

# Poincaré-Verdier 双対性

大柴寿浩

## はじめに

$X, Y$  を局所コンパクト空間とし,  $f: Y \rightarrow X$  を連続写像とする.  $A$  を大域次元が有限な可換環とする.  $F \in \mathbf{D}^+(A_X), G \in \mathbf{D}^+(A_Y)$  とする.

$Rf_!: \mathbf{D}^+(A_Y) \rightarrow \mathbf{D}^+(A_X)$  の右随伴関手  $f^!: \mathbf{D}^+(A_X) \rightarrow \mathbf{D}^+(A_Y)$  を構成するのが目標.

## 1 例

随伴を仮定した場合, 層を具体的に設定するとどのような結果が従うか見てみる.  $X = \{\text{pt}\}$ ,  $F = A_{\{\text{pt}\}}, G = A_Y$  のとき,

$$\begin{aligned} \mathrm{RHom}_{A_X}(\mathrm{Ra}_{Y!}A_Y, A) &= \mathrm{RHom}_{A_Y}(A_Y, a_Y^!A) \\ &= \mathrm{R}\Gamma(Y; \mathrm{R}\mathcal{H}om_{A_Y}(A_Y, a_Y^!A)) \\ &= \mathrm{R}\Gamma(Y; a_Y^!A) \end{aligned}$$

である.  $\omega_Y: a_Y^!A$  とおく. 開集合  $U \subset Y$  に対し,

$$\begin{aligned} \mathrm{R}\Gamma(U; \omega_Y) &\cong \mathrm{R}\Gamma(U; \mathrm{R}\mathcal{H}om_A(A_U, a_Y^!A)) \\ &\cong \mathrm{RHom}_{A_U}(A_U, A) \end{aligned}$$

なので,

$$\begin{aligned} \mathrm{RHom}_{A_U}(A_U, a_Y^!A) &\cong \mathrm{RHom}_A(\mathrm{R}\Gamma_c(Y; A_U), A) \\ &\cong \mathrm{RHom}_A(\mathrm{R}\Gamma_c(U; A_U), A). \end{aligned}$$

ここで,  $U$  が  $\mathbf{R}^n$  と同相であるとするとき,

$$\mathrm{R}\Gamma_c(U; A_U) \cong A[-n]$$

したがって,

$$\cong \mathrm{RHom}_A(\mathrm{R}\Gamma_c(U; A_U), A) \cong A[n]$$

である. つまり,  $\omega_Y = a_Y^!A$  は

$$H^k(\omega_Y) = \begin{cases} 0 & (k \neq -n) \\ \text{rank} = 1 \text{ の局所定数層} & (k = -n) \end{cases}$$

## 2 構成

### 2.1 構成

$X, Y$  を局所コンパクト空間とし,  $f: Y \rightarrow X$  を連続写像とする.  $A$  を大域次元が有限な可換環とする.  $F \in D^+(A_X), G \in D^+(A_Y)$  とする.

$Rf_!: D^+(A_Y) \rightarrow D^+(A_X)$  の右随伴関手  $f^!: D^+(A_X) \rightarrow D^+(A_Y)$  を構成する. まず, 開集合  $V \subset Y$  に対し,  $f^!F$  の  $V$  上の切断に関する条件を見てみる.

$$R\Gamma(V; f^!F) = R\mathrm{Hom}_{A_Y}(A_V, f^!F) = R\mathrm{Hom}_{A_X}(Rf_!A_V, F)$$

となることから,  $f^!F$  は  $V \mapsto R\mathrm{Hom}_{A_X}(Rf_!A_V, F)$  という対応でなければならない.  $Rf_!$  を計算するには  $c$  柔軟分解  $A_V \sim K$  を取ればよく, さらに  $F$  が入射的であれば,

$$R\mathrm{Hom}_{A_X}(Rf_!A_V, F) = \mathrm{Hom}_{A_X}(f_!K_V, F)$$

となって, 結局

$$R\Gamma(V; f^!F) = \mathrm{Hom}_{A_X}(f_!K_V, F)$$

とできる.

#### ■ $f$ に関する仮定

**定義 2.1.**  $Y$  上の層  $G$  が  $f$  柔軟であるとは, 各点  $x \in X$  に対し,  $G|_{f^{-1}(x)}$  が  $c$  柔軟であることをいう.

$G$  が  $f$  柔軟であることと, 任意の開部分集合  $V \subset Y$  と  $j \neq 0$  に対し,  $R^j f_!G_V = 0$  となることと同値である.

