Révision sur les suites numériques

- Une suite numérique se note u ou (u_n).
  Elle décrit un phénomène **discret** dépendant d'une variable $n \in \mathbb{N}$
  à partir d'un certain rang n_0 appelé « rang initial »
  Les **termes** notés $u_n \in \mathbb{R}$

- Modes de génération
  On peut définir une suite :
  1. Par **son terme général**, ou de façon explicite
     Ex : (u_n) définie par $u_n = n^2+1$ à partir du rang $n_0 = 0$
     (v_n) définie par $v_n = 1/n$ à partir du rang $n_0 = 1$
     Ces exemples engendrent
     (u_n): $u_0 = 1$; $u_1 = 2$; $u_2 = 5$ …
     (v_n): $v_1 = 1$; $v_2 = ½$; $v_3 = ⅓$ …
  2. Par **récurrence**, ou de façon implicite
     Ex : (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 100 \\ u_{n+1} = 0{,}1\, u_n \end{cases}$
     (v_n) définie par $\begin{cases} v_1 = 100 \\ v_n = 1{,}1\, v_{n-1} \end{cases}$
     Ces exemples engendrent
     (u_n): $u_0 = 100$; $u_1 = 10$; $u_2 = 1$; $u_3 = 0{,}1$ …
     (v_n): $v_1 = 100$; $v_2 = 110$; $v_3 = 121$ …

- Variation d'une suite
  Définition 1 :
  La variation **absolue** d'une suite est la différence $u_{n+1} - u_n$
  Ex :
  1. $u_0 = 1903$; $u_1 = 1919$; $u_2 = 1938{,}19$
     $u_1 - u_0 = 16$
     $u_2 - u_1 = 19{,}19$
  2. $v_n = 5 + 0{,}1\, n$
     $v_{n+1} - v_n = 5 + 0{,}1\,(n+1) - (5 + 0{,}1\, n) = 5 + 0{,}1\, n + 0{,}1 - 5 - 0{,}1\, n = 0{,}1$
  3. $\begin{cases} w_0 = 100 \\ w_{n+1} = 2\, w_n \end{cases}$
     $w_{n+1} - w_n = 2w_n - w_n = w_n$

  Propriété 1 :
  Si la variation absolue est une constante r, alors la suite est **arithmétique**
  et r est sa **raison**.
  Formule 1 : $u_n = u_0 + n\, r$
  Formule 2 : $u_{n+1} = u_n + r$

  Remarque :
  Si $r>0$ alors la suite est croissante.
  Si $r=0$ alors la suite est constante.
  Si $r<0$ alors la suite est décroissante

Définition 2 :

La variation **relative** d'une suite est le quotient $\dfrac{u_{n+1}-u_n}{u_n}$

Ex :

1. $u_0 = 1900$; $u_1 = 1919$; $u_2 = 1938{,}19$

$$\frac{u_1-u_0}{u_0}=\frac{19}{1900}=\frac{1}{100} \quad ; \quad \frac{u_2-u_1}{u_1}=\frac{19{,}19}{1919}=\frac{1}{100}$$

On peut conjecturer que la variation relative est constante

2. $v_n = 5 + 0{,}1\,n$

$$\frac{v_{n+1}-v_n}{v_n}=\frac{0{,}1}{5+0{,}1n}=\frac{1}{50+n}$$

3. $\begin{cases} w_0=100 \\ w_{n+1}=2w_n \end{cases}$

$$\frac{w_{n+1}-w_n}{w_n}=\frac{2w_n-w_n}{w_n}=\frac{w_n}{w_n}=1$$

Propriété 2 :

Si la variation relative est une constante, alors la suite est géométrique

et $\dfrac{u_{n+1}-u_n}{u_n}=\dfrac{u_{n+1}}{u_n}-1$ est une constante et on note $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=q$ la raison de cette suite

Formule 1 : $u_n=u_0\times q^n$

Formule 2 : $u_{n+1}=q\times u_n$

Ex :

La suite (v_n) n'est pas géométrique

La suite (u_n) semble géométrique de raison q = 1/100 + 1 = 1,01 et on conjecture que

$u_n=u_0\times q^n=1900\times 1{,}01^n$

$u_{n+1}=1{,}01u_n$

La suite (w_n) est géométrique de raison q = 1+1 = 2 et

$w_n=w_0\times q^n=100\times 2^n$

$w_{n+1}=2w_n$

Remarque :

Pour u_0 positif,

Si $q>1$ alors la suite est croissante (strictement)

Si $q=1$ alors la suite est constante

Si $0<q<1$ alors la suite est décroissante (strictement)

Si $q=0$ alors la suite est constante à partir du rang 1

Si $q<0$ alors la suite est alternée (varie entre positif et négatif)

Dans le cas de u_0 négatif, les variations sont inversées