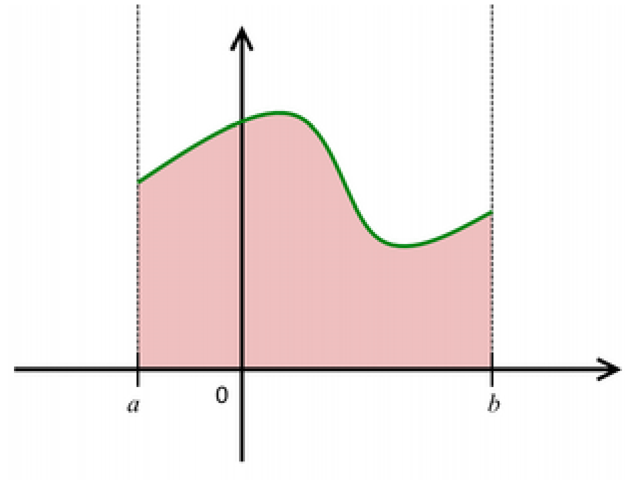
Calcul intégral

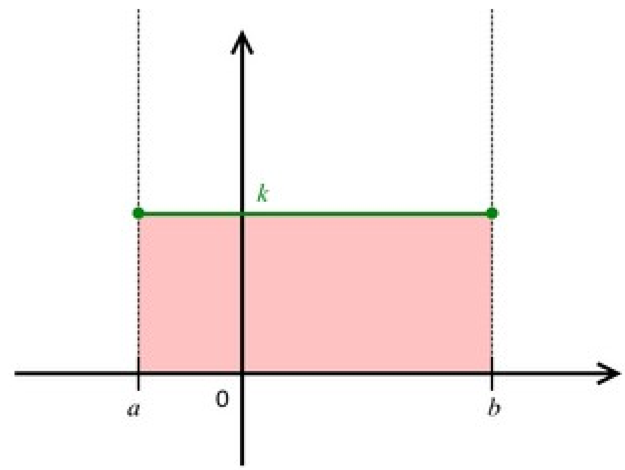
1. Aire sous une courbe

On considère une courbe de fonction **continue** et positive sur un intervalle [a ; b]



Exemple 1 : Une fonction constante définie par $f(x) = k > 0$ sur [a ; b]

- f est bien continue et positive sur [a ; b]



$$Aire = (b-a) \times k = bk - ak$$

$$\text{Notation} = [kx]_a^b$$

Or en posant $f(x) = k$ et $F(x) = kx$

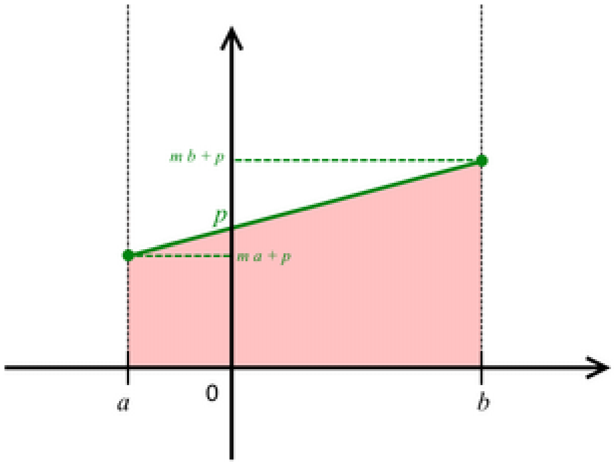
on observe que $F' = f$

et on dira que F est une **primitive** de f

Une fonction a une infinité de primitives

Remarque : $[kx]_a^b = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

Exemple 2 : Une fonction affine définie par $f(x) = m x + p$ avec m et p deux constantes sur l'intervalle $[a ; b]$



$$Aire = \text{moyenne des bases} \times \text{hauteur du trapèze}$$

$$Aire = \frac{ma + p + mb + p}{2} \times (b - a)$$

$$= \left(\frac{1}{2} ma + \frac{1}{2} mb + p\right)(b - a)$$

$$= \frac{1}{2} mab - \frac{1}{2} ma^2 + \frac{1}{2} mb^2 - \frac{1}{2} mba + pb - pa$$

