

# Liscitz 連続性の超局所的特徴づけ

2024 年 10 月 10 日 \*

概要

[J1] の紹介

## 1 序論

■設定  $f: M \rightarrow N$  を  $C^\infty$  多様体間の連続写像とする. この  $f$  に対して

Whitney cone  $C_f := C(\Gamma_f, \Gamma_f) \subset T(M \times N)$

conormal  $\Lambda_f := SS(\mathbf{K}_{\Gamma_f}) \subset T^*(M \times N)$

とおく.

■Whitney cone と conormal の性質

$$\begin{cases} C_f: & \text{closed symmetric cone,} \\ \Lambda_f: & \text{coisotropic closed symmetric cone.} \end{cases}$$

また,  $f$  が  $C^1$  級なら

$$\begin{cases} C_f = T\Gamma_f, \\ \Lambda_f = (T\Gamma_f)^\perp = T_{\Gamma_f}^*(M \times N). \end{cases}$$

■主定理

定理 1. 次は同値.

- (1)  $f$  は Lipschitz.
- (2)  $C_f \cap (0_M \times TN) \subset 0_{MN}$ .
- (3)  $\Lambda_f \cap (T^*M \times 0_N) \subset 0_{MN}^*$ .

■論文の構成

2 節 SS の復習

3 節 部分集合の SS の性質, cone, strict cone の性質

4 節  $C_f$  の定義と性質. Liscitz, strict differentiability の定義, chain rule.

---

\* 2024/10/10 かきはじめ

- 5 節  $\Lambda_f$  の定義と性質. 核の畳み込みを用いて SS の性質を  $f$  に拡張.  
 6 節 実数値関数のときを調べる. Vichery subdifferential との関係.  
 7 節 主定理の証明  
 8 節 部分多様体に拡張. locally Lipschitz, strict differentiable の判定.

## 2 背景知識

### 2.1 記号と規約

多様体はパラコンパクト  $C^\infty$  とする.

集合

$p_i: X_1 \times X_2 \rightarrow X_i$  とか  $p_{ij}: X_{ijk} = X_i \times X_j \times X_k \rightarrow X_{ij}$  で射影を表す.

$R_i \subset X_1 \times X_2$  に対して

$$R_1 \circ R_2 := p_{13} (p_{12}^{-1}(R_1) \cap p_{23}^{-1}(R_2))$$

とおく.

位相空間

ベクトル空間

ベクトル束

多様体

$f: M \rightarrow N$  を多様体の射とする.  $\Lambda_f := T_{\Gamma_f}^*(M \times N)$  とおく.

$$\Lambda \cong M \times_N T^*N$$

が成り立つ.

$A \subset T^*M$ ,  $B \subset T^*N$  に対し,

$$(2.1) \quad f_\pi f_d^{-1}(A) = A \overset{a}{\circ} \Lambda_f, \quad f_d f_\pi^{-1}(B) = \Lambda_f \overset{a}{\circ} B$$

が成り立つ.

$f$  が平滑 (smooth) すなわち沈めこみとなることと

$$(2.2) \quad \Lambda_f \cap (0_M^* \times T^*N) \subset 0_{M \times N}^*$$

となることは同値である. より一般に, 閉錐  $B \subset T^*N$  に対して

$$(2.3) \quad \Lambda_f \cap (0_M^* \times B) \subset 0_{M \times N}^*$$

となるとき,  $f$  は  $B$  に対して非特性的 (noncharacteristic) であるという.

2.2 層

2.3 核

2.4 超局所台

## 参考文献

- [J1] Benoit, Jubin, *A Microlocal Characterization of Lipschitz Continuity*, <https://doi.org/10.4171/PRIMS/54-4-2>.
- [KS90] Masaki Kashiwara, Pierre Schapira, *Sheaves on Manifolds*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 292, Springer, 1990.
- [Vic1] Nicolas Vichery, *Homological Differential Calculus*, <https://doi.org/10.48550/arXiv.1310.4845>.