

# 複素トーラスと複素射影直線

大柴 寿浩

## 概要

本レポートは4章からなる。第1章では、複素多様体とリーマン面を定義し、その間の射を定義する。第2章では、リーマン面として自明でないもののうち、最も簡単な例である複素射影直線を定義する。第3章では、その次に簡単なリーマン面である複素トーラス（楕円曲線）を定義する。ガウス平面上定義された有理型関数のうち、実数上一次独立な2つの周期を持つ関数を楕円関数というが、これは複素トーラス上で定義された有理型関数というのと同じことである。この事実を示したのち、楕円関数の具体例として、Weierstrass の  $\wp$  関数を定義する。第4章では、まず、リーマン面の間の射が与えられたとき、その分岐点と写像度が定まることを（紙面の都合上証明抜きで）述べる。最後に Weierstrass の  $\wp$  関数を用いて、複素トーラスから複素射影直線への正則射を定義する。これが4点で分岐する2重被覆であることを示すことが目的である。

## 凡例

次の記号・用語について断りなく用いることがある．

- 添字： $I$  を添字集合とする何らかの族  $(x_i)_{i \in I}$  を  $(x_i)_i$  や  $(x_i)$  のように略記することがある．
- 位相空間  $X$  に対し  $\text{Aut}_{\text{Top}}(X) := \{X \text{ 上の自己同相写像} \}$  とかく．
- $\mathbf{C}$  内の，点  $\alpha$  を中心とする半径  $r$  の開円板を  $D(\alpha; r) := \{z \in \mathbf{C}; |z - \alpha| < r\}$  で表す．
- 領域：位相空間  $X$  の部分集合  $U$  が空でない連結開集合であるとき， $U$  を領域という．

## 1 リーマン面

### 1.1 複素多様体とリーマン面

$\mathbf{C}^n$  での座標が  $z = (z^1, \dots, z^n)$  であるとき，複素数空間  $\mathbf{C}^n$  を  $\mathbf{C}_z^n$  とか  $\mathbf{C}_{(z^1, \dots, z^n)}^n$  とかく． $U$  を  $\mathbf{C}^n$  の空でない開集合とする．このとき， $U$  で定義された複素数値関数  $f$  は標準座標を用いて  $f(z) = f(z^1, \dots, z^n)$  とかける．

$f$  が  $U$  で正則であるとは， $f(z)$  が  $U$  で連続であり，各変数  $z^j$  ( $j = 1, \dots, n$ ) について正則であることをいう．

**定義 1.1** ( $n$  次元複素多様体，リーマン面)． $X$  を位相空間とする． $(\varphi_i: U_i \rightarrow \mathcal{U}_i)_{i \in I}$  を写像の族とする．このとき，対  $(X, (\varphi_i)_i)$  が次の条件 (1)–(4) をみたすとき， $X$  を台集合とし  $(\varphi_i)_i$  を座標近傍系とする  $n$  次元複素多様体 ( $n$ -dimensional complex manifold) という．

- (1)  $X$  は空集合でなく，第 2 可算公理を満たす連結なハウスドルフ空間である．
- (2) すべての  $i \in I$  に対して  $U_i$  は  $X$  の空でない開集合であり， $(U_i)_i$  は  $X$  の開被覆である．
- (3) すべての  $i \in I$  に対して， $\mathcal{U}_i$  は  $\mathbf{C}_{(z^1, \dots, z^n)}^n$  の空でない開集合であり  $\varphi_i: U_i \rightarrow \mathcal{U}_i$  は同相である．
- (4) 任意の  $i \neq j \in I$  で  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$  をみたすものに対して  $\mathcal{U}_{ij} := \varphi_j(U_i \cap U_j) \subset \mathcal{U}_j$  とおくと， $\varphi_{ij} := \varphi_i \circ \varphi_j^{-1}|_{\mathcal{U}_{ij}}: \mathcal{U}_{ij} \rightarrow \mathcal{U}_i$  は正則である．

とくに，1 次元複素多様体をリーマン面 (Riemann surface) という．

**例 1.2. 1.**  $\mathbf{C}^n$  の領域  $U$  は  $(\text{id}_U: U \rightarrow U)$  を座標近傍系とする  $n$  次元複素多様体である．

2.  $X = (X, (\varphi_i: U_i \rightarrow \mathcal{U}_i)_{i \in I})$  を  $n$  次元複素多様体とし， $U$  を  $X$  の領域とする． $J := \{i \in I; U \cap U_i \neq \emptyset\}$  とおく． $U$  は  $(\varphi_j|_{U \cap U_j})_{j \in J}$  を座標近傍系とする  $n$  次元複素多様体になる．この多様体  $U$  を開部分 (複素) 多様体という．

台空間がコンパクトなリーマン面をとくにコンパクトリーマン面とか閉リーマン面という．例 1.2.2 のように，リーマン面  $X$  の領域  $U$  はリーマン面になる．この  $U$  を  $X$  の開リーマン面と

いう。

## 1.2 複素多様体とリーマン面の射

**定義 1.3.**  $X$  を  $n$  次元複素多様体,  $Y$  を  $m$  次元複素多様体とする.  $f: X \rightarrow Y$  を  $X$  から  $Y$  への連続写像とする.

1.  $P$  を  $X$  の点とする.  $P, f(P)$  の近傍での  $f$  のある座標表示  $w_j = f_{ij}(z_i)$ , あるいは  $(w_j^1, \dots, w_j^m) = (f_{ij}^1(z_i^1, \dots, z_i^n), \dots, f_{ij}^m(z_i^1, \dots, z_i^n))$  が  $z_i(P) = (z_i^1(P), \dots, z_i^n(P))$  で正則であるとき,  $f$  は  $P$  で正則であるという.

