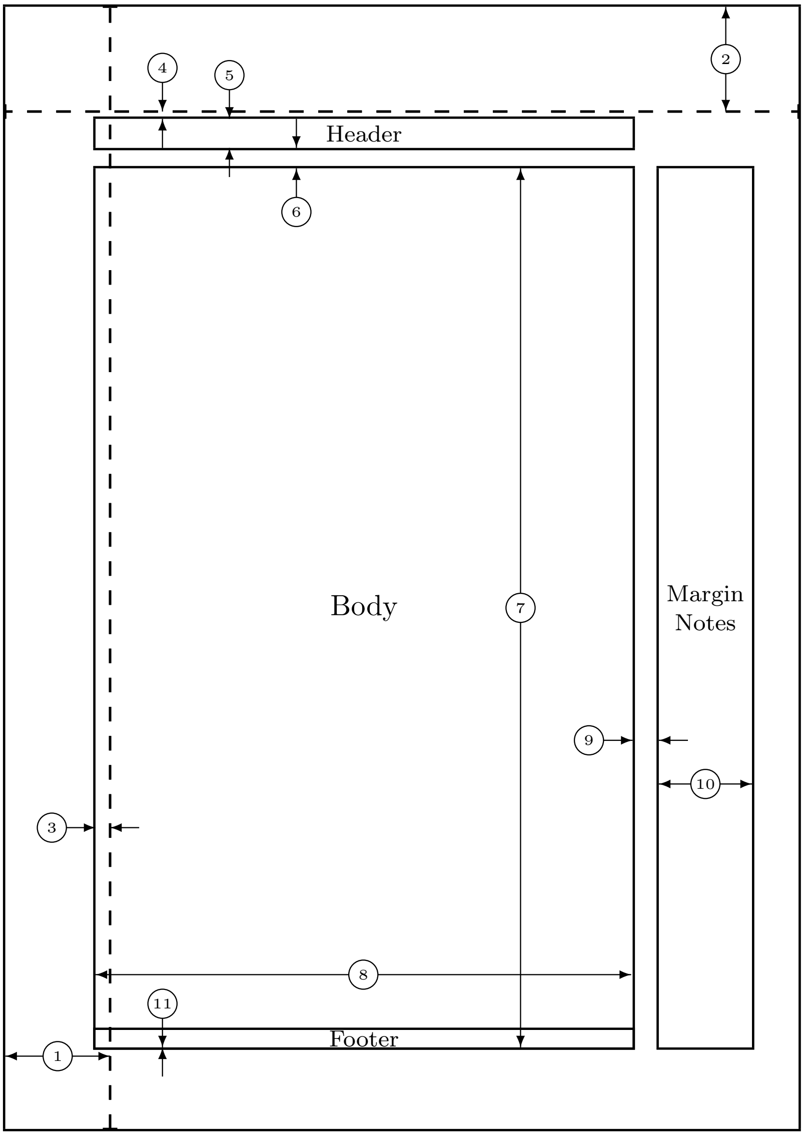
層理論まとめノート

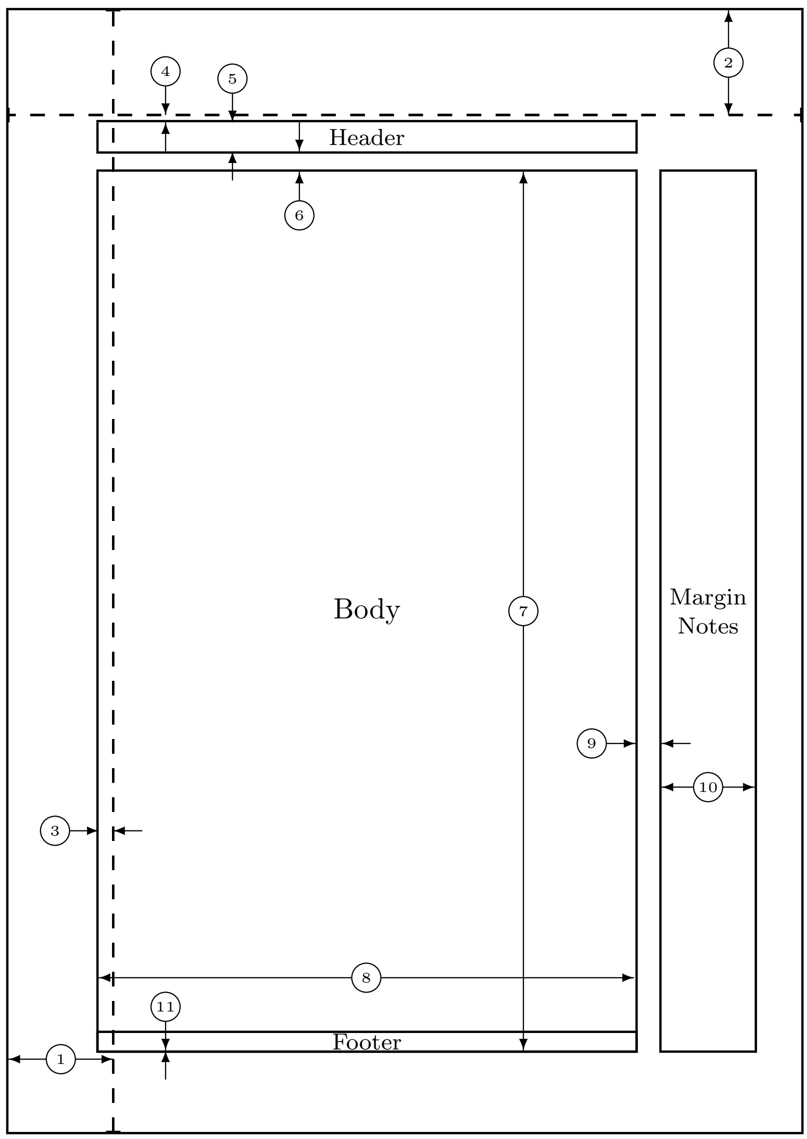
Toshi2019

2024 年 4 月 13 日更新

目次



1	`one inch + \hoffset`	2	`one inch + \voffset`
3	`\oddsidemargin = -10pt`	4	`\topmargin = 5pt`
5	`\headheight = 20pt`	6	`\headsep = 14pt`
7	`\textheight = 604pt`	8	`\textwidth = 369pt`
9	`\marginparsep = 18pt`	10	`\marginparwidth = 64pt`
11	`\footskip = 0pt`		`\marginparpush = 16pt (not shown)`
	`\hoffset = 0pt`		`\voffset = 0pt`
	`\paperwidth = 545pt`		`\paperheight = 771pt`



1	one inch + \hoffset	2	one inch + \voffset
3	\oddsidemargin = -10pt	4	\topmargin = 5pt
5	\headheight = 20pt	6	\headsep = 14pt
7	\textheight = 604pt	8	\textwidth = 369pt
9	\marginparsep = 18pt	10	\marginparwidth = 64pt
11	\footskip = 0pt		\marginparpush = 16pt (not shown)
	\hoffset = 0pt		\voffset = 0pt
	\paperwidth = 545pt		\paperheight = 771pt

第 1 章

層

約束 **1.0.1.** 次のことは断りなく用いる．

- 環といえば，結合則をみたす積をもち単位元をもつ環とする．
- 位相空間 X に対し，X 上の環や加群の層をたんに X 上の環とか X 上の加群という．
- 層の記号は $\mathcal{F}, \mathscr{F}$ のようにはせず，$F, G, H, \ldots$ のようにローマン体とする

1.1 アーベル圏に値をとる層

1.1.1 前層と層の定義

定義 1.1.1 (前層)**.** X を位相空間とし，$\mathcal{C}$ をアーベル圏とする．反変関手 $F\colon \mathsf{Op}(X)^{\mathrm{op}} \to \mathcal{C}$ のことを $\mathcal{C}$ に値をとる X 上の**前層** (presheaf) とよぶ．

