}$ で表す．

1 単体的圏

[KS06] を参考にした．

定義 1.1. 単体圏 (simplex category)[*1] $\mathbf{\Delta}$ を次で定める．

$$\mathrm{Ob}(\mathbf{\Delta}) := \left\{\text{有限全順序集合}\right\},$$
$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{\Delta}}(\sigma, \tau) := \left\{u \colon \sigma \to \tau;\ u\ \text{は順序を保つ写像}\right\}.$$

射の合成は写像の合成で定める．

$\mathbf{\Delta}$ の部分圏 $\widetilde{\mathbf{\Delta}}$ を次で定める．

$$\mathrm{Ob}\left(\widetilde{\mathbf{\Delta}}\right) := \{\sigma \in \mathbf{\Delta}; \sigma \neq \varnothing\},$$
$$\mathrm{Hom}_{\widetilde{\mathbf{\Delta}}}(\sigma, \tau) := \left\{u \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{\Delta}}(\sigma, \tau);\ u\ \text{は最大元と最小元を保つ}\right\}.$$

有限全順序集合 $[n, m]$ を $\{k \in \mathbf{Z}; n \leqq k \leqq m\}$ で定める．$[0, n]$ をたんに $[n]$ とかくことが多い．

[*1] [KS06] では，$\mathbf{\Delta}$ のことを simplicial category（単体的圏）と呼んでいるが，[Ri16] とか [RV22] ではこう呼んでいたのでそちらに合わせる．[Lu09] では別の概念を表すのに simplicial category を使っていたので，衝突しないようにする意図もある．

以下単体圏の性質を述べる．

命題 1.2. うめこみ関手 $\iota\colon \mathbf{\Delta} \hookrightarrow \mathsf{Set}^{\mathsf{f}}$ は半充満かつ忠実である．

注意 1.3. 関手 $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ が**半充満** (half-full) であるとは，任意の対象 $X, Y \in \mathcal{C}$ に対し，$F(X) \cong F(Y)$ ならば，X と Y の間の同型が存在することをいう．ただし，$\mathcal{C}'$ における同型 $F(X) \xrightarrow{\sim} F(Y)$ は $\mathcal{C}$ における同型 $X \to Y$ から来るものでなくともよい．

$\mathcal{C}$ の部分圏 $\mathcal{C}'$ が半充満であるとは，うめこみ関手 $\mathcal{C} \hookrightarrow \mathcal{C}'$ が半充満であることをいう．

命題 1.2 の証明 まず ι が半充満であることを示す．$\sigma, \tau \in \mathbf{\Delta}$ を $\iota(\sigma) \cong \iota(\tau)$ をみたすものとすると，$\#\sigma = \#\tau$ である． □

参考文献

[KS06] Masaki Kashiwara, Pierre Schapira, *Categories and Sheaves*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 332, Springer, 2006.

[La21] Markus Land, *Introduction to Infinity-Categories*, Compact Textbooks in Mathematics, Birkhäuser Cham, 2021.

[Lu09] Jacob Lurie, *Higher Topos Theory*, Annals of Mathematics Studies 170, Princeton University Press, 2009.

[Ri16] Emily Riehl, *Category Theory in Context*, Dover Publications, 2016.

[RV22] Emily Riehl, Dominic Verity, *Elements of* ∞*-Category Theory*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics (194) Cambridge University Press, 2022.