2.  $f$  がすべての点  $P \in X$  で正則であるとき  $f$  を正則写像 (holomorphic mapping) とか正則射 (holomorphism) という. また  $\mathbf{C}$  への正則写像を正則関数 (holomorphic function) という.

$X$  と  $Y$  がともにリーマン面であるとき,  $f$  をリーマン面の射 (morphism) ともいう.

3.  $U$  を  $X$  の空でない開集合とする.  $U$  上の関数  $f$  は  $U$  の各連結成分上正則であるとき  $U$  上の正則関数という. ここで, 複素多様体の領域は例 1.2.2 の方法で複素多様体とみなしている.

**定義 1.4.**  $X$  をリーマン面とし,  $U$  を  $X$  の領域,  $S$  を  $X$  の離散閉部分集合とする.  $S$  の各点でしか極をもたない  $U - S$  上の正則関数を有理型関数 (meromorphic function) という.

リーマン面  $X$  上の有理型関数は  $X$  から  $\mathbf{P}^1$  へのリーマン面の射と見做せる.

**定義 1.5.**  $X$  と  $Y$  を  $n$  次元複素多様体とする.  $f: X \rightarrow Y$  を正則写像とする. 正則写像  $g: Y \rightarrow X$  で  $g \circ f = \text{id}_X$  かつ  $f \circ g = \text{id}_Y$  をみたすものが存在するとき,  $f$  を双正則写像 (biholomorphic mapping) という.  $X$  から  $Y$  への双正則写像が存在するとき,  $X$  と  $Y$  は同形 (isomorphic) であるという.

## 2 複素射影直線

### 2.1 複素射影直線の定義

$\mathbf{C}^2$  から原点  $0 = (0, 0)$  を除いた集合  $\mathbf{C}^2 - \{0\}$  の点  $(a_0, a_1), (b_0, b_1)$  に対し次の関係を考える.

$$(a_0, a_1) \sim (b_0, b_1) \iff (a_0, a_1) = c \cdot (b_0, b_1) \text{ となる複素数 } c \neq 0 \text{ が存在する.} \quad (2.1)$$

これは同値関係である.  $(a_0, a_1)$  の同値類  $\{c \cdot (a_0, a_1); c \in \mathbf{C} - \{0\}\}$  を  $[a_0: a_1]$  とかく.

**定義 2.1.**  $\mathbf{P}^1 := (\mathbf{C}^2 - \{0\}) / \sim$  を複素射影直線 (complex projective line) という.

**定義 2.2.** 次の写像の組を考える.  $\mathbf{C}^2 - \{0\} \xrightarrow[\text{pr}_2=X_1]{\text{pr}_1=X_0} \mathbf{C}; (a_0, a_1) \mapsto a_0, a_1$ . この組を  $\mathbf{C}^2 - \{0\}$  の標準座標,  $\mathbf{P}^1$  の同次座標という.

$\mathbf{P}^1$  は商写像  $\pi: \mathbf{C}^2 - \{0\} \rightarrow (\mathbf{C}^2 - \{0\}) / \sim$  による商位相により位相空間になる. この定義か

ら  $\pi$  の連続性が従う.

$\mathbf{P}^1$  の位相空間としての性質を調べるために, 次の部分集合を定義する.

$$U_0 = \{[a_0 : a_1] \in \mathbf{P}^1; a_0 \neq 0\}, \quad U_1 = \{[a_0 : a_1] \in \mathbf{P}^1; a_1 \neq 0\}.$$

このとき次が成り立つ.

$$U_0 \cup U_1 = \mathbf{P}^1, \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} U_0 \cap U_1 &= \{[a_0 : a_1] \in \mathbf{P}^1; a_0, a_1 \neq 0\} \\ &= U_0 - \{[1 : 0]\} \\ &= U_1 - \{[0 : 1]\}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

**補題 2.3.** 1. 商写像  $\pi: \mathbf{C}^2 - \{0\} \rightarrow (\mathbf{C}^2 - \{0\})/\sim$  は開写像である.

2.  $U_0$  と  $U_1$  は  $\mathbf{P}^1$  の開集合であり,

$$\begin{aligned} \varphi_0: U_0 &\xrightarrow{\sim} \mathbf{C}; [a_0 : a_1] \mapsto a_1/a_0, \\ \varphi_1: U_1 &\xrightarrow{\sim} \mathbf{C}; [a_0 : a_1] \mapsto a_0/a_1 \end{aligned}$$

はともに同相写像である.

3. 任意の  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in GL(2, \mathbf{C})$  は自己同相写像

$$p_A: \mathbf{P}^1 \xrightarrow{\sim} \mathbf{P}^1; \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix}$$

を引き起こす.

