Inledning

Målsättningen med laborationen är att du ska få förståelse för några av de metoder som vi har tagit upp i kursen samt att du ska träna upp dina färdigheter i att skapa effektiva MATLAB-program som löser ett givet problem.

Innan du börjar med LAB 1 behöver du ha kunskap om

- Minstakvadratmetoden
- Interpolation
- Numerisk lösning av icke-linjära ekvationer och ekvationssystem

Innan du börjar med laborationen rekommenderar vi att du bekantar dig med MATLAB genom MATLAB GRADER eller online-kursen MATLAB ONRAMP. Se kursens Canvassida om Laborationerna.

Redovisning

Redovisningen kommer att ske i form av ett individuellt datorprov med en quiz i Canvas. Vid datorprovet kommer ni ha tillgång till Matlab och de MATLAB-program som ni har skickat in och som löser uppgifterna 1-3. Inga andra hjälpmedel är tillåtna. Ni kommer att ha 60 minuter på er (90 minuter för er med förlängd skrivtid). Detaljer om hur provet går till finns i Canvas.

Provet kommer att bestå av tre teoretiska frågor och två praktiska uppgifter.

Teorifrågorna kommer att vara flervalsfrågor och handlar om de metoder och koncept som tas upp i laborationen.

Praktiska uppgifterna kommer vara av typen att göra någon modifikation av den kod ni skrivit för att lösa uppgifterna i laborationen. För att kunna göra uppgifterna på provet snabbt och enkelt, se till att koden ni har implementerat för laborationsuppgifterna är skriven så generellt att det är lätt att ändra saker i koden.

De praktiska uppgifterna kan vara av typen:

- Givet data, anpassa en given modell med minstakvadratmetoden.
- Hitta nollstället till en funktion $f(x)$ med Newtons metod eller sekantmetoden eller till ett system $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ med Newtons metod.
- Bestäm koefficienter i ett polynom som ska gå genom ett givet antal punkter.
- Ändra något i de redan lösta labbuppgifterna och besvara en fråga.

Katarina Gustavsson

1. Temperaturen i Stockholm - minstakvadratmetoden

Du har fått en fil `STHLMARLANDA2023.mat` (finns att ladda ner från Canvas) med uppmätta temperaturer (i grader) varje timma från 1 januari 2009 kl 00:00 till 31 december 2023 kl 23:59. Data kommer från SMHIs mätstation Stockholm-Arlanda. Du har fått i uppdrag av Stockholms bönder att med hjälp av denna data ta reda på om man kan se någon långsiktig ökning av temperaturen under åren 2009-2023.

För att kunna ta reda på detta ska du anpassa den givna temperaturdatan med hjälp av minstakvadratmetoden till modellen

$$T(t) = c_1 + c_2 t + c_3 \sin(\omega(t - t_s)) \tag{1}$$

där T är temperaturen i grader och t är tiden i timmar och $t = 0$ representerar kl 00:00 den 1 januari 2009. I modellen är parametrarna c_1, c_2, c_3 och t_s okända. c_1 representerar en ungefärlig medeltemperatur över tiden och c_2 representerar en långsiktigt minskning eller ökning av temperaturen. Den sista termen i modellen representerar den periodiska variationen av temperaturen över ett år där c_3 är amplituden, $\omega = 2\pi/(365 \cdot 24)$ ger periodtiden ett år och t_s är fasförskjutningen (i timmar).

UPPGIFT 1. MINSTAKVADRATMETODEN

Börja gärna med att lösa uppgifterna F1 och F2 i MATLAB GRADER *under Laboration 1 - Förberedande uppgifter.*

a) Visa att modellen (1) kan skrivas om på formen

$$T(t) = c_1 + c_2 t + A_0 \sin(\omega t) + A_1 \cos(\omega t) \tag{2}$$

där $A_0 = c_3 \cos(\omega t_s)$ och $A_1 = -c_3 \sin(\omega t_s)$

Detta kommer ni att jobba med på övningen den 19 januari.

Skriv ett MATLAB-program `MKV.m` som löser uppgifterna nedan.