定義 1.1.2 (層)**.** X を位相空間とし，$\mathcal{C}$ をアーベル圏とする．F を $\mathcal{C}$ に値をとる X 上の前層とする．F が任意の開集合 U と U の開被覆 $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$ に対し，次の列が完全になるとき，F は**層** (sheaf) であるという．

$$0 \to F(U) \xrightarrow{d^0} \prod_{i\in I} F(U_i) \xrightarrow{d^1} \prod_{i,j\in I} F(U_i \cap U_j).$$

ただし，d^0, d^1 は

$$d^0\colon s \mapsto \left(s|_{U_i}\right)_i, \quad d^1\colon (s_i)_i \mapsto \left(s_i|_{U_i\cap U_j} - s_j|_{U_i\cap U_j}\right)_{i,j}$$

で定める．

1.1.2　アーベル層

層の圏における完全列等の概念を明確化しておく．アーベル圏 $\mathcal{C}$ に値を取る位相空間 X 上の層を**アーベル層** (abelian sheaf) ということがある．アーベル層の圏 $\mathsf{Sh}(X,\mathcal{C})$ はアーベル圏になる．すなわち，アーベル層の圏における核と余核が定まる．実際アーベル層 $F, G \in \mathsf{Sh}(X,\mathcal{C})$ の間の射 $\varphi\colon F \to G$ に対し，

$$\operatorname{Ker}\varphi(U) \coloneqq \operatorname{Ker}(\varphi_U), \quad \operatorname{Coker}\varphi(U) \coloneqq a_X\left(\operatorname{Coker}(\varphi_U)\right)$$

として定めると，これらは $\mathsf{Sh}(X,\mathcal{C})$ における核と余核になる．

これらを用いて，$\mathsf{Sh}(X,\mathcal{C})$ における短完全列を次のように定める．

定義 1.1.3.

$$0 \to F \xrightarrow{\varphi} G \xrightarrow{\psi} H \to 0 \quad \text{in } \mathsf{Sh}(X,\mathcal{C})$$

が完全であるとは，次の条件 (i)–(iii) が成り立つことをいう．

(i) $\operatorname{Ker}\phi \cong 0$.
(ii) $\operatorname{Ker}\psi \cong \operatorname{Im}\varphi$.
(iii) $\operatorname{Im}\psi \cong H$.

$\mathcal{C} = \mathsf{Ab}$ のとき，$\mathsf{Sh}(X) = \mathsf{Sh}(X, \mathsf{Ab})$ とかく．

命題 1.1.4 (層の同形は茎ごとの同形)**.**　$\mathsf{Sh}(X)$ の射 $\phi\colon F \to G$ が同形となるのは，各点 $x \in X$ に対し ϕ_x が同形となるときである．

1.2　完全性

諸々の操作の完全性についてまとめる．X を位相空間とし，R を X 上の環とする．

1.2.1　茎

命題 1.2.1 (茎は完全)**.**　各点 $x \in X$ に対し，

$$\begin{array}{cccc} \bullet_x\colon & \operatorname{Mod}(R) & \longrightarrow & \operatorname{Mod}(R_x) \\ & \Psi & & \Psi \\ & F & \longmapsto & F_x \end{array}$$

は完全関手である．

証明.

$$0 \to F \xrightarrow{\varphi} G \xrightarrow{\psi} H \to 0 \quad \text{in } \mathsf{Sh}(X,\mathcal{C})$$

を完全列とする．命題 1.1.4 から，各点 $x \in X$ に対し次の条件 (i)–(iii) が成り立つ．

(i) $(\operatorname{Ker}\phi)_x \cong 0$.

(ii) $(\operatorname{Ker}\psi)_x \cong (\operatorname{Im}\varphi)_x$.
(iii) $(\operatorname{Im}\psi)_x \cong H_x$.