4.  $\mathbf{P}^1$  は第 2 可算公理をみたす連結なコンパクトハウスドルフ空間である.

**証明.** 1.  $U$  を  $\mathbf{C}^2 - \{0\}$  の開集合とする.  $\pi(U)$  が  $\mathbf{P}^1$  の開集合であること, すなわち  $\pi^{-1}(\pi(U))$  が  $\mathbf{C}^2 - \{0\}$  の開集合であることを示す. いま, 任意の開集合  $U \subset \mathbf{C}^2 - \{0\}$  に対し, 複素数  $c \neq 0$  を用いて

$$cU = \{(ca_0, ca_1); (a_0, a_1) \in U\}$$

とおくと,  $cU$  は  $\mathbf{C}^2 - \{0\}$  の開集合であり,

$$\pi^{-1}(\pi(U)) = \bigcup_{c \in \mathbf{C} - \{0\}} cU$$

なので,  $\pi^{-1}(\pi(U))$  は  $\mathbf{C}^2 - \{0\}$  の開集合である.

2. まず  $U_0, U_1$  が  $\mathbf{P}^1$  の開集合であることを示す.  $U_0 = \{[a_0 : a_1]; a_0 \neq 0\}$  は  $V_0 = \{(a_0, a_1); a_0 \neq 0\}$  の  $\pi$  による像であり,  $V_0$  は  $\mathbf{C}^2 - \{0\}$  の開集合であるから,  $U_0$  は  $\mathbf{P}^1$  の開集合である. 同様に  $U_1$  も  $\mathbf{P}^1$  の開集合である.

$\varphi_0: U_0 \rightarrow \mathbf{C}$  が連続であることを示す.  $V$  を  $\mathbf{C}$  の開集合とする.  $V = \varphi_0 \circ \pi(V_0) (= \widetilde{\varphi_0}(V_0)$  とおく) である.  $\widetilde{\varphi_0}^{-1}(V) = \pi^{-1}(\varphi_0^{-1}(V))$  は  $V_0$  の開集合である. したがって, これは  $\mathbf{C}^2 - \{0\}$  の開集合であり, 商位相の定義から  $\varphi_0^{-1}(V) \subset U_0$  は開集合である.

$\varphi_0$  が同相であることを示す.  $\psi_0: \mathbf{C} \rightarrow U_0$  を  $\psi_0(z) = [1: z]$  で定める. このとき  $\psi_0 \circ \varphi_0([a_0: a_1]) = \psi_0(a_1/a_0) = [1: a_1/a_0] = [a_0: a_1]$  である. また  $\varphi_0 \circ \psi_0(z) = \varphi_0([1: z]) = z/1 = z$ . したがって,  $\psi_0 \circ \varphi_0 = \text{id}_{U_0}$  かつ  $\varphi_0 \circ \psi_0 = \text{id}_{\mathbf{C}}$  であり,  $\psi_0 = \varphi_0^{-1}$  である.  $\psi_0 = \varphi_0^{-1}$  は自然な単射  $\mathbf{C} \hookrightarrow \mathbf{C}^2 - \{0\}$  と  $\pi$  の合成であり, これらは連続なので, その合成である  $\psi_0$  も連続である. 以上より  $\varphi_0$  は同相である.

3.  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  を可逆な行列とする.  $A$  を自己同形  $\mathbf{C}^2 \rightarrow \mathbf{C}^2$  とみたとき, それを  $\mathbf{C}^2 - \{0\}$  に制限した  $A|_{\mathbf{C}^2 - \{0\}}: \mathbf{C}^2 - \{0\} \rightarrow \mathbf{C}^2 - \{0\}$  は自己同相であり, 逆写像は  $A^{-1}|_{\mathbf{C}^2 - \{0\}}$  で与えられる. 一般に  $A(cx) = cAx$  なので,  $A$  から可逆な写像  $p_A$  が不備なく定まり, 逆写像は  $p_{A^{-1}}$  で与えられる.

$p_A$  が連続であることを示す.  $V$  を  $\mathbf{P}^1$  の開集合とする. 次の図式が可換であり,  $\pi$  と  $A$  は連続写像であるから,  $\pi^{-1}(p_A^{-1}(V)) = A^{-1}(\pi^{-1}(V))$  は  $\mathbf{C}^2 - \{0\}$  の開集合である.

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{C}^2 - \{0\} & \xrightarrow{A} & \mathbf{C}^2 - \{0\} \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ \mathbf{P}^1 & \xrightarrow{p_A} & \mathbf{P}^1 \end{array}$$

$\mathbf{P}^1$  の商位相の定義より  $\pi^{-1}(V)$  は  $\mathbf{C}^2 - \{0\}$  の開集合である. したがって  $p_A$  で連続である.  $p_A^{-1}$  が連続であることも同様である.

4. 第 2 可算公理をみたすこと:

$$\mathbf{Q}(\sqrt{-1}) = \{a + b\sqrt{-1}; a, b \in \mathbf{Q}\}$$

に属する点  $z$  と有理数  $p$  に対し  $U_p(z)$  を考えると  $(U_p(z))_{p \in \mathbf{Q}, z \in \mathbf{C}}$  は  $\mathbf{C}$  の位相空間としての基底になる. したがって  $\mathbf{C}$  は第 2 可算公理をみたす. 直積集合  $\mathbf{C}^2$  も第 2 可算であるから, 1 点を除いた  $\mathbf{C}^2 - \{0\}$  もそうであり, これに全射  $\pi$  を適用した  $\mathbf{P}^1$  も第 2 可算公理をみたす.

