

Lista 11

Uwaga 1: Użyj biblioteki `SymPy` do rozwiązywania zadań na tej liście. Instalacja biblioteki z wiersza poleceń - Windows: `pip install sympy`, Linux (typowa dystrybucja): `pip3 install sympy`.

Zadanie 1 (po 0,25 punktu za podpunkt).

- (a) Oblicz z dokładnością do 100 miejsc po przecinku wartość wyrażenia $\frac{10}{3} + \pi^{-e}$. (evalf)
(b) Znajdź rozwiązania równania (solve)

$$2x^4 + 61x^2 + 24 = 11x^3 + 76x.$$

- (c) Oblicz lewostronną i prawostronną granicę funkcji (limit)

$$f(x) = \frac{x \cos(x^2)}{\sin^2 x}$$

w punkcie $x_0 = 0$.

- (d) Wyznacz pochodną funkcji $f(x) = e^{x-x^x}$. (diff)
(e) Oblicz całkę nieoznaczoną (integrate)

$$\int \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x} dx.$$

- (f) Oblicz całkę oznaczoną (integrate)

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^{12} + 4}.$$

Zadanie 2 (0,5 punktu). Funkcja $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła w punkcie $x_0 \in (a, b)$, gdy

$$f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x).$$

Napisz funkcję, która dla wyrażenia symbolicznego opisującego funkcję f , symbolu x i liczby x_0 sprawdza, czy f jest ciągła w x_0 . Zilustruj działanie napisanej funkcji na przykładach.

Zadanie 3 (1 punkt). Rozważmy krzywą parametryczną $(x(t), y(t))$ gdzie $x, y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ są wielomianami stopnia co najwyżej 2. Napisz funkcję, która dla wyrażeń symbolicznych opisujących funkcje x i y , symbolu t oraz punktu $P = (x_0, y_0)$ leżącego poza krzywą znajduje (dowolny) punkt na krzywej położony najbliżej P .

Uwaga: założenie o postaci funkcji x, y jest tylko po to, aby zagwarantować, że stosowne funkcje `SymPy` są w stanie znaleźć rozwiązanie. Zakładamy przy tym, że współczynniki wielomianów x, y są stałymi liczbowymi. Możesz jednak pisać funkcję przy ogólniejszym założeniu, gdzie x, y są różniczkowalne.

Zadanie 4 (0,75 punktu). Zmodyfikuj klasę `Matrix` z rozwiązania Zadania 1 z Listy 10 (lub zauważ, że modyfikacja nie jest potrzebna) tak, żeby współczynnikami macierzy mogły być dowolne wyrażenia symboliczne `SymPy`. Następnie dopisz do tej klasy następujące metody:

- `determinant(self)` — dla macierzy kwadratowej `self` rozmiaru do 3×3 zwraca (jako wyrażenie SymPy) jej wyznacznik. Dla innych macierzy rzuca wyjątek.
- `characteristic_polynomial(self, x)` — dla macierzy kwadratowej `self` rozmiaru do 3×3 oraz symbolu `x` zwraca jej wielomian charakterystyczny (w którym zmienną jest `x`). Dla innych macierzy rzuca wyjątek.
- `eigenvalues(self)` — dla macierzy kwadratowej `self` rozmiaru do 3×3 zwraca listę jej wartości własnych. Dla innych macierzy rzuca wyjątek.

Zadanie 5 (0,25 punktu). Wykonaj poprzednie zadanie tak, żeby metody `determinant` oraz `characteristic_polynomial` działały dla macierzy kwadratowych dowolnego rozmiaru.