$$= \left(\frac{1}{2} mb^2 + pb\right) - \left(\frac{1}{2} ma^2 + pa\right)$$

$$= \left[\frac{1}{2} mx^2 + px\right]_a^b$$

Soit en posant $F(x) = \frac{1}{2} mx^2 + px$

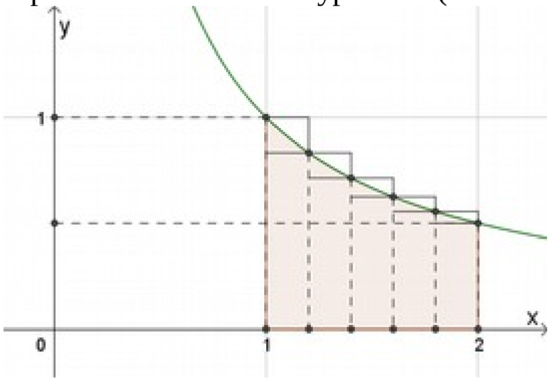
et $f(x) = mx + p$

On observe que $F'(x) = f(x)$

et F est une primitive de f sur $[a ; b]$

$$Aire = [F(x)]_a^b$$

Exemple 3 : Aire sous une hyperbole (fonction inverse)



Invention de Euclide et Archimède :

La méthode d'**exhaustion**

L'aire sous une courbe est partagée en rectangles de largeurs infinitésimales

$$Aire = \int_1^2 f(x)\,dx$$

Pour un partage en n rectangles on aurait :

$$\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2}{n}}+\frac{1}{1+\frac{3}{n}}+\ldots+\frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right) < Aire < \frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{0}{n}}+\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2}{n}}+\ldots+\frac{1}{1+\frac{n-1}{n}}\right)$$

Appelons *RS* la somme des rectangles supérieurs et *RI* la somme des rectangles inférieurs.

RI < *Aire* < *RS*

Incertitude de cet encadrement ? *RS – RI*

Soit $RS - RI = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{0}{n}} - \frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right)$

$$RS - RI = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{2}\right)$$

$$RS - RI = \frac{1}{n} \times \frac{1}{2}$$

$$RS - RI = \frac{1}{2n}$$

Exemples :

Pour une incertitude	Il faut
0,1	5 rectangles
0,01	50 rectangles
0,001	500 rectangles

<u>Suite de la démarche :</u>

1. Algorithme de calcul de *RI* et *RS* à partir de la quantité *n* de rectangles
2. Programmation de cet algorithme et réponses
3. Vérifier que les résultats obtenus correspondent à $[F(x)]_1^2 = F(2) - F(1)$

   avec *F* une primitive de *f* sur [1 ; 2]

   Soit *F* (*x*) = ln *x* par exemple...

   Soit *Aire* = ln 2 – ln 1 = ln 2

   Soit *Aire* ≈ 0,6931 …

$$\left[\begin{array}{l}
\text{Entrer } N \\
RI \leftarrow 0 \\
RS \leftarrow 0 \\
\text{Pour } I \text{ allant de } 0 \text{ à } N-1 \\
\quad | RI \leftarrow RI + (1/N) \times (1/(1+(1+I)/N)) \\
\quad | RS \leftarrow RS + (1/N) \times (1/(1+(I)/N)) \\
\text{Fin Pour} \\
\text{Afficher } RI \\
\text{Afficher } RS
\end{array}\right]$$

N	RI	RS
5	0,6456...	0,7456...
50	0,6882...	0,6982...
5000	0,6931...	0,6932...