連結かつコンパクトであること:  $S^3 = \{P = (a_0, a_1) \in \mathbf{C}^2; |a_0|^2 + |a_1|^2 = 1\} \subset \mathbf{C}^2 - \{0\}$  であり,  $\mathbf{C}^2 - \{0\}$  の相対位相により,  $S^3$  は有界閉集合つまりコンパクト集合であり, 連結である. 全射連続写像  $\pi|_{S^3}: S^3 \rightarrow \mathbf{P}^1$  により  $\mathbf{P}^1$  は連結かつコンパクトである.  $\pi|_{S^3}$  が全射であることは

$$[a_0: a_1] = \left[ \frac{a_0}{\sqrt{a_0^2 + a_1^2}} : \frac{a_1}{\sqrt{a_0^2 + a_1^2}} \right]$$

であることからしう.

ハウスドルフであること:  $P \neq Q$  を  $\mathbf{P}^1$  の点とする.  $p: GL(2, \mathbf{C}) \rightarrow \text{Aut}_{\text{Top}}(\mathbf{P}^1)$  は全射. したがって,  $U_0 \subset \mathbf{P}^1$  から, 任意の  $p_A \in \text{Aut}_{\text{Top}}(U_0)$  に対し  $A \in GL(2, \mathbf{C})$  が存在する. つまり

$p_A(P), p_A(Q) \in U_0$  となる  $A \in GL(2, \mathbf{C})$  が存在する.  $U_0 \cong \mathbf{C}$  であり  $\mathbf{C}$  はハウスドルフなので,  $p_A(P)$  の開近傍  $U_P$  と  $p_A(Q)$  の開近傍  $U_Q$  で  $U_P \cap U_Q = \emptyset$  をみたすものが存在する.  $U_P$  と  $U_Q$  は  $U_0 \subset \mathbf{P}^1$  の開集合であり,  $p_A$  が同相なので  $p_A^{-1}(U_P), p_A^{-1}(U_Q)$  は  $\mathbf{P}^1$  における  $P, Q$  の開近傍で  $p_A^{-1}(U_P) \cap p_A^{-1}(U_Q) = \emptyset$  をみたす. よって  $\mathbf{P}^1$  はハウスドルフである.  $\square$

## 2.2 貼りあわせ関数

補題 2.3.2 から  $\varphi_0: U_0 \xrightarrow{\sim} \mathbf{C}, \varphi_1: U_1 \xrightarrow{\sim} \mathbf{C}$  である. ここで,  $\varphi_0(U_0)$  の標準座標を  $w, \varphi_1(U_1)$  の標準座標を  $z$  で表すことにする. 定義 2.2 のようにかくと

$$\begin{aligned} z: \varphi_1(U_1) = \mathbf{C} &\rightarrow \mathbf{C}; (a) \mapsto a \\ w: \varphi_0(U_0) = \mathbf{C} &\rightarrow \mathbf{C}; (b) \mapsto b \end{aligned}$$

のようになる. 複素数の一つ組に対し第一成分を対応させるということである. これによって点  $(a)$  と座標値  $z(a)$  を同一視し, 点を単に  $z$  と書いたりする. ガウス平面  $\mathbf{C}$  に, そこでの標準座標をつけて  $\mathbf{C}_z, \mathbf{C}_w$  のように表すと,  $\mathbf{C}_w \subset \mathbf{P}^1, \mathbf{C}_z \subset \mathbf{P}^1$  とみなせる.  $z$  も  $w$  も 0 でないとき,  $\mathbf{C}_z$  と  $\mathbf{C}_w$  の間には,

$$z = \frac{1}{w} \quad (2.4)$$

の関係がある.  $z, w \neq 0$  は (2.3) より  $[z: w] \in U_0 \cap U_1$  ということである.  $[z: w] \in U_0 \cap U_1$  のとき  $z$  は  $w$  の正則関数になっている.  $\varphi_0(U_0 \cap U_1) = \mathbf{C}_w - \{0\} = \mathbf{C}_w \cap \mathbf{C}_z = \mathbf{C}_z - \{0\} = \varphi_1(U_0 \cap U_1)$  なので, この正則関数を  $\varphi_{10}: \mathbf{C}_w - \{0\} = \varphi_0(U_0 \cap U_1) \rightarrow \mathbf{C}_z - \{0\} = \varphi_1(U_0 \cap U_1)$  とかくことにすると, 次の図式が可換になる.

$$\begin{array}{ccc} U_0 \cap U_1 & \xrightarrow{[1: w]=[z: 1]} & U_0 \cap U_1 \\ \uparrow \varphi_0^{-1} & & \downarrow \varphi_1 \\ \mathbf{C}_w - \{0\} & \xrightarrow{\varphi_{10}} & \mathbf{C}_z - \{0\} \end{array}$$

つまり,  $\varphi_{10} = \varphi_1 \circ \varphi_0^{-1}$  である. また,  $\varphi_{01} = \varphi_0 \circ \varphi_1^{-1}: \varphi_1(U_0 \cap U_1) \rightarrow \varphi_0(U_0 \cap U_1)$  も  $w = 1/z$  として同様に定まる. これは正則であり  $\varphi_{10}$  の逆関数でもある.

