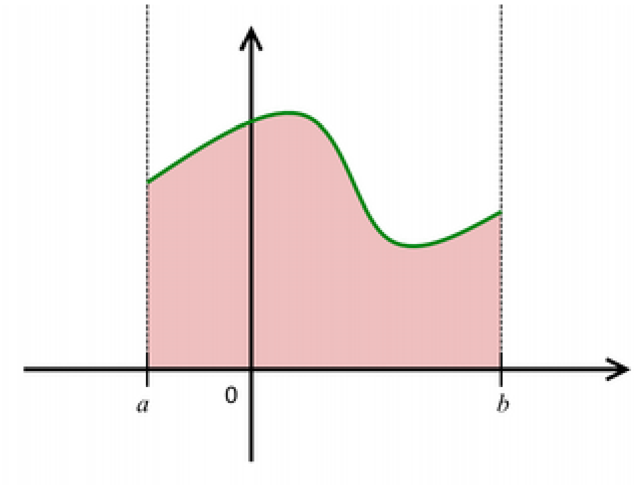
Calcul intégral

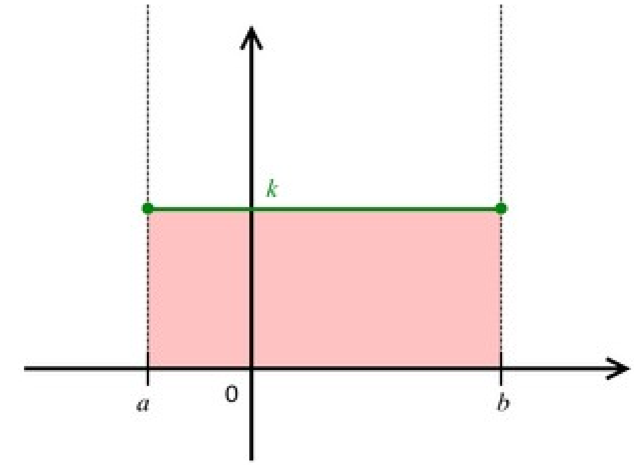
1. Aire sous une courbe

On considère une courbe de fonction **continue** et positive sur un intervalle [a ; b]



Exemple 1 : Une fonction constante définie par $f(x) = k > 0$ sur [a ; b]

- f est bien continue et positive sur [a ; b]



$$Aire=(b-a)\times k=bk-ak$$

$$\text{Notation}=[kx]_a^b$$

Or en posant $f(x) = k$ et $F(x) = kx$

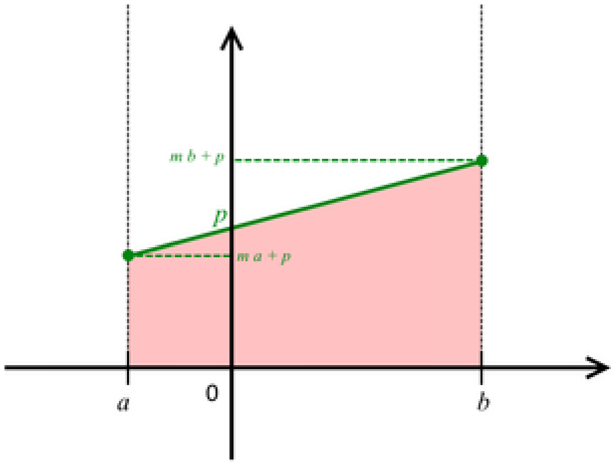
on observe que $F' = f$

et on dira que F est une **primitive** de f

Une fonction a une infinité de primitives

Remarque : $[kx]_a^b=[F(x)]_a^b=F(b)-F(a)$

Exemple 2 : Une fonction affine définie par $f(x) = mx + p$ avec m et p deux constantes sur l'intervalle $[a ; b]$



$Aire = \text{moyenne des bases} \times \text{hauteur du trapèze}$

$$Aire = \frac{ma + p + mb + p}{2} \times (b - a)$$

$$= \left(\frac{1}{2}ma + \frac{1}{2}mb + p\right)(b - a)$$

$$= \frac{1}{2}mab - \frac{1}{2}ma^2 + \frac{1}{2}mb^2 - \frac{1}{2}mba + pb - pa$$

$$= \left(\frac{1}{2}mb^2 + pb\right) - \left(\frac{1}{2}ma^2 + pa\right)$$

$$= \left[\frac{1}{2}mx^2 + px\right]_a^b$$

Soit en posant $F(x) = \frac{1}{2}mx^2 + px$

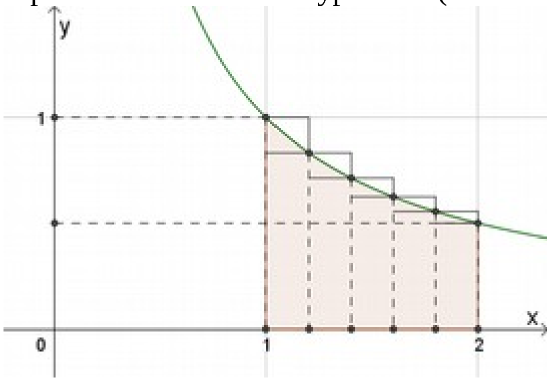
et $f(x) = mx + p$

On observe que $F'(x) = f(x)$

et F est une primitive de f sur $[a ; b]$

$Aire = [F(x)]_a^b$

Exemple 3 : Aire sous une hyperbole (fonction inverse)



Invention de Euclide et Archimède :

La méthode d'**exhaustion**

L'aire sous une courbe est partagée en rectangles de largeurs infinitésimales

$$Aire=\int_1^2 f(x)\,dx$$

Pour un partage en n rectangles on aurait :

$$\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2}{n}}+\frac{1}{1+\frac{3}{n}}+\ldots+\frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right)<Aire<\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{0}{n}}+\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2}{n}}+\ldots+\frac{1}{1+\frac{n-1}{n}}\right)$$

Appelons *RS* la somme des rectangles supérieurs et *RI* la somme des rectangles inférieurs.

RI < *Aire* < *RS*

Incertitude de cet encadrement ? *RS* – *RI*

Soit $RS-RI=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{0}{n}}-\frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right)$

$$RS-RI=\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{2}\right)$$

$$RS-RI=\frac{1}{n}\times\frac{1}{2}$$

$$RS-RI=\frac{1}{2n}$$

Exemples :

Pour une incertitude	Il faut
0,1	5 rectangles
0,01	50 rectangles
0,001	500 rectangles

<u>Suite de la démarche :</u>

1. Algorithme de calcul de *RI* et *RS* à partir de la quantité *n* de rectangles
2. Programmation de cet algorithme et réponses
3. Vérifier que les résultats obtenus correspondent à $[F(x)]_1^2=F(2)-F(1)$

   avec *F* une primitive de *f* sur [1 ; 2]
   Soit *F* (*x*) = ln *x* par exemple...
   Soit *Aire* = ln 2 – ln 1 = ln 2
   Soit *Aire* ≈ 0,6931 …

```
Entrer N
 RI ← 0
 RS ← 0
 Pour I allant de 0 à N−1
   |RI ← RI + (1/N)×(1/(1+(1+I)/N))
   |RS ← RS + (1/N)×(1/(1+(I)/N))
 Fin Pour
Afficher RI
Afficher RS
```

2.