Aire ≈ 0,6931 …

Conjecture :

Si f est une fonction **continue** et **positive** sur un intervalle $[a;b]$ alors l'aire sous la courbe est :

$$Aire=\int_a^b f(x)dx=[F(x)]_a^b=F(b)-F(a)$$

avec $F'=f$ (F est une primitive de f sur $[a;b]$)

Preuve :

On montre que $Aire=\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$

avec F une primitive de f sur $[a;b]$

* On pose $F(x)=\int_a^x f(t)dt$

alors $F(b)-F(a)=\int_a^b f(t)dt-\int_a^a f(t)dt$

$$=\int_a^b f(t)dt=Aire$$

* Il reste à montrer que $F'=f$ sur $[a;b]$

On calcule donc $\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$

Pour montrer que c'est égal à $f(x)$ pour $x\in[a;b]$

Calculons déjà le taux de variation :

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\frac{\int_a^{x+h} f(t)dt-\int_a^x f(t)dt}{h}$$

$$=\frac{\int_x^{x+h} f(t)dt}{h}=\frac{1}{h}\times\int_x^{x+h} f(t)dt \quad \text{pour } h>0$$

On calcule donc $\lim\limits_{h \to 0^+} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)\,dt$

// Schéma //

Si $h \to 0^+$ on peut arriver dans un intervalle $[x\,;x+h]$
où la fonction est croissante et alors

$h \times f(x) < \int_x^{x+h} f(t)\,dt < h \times f(x+h)$

donc $f(x) < \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)\,dt < f(x+h)$

soit avec le théorème des gendarmes $\lim\limits_{h \to 0^+} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)\,dt = f(x)$

// Schéma //

Si $h \to 0^+$ on peut arriver dans un intervalle $[x\,;x+h]$
où la fonction est décroissante et alors

$h \times f(x+h) < \int_x^{x+h} f(t)\,dt < h \times f(x)$

donc $f(x+h) < \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)\,dt < f(x)$

soit avec le théorème des gendarmes $\lim\limits_{h \to 0^+} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)\,dt = f(x)$

On a bien montré que $\lim\limits_{h \to 0^+} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x)$

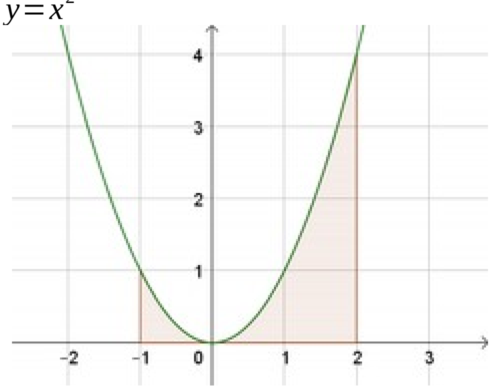
mais il faudrait le démontrer pour $h \to 0^-$

On a donc démontré que *F'* = *f* sur [*a* ; *b*]

F est donc une primitive de *f* sur [*a* ; *b*]

Exemple :

$y=x^2$



$$Aire=\int_{-1}^{2} x^2\,dx=[F(x)]_{-1}^{2}=F(2)-F(-1)$$

avec $F(x)=\frac{1}{3}x^3$

$$Aire=\frac{1}{3}2^3-\frac{1}{3}(-1)^3=\frac{9}{3}=3$$

Fonction	Primitive
e^{x}	e^{x}
e^{2x}	½ e^{2x}
$1/x$	$\ln x$

- Remarque :

On a montré que $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ était une primitive de f sur $[a;b]$ pour $x\in[a;b]$

C'est précisément **la** primitive qui s'annule en a

Les autres primitives sont définies par $G(x)=F(x)+C$ avec C une constante

$G(b)-G(a)=F(b)+C-[F(a)+C]=F(b)-F(a)$

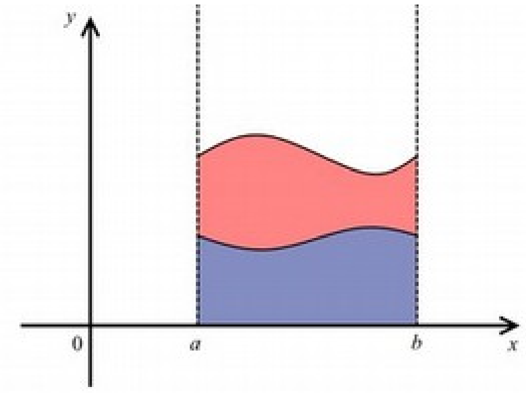
Donc toutes les primitives de f sur $[a;b]$ conviennent pour calculer $\int_a^b f(x)\,dx$

