Inledning

Målsättningen med laborationen är att du ska få förståelse för några av de metoder som vi har tagit upp i kursen samt att du ska träna upp dina färdigheter i att skapa effektiva MATLAB-program som löser ett givet problem.

För att lösa uppgifterna i LAB 2 behöver du ha kunskap om

- Numerisk integration (Trapetsregeln och Simpsons metod).
- Numerisk lösning av begynnelsevärdesproblem (Euler fram och bak samt RK4) och randvärdesproblem (finita differensmetoden)
- Noggrannhetsordning och stabilitet

Redovisning

Redovisningen kommer att ske i form av ett individuellt datorprov med en quiz i Canvas. Vid datorprovet kommer ni ha tillgång till Matlab och de MATLAB-program som ni har skickat in och som löser uppgifterna 1-4. Inga andra hjälpmedel är tillåtna. Ni kommer att ha 60 minuter på er (90 minuter för er med förlängd skrivtid). Detaljer om hur provet går till finns i Canvas.

Provet kommer att bestå av tre teoretiska frågor och två praktiska uppgifter.

Teorifrågorna kommer att vara flervalsfrågor och handlar om de metoder och koncept som tas upp i laborationen.

Praktiska uppgifterna kommer vara av typen att göra någon modifikation av den kod ni skrivit för att lösa uppgifterna i laborationen. För att kunna göra uppgifterna på provet snabbt och enkelt, se till att koden ni har implementerat för laborationsuppgifterna är skriven så generellt att det är lätt att ändra saker i koden.

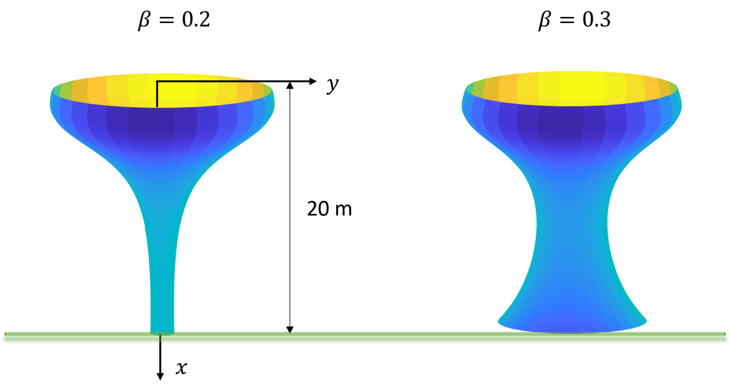
Katarina Gustavsson

1. Volym av ett vattentorn - beräkna en integral

Följande kurva beskriver konturen av ett vattentorn

$$y(x;\beta) = \frac{e^{\beta x} + 8}{1 + (x/5)^3} \qquad 0 \le x \le 20 \tag{1}$$

där $0.1 \le \beta \le 0.3$ är en parameter som bestämmer formen på tornet. Ett tredimensionellt rotationssymmetriskt torn får vi genom att rotera kurvan runt x-axeln, se Fig. 1.



Figur 1: Två fiktiva vattentorn.

Nu vill vi ta reda på hur mycket vatten tornet rymmer dvs vi vill beräkna tornets volym. Om vi antar att väggarnas tjocklek kan försummas bestäms volymen av

$$V = \pi \int_0^{20} y(x;\beta)^2 \, dx \tag{2}$$

där $y(x;\beta)$ ges av ekvation (1).

Börja gärna med att lösa uppgifterna F6 - F8 i MATLAB GRADER *under Laboration 2 - Förberedande uppgifter.*

UPPGIFT 1

a) Skriv ett MATLAB-program, `Vattentorn.m` som beräknar tornets volym när $\beta = 0.2$ genom att approximera integralen (2) med trapetsregeln och Simpsons metod. Programmet ska presentera resultatet för bägge metoderna samt en konvergensstudie där det framgår att bägge metoderna ger korrekt noggrannhetsordning.

b) Nu vill vi hitta ett ett värde på β så att volymen blir 1500 m^3. Det betyder att vi vill hitta ett värde på β så att funktionen $F(\beta) = 0$ där $F(\beta)$ ges av

$$F(\beta) = \pi \int_0^{20} y(x;\beta)^2 \, dx - 1500 \tag{3}$$

Skriv ett MATLAB-program, `VattentornSekant.m` som löser ekvation (3) med sekantmetoden till en rimlig noggrannhet. Programmet ska skriva ut värdet på β samt visa hur sekantmetoden konvergerar för det här fallet.

Om du vill rita upp tornet gör du så här: Låt `x` och `f` vara *kolonnvektorer* för konturkurvan $y(x)$. Skapa en *radvektor* `fi` för rotationsvinkeln $0 \leq \phi \leq 2\pi$ med steget $2\pi/100$. Bilda matriser `X`, `Y` och `Z` och rita upp `Z` som funktion av `X` och `Y` och skriv i ditt program:

```
X = x*ones(size(fi));
Y = f*cos(fi);
Z = f*sin(fi);

mesh(X,Y,Z)
```

Du kan även prova funktionerna `surf(X,Y,Z)` eller `surfl(X,Y,Z)`. Skriv `help surf` för mer information.

