期末试题选讲

线性代数

2020-2021学年第2学期

设矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&2&2&2\\0&0&3&3\\0&0&0&4\end{bmatrix}$，则秩 $r(A^2-2A)=$ ________.

易见 A 可逆，故

$$\mathrm{r}(A^2-2A)=\mathrm{r}(A(A-2E))=\mathrm{r}(A-2E)$$

$$A-2E=\begin{bmatrix}-1&1&1&1\\0&0&2&2\\0&0&1&3\\0&0&0&2\end{bmatrix}\cong\begin{bmatrix}-1&1&1&1\\0&0&2&2\\0&0&0&2\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$\mathrm{r}(A^2-2A)=\mathrm{r}(A-2E)=3$

任意 3 维实列向量都可由向量组 $\alpha_1=(1,0,1)^T,\alpha_2=(1,-2,3)^T,\alpha_3=(t,1,2)^T$ 线性表示，则 t 应满足条件 ________.

任意三维列向量都能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，则向量组

$$e_1=(1,0,0)^T,\ e_1=(1,0,0)^T,\ e_1=(1,0,0)^T$$

能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，故

$$3=\mathrm{r}(e_1,e_2,e_3)\le \mathrm{r}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\le 3\Rightarrow \mathrm{r}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=3$$

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{bmatrix}1&1&t\\0&-2&1\\1&3&2\end{bmatrix}\cong\begin{bmatrix}1&1&t\\0&-2&1\\0&0&3-t\end{bmatrix}$$

故 t 满足的条件为 $t\neq 3$

当 λ 满足什么条件，方程组 $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + 2\lambda x_3 = 2 \\ x_1 + \lambda x_2 + (\lambda+1)x_3 = 2\lambda \\ (2\lambda-1)x_1 + x_2 + (3\lambda-1)x_3 = \lambda+1 \end{cases}$ 有唯一解、无穷多解、无解？有解时求出全部解.

经初等行变换，有 $\tilde{A} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 2\lambda & 2 \\ 1 & \lambda & \lambda+1 & 2\lambda \\ 2\lambda-1 & 1 & 3\lambda-1 & \lambda+1 \end{bmatrix}$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 1 & \lambda+1 & 3-\lambda \\ 0 & \lambda-1 & 0 & 3(\lambda-1) \\ 0 & 0 & \lambda(\lambda-1) & -(\lambda+1)(\lambda-1) \end{bmatrix}$$

设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，向量 $\boldsymbol{\gamma}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，证明向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma}$ 线性无关.

提示：用反证法 假设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta+\gamma$ 线性相关，因 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，则 $\beta+\gamma$ 能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，即存在数 k_1,k_2,k_3 使得

$$\beta+\gamma=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (1)$$

因 β 能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，则存在数 l_1,l_2,l_3 使得

$$\beta=l_1\alpha_1+l_2\alpha_2+l_3\alpha_3\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

将 (2) 式代入(1) 式并整理，得

$$\gamma=(k_1-l_1)\alpha_1+(k_2-l_2)\alpha_2+(k_3-l_3)\alpha_3$$

这表明，γ 能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，与题设矛盾，故向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta+\gamma$ 线性无关.

已知 A 是 n 阶实对称矩阵，$\lambda_1 \le \lambda_2 \le \cdots \le \lambda_n$ 是 A 的 n 个特征值，$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$ 是 n 维列向量，证明：当向量 x 的长度 $\|x\|=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots x_n^2}=1$ 时，$\lambda_1 \le x^T Ax \le \lambda_n$.

三阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 **1, 2**，**-3**，则行列式 $|\boldsymbol{A}^*+4\boldsymbol{E}|=$__________.

已知n阶方阵A满足$A^2-2A-3E=O$，A不是数量矩阵，请判 断A是否可对角化并证明你的结论

已知η_0为非齐次线性方程组$AX=\beta$的一个解，X_1,X_2为其导出组的基础解系，$\eta_1=\eta_0+X_1$，$\eta_2=\eta_0+X_2$，证明η_0，η_1，η_2为$AX=\beta$解集的极大无关组.

已知线性方程组$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=1 \\ 2x_1+3x_2+4x_3+5x_4=6 \\ 4x_1+5x_2+6x_3+ax_4=b \end{cases}$，请回答下列问题：

（1）方程组是否可能有唯一解，为什么？当参数 a， b 满足什么条件时，方程组无解？

（2）当参数 a， b 满足什么条件时，方程组有无穷多解？请求出此条件下方程组的解集

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & a & b \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & a-6 & b-7 \end{bmatrix}$$

设 6 阶方阵 A 满足 $A^2+12E=7A$ 并且 $A-3E$ 的秩为 1，则 $A-4E$ 的秩为__________.

按列分块的三阶方阵 $A=\begin{bmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}\alpha_1+\alpha_2 & \alpha_2+\alpha_3 & \alpha_3+\alpha_1\end{bmatrix}$，且 $|A|=2017$，则 $|B|=$ ________.

已知矩阵 X 满足方程 $A^2X=A+3E-AX+6X$，其中 $A=\begin{bmatrix}3 & 1 & 1\\1 & 4 & 3\\2 & -1 & -3\end{bmatrix}$，$E$ 为三阶单位矩阵，求矩阵 X.

已知线性方程组$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4 \\ 5x_1 + 6x_2 + 7x_3 = 8 \\ 9x_1 + 10x_2 + ax_3 = b \end{cases}$，请回答下列问题：

（1）当参数 a， b 满足什么条件时，方程组无解?何时有唯一解？

（2）当参数 a， b 满足什么条件时，方程组有无穷多解？请求出此条件下方程组的解集.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & a & b \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & a-11 & b-12 \end{bmatrix}$$

已知 $\alpha \in R^n$ 为单位向量，即 $|\alpha|=1$，n 阶方阵 $H=E-2\alpha\alpha^T$ 称为 Householder 矩阵，在很多领域具有重要应用.

（1）证明 H 为正交矩阵；

（2）若有两个 R^n 中向量 X,Y 满足 $X \neq Y$ 且 $|X|=|Y| \neq 0$，令 $\alpha=\dfrac{X-Y}{|X-Y|}$，$H=E-2\alpha\alpha^T$，

证明 $HX=Y$.

2, 证明：(1)由于 $|\alpha|=1$, 有 $\alpha^T\alpha=(\alpha,\alpha)=|\alpha|^2=1$, 则

$HH^T=(E-2\alpha\alpha^T)(E-2\alpha\alpha^T)=E-4\alpha\alpha^T+4\alpha\alpha^T\alpha\alpha^T=E-4\alpha\alpha^T+4\alpha\alpha^T=E$,

这说明 H 为正交矩阵.

(2)由 $|X|=|Y|$, 得 $|X-Y|^2=(X-Y,X-Y)=|X|^2+|Y|^2-2(X,Y)=2|X|^2-2(X,Y)=2(X,X)-2(X,Y)=2(X,X-Y)$.

两边同除以 $|X-Y|$, 得 $|X-Y|=2\frac{(X,X-Y)}{|X-Y|}=2(X,\frac{X-Y}{|X-Y|})=2(X,\alpha)=2(\alpha,X)$.

从而有 $HX=(E-2\alpha\alpha^T)X=X-2\alpha\alpha^TX=X-2(\alpha,X)\alpha=X-|X-Y|\alpha=X-(X-Y