Tableau des primitives usuelles :

f(x) =	*F(x) =*
m (1 cste)	$mx+C$
x	$\frac{1}{2}x^2+C$
$mx+p$ (2 cste)	$\frac{m}{2}x^2+px+C$
x^2	$\frac{1}{3}x^3+C$
ax^2+bx+c (3 cste)	$\frac{a}{3}x^3+\frac{b}{2}x^2+cx+C$
$x^n ; n\in\mathbb{N}*$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}+C$
$\frac{1}{x}$	$\ln(x)+C$
$\frac{1}{x^2}$	$\frac{-1}{x}+C$
$\frac{1}{x^n} ; n\in\mathbb{N}**$	$\frac{x^{1-n}}{1-n}+C$
$\sqrt{x}$	$\frac{2}{3}x\sqrt{x}+C$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}+C$
e^x	e^x+C
$e^{kx} ; k\in\mathbb{Z}*$	$\frac{1}{k}e^{kx}+C$
$\cos x$	$\sin x+C$
$\sin x$	$-\cos x+C$

2. Applications du calcul intégral

1. Aire entre deux courbes

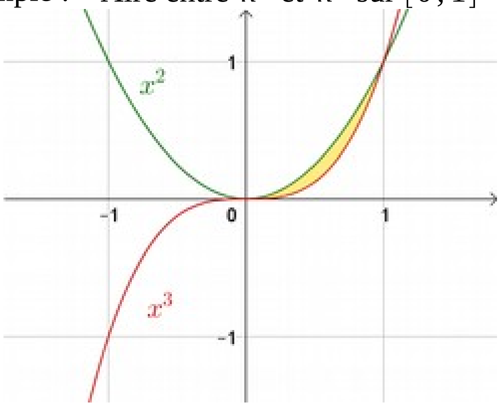


Si $f(x) \geq g(x)$ sur $[a;b]$

alors $\int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$

$= \int_a^b (f(x) - g(x))dx$ est l'aire entre C_f et C_g

Exemple : Aire entre x^2 et x^3 sur $[0;1]$



$$Aire = \int_0^1 (x^2 - x^3)dx$$

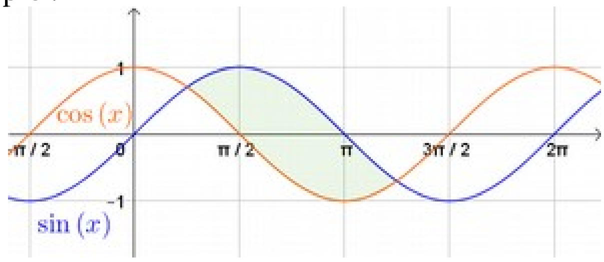
$$= [\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4]_0^1$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - (0-0) = \frac{4-3}{12} = \frac{1}{12}$$

Remarque :

Même si l'une des fonctions (ou même les deux) est (sont) négative(s), il faut juste vérifier laquelle est plus grande que l'autre !

Exemple :



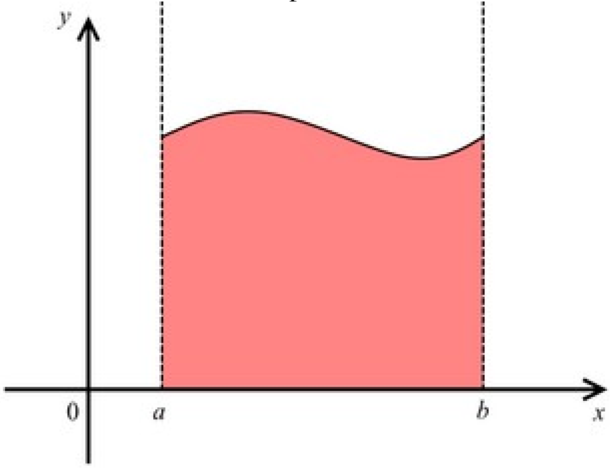
$$\begin{aligned} Aire &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (\sin x - \cos x)\, dx \\ &= [-\cos x - \sin x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \\ &= -\cos\frac{5\pi}{4} - \sin\frac{5\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= 4\frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2} \simeq 2{,}83 \end{aligned}$$

Remarque :

Si on ne sait pas quelle courbe est au dessus de l'autre entre *a* et *b*, il n'y a qu'à calculer $\int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx$