Börja med att ladda ner och spara filen `STHLMARLANDA2023.mat` i samma mapp som du har ditt program `MKV.m`. För att läsa in den data som finns i filen skriver du `load STHLMARLANDA2023` i början av ditt program. Datafilen innehåller en vektor `Td` med alla uppmätta temperaturer för varje timma under den aktuella perioden.

b) Anpassa modellen (2) med minstakvadratmetoden till den temperaturdata som finns i filen `STHLMARLANDA2023.mat`.

Plotta data och den anpassade modellen i samma plott. Programmet ska även skriva ut värdet på amplituden, c_3, och fasförskjutningen, t_s, som förekommer i modellen (3). *Tips: för att beräkna c_3 kan ni använda $A_0^2 + A_1^2 =?$.*

c) Beräkna normen av residualen, $\|T_d - T_{mod}\|_2$ och skriv ut värdet. T_d är givna temperaturdata som finns i filen `STHLMARLANDA2023.mat` och T_{mod} är motsvarande temperaturvärden beräknat med modellen (2) (eller modellen (3)).

d) Kan man se en långsiktig ökning eller minskning av temperaturen under perioden 2009-2023?.

Notera: tillgänglig data är inte perfekt, data har inte registrerats varje timme, och det är därför något färre datapunkter än förväntat. Vi korrigerar inte för detta, utan du kan anta att data kommer i följd från startpunkten och framåt varje timme.

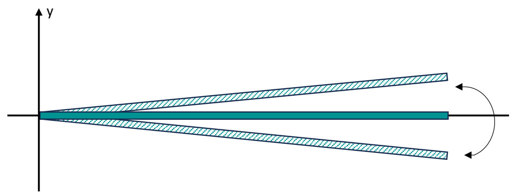
Skicka in programmet `MKV.m`

2. Svängande balk

Rörelsen hos en svängande balk, se Figur 1, kan beskrivas av följande ekvation för dämpad svängning

$$y(t) = 8e^{-\frac{t}{2}} \cos(3t)$$

där y är förskjutningen från jämviktsläget ($y = 0$) och t är tiden.



Figur 1: Balk som svänger kring sitt jämviktstillstånd

UPPGIFT 2. NUMERISK LÖSNING AV OLINJÄR EKVATION

Börja gärna med att lösa uppgifterna F3 och F4 i MATLAB GRADER *under Laboration 1 - Förberedande uppgifter.*

Nu vill man ta reda på den sista tidpunkten (kalla denna T) då balkens positiva förskjutning från jämviktsläget blir lika med ett givet värde H. Skriv ett MATLAB-program `Balk.m` som löser uppgifterna nedan.

a) Låt $H = 0.5$ och bestäm tidpunkten T med Newtons metod. Felet i tidpunkten ska vara mindre än 10^{-8}. Vilket startvärde har använts? Hur många iterationer krävdes och vad blev resultatet?

b) Bestäm tidpunkten T (för samma värde på H) med sekantmetoden. Felet i tidpunkten ska vara mindre än 10^{-8}. Vilka startvärden har använts? Hur många iterationer krävdes och vad blev resultatet? Behövs det fler eller färre steg med sekantmetoden för att nå ett fel som är mindre än 10^{-8} än med Newtons metod? Varför är det på det ena eller andra sättet?

c) Jämför konvergenshastigheten för de två metoderna genom att plotta $|t_{n+1} - t_n|$ som funktion av n för bägge metoderna i samma figur. Använd `semilogy` för att få en log-skala på t-axeln.

d) Låt nu $H = 2.8464405473$ och bestäm tidpunkten T med Newtons metod. Studera konvergenshastighet och känsligheten vad gäller val av startgissning. Vad beror förändringen jämfört med **a)** på?

Skicka in programmet `Balk.m`

3. Att anlägga en väg

Man vill anlägga en väg från P_0 till P_4. Men eftersom marken inom det streckade området inte är lämpligt som underlag för en väg måste vägsträckningen gå runt området, se Figur 1.

Uppgiften går ut på att bestämma en vägsträckning som går genom punkterna P_0, P_1, P_2, P_3 och P_4, se Figur 2 a).