これは次の条件 (i′)–(iii′) と同値である．

(i′) $\operatorname{Ker}\phi_x \cong 0$.
(ii′) $\operatorname{Ker}\psi_x \cong \operatorname{Im}\varphi_x$.
(iii′) $\operatorname{Im}\psi_x \cong H_x$.

これは

$$0 \to F_x \xrightarrow{\varphi_x} G_x \xrightarrow{\psi_x} H_x \to 0 \quad \text{in } \mathcal{C}$$

が完全であることと同値である． □

とくに，茎ごとの完全性から層の完全性も出てくるので，層の完全列の概念が各点 $x \in X$ における完全列

$$0 \to F_x \xrightarrow{\varphi_x} G_x \xrightarrow{\psi_x} H_x \to 0 \quad \text{exact in } \mathcal{C}$$

にすり替わる．

1.2.2　切断

命題 1.2.2 (切断は左完全)．　開集合 $U \in \mathsf{Op}(X)$ に対し，

$$\begin{array}{cccc} \Gamma(U;\cdot)\colon & \operatorname{Mod}(R) & \longrightarrow & \operatorname{Mod}(R(U)) \\ & \cup\!\!\!\!\!\raisebox{0.5ex}{\rotatebox{90}{}}\, & & \\ & F & \longmapsto & \Gamma(U;F) \coloneqq F(U) \end{array}$$

は左完全関手である．よってとくに $\Gamma(X;\cdot)$ も左完全である．

例 1.2.3 (右完全にならない例 1)．　$X = \mathbf{C}$ とする．X 上の層の射 $\partial_z \colon \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X$ を，正則関数 $u(z)$ に対し導関数 $\dfrac{du}{dz}(z)$ を対応させることで定める．このとき次は完全である．

$$0 \to \mathbf{C}_X \to \mathcal{O}_X \xrightarrow{\partial_z} \mathcal{O}_X \to 0 \quad \text{exact in } \operatorname{Mod}(\mathbf{C}_X)$$

しかし，開集合 $U = \mathbf{C} - \{0\}$ 上の切断を取った

$$0 \to \mathbf{C}_X(U) \to \mathcal{O}_X(U) \xrightarrow{\partial_z(U)} \mathcal{O}_X(U) \to 0 \quad \text{in } \operatorname{Mod}(\mathbf{C})$$

は右完全ではない．実際，$\dfrac{1}{z} \in \mathcal{O}_X(U)$ に対し，原始関数 $\log(z)$ は U 上では正則ではない．よって，$\partial(U)$ は全射ではない．

例 1.2.4 (右完全にならない例 2)．　E を 1 次元複素トーラスとする．E 上の層の完全列

$$0 \to \mathcal{O}_E \xrightarrow{\iota} \mathcal{O}_E(P) \xrightarrow{\rho_P} \mathbf{C}_P \to 0 \quad \text{exact in } \operatorname{Mod}(\mathbf{C}_E)$$

を考える．ただし，$\mathscr{O}_E(P)$ は一点 $P \in E$ における 1 位の因子から定まる層である．つまり，

$$\mathscr{O}_E(P)(U) = \bigl\{P \text{ でのみ高々 1 位の極を持つ } U \text{ 上の有理形関数}\bigr\}$$

によって定まる層である．また $\mathbf{C}_P$ は一点 P にのみ台をもつ摩天楼層である．このとき

$$0 \to \mathscr{O}_E(E) \xrightarrow{\iota_E} \mathscr{O}_E(P)(E) \xrightarrow{(r_P)_E} \mathbf{C} \to 0 \quad \text{in } \mathrm{Mod}(\mathbf{C})$$

は完全ではない．実際この系列は

$$0 \to \mathbf{C} \xrightarrow{\mathrm{id}_{\mathbf{C}}} \mathbf{C} \xrightarrow{0} \mathbf{C} \to 0 \quad \text{in } \mathrm{Mod}(\mathbf{C})$$