2. Valeur moyenne d'une fonction

Soit *f* une fonction continue positive sur un intervalle [*a* ; *b*]



Soit un rectangle de largeur $[ab]$ et de hauteur $\mu=\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$

L'aire de ce rectangle est donc :

$$(b-a)\times\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}=\int_a^b f(x)dx=Aire$$

Définition :

$\mu=\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$ est la valeur moyenne de f dans $[a;b]$

Exemple :

De la date 0 à la date 6, un prix a varié selon l'expression :

$P(x)=x2-6x+10$

avec x exprimé en mois

et $P(x)$ en €

1. Calculer *P* (0) et *P* (6)

   $P(0)=10\,€$

   $P(6)=10\,€$

2. Calculer le prix moyen entre 0 et 6

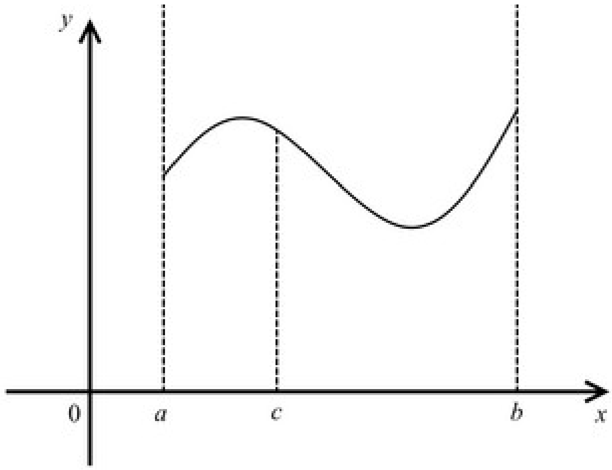
$$\bar{p}=\frac{\int_0^6 (x^2-6x+10)dx}{6-0}$$

$$=\frac{1}{6}\left[\frac{1}{3}x^3-3x^2+10x\right]_0^6$$

$$=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{3}6^3-3\times6^2+10\times6\right)-\frac{1}{6}\times0$$

$$=4\,€$$

3. Relation de Chasles



$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx$$

(Note : Chasles n'a jamais travaillé sur les vecteurs, ceci est la vraie relation de Chasles)

Remarque :

Si $c \notin [a;b]$ alors

on aura quand même $\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx$

Preuve :

$\int_a^c f(x)\,dx=[F(x)]_a^c=F(c)-F(a)$

$\int_c^b f(x)\,dx=[F(x)]_c^b=F(b)-F(c)$

donc $\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx$

$=F(c)-F(a)+F(b)-F(c)$

$=F(a)+F(b)$

Exemple : $f(x)=\begin{cases} x^2 \text{ si } x\leq 0 \\ x^3 \text{ si } x\geq 0 \end{cases}$

1. Calculer l'aire sous C_f entre -1 et 1

$$Aire=\int_{-1}^{1} f(x)\,dx=\int_{-1}^{0} f(x)\,dx+\int_{0}^{1} f(x)\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{0}+\left[\frac{1}{4}x^4\right]_{0}^{1}$$

$$=\frac{1}{3}0^3-\frac{1}{3}(-1)^3+\frac{1}{4}1^4-\frac{1}{4}0^4$$

$$Aire=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{4+3}{12}=\frac{7}{12}$$

2. Calculer la valeur moyenne de f entre -1 et 1

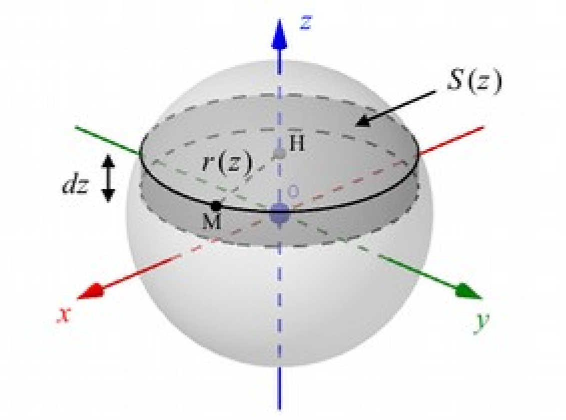
$$\mu=\frac{\int_{-1}^{1} f(x)\,dx}{1-(-1)}=\frac{\frac{7}{12}}{2}=\frac{7}{24}$$

4. Calcul de volumes

On considère un solide de l'espace rapporté à un $RON(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$

// Schéma //

Exemple : Volume de la boule de rayon *R* ?