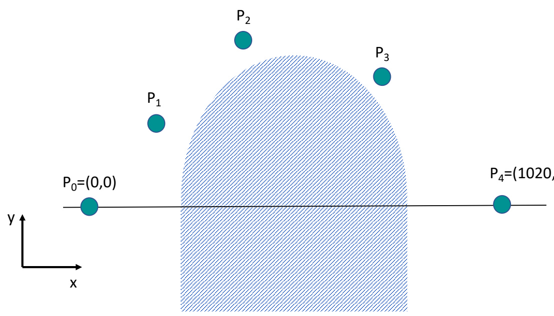
Koordinaterna för $P_0 = (0, 0)$ och för $P_4 = (1020, 0)$ är kända men koordinaterna för punkterna P_1, P_2 och P_3 måste bestämmas.

Att bestämma koordinaterna - Inbindning

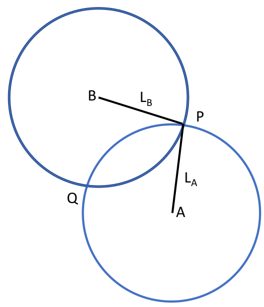
För att bestämma koordinaterna för en punkt P mäter man avstånden från $P = (x_P, y_P)$ till två punkter med kända koordinater, $A = (x_A, y_A)$ och $B = (x_B, y_B)$.

Om vi kallar avstånden mellan P och A och P och B för L_A respektive L_B så får vi följande ekvationssystem att lösa för x_p och y_p.

$$\begin{aligned}(x_P - x_A)^2 + (y_P - y_A)^2 &= L_A^2\\(x_P - x_B)^2 + (y_P - y_B)^2 &= L_B^2.\end{aligned}$$



(a) Skiss av vägbygget.



(b) Bestämning av koordinater för punkten P med inbindning

Figur 2: Caption place holder

Ekvationerna beskriver två cirklar med centrum i A och B och med radier som ges av L_A och L_B, se Figur 2 b).

Detta sätt att bestämma en punkts okända koordinater kallas inom geodesin för inbindning och är det som satellitnavigeringssystemet GPS utnyttjar.

Notera att ekvationssystemet kommer att ha två lösningar (skärningspunkter) eftersom det finns två punkter, P och Q, som båda ligger på samma avstånd från punkterna A och B. I vårt fall är det punkten P, det vill säga den högra skärningspunkten vi är intresserade av.

I tabellen nedan finns punkter A och B med kända koordinater samt uppmätta avstånd mellan A och P och B och P för punkterna P_1, P_2 och P_3.

Koordinaterna är angivna i meter från punkten $(0, 0)$.

P	$A = (x_A, y_A)$	$B = (x_B, y_B)$	L_A [m]	L_B [m]
P_1	(175, 950)	(160, 1008)	60	45
P_2	(410, 2400)	(381, 2500)	75	88
P_3	(675, 1730)	(656, 1760)	42	57

Uppgift 3. Newton för system och interpolation

Börja gärna med att lösa uppgiften F5 i Matlab Grader *under Laboration 1 - Förberedande uppgifter.*

Skriv ett Matlab-program `Road.m` som löser uppgifterna nedan.

a) Börja med att bestämma koordinaterna (med lämplig tolerans) för punkterna P_1, P_2 och P_3 med hjälp av inbindning. För varje punkt måste ett olinjärt ekvationssystem motsvarande (1)-(2) lösas med Newtons metod. Startvärden bestäms genom att rita upp cirklarna.

Programmet ska inte använda kodupprepning. Använd en `for`-slinga för de tre punkterna. Vad blir koordinaterna? Hur kan du förvissa dig om att Newtons metod konvergerar som den ska? Vilken konvergenshastighet ser du?

b) Bestäm det fjärdegradspolynom, $p(x)$, som går genom de fem punkterna P_0, P_1, P_2, P_3 och P_4. Rita upp vägen (grafen för polynomet) för $x \in (0, 1020)$. Rita även in de fem interpolationspunkterna och markera dem med `'o'`. Vad blir koefficienterna i polynomet?

Skicka in programmet `Road.m`.