となり，右側の 0 は全射にならない．

1.2.3　台を持つ切断

命題 1.2.5 (台を持つ切断は左完全)**.**　Z を X の局所閉集合とする．開集合 $U \in \mathsf{Op}(X)$ に対し，

$$\begin{array}{cccc} \Gamma_{Z\cap U}(U;\cdot)\colon & \mathrm{Mod}(R) & \longrightarrow & \mathrm{Mod}(R(U)) \\ & \Psi & & \Psi \\ & F & \longmapsto & \Gamma_{Z\cap U}(U;F) \coloneqq \{s \in F(U); \operatorname{supp} s \subset Z \cap U\} \end{array}$$

を対応させる関手は左完全関手である．

1.2.4　内部 Hom

命題 1.2.6 (Hom は左完全)**.**　F, G を R 加群とする．

$$\begin{array}{cccc} \mathrm{Hom}_R(\cdot,\cdot)\colon & \mathrm{Mod}(R)^{\mathrm{op}} \times \mathrm{Mod}(R) & \longrightarrow & \mathrm{Mod}(\mathbf{Z}) \\ & \Psi & & \Psi \\ & (F,G) & \longmapsto & \mathrm{Hom}_R(F,G) \end{array}$$

は左完全な両側関手である．

1.2.5　内部 Hom

命題 1.2.7 (Hom は左完全)**.**　F, G を R 加群とする．

$$\begin{array}{cccc} \mathscr{H}om_R(\cdot,\cdot)\colon & \mathrm{Mod}(R)^{\mathrm{op}} \times \mathrm{Mod}(R) & \longrightarrow & \mathrm{Mod}(\mathbf{Z}_X) \\ & \Psi & & \Psi \\ & (F,G) & \longmapsto & \mathscr{H}om_R(F,G) \end{array}$$

は左完全な両側関手である．

1.2.6　内部テンソル積

層化が要る．

命題 1.2.8.　F を右 R 加群，G を左 R 加群とする．

$$\begin{array}{rccc} \cdot\otimes_R\cdot\colon & \mathrm{Mod}(R^{\mathrm{op}})\times\mathrm{Mod}(R) & \longrightarrow & \mathrm{Mod}(\mathbf{Z}_X) \\ & \Psi & & \Psi \\ & (F,G) & \longmapsto & F\otimes_R G \end{array}$$

は右完全な両側関手である．

1.2.7　帰納極限

層化が要る．

帰納系 $\alpha\colon I\to\mathrm{Mod}(R)$ を考える．極限を取る操作 $\varinjlim\colon \mathrm{Mod}(R)^I\to\mathrm{Mod}(R)$ を

$$\begin{array}{rccc} \varinjlim\colon & \mathrm{Mod}(R)^I & \longrightarrow & \mathrm{Mod}(R) \\ & \Psi & & \Psi \\ & \alpha=(F_i)_i & \longmapsto & \varinjlim_{i\in I} F_i \end{array}$$

のようにかく．

命題 1.2.9.

$$\begin{array}{rccc} \varinjlim\colon & \mathrm{Mod}(R)^I & \longrightarrow & \mathrm{Mod}(R) \\ & \Psi & & \Psi \\ & \alpha=(F_i)_i & \longmapsto & \varinjlim_{i\in I} F_i \end{array}$$

は右完全関手である．

1.2.8　射影極限

射影系 $\beta\colon I^{\mathrm{op}}\to\mathrm{Mod}(R)$ を考える．極限を取る操作 $\varprojlim\colon \mathrm{Mod}(R)^{I^{\mathrm{op}}}\to\mathrm{Mod}(R)$ を

$$\begin{array}{rccc} \varprojlim\colon & \mathrm{Mod}(R)^{I^{\mathrm{op}}} & \longrightarrow & \mathrm{Mod}(R) \\ & \Psi & & \Psi \\ & \beta=(F_i)_i & \longmapsto & \varprojlim_{i\in I} F_i \end{array}$$

のようにかく．

命題 1.2.10.

$$\begin{array}{rccc} \varprojlim\colon & \mathrm{Mod}(R)^{I^{\mathrm{op}}} & \longrightarrow & \mathrm{Mod}(R) \\ & \Psi & & \Psi \\ & \beta=(F_i)_i & \longmapsto & \varprojlim_{i\in I} F_i \end{array}$$

は左完全関手である．

1.2.9　順像

$f\colon X \to Y$ を連続写像とする.