以上から次が従う.

**命題 2.4.** 複素射影直線  $\mathbf{P}^1$  は,  $\mathbf{P}^1$  を台集合とし,  $(\varphi_0: U_0 \rightarrow \mathbf{C}_w, \varphi_1: U_1 \rightarrow \mathbf{C}_z)$  を座標近傍系とするコンパクトリーマン面である.

**証明.** コンパクト性は補題 2.3.4 で示した. 定義 1.1 の (1)–(4) で  $n = 1$  としたものが成り立つことを示す.

(1) 補題 2.3.4 からしたがう.

(2) (2.2) と (2.3) からしたがう.

(3) 補題 2.3.2 からしたがう.

(4) 上で説明した.

□

ここでは 2 枚の被覆で座標近傍系を定めたが、以下断りなく極大座標近傍系を考える.

### 3 複素トーラス

#### 3.1 複素トーラスの定義

$\omega_1, \omega_2$  を  $\mathbf{R}$  上一次独立な複素数とする.  $\omega_1, \omega_2$  に対し, ガウス平面  $\mathbf{C}$  の加法部分群  $\Omega$  を

$$\Omega := \{n_1\omega_1 + n_2\omega_2; n_1, n_2 \in \mathbf{Z}\}$$

で定める.  $E := \mathbf{C}/\Omega$  とおく. 商写像を  $p: \mathbf{C} \rightarrow E$  とかく. また,  $S := \{a\omega_1 + b\omega_2; 0 \leq a, b < 1\}$  とおく. このとき,  $p$  は  $E$  と  $S$  の間の 1 対 1 対応を定める. 実際,  $x = x_1\omega_1 + x_2\omega_2, y = y_1\omega_1 + y_2\omega_2 \in S$  とし,  $p(x) = p(y)$  とする. このとき,  $p(x-y) = [0]$ , つまり,  $x-y = n_1\omega_1 + n_2\omega_2$  となる整数  $n_1, n_2$  が存在する.  $0 \leq x_1, x_2, y_1, y_2 < 1$  なので  $n_1 = n_2 = 0$  となることが必要である. したがって,  $x = y$  となる. つまり  $p$  は単射である.  $p$  が全射であることは, 次の補題 3.1.1 から従う.

**補題 3.1.** 1.  $p$  は全射かつ連続な開写像である.

2.  $E$  は第 2 可算公理をみたす連結なコンパクトハウスドルフ空間である.

**証明.** 1.  $p$  は全射かつ連続であること:  $\alpha$  を  $E$  の点とする.  $\alpha$  に対し,  $\alpha + 0\omega_1 + 0\omega_2$  は  $\alpha = p(\alpha + 0\omega_1 + 0\omega_2)$  をみたす.  $p$  の連続性は商位相の定義より従う.

$p$  が開写像であること:  $U$  を  $\mathbf{C}$  の空でない開集合とする.

$$p^{-1}(p(U)) = \bigcup_{\omega \in \Omega} (U + \omega)$$

であり,  $U + \omega$  は  $\mathbf{C}$  の開集合なので, その合併である  $p^{-1}(p(U))$  も  $\mathbf{C}$  の開集合である. したがって,  $p(U)$  は  $E$  の開集合である.

2. 第 2 可算であること:  $p$  が全射かつ連続な開写像なので,  $\mathbf{C}$  の位相空間としての基底の  $p$  による像は  $E$  の基底になる. 実際,  $x \in E$  とし,  $U$  を  $E$  における  $x$  の開近傍とする. このとき,  $p$  は全射なので  $p^{-1}(x)$  は空でなく,  $p^{-1}(U) \subset \mathbf{C}$  は  $p$  の連続性から  $p^{-1}(x)$  の元たちの開近傍である.  $\mathbf{C}$  の基底の元  $V$  で  $p^{-1}(U)$  に含まれ,  $p^{-1}(x)$  を含むものが存在する. この  $V$  に対し,  $p$  が連続な開写像であることから,  $p(V)$  は  $E$  の開集合であり,  $x \in p(V) \subset U$  が成り立つ. よって,  $\mathbf{C}$  が第 2 可算であることから  $E$  も第 2 可算である.

連結かつコンパクトであること:  $S$  の閉包  $\bar{S}$  は連結かつコンパクトである. また,  $p(\bar{S}) = E$  でもある.  $p$  の連続性によって,  $E$  は連結かつコンパクトである.