Skicka in programmen `Vattentorn.m` och `VattentornSekant.m`.

2. Eulers metoder

Givet är följande differentialekvation

$$\frac{dy}{dt} = \sin(3t) - 2y, \quad y(0) = 1.2 \quad \text{med } t \in [0, 8] \tag{4}$$

Vi vill lösa ovanstående differentialekvation numerisk med metoderna framåt Euler och bakåt Euler och undersöka hur felet avtar med steglängden h (noggrannheten) samt hur den numeriska lösningen beter sig för *stora* värden på h (stabilitet).

Börja gärna med att lösa uppgifterna F9 och F10 i Matlab Grader *under Laboration 2 - Förberedande uppgifter.*

Uppgift 2

Eulers metoder och noggrannhet

a) Differentialekvationen (4) har den analytiska lösningen

$$y(t) = \frac{93}{65}e^{-2t} - \frac{3}{13}\cos(3t) + \frac{2}{13}\sin(3t) \tag{5}$$

Verifiera att (5) är en lösning till differentialekvationen (4).

Eulers metoder och noggrannhet

b) Dela in tidsintervallet $[0, T] = [0, 8]$ i n ekvidistanta steg med steglängden $h = T/n$. Skriv ett program `Eulersmetoder.m` som beräknar lösningen med *framåt Euler* för $n = 50, 100, 200, 400$. Programmet ska plotta de fyra Euler-lösningarna och den exakta lösningen (5) i samma graf. Vad händer med skillnaden mellan den numeriska och den exakta lösningen när n ökar?

c) Låt lösningen med framåt Euler och steglängden h i en punkt t betecknas med $y_h(t)$. Beräkna felet i slutpunkten, $|y(8) - y_h(8)|$ för alla värden på n i b). Plotta felet i slutpunkten som funktion av steglängden h i ett loglog-diagram (använd funktionen `loglog`). Hur kan man få fram metodens noggrannhetsordning med hjälp av plotten?

Tips: Vi vet att $e_h \approx ch^p$. Om vi tar logaritmen på bägge sidor får vi $\ln e_h \approx p \ln h$.

d) Gör samma sak som i b) och c) men för *bakåt Euler*. Blir det någon väsentlig skillnad på resultaten?

EULERS METODER OCH STABILITET

e) Dela nu in tidsintervallet $[0, T] = [0, \mathbf{80}]$ i $n = 50, 100, 400, 800$ ekvidistanta steg. För varje värde på n, beräkna lösningen med *framåt Euler*. Plotta de fyra Euler-lösningarna tillsammans med den exakta lösningen i varsin figur (en figur för varje värde på n). Använd gärna `subplot` för att få alla plottar i ett figurfönster.

f) Gör samma sak som i e) men med *bakåt Euler*. Jämför figurerna för framåt och bakåt Euler. Vilka slutsatser kan du dra beträffande den numeriska stabiliteten för de två metoderna?

Skicka in programmet `Eulersmetoder.m`.

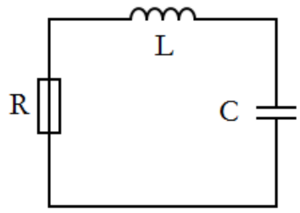
3. Dämpad svängningskrets - system av ordinära differentialekvationer

En dämpad svängningskrets bestående av en kondensator med kapacitans C, en spole med induktans L och en resistor med resistans R syns i figur 2. Spänningen över kretsen ges av en andra ordningens differentialekvationen

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = 0, \quad q(0) = 1 \quad \frac{dq}{dt}(0) = 0 \tag{6}$$

med avseende på laddningen q. Strömmen i kretsen ges av flödet av laddningar per tidsenhet, dvs

$$i = \frac{dq}{dt}. \tag{7}$$



Figur 2: Dämpad svängningskrets

Börja gärna med att lösa uppgifterna F11 och F12 i MATLAB GRADER *under Laboration 2 - Förberedande uppgifter.*

UPPGIFT 3

a) Skriv om ekvation (6) till ett system av första ordningens differentialekvationer med hjälp av ekvation (7). Skriv systemet på formen

$$\mathbf{y}' = \mathbf{F}(t, \mathbf{y}) \quad \text{där} \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} q \\ i \end{bmatrix}$$

Denna deluppgift ska du jobba med på övning 5.

b) Skriv en MATLAB-funktion som tar tiden t, en vektor $\mathbf{y}$, och värden på R, L, C som inparametrar. Funktionen ska returnera vektorn $\mathbf{F}(t, \mathbf{y})$.