命題 1.2.11.

$$\begin{array}{cccc} f_*\colon & \mathsf{Sh}(X) & \longrightarrow & \mathsf{Sh}(Y) \\ & \Cup & & \Cup \\ & F & \longmapsto & f_*F \end{array}$$

は左完全関手である.

R を X 上の環とする.

命題 1.2.12.

$$\begin{array}{cccc} f_*\colon & \mathrm{Mod}(R) & \longrightarrow & \mathrm{Mod}(f_*R) \\ & \Cup & & \Cup \\ & F & \longmapsto & f_*F \end{array}$$

は左完全関手である.

1.2.10　逆像

層化が要る.

$f\colon X \to Y$ を連続写像とする.

命題 1.2.13.

$$\begin{array}{cccc} f^{-1}\colon & \mathsf{Sh}(Y) & \longrightarrow & \mathsf{Sh}(X) \\ & \Cup & & \Cup \\ & G & \longmapsto & f^{-1}G \end{array}$$

は完全関手である.

S を Y 上の環とする.

命題 1.2.14.

$$\begin{array}{cccc} f^{-1}\colon & \mathrm{Mod}(S) & \longrightarrow & \mathrm{Mod}(f^{-1}S) \\ & \Cup & & \Cup \\ & G & \longmapsto & f^{-1}G \end{array}$$

は完全関手である.

1.2.11　部分集合から定まる層

$Z \subset X$ を部分集合とし，包含写像 $j\colon Z \hookrightarrow X$ の引き戻しで Z に X の誘導位相を入れる.

制限と切断の一般化

逆像関手を用いると $F \in \mathsf{Sh}(X)$ の Z への制限が開集合以外にも一般化できる．

$$\begin{array}{cccc} j^{-1}\colon & \mathsf{Sh}(X) & \longrightarrow & \mathsf{Sh}(Z) \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & F & \longmapsto & F|_Z = j^{-1}F \end{array}$$

また，切断関手の一般化も

$$\begin{array}{cccc} \Gamma(Z;\bullet)\colon & \mathrm{Mod}(R) & \longrightarrow & \mathrm{Mod}(R(Z)) \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & F & \longmapsto & \Gamma(Z;F) \coloneqq \Gamma(Z;F|_Z) \end{array}$$

によって行える．

■2023/09/13 分の行間埋め

自然な射 $\Gamma(X;F) \to \Gamma(Z;F)$ の存在．j^{-1} と $\Gamma(Z;\bullet)$ を合成すればよい．

$$F \mapsto F|_Z \mapsto \Gamma(Z;F).$$

□

制限の引き戻し

X 上の層 F に対して Z から定まる X 上の新しい層 F_Z を

$$\begin{array}{cccc} \bullet_Z\colon & \mathsf{Sh}(X) & \longrightarrow & \mathsf{Sh}(X) \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & F & \longmapsto & F_Z = j_*j^{-1}F \end{array}$$

で定める．

1.3 各操作の関係

諸々の操作の間の関係についてまとめる．

1.3.1 茎と極限

茎と帰納極限は可換

茎と有限射影極限は可換

1.3.2 切断と極限

切断と帰納極限は可換とは限らない．有限は？

切断と射影極限は可換

参考文献

[KS90] Masaki Kashiwara, Pierre Schapira, *Sheaves on Manifolds*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 292, Springer, 1990.

[KS06] Masaki Kashiwara, Pierre Schapira, *Categories and Sheaves*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 332, Springer, 2006.

[Sh16] 志甫淳, 層とホモロジー代数, 共立出版, 2016.