ハウスドルフであること:  $P \neq Q$  を  $E$  の点とする.  $P, Q$  に対し,  $S$  の点  $x, y$  で  $p(x) = P, p(y) = Q$  となるものが存在する.  $x, y \in \partial S$  のとき, 複素数  $\varepsilon$  を適当にとつて,  $x, y \in \text{Int}(S + \varepsilon)$  となるようにできるので,  $x, y$  は  $S$  の内点としてよい. このとき,  $S \subset \mathbf{C}$  がハウスドルフであることから, 実数  $r > 0$  で,  $D(x; r), D(y; r) \subset S$  かつ  $D(x; r) \cap D(y; r) = \emptyset$  をみたすものが存在する. この  $r$  に対し,  $P \in p(D(x; r))$  かつ  $Q \in p(D(y; r))$  であり,  $p(D(x; r)) \cap p(D(y; r)) = \emptyset$  が成り立つ.  $\square$

$E$  の複素構造を定める.  $P$  を  $E$  の点とする. 複素数  $\varepsilon$  と  $P = p(x)$  となる点  $x \in \mathbf{C}$  と  $x$  の開近傍  $\mathcal{U}_x$  で  $\mathcal{U}_x \subset S + \varepsilon$  となるものが存在する.  $U_P := p(\mathcal{U}_x)$  とおくと,  $U_P$  は  $P$  の  $E$  における開近傍である.  $p^{-1}(U_P) = \bigsqcup_{\omega \in \Omega} \mathcal{U}_x + \omega$  であり, 任意の  $\omega \in \Omega$  に対し,  $p|_{\mathcal{U}_x + \omega} : \mathcal{U}_x + \omega \rightarrow U_P$  は同相写像である.  $p|_{\mathcal{U}_x}$  の逆写像を  $\varphi_{P,x} : U_P \rightarrow \mathcal{U}_x$  とおく. このとき,  $(\varphi_{P,x})_{P \in E, x \in p^{-1}(P)}$  は  $E$  の座標近傍系である. 実際,  $P, Q$  を  $E$  の点とし,  $\mathbf{C}$  の点  $x, y$  を  $P = p(x), Q = p(y)$  をみたすものとする. このとき,  $\varphi_{Q,y} \circ \varphi_{P,x}^{-1} : \varphi_{P,x}(U_P \cap U_Q) \rightarrow \varphi_{Q,y}(U_P \cap U_Q)$  は  $x$  に何らかの  $\omega \in \Omega$  を足して  $y$  に並行移動させる写像  $y = x + \omega$  なので正則である.

したがって, 次が成り立つ.

**命題 3.2.**  $(E, (\varphi_{P,x})_{P \in E, x \in p^{-1}(P)})$  はコンパクトリーマン面である.

**証明.** (1) 補題 3.1.2 で示した.

(2)  $E = \bigcup_{P \in E} U_P$  と補題 3.1.1 から従う.

(3), (4) 上で示した.  $\square$

コンパクトリーマン面  $E$  を複素トーラスという.

## 3.2 楕円関数

3.1 節の記号を用いる.

**定義 3.3.**  $f$  を  $\mathbf{C}$  上定義された有理型関数とする.  $f$  が  $\omega_1$  と  $\omega_2$  を周期とするとき,  $f$  は 2 重周期  $\omega_1$  と  $\omega_2$  をもつ, あるいは  $\Omega$  を周期とする楕円関数 (elliptic function) であるという.

**補題 3.4.** 商写像  $p: \mathbf{C} \rightarrow E$  の引き戻し  $p^*: f \mapsto f \circ p$  は  $\{E \text{ 上の有理型関数}\}$  から  $\{\Omega \text{ を周期とする } \mathbf{C} \text{ 上の楕円関数}\}$  への 1 対 1 対応を定める.

**証明.**  $f$  を  $E$  上の有理型関数とする.  $p^*f$  は  $\mathbf{C}$  上の有理型関数である.  $p^*f$  の 2 重周期性を示す.  $z \in \mathbf{C}, \omega \in \Omega$  とする.

$$p^*f(z + \omega) = f(p(z + \omega)) = f(p(z)) = p^*f(z)$$

である.

$p^*$  が 1 対 1 対応となることを示す.  $f, g$  を  $E$  上の有理型関数で  $p^*f = p^*g$  をみたすものとする.  $p$  は全射なので,  $f(p(z)) = g(p(z))$  から  $f = g$  である. よって,  $p^*$  は単射である.



$g$  を  $\Omega$  を周期とする楕円関数とする.  $P$  を  $E$  の点とする.  $\varphi_{P,x}: U_P \rightarrow \mathcal{U}_x$  に対し,  $f^P$  を  $g|_{\mathcal{U}_x}$  を局所座標表示とする  $U_P \subset E$  上の有理型関数とする.  $g$  の 2 重周期性から,  $f^P$  は  $x$  の取り方によらない.  $Q \in E$  を  $U_P \cap U_Q \neq \emptyset$  となる点とすると,  $f^P|_{U_P \cap U_Q} = f^Q|_{U_P \cap U_Q}$  が成り立つ.  $(f^P)_{P \in E}$  を貼り合わせることで,  $E$  上の有理型関数  $f$  が定まる.  $(f|_{U_P} := f^P)$  この  $f$  に対し,  $p^*f = g$  が成り立つ.  $\square$

**定理 3.5.**

$$\wp(u) := \sum_{\substack{\omega \in \Omega, \\ \omega \neq 0}} \left( \frac{1}{(u - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right) \quad (3.1)$$

は  $\Omega$  にのみ 2 位の極を持つ楕円関数である.

$\wp(u)$  を Weierstrass の  $\wp$  関数という.