次を仮定する.

$$f_!: \mathrm{Mod}(\mathbf{Z}_Y) \rightarrow \mathrm{Mod}(\mathbf{Z}_X) \text{ のコホモロジー次元は有限である.} \quad (2.1)$$

つまり, 整数  $r \geq 0$  で, 全ての  $j > r$  に対し  $R^j f_! = 0$  となるものが存在する. (2.1) は次の条件と同値である.

$$\begin{cases} \text{任意の } G \in \mathrm{Sh}(Y) \text{ に対し, 完全列} \\ 0 \rightarrow G \rightarrow G^0 \rightarrow \cdots \rightarrow G^r \rightarrow 0 \\ \text{で, どの } G^j \text{ も } f \text{ 柔軟であるものが存在する.} \end{cases} \quad (2.2)$$

$$\begin{cases} \text{完全列 } G^0 \rightarrow \cdots \rightarrow G^r \rightarrow 0 \\ \text{において, } j < r \text{ に対し } G^j \text{ が } f \text{ 柔軟ならば,} \\ G^r \text{ が } f \text{ 柔軟となる.} \end{cases} \quad (2.3)$$

$f_!$  のコホモロジー次元が  $\leq r$  となるのは, 任意の  $x \in X$  に対し,  $\Gamma_c(f^{-1}(x); \cdot)$  のコホモロジー次元が  $\leq r$  となるときである. 実際,  $f_!|_{f^{-1}(x)}F = \Gamma_c(f^{-1}(x); F) = 0$  となるので.

■構成 以上の仮定は,

$$\mathrm{R}\Gamma(V; f^!F) = \mathrm{Hom}_{A_X}(f_!K_V, F)$$

の構成をするためだった.  $f_!K_V$  の分解をしたくて, その長さが有限になるという仮定である.

さて,  $K$  を  $\mathbf{Z}_Y$  加群,  $F$  を  $A_X$  加群とする. このとき,  $A$  加群の前層  $f_K^!F$  を次で定める.  
 $V \in \mathrm{Open}(Y)$  に対し,

$$(f_K^!F)(V) := \mathrm{Hom}_{A_X} \left( f_! \left( A_Y \otimes_{\mathbf{Z}_Y} K_V \right), F \right)$$

とする. 制限射は  $K_{V'} \rightarrow K_V$  から引き起こされるもの.

補題 2.2.  $K$  を平坦かつ  $f$  柔軟な  $\mathbf{Z}_Y$  加群とする.

- (i)  $Y$  上の任意の層  $G$  に対し  $G \otimes_{\mathbf{Z}_Y} K$  は  $f$  柔軟である.
- (ii)  $G \mapsto f_!(G \otimes_{\mathbf{Z}_Y} K)$  は  $\mathrm{Mod}(\mathbf{Z}_Y)$  から  $\mathrm{Mod}(\mathbf{Z}_X)$  への完全関手である.

証明. (i)  $Y$  上の任意の層  $G$  に対し, [KS90, Prop.2.4.12] の証明から, 分解

$$\rightarrow G^{-r} \rightarrow \cdots \rightarrow G^0 \rightarrow G \rightarrow 0$$

で, 各  $G^j$  が  $\mathbf{Z}_V$  の直和となるものが存在する.

復習:  $G \in \mathrm{Mod}(\mathbf{Z}_Y)$  に対し,

$$\mathfrak{S} := \{(V, s); V \in \mathrm{Open}(Y), s \in \Gamma(V; G)\}$$

とし, 各  $(V, s) \in \mathfrak{S}$  に対し,  $\mathbf{Z}_Y(V, s) := \mathbf{Z}_V \in \mathrm{Mod}(\mathbf{Z}_Y)$  とおき,  $P := \bigoplus_{(V, s) \in \mathfrak{S}} \mathbf{Z}_Y(V, s)$  とおく.  $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}_Y}(\mathbf{Z}_V, G) \cong \Gamma(V; G)$  より, 各  $\varphi: \mathbf{Z}_V \rightarrow G$  に対し,  $s \in G(V)$  がただ一つある. これにより全射  $P \twoheadrightarrow G$  が得られる. 各  $y \in Y$  に対し,  $P_y = \bigoplus_{(V, s), y \in V} \mathbf{Z}$  である.  
(復習終わり)

