Tecnológico de Estudios Superiores de Ecatepec

Robótica Industrial

Tarea: Cinemática Directa y Cinemática Inversa

Sánchez Sandoval Carlos Alberto

Octubre 30, 2019

DESARROLLO

Cinemática Directa

La cinemática de un robot es el estudio de los resultados de los movimientos de un robot. En un análisis cinemático la posición, velocidad y aceleración de cada uno de los elementos del robot son calculadas sin considerar las fuerzas que causan el movimiento. La relación entre el movimiento y las fuerzas asociadas son estudiadas en la dinámica de robots.

De esta forma, el problema cinemático directo se reduce a encontrar una matriz homogénea de transformación T que relacione la posición y orientación del extremo del robot respecto del sistema de referencia fijo situado en la base de este.

Estas transformaciones básicas consisten en una sucesión de rotaciones y translaciones que permitan relacionar el sistema de referencia del elemento i con el sistema del elemento i - 1

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{3\times 3} & | & \mathbf{p}_{3\times 1} \\ - & | & - \\ \mathbf{f}_{1\times 3} & | & 1\times 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{rotation matrix} & | & \text{position vector} \\ - & | & - \\ \text{perspective transformation} & | & \text{scaling} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}_{x,\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{T}_{y,\phi} = \begin{bmatrix} \cos\phi & 0 & \sin\phi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\phi & 0 & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

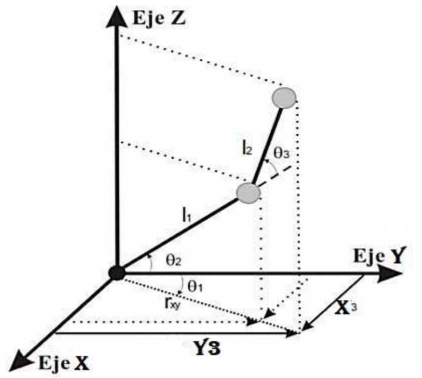
$$\mathbf{T}_{z,\theta} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Cinemática Inversa:

En Robótica, la Cinemática inversa es la técnica que permite determinar el movimiento de una cadena de articulaciones para logar que un actuador final se ubique en una posición concreta.

Nota: Tomando en cuenta que sólo funciona para tres grados de libertad

Es adecuado para robots de pocos grados de libertad o para el caso de que se consideren sólo los primeros grados de libertad para para posicionar el extremo. El procedimiento se basa en encontrar un número suficiente de relaciones geométricas en las que intervendrán las coordenadas del extremo del robot, sus coordenadas articulares y las dimensiones físicas de sus elementos.



Coordenadas (Px, Py, Pz) = P

TanΘ1 = $\frac{Co}{Ca} = \frac{Py}{Pz}$

Θ1 = arcty $\frac{Py}{Px}$

Considerando ahora únicamente r y utilizando el teorema del coseno, se tendrá $r^2 = P^2x + P^2y$

$r^2 + P^2z = I^22 + I^23 * 2 * I2 * I3$

$$cos\theta 3 = \frac{P_x^2 + P_y^2 - I_2^2 - I_3^2}{2 * I2 * I3}$$

Esta expresión permite obtener q1 en función del vector de posición del extremo P. No obstante, por motivos de ventajas computacionales, es más conveniente utilizar la expresión de arco tangente en lugar del arco seno. Puesto que

$$sen\theta 3 = \pm(1 - cos^2\theta 3)^{\frac{1}{2}} \text{ Se tendrá que}$$

$$\theta 3 = arctg(\pm\frac{(1 - cos^2\theta 3)\frac{1}{2}}{cos\theta 3}) = cos\theta 3 = \frac{(P_x)^2 + (P_y)^2 - (I_2)^2 - (I_3)^2}{2 * I2 * I3}$$

El cálculo de Θ2 se hace a partir de la diferencia de β y ∝

Θ2 = β - ∝ Entonces:

$$\beta = arctg(\frac{Pz}{r}) = arctg(\frac{Pz}{\pm(Px)^2+(Py)^2})^{\frac{1}{2}}$$

Como se muestra en la siguiente imagen se puede apreciar otra forma de resolver el problema de la cinemática

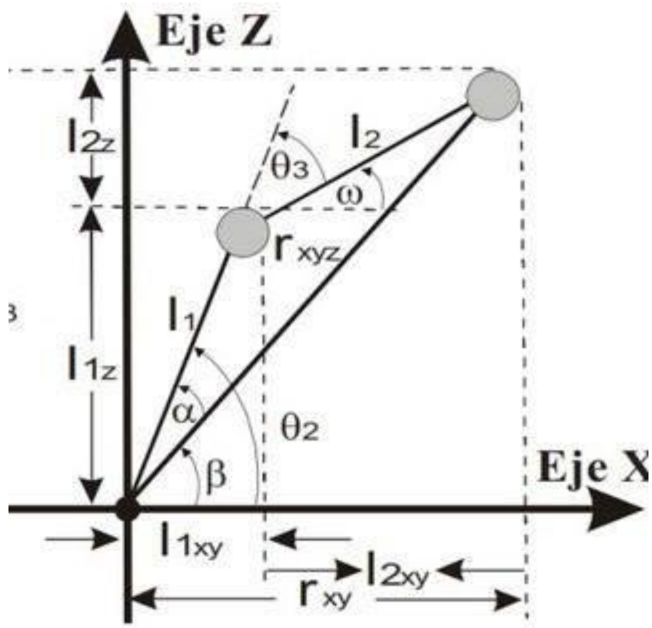
$$\boxed{q_1 = \mathrm{arctg}\left(\frac{p_y}{p_x}\right)}$$

$$\left.\begin{aligned} r^2 &= p_x^2 + p_y^2 \\ r^2 + p_z^2 &= l_2^2 + l_3^2 + 2 l_2 l_3 \cos q_3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\cos q_3 = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - l_2^2 - l_3^2}{2 l_2 l_3}$$

$$\mathrm{sen}\, q_3 = \pm\sqrt{1 - \cos^2 q_3}$$

$$\boxed{\begin{aligned} q_3 &= \mathrm{arctg}\left(\frac{\pm\sqrt{1-\cos^2 q_3}}{\cos q_3}\right) \\ \text{con} \quad \cos q_3 &= \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - l_2^2 - l_3^2}{2 l_2 l_3} \end{aligned}}$$



$$q_2 = \beta - \alpha$$

$$\beta = \mathrm{arctg}\left(\frac{p_z}{r}\right) = \mathrm{arctg}\left(\frac{p_z}{\pm\sqrt{p_x^2 + p_y^2}}\right)$$

$$\alpha = \mathrm{arctg}\left(\frac{l_3\, \mathrm{sen}\, q_3}{l_2 + l_3 \cos q_3}\right)$$

$$\boxed{q_2 = \mathrm{arctg}\left(\frac{p_z}{\pm\sqrt{p_x^2 + p_y^2}}\right) - \mathrm{arctg}\left(\frac{l_3\, \mathrm{sen}\, q_3}{l_2 + l_3 \cos q_3}\right)}$$