Funktionen ska vara skriven så att den går att använda till MATLABs inbyggda ode-lösare `ode45`.

c) Skriv ett MATLAB-program `Kretsen.m` som löser systemet av differentialekvationer från **a)** med MATLABs inbyggda funktion `ode45` på tidsintervallet $t = [0, 20]$ med

i) $L = 2, C = 0.5, R = 1$ för dämpad svängning

ii) $L = 2, C = 0.5, R = 0$ för odämpad svängning

Plotta båda lösningarna som funktion av tiden och verifiera att de beter sig som förväntat.
Tips: För en Matlab-funktion med fler än två inparametrar som anropas `myode(t,y,c)` *kan anropet till* `ode45` *se ut så här:*
`[t,y] = ode45(@(t,y) myode(t,y,c), tspan, y0)`

d) Utöka ditt program så att det löser systemet av differentialekvationer från **a)** med Euler framåt på tidsintervallet $t = [0, 40]$ för $N = 40, 80, 160, 320$ ekvidistanta tidssteg. Använd $L = 2, C = 0.5, R = 1$ (dämpad svängning). Plotta lösningen för varje värde på N tillsammans med lösningen från `ODE45`. Använd gärna `subplot` med en plot för varje värde på N.

För vilka värden på N blir den numeriska lösningen stabil? För vilka värden på N blir den numeriska lösningen instabil? Notera att en numerisk lösning kan vara stabil men ändå inte noggrann. **Skicka in programmet** `Kretsen.m`.

4. Rörledningen

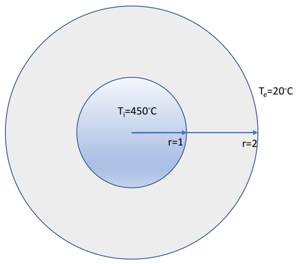
Genom en tjockväggig cylindrisk rörledning strömmar en het vätska med den konstanta temperaturen $T_i = 450$ C. Cylinderväggen har innerradien 1 längdenhet och ytterradien 2 längdenheter, se Figur 3.

Temperaturfördelningen $T(r)$ i cylinderväggen ($1 \leq r \leq 2$) bestäms av differentialekvationen

$$r\frac{d^2T}{dr^2} + \frac{dT}{dr} = 0 \tag{8}$$

Vid $r = 1$ har rörledningen samma temperatur som vätskan vilket ger randvillkoret

$$T = T_i \text{ vid } r = 1. \tag{9}$$



Figur 3: Rörledning med het vätska. Vi är intresserade av temperaturfördelningen i ett tvärsnitt av cylinderväggen.

Rörledningens yttersida, vid $r = 2$, kyls av den omgivande luften som har temperaturen $T_e = 20$ C. Det medför att värmeflödet som ges av $-kdT/dr$, är proportionell mot temperaturdifferensen $T - T_e$, där k är värmekonduktiviteten för materialet i rörledningen. Randvillkoret vid $r = 2$ blir då

$$k\frac{dT}{dr} = -\alpha(T - T_e) \text{ vid } r = 2. \tag{10}$$

Koefficienten α kallas för värmeöverföringstalet mellan rörledningen och luften.

Börja gärna med att lösa uppgifterna F13 och F14 i MATLAB GRADER *under Laboration 2 - Förberedande uppgifter.*

UPPGIFT 4

a) Diskretisera (8) med centrala finita differenser för $N = 4$. Använd randvillkoren (9) och (10). Skriv ut systemmatrisen och högerledet med alla element. Derivatan i randvillkoret vid $r = 2$ kan approximeras med en första ordningens differensapproximation,

$$k\frac{T_{N+1} - T_N}{h} = -\alpha(T_N - T_e).$$

Använd detta randvillkor för att eliminera T_{N+1} i ekvationssystemets sista ekvation. *Denna deluppgift ska du jobba med på övning 6.*

b) Använd finita differensmetoden för att beräkna en approximation till $T(r)$ då $1 \leq r \leq 2$.

Dela in intervallet $1 \leq r \leq 2$ i N delintervall dvs $r_j = 1 + jh$ där $j = 0, 1, 2, \ldots, N$ och $h = 1/N$ är steglängden. Låt $T_j \approx T(r_j)$.

Visa hur finita differensmetoden leder till att randvärdesproblemet kan approximeras med ett matrisproblem, $A\vec{T} = \vec{b}$ där $\vec{T} = [T_1, T_2, \ldots, T_N]^T$. *Denna deluppgift ska du jobba med på övning 6.*

c) Låt $k = \alpha = 1$. Skriv ett MATLAB-program `Roret.m` som löser randvärdesproblemet. Börja med $N = 25$ och fortsätt med successiva fördubblingar av N tills önskad precision (minst två korrekta decimaler) i lösningen ehålls i temperaturvärdet vid rörledningens ytterradie. Ange detta värde samt slutliga värdet på N. Rita även upp temperaturfördelningen i cylinderväggen.

d) Låt $k = 1$ och lös randvärdesproblemet för $\alpha = 0$ till $\alpha = 10$ där du delar in $\alpha = [010]$ i 20 intervall. Använd $N = 10000$ som du kom fram till i c). Spara temperaturvärdet vid rörledningens ytterradie för vaje värde på α och plotta sedan temperaturvärdet som funktion av α. Hur påverkas temperaturvärdet av α? Vad tror du händer om α går mot oändligheten? *Tips: För snabbare exekveringstid, lagra matrisen A som* `sparse`.

Skicka in programmet `Roret.m`.