$\mathrm{Ker}(P \rightarrow G)$  に対し, 同様に  $\mathbf{Z}_Y$  の直和からの全射が構成できる. これを繰り返して, 分解

$$\rightarrow G^{-r} \rightarrow \cdots \rightarrow G^0 \rightarrow G \rightarrow 0$$

で,  $\mathbf{Z}_V$  の直和となるものが得られる. よって, どの  $j$  についても,  $G^j \otimes_{\mathbf{Z}_Y} K$  は  $f$  柔軟である. 実際,  $(\bigoplus \mathbf{Z}_V) \otimes_{\mathbf{Z}_Y} K \cong \bigoplus (\mathbf{Z}_V \otimes_{\mathbf{Z}_Y} K) \cong \bigoplus K_V$  であり, 茎ごとに  $c$  柔軟なので. この分解に  $- \otimes_{\mathbf{Z}_Y} K$  をあてた

$$\rightarrow G^{-r} \otimes_{\mathbf{Z}_Y} K \rightarrow \cdots \rightarrow G^0 \otimes_{\mathbf{Z}_Y} K \rightarrow G \otimes_{\mathbf{Z}_Y} K \rightarrow 0$$

は  $K$  が平坦なので完全である. したがって,  $r$  を十分大きくとれば,  $f_!$  のコホモロジー次元が有限であるという仮定から, (2.3) を用いて,  $G \otimes_{\mathbf{Z}_Y} K$  も  $f$  柔軟であることが従う.

(ii)  $\mathrm{Sh}(Y)$  の完全列

$$0 \rightarrow G_1 \rightarrow G_2 \rightarrow G_3 \rightarrow 0$$

に対し,

$$0 \rightarrow G_1 \otimes_{\mathbf{Z}_Y} K \rightarrow G_2 \otimes_{\mathbf{Z}_Y} K \rightarrow G_3 \otimes_{\mathbf{Z}_Y} K \rightarrow 0$$

は  $f$  柔軟である. いま,

$$0 \rightarrow f_!(G_1 \otimes_{\mathbf{Z}_Y} K) \rightarrow f_!(G_2 \otimes_{\mathbf{Z}_Y} K) \rightarrow f_!(G_3 \otimes_{\mathbf{Z}_Y} K) \rightarrow 0$$

のストーク

$$0 \rightarrow (f_!(G_1 \otimes_{\mathbf{Z}_Y} K))_x \rightarrow (f_!(G_2 \otimes_{\mathbf{Z}_Y} K))_x \rightarrow (f_!(G_3 \otimes_{\mathbf{Z}_Y} K))_x \rightarrow 0 \quad (\natural)$$

を考えると, これらは,  $W = f^{-1}(x)$  とおくとき

$$0 \rightarrow \Gamma_c(W; (G_1 \otimes_{\mathbf{Z}_Y} K)|_W) \rightarrow \Gamma_c(W; (G_2 \otimes_{\mathbf{Z}_Y} K)|_W) \rightarrow \Gamma_c(W; (G_3 \otimes_{\mathbf{Z}_Y} K)|_W) \rightarrow 0$$

である.  $G_j \otimes_{\mathbf{Z}_Y} K$  たちは  $f$  柔軟なので, これらは  $W$  で  $c$  柔軟であり,  $f_!$  が完全であることから,  $(\natural)$  は完全である. よって, もとの層の系列も完全である.  $\square$

**補題 2.3.**  $K$  を平坦かつ  $f$  柔軟な  $\mathbf{Z}_Y$  加群とし,  $F$  を  $A_X$  入射加群とする.

(i) 前層  $f_K^! F$  は層である.

(ii)  $G \in \text{Mod}(A_Y)$  に関して関手的な自然同型

$$\text{Hom}_{A_X}(f_!(G \otimes_{\mathbf{Z}_Y} K), F) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{A_Y}(G, f_K^! F)$$

が存在する. また,  $f_K^! F$  は  $A_Y$  入射加群である.

