Lot F2

Tom Gilgenkrantz

Mardi 2 Avril 2024

1 Introduction

On reprend les notations de la partie précédente. On note alors la valeur du $k^{\text{ème}}$ tetromino placé Y_k et la valeur du $k^{\text{ème}}$ tetromino laissé dans le sac L_k, $\forall k \in \mathbb{N}^*$.

2 P(i , j) et Q(i , j)

Soit $i, j \in$ 1,2,3 et k $\in \mathbb{N}^*$. On pose $P(i,j) = P(Y_{k+1} = j | L_k = i)$ et $Q(i,j) = P(L_{k+1} = j | L_k = i)$.
Ainsi :

$$\begin{cases} P(1,1) = p \\ P(2,1) = 0 \\ P(3,1) = 0 \\ P(1,2) = q \\ P(2,2) = 1 - r \\ P(3,2) = 0 \\ P(1,3) = r \\ P(2,3) = r \\ P(3,3) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} Q(1,1) = 1 \\ Q(2,1) = p \\ Q(3,1) = p \\ Q(1,2) = 0 \\ Q(2,2) = 1 - p \\ Q(3,2) = q \\ Q(1,3) = 0 \\ Q(2,3) = 0 \\ Q(3,3) = r \end{cases}$$

3 Egalités matricielles

En écrivant les matrices P et Q tel que $\forall i,j \in$ 1,2,3, $P_{i,j} = P(i,j)$ et $Q_{i,j} = Q(i,j)$, on obtient :

$$P = \begin{pmatrix} p & q & r \\ 0 & 1-r & r \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ p & 1-p & 0 \\ p & q & r" \end{pmatrix}$$

En prenant $p = q = r = \frac{1}{3}$, on a donc bien :

$$\begin{pmatrix} P(Y_{k+1}=1) & P(Y_{k+1}=2) & P(Y_{k+1}=3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(L_k=1) & P(L_k=2) & P(L_k=3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} P(L_{k+1}=1) & P(L_{k+1}=2) & P(L_{k+1}=3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(L_k=1) & P(L_k=2) & P(L_k=3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Par récurrence immédiate on obtient :

$$\begin{pmatrix} P(L_k=1) & P(L_k=2) & P(L_k=3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(L_1=1) & P(L_1=2) & P(L_1=3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}^{k-1}$$