$V=\int_{-R}^{R} S(z)\,dz$ avec $S(z)=\pi r^2(z)$

OHM rectangle en H donc

$OM^2=OH^2+HM^2$

$R^2=z^2+r^2(z)$

donc $r^2(z)=R^2-z^2$

$V=\int_{-R}^{R} \pi(R^2-z^2)\,dz$

$=[F(z)]_{-R}^{R}=F(R)-F(-R)$

avec $F(z)=\pi\left(R^2 z-\frac{z^3}{3}\right)$

donc $V=\pi\left(R^3-\frac{R^3}{3}\right)-\pi\left(-R^3+\frac{R^3}{3}\right)$

$=\pi\left(R^3-\frac{R^3}{3}+R^3-\frac{R^3}{3}\right)$

$=\pi R^3\left(1-\frac{1}{3}+1-\frac{1}{3}\right)$

$=\pi R^3\left(2-\frac{2}{3}\right)=\pi R^3\frac{6-2}{3}$

$=\frac{4\pi R^3}{3}$

3. Des propriétés de l'intégrale

- On admet que si f est une fonction **continue** entre deux réels a et b, alors elle admet une primitive F (et donc une infinité de primitives F + cste) et on pose

  $$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

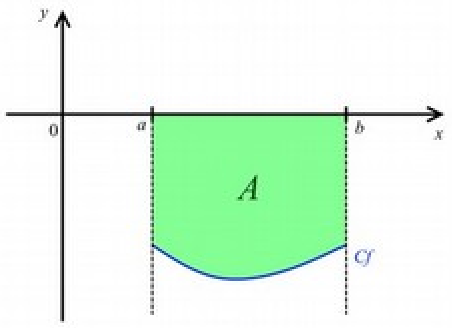
  Même si on n'a pas $a \leq b$

  Même si on n'a pas $f(x) \geq 0$ entre a et b

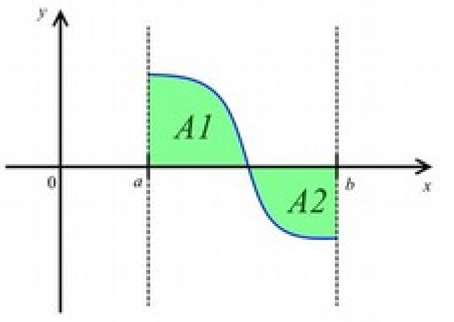
  Bien entendu, dans ces deux derniers cas,

  $\int_a^b f(x)\,dx$ ne calcule plus une aire sous la courbe C_f

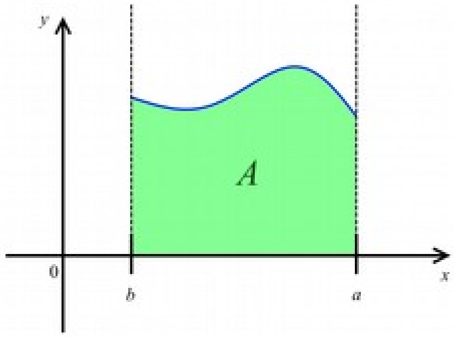
  Exemples :



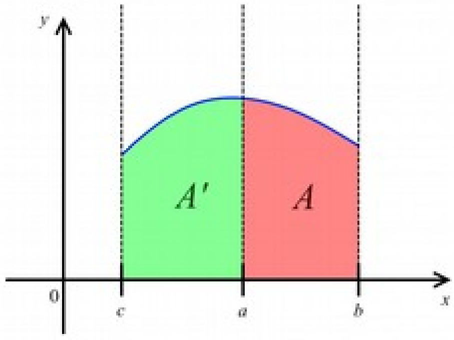
$$\int_a^b f(x)\,dx = -A$$



$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$
$$= A1 + (-A2) = A1 - A2$$