**証明.** (i)  $- \otimes_{\mathbf{Z}_Y} K$  をたんに  $- \otimes K$  で表す.  $V$  を  $Y$  の開集合とし,  $(V_j)_j$  を  $V$  の開被覆とする.

$$\bigoplus_{j,k} A_{V_j \cap V_k} \rightarrow \bigoplus_j A_{V_j} \rightarrow A_V \rightarrow 0$$

は完全である.\*<sup>1</sup>これに完全関手  $f_!(- \otimes K)$  をあてて完全列

$$\bigoplus_{j,k} f_!(A_{V_j \cap V_k} \otimes K) \rightarrow \bigoplus_j f_!(A_{V_j} \otimes K) \rightarrow f_!(A_V \otimes K) \rightarrow 0$$

を得る. さらに左完全な反変関手  $\text{Hom}_{A_X}(-, F)$  をあてて, 完全列

$$0 \rightarrow \text{Hom}_{A_X}(f_!(A_V \otimes K), F) \rightarrow \text{Hom}_{A_X}\left(\bigoplus_j f_!(A_{V_j} \otimes K), F\right) \rightarrow \text{Hom}_{A_X}\left(\bigoplus_{j,k} f_!(A_{V_j \cap V_k} \otimes K), F\right)$$

を得る. これは極限を交換すれば

$$0 \rightarrow f_K^! F(V) \rightarrow \prod_j f_K^! F(V_j) \rightarrow \prod_{j,k} f_K^! F(V_j \cap V_k)$$

---

\*<sup>1</sup>開集合は小さい方から大きい方へ随伴射が生える.  $A_{jk} \rightarrow A_j, A_k$  はそれぞれ  $s_{jk} \mapsto s_{jk}$  と  $s_{jk} \mapsto -s_{jk}$  で定める.  $A_{V_j}$  の台は  $V$  に含まれるので, 各切断の和の台も被覆の条件から  $V$  に含まれるので全射の方も成り立つ.

であり,  $f_K^! F$  が層であることが示された.

(ii) アーベル群の射

$$\alpha(G): \operatorname{Hom}_{A_X}(f_!(G \otimes K), F) \rightarrow \operatorname{Hom}_{A_Y}(G, f_K^! F)$$

を定める.  $\phi \in \operatorname{Hom}_{A_X}(f_!(G \otimes K), F)$  とする.  $V \in \operatorname{Open}(Y)$  に対し, 次  $A_X$  加群の射がある.

$$\begin{aligned} G(V) \otimes f_!(A_Y \otimes K_V) &\xrightarrow{\quad ? \quad} f_!(G \otimes K_V) \\ &\xrightarrow[\text{adj.}]{\quad} f_!(G \otimes K) \\ &\xrightarrow[\phi]{\quad} F. \end{aligned}$$

よって,  $\operatorname{Hom} \cdot$  テンソル随伴から,  $G(V)$  から  $f_K^! F(V) = \operatorname{Hom}(f_!(A_Y \otimes K_V), F)$  への射を得る. この射は  $V \in \operatorname{Open}(Y)$  について関手的. よって,  $\alpha(G)(\phi) \in \operatorname{Hom}_{A_Y}(G, f_K^! F)$ .

$\alpha(G)$  が同型であることを

- (a)  $G = A_V$  の場合,
- (b)  $G = \bigoplus_j A_{V_j}$  の場合,
- (c) 一般の場合

の 3 段階で示す.

(a)  $G = A_V$  のとき,

$$\begin{aligned} \operatorname{Hom}_{A_X}(f_!(G \otimes K), F) &\cong \operatorname{Hom}_{A_X}(f_!(A_V \otimes K), F) \\ &\cong (f_K^! F)(V) \\ &\cong \operatorname{Hom}_{A_Y}(A_V, f_K^! F) \\ &= \operatorname{Hom}_{A_Y}(G, f_K^! F) \end{aligned}$$

なので同型.

(b)  $G = \bigoplus_j A_{V_j}$  のとき,  $\alpha(G) = \prod_j \alpha(A_{V_j})$  なので, (a) の結果からこれも同型.