**証明.**  $\wp(u)$  が  $\mathbf{C} - \Omega$  で正則であり,  $\Omega$  では 2 位の極をもつこと:  $M \geq 0$  を実数とする.  $D(0; 2M)$  は  $\mathbf{C}$  のコンパクト集合であり,  $\Omega$  は離散閉集合なので,  $\Omega \cap D(0; 2M)$  は有限集合である.

$$\wp(z) = \left( \frac{1}{z^2} + \sum_{\substack{\omega \in \Omega - \{0\}, \\ |\omega| \leq 2M}} \left( \frac{1}{(z - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right) \right) + \sum_{\substack{\omega \in \Omega - \{0\}, \\ |\omega| > 2M}} \left( \frac{1}{(z - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right)$$

と 2 つの和に分解する. 第 1 項は有限和なので  $\overline{D(0; M)} - \Omega$  で正則かつ  $\overline{D(0; M)} \cap \Omega$  で 2 位の極をもつ有理型関数である.

第 2 項が  $\overline{D(0; M)}$  で一様収束することを示す.  $z$  を  $|z| \leq M$  をみたす複素数とする.  $|\omega| > 2M \geq 2|z|$  である. したがって

$$\left| \frac{1}{(z - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right| = \frac{|z|}{|\omega|^2} \frac{|z - 2\omega|}{|z - \omega|^2} = \frac{|z|}{|\omega|^3} \frac{|z/\omega - 2|}{|z/\omega - 1|^2} \leq \frac{M}{|\omega|^3} \frac{|1/2 - 2|}{|1/2 - 1|^2} = \frac{10M}{|\omega|^3}$$

が成り立つ. ここで次の補題 3.6 を用いると  $\sum_{\substack{\omega \in \Omega, \\ |\omega| > 2M}} \frac{10M}{|\omega|^3}$  が収束することがわかる. したがって,

第 2 項も収束する.

**補題 3.6.** 実数  $s > 1$  に対し  $\sum_{\omega \in \Omega - \{0\}} \frac{1}{|\omega|^{2s}}$  は収束する.

**補題の証明.**  $\varphi(x, y) := |x\omega_1 + y\omega_2|^2$  とおく. このとき,

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) &= (x\omega_1 + y\omega_2) \overline{(x\omega_1 + y\omega_2)} \\ &= x^2|\omega_1|^2 + xy(\omega_2\overline{\omega_1} + \omega_1\overline{\omega_2}) + y^2|\omega_2|^2 \\ &= |\omega_1|^2x^2 + (\overline{\omega_1\omega_2})(\omega_1\overline{\omega_2})xy + |\omega_2|^2y^2 \\ &= |\omega_1|^2x^2 + |\omega_1\overline{\omega_2}|^2xy + |\omega_2|^2y^2 \end{aligned}$$

となり, 実数  $a, b, c$  を用いて,  $ax^2 + 2bxy + cy^2$  とかける. すなわち,  $\varphi(x, y)$  は実係数 2 次形式であり,  $\omega_1$  と  $\omega_2$  が独立であることから正定値である. 2 次形式に対応する実対称行列は, 実数の固有値を持つ. いま,  $\varphi$  は正定値なので固有値を  $0 < m_1 \leq m_2$  とおいてよい. 実対称行列は直交行列を用いて対角化でき, 任意の  $x, y \in \mathbf{R}$  に対し,

$$m_1(x^2 + y^2) \leq \varphi(x, y) \leq m_2(x^2 + y^2)$$

が成り立つ. よって, 2 つの級数

$$\sum_{\omega \in \Omega - \{0\}} \frac{1}{|\omega|^{2s}} = \sum_{(n_1, n_2) \in \mathbf{Z}^2 - \{(0,0)\}} \frac{1}{\varphi(n_1, n_2)^s}, \quad \sum_{(n_1, n_2) \in \mathbf{Z}^2 - \{(0,0)\}} \frac{1}{(n_1^2 + n_2^2)^s}$$

の一方が収束するとき, 他方も収束し, 発散も共にする. 十分小さい実数  $\varepsilon > 0$  に対し, 2 つ目の級数と積分

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \iint_{\varepsilon \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq R} \frac{1}{(x^2 + y^2)^s} dx dy$$

を比較すればよい.  $r \cos \theta = x, r \sin \theta = y$  とすると,  $x^2 + y^2 = r^2, dx dy = r dr d\theta$  から,

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow \infty} \iint_{\varepsilon \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq R} \frac{1}{(x^2 + y^2)^s} dx dy &= \lim_{R \rightarrow \infty} \iint_{\varepsilon \leq r \leq R} \frac{1}{r^{2s}} r dr d\theta \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} 2\pi \int_{\varepsilon}^R \frac{1}{r^{2s-1}} dr \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\pi}{1-s} \left( \frac{1}{R^{2(s-1)}} - \frac{1}{\varepsilon^{2(s-1)}} \right) \end{aligned}$$