$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$
$$= -(F(a) - F(b))$$
$$= -\int_b^a f(x)\,dx = -A$$

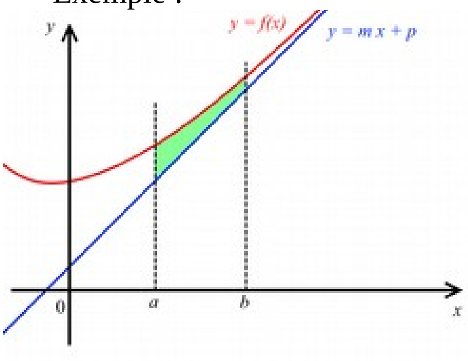


$$\int_a^b f(x)\,dx = A$$
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$
$$= -A' + (A' + A)$$
$$= A$$

- Si *f* et *g* sont deux fonctions **continues** entre deux réels *a* et *b* et si *α* et *β* sont deux nombres réels alors :

$$\int_a^b (\alpha f(x)+\beta g(x))\,dx=\alpha\int_a^b f(x)\,dx+\beta\int_a^b g(x)\,dx$$

Exemple :

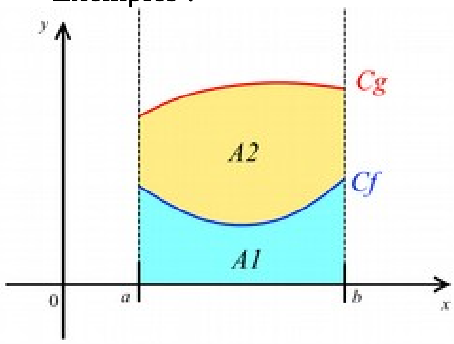


$$Aire=\int_a^b f(x)\,dx-\int_a^b (mx+p)\,dx$$
$$=\int_a^b (f(x)-(mx+p))\,dx$$

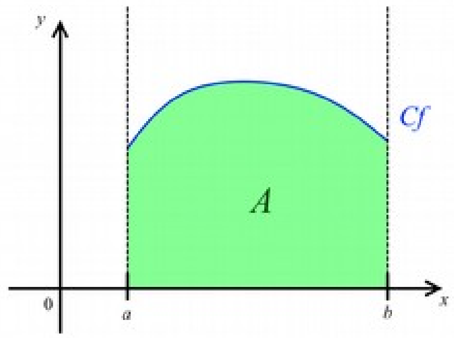
Remarque : ici, $\alpha = 1$ et $\beta = -1$

- Si *f* et *g* sont deux fonctions **continues** sur [*a* , *b*] tel que $f(x)\leq g(x)$ pour $x\in[a,b]$ alors $\int_a^b f(x)\,dx\leq\int_a^b g(x)\,dx$

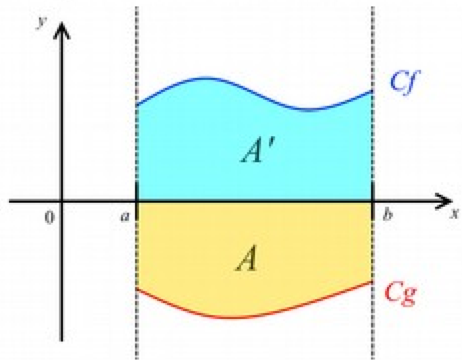
Exemples :



On a ici $f(x)\leq g(x)$ sur $[a,b]$
$\int_a^b f(x)\,dx=A1$
$\int_a^b g(x)\,dx=A1+A2$
On a bien $A1\leq A1+A2$



Si $f(x)\geq 0$ sur $[a,b]$
alors $\int_a^b f(x)\,dx\geq\int_a^b 0\,dx$
donc $A\geq G(b)-G(a)$
avec G une primitive de 0 sur $[a,b]$
soit une constante k
donc $A\geq k-k=0$



Si $f(x)\leq 0\leq g(x)$ sur $[a,b]$
alors $f(x)\leq g(x)$ sur $[a,b]$
alors $\int_a^b f(x)\,dx\leq\int_a^b g(x)\,dx$

alors $-A\leq A'$