(c)  $G$  が一般のとき, [KS90, Prop.2.4.12] より, 完全列

$$0 \rightarrow G'' \rightarrow G' \rightarrow G \rightarrow 0$$

で,  $G' \cong \bigoplus_j A_{V_j}$  となるものがある. ( $G''$  は全射  $G' \rightarrow G$  の核として得られる.) よって, (b) より  $\alpha(G')$  は同型. 次の可換図式を考える.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \operatorname{Hom}(f_!(G \otimes K), F) & \longrightarrow & \operatorname{Hom}(f_!(G' \otimes K), F) & \longrightarrow & \operatorname{Hom}(f_!(G'' \otimes K), F) \\ & & \downarrow \alpha(G) & & \downarrow \alpha(G') & & \downarrow \alpha(G'') \\ 0 & \longrightarrow & \operatorname{Hom}(G, f_K^! F) & \longrightarrow & \operatorname{Hom}(G', f_K^! F) & \longrightarrow & \operatorname{Hom}(G'', f_K^! F). \end{array}$$

補題 2.2 より, 2 つの行はどちらも完全.  $\alpha(G')$  は同型なので, 左の可換性から  $\alpha(G)$  は単射. 同じことを  $\alpha(G'')$  にやれば  $\alpha(G'')$  は単射. よって, 五項補題から  $\alpha(G)$  は同型. (左に 0 の同型を追加する.)

$\mathrm{Hom}_{A_Y}(-, f_K^! F)$  が完全関手であることから,  $f_K^! F$  が入射加群であることもわかる.  $\square$

$f_!$  のコホモロジー次元を  $\leq r$  とする.

**補題 2.4.**  $\mathbf{Z}_Y$  に対し, 分解  $0 \rightarrow \mathbf{Z}_Y \rightarrow K^0 \rightarrow \cdots \rightarrow K^r \rightarrow 0$  で, 各  $K^j$  が平坦かつ  $f$  柔軟な  $\mathbf{Z}_Y$  加群となるものが存在する.

**証明.** 入射分解と同じように分解を構成する.

**入射分解の復習**  $\hat{Y} := (Y, P(Y))$  を  $Y$  に離散位相を入れた空間とし,  $p: \hat{Y} \rightarrow Y$  を自然な連続写像とする.  $F$  を  $\mathbf{Z}_Y$  加群とする.  $p^{-1}F \in \mathrm{Mod}(\mathbf{Z}_{\hat{Y}})$  に対し, 入射加群  $I \in \mathrm{Mod}(\mathbf{Z}_{\hat{Y}})$  への単射

$$0 \rightarrow p^{-1}F \rightarrow I$$

があったとする. この  $I$  と単射に対し, 左完全関手  $p_*$  を適用すると,  $0 \rightarrow F \rightarrow p_*I$  は  $\mathrm{Mod}(\mathbf{Z}_Y)$  における完全列である. (ここに  $p_*p^{-1}F = (\mathrm{id}_Y)_*(\mathrm{id}_Y)^{-1} = F$  である.)  $p_*$  は入射的対象を保つので,  $p_*I$  は入射加群である.

最初の完全列を構成する.  $F' \in \mathrm{Mod}(\mathbf{Z}_{\hat{Y}})$  とすると, 各点  $y \in Y$  に対し,  $\mathrm{Mod}(\mathbf{Z}_{\hat{Y}, y}) = \mathrm{Mod}(\mathbf{Z})$  における完全列

$$0 \rightarrow F'_y \rightarrow I_y$$

が存在する. ( $\mathrm{Mod}(\mathbf{Z})$  は充分入射的対象を持つのだった.) 単射の積は単射なので,  $Y$  全体で積を取った

$$0 \rightarrow \prod_{y \in Y} F'_y \rightarrow \prod_{y \in Y} I_y$$

も完全である. したがって,  $\mathrm{Mod}(\mathbf{Z}_{\hat{Y}})$  での入射加群  $I = \prod_{y \in Y} I_y$  への単射  $F \rightarrow I$  が得られた.

この操作を余核に対して繰り返し行えば,  $F \in \mathrm{Mod}(\mathbf{Z}_Y)$  の入射分解が得られる.

(復習終わり)

$\mathbf{Z}_Y$  の入射分解を

$$0 \rightarrow \mathbf{Z}_Y \rightarrow K^0 \rightarrow \cdots \rightarrow K^r \rightarrow 0$$

とする. 入射加群は  $c$  柔軟であり, したがって  $f$  柔軟である. したがって, この分解は  $c$  柔軟分解である.

各項の平坦性を見る.  $\square$

## 参考文献

[KS90] Masaki Kashiwara, Pierre Schapira, *Sheaves on Manifolds*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 292, Springer, 1990.