となる. したがって,  $s > 1$  のとき収束する.  $\square$

$\wp(u)$  が 2 重周期関数であること:  $\omega \in \{\omega_1, \omega_2\}$  とする.  $\wp'(z) = -2 \sum_{\omega \in \Omega} \frac{1}{(z-\omega)^3}$  は楕円関数なので,  $\wp'(z+\omega) = \wp'(z)$  をみたす. よって,  $(\wp(z+\omega) - \wp(z))' = 0$  なので,  $\wp(z+\omega) - \wp(z) =: c_\omega$  は  $\mathbf{C} - \Omega$  上の定数関数である.  $\omega/2 \notin \Omega$  であり,  $\wp(z) = \wp(-z)$  なので,  $\wp(\omega/2) = \wp(-\omega/2)$  である.  $\omega/2 = -\omega/2 + \omega$  なので,  $c_\omega = \wp(-\omega/2 + \omega) - \wp(\omega/2) = \wp(\omega/2) - \wp(\omega/2) = 0$ . したがって,  $\mathbf{C} - \Omega$  上  $\wp(z+\omega) - \wp(z) = 0$  が成り立つ. 有理型関数の剛性から  $\mathbf{C}$  上  $\wp(z) = \wp(z+\omega)$  が成り立つ.  $\square$

## 4 2 重被覆

### 4.1 分岐と被覆

証明はしないが次の事実がある.

**事実 4.1.**  $X$  と  $Y$  をリーマン面とする.  $f: X \rightarrow Y$  を定値でないリーマン面の射とする.  $P \in X$ ,  $Q = f(P) \in Y$  とおく. このとき,  $P$  のまわりの局所座標  $t$  と  $Q$  のまわりの局所座標  $s$  と正の整数  $n \geq 1$  で,  $f$  局所座標表示が  $s = t^n$  となるものが存在する. また, この  $n$  は座標の取り方によらない.

この  $n$  を  $P$  における  $f$  の分岐指数といい,  $e_P$  とかく.  $e_P > 1$  のとき,  $P$  を  $f$  の分岐点という.

**事実 4.2.**  $X$  と  $Y$  をコンパクトリーマン面とする.  $f: X \rightarrow Y$  を定値でない射とする. このとき, 次が成り立つ.

1. 任意の  $Q \in Y$  に対し  $f^{-1}(Q) \neq \emptyset$  かつ  $\#f^{-1}(Q) < \infty$  である.
2.  $f$  の分岐点は高々有限個である.
3.  $Q$  を  $Y$  の点とする. このとき,  $d(Q) := \sum_{P \in f^{-1}(Q)} e_P$  は一定である. これを  $\deg f$  とかく.
4. 分岐点でない点  $Q \in Y$  に対し  $\#f^{-1}(Q) = \deg f$  である. 分岐点  $Q \in Y$  に対し,  $\#f^{-1}(Q) < \deg f$  である.

$d = \deg f$  を  $f$  の写像度といい,  $f$  を  $d$  重被覆写像という.

## 4.2 複素トーラスから複素射影直線への 2 重被覆

補題 3.4 より,  $\wp$  は  $E$  上の有理型関数と見做せる. さらに, 有理型関数は  $\mathbf{P}^1$  への射と見做せる.

**定理 4.3.**  $\wp$  の定めるリーマン面の射  $\wp: E \rightarrow \mathbf{P}^1$ ;  $\wp([z]) = [\wp(z) : 1]$  は 4 点  $[0]$ ,  $[\omega_1/2]$ ,  $[\omega_2/2]$ ,  $[(\omega_1 + \omega_2)/2]$  で分岐する 2 重被覆である. これらの点を  $E$  の 2 分点と呼ぶ.

**証明.**  $\wp$  は  $\Omega$  にのみ 2 位の極をもつ楕円関数であったから,  $[0]$  のみに 2 位の極をもつ  $E$  上の有理型関数というのと同じである. したがって,  $\wp^{-1}(\infty) = \{[0]\}$  であり, 事実 4.2 より,  $\deg \wp = 2$  である. いま,  $\wp$  は偶関数なので,  $[a] \in E$  に対し,  $\wp([a]) = \wp([-a])$  が成り立つ.  $[a]$  が  $E$  の 2 分点でなければ,  $[a] \neq [-a]$  である.  $\deg \wp = 2$  なので, このとき,  $\wp^{-1}(\wp([a])) = \{[a], [-a]\}$  と確定する.

$[\omega_1/2]$  の近傍で  $\wp$  を局所座標表示する.  $\wp$  は  $\omega_1$  を周期にもつ偶関数なので  $\wp(-z) = \wp(z) = \wp(z + \omega_1)$  をみたく. 両辺を微分して,  $-\wp'(-z) = \wp'(z + \omega_1)$  となるが,  $z = -\omega_1/2$  のとき,  $-\wp'(\omega_1/2) = \wp'(\omega_1/2)$  となる. したがって,  $\wp'(\omega_1/2) = 0$  となる. よって,  $\wp(z)$  の  $\omega_1/2$  のまわりでの展開における 1 次の項の係数は 0 である. したがって,  $e_{[\omega_1/2]} > 1$  であり,  $[\omega_1/2]$  は  $\wp$  の分岐点である.  $[\omega_2/2]$  と  $[(\omega_1 + \omega_2)/2]$  についても同様に,  $e_{[\omega_2/2]} > 1$ ,  $e_{[(\omega_1 + \omega_2)/2]} > 1$  となるので,  $\wp$  は  $E$  の 2 分点で分岐する 2 重被覆であることが示せた.  $\square$

## 参考文献

[Og02] 小木曾啓示, 代数曲線論, 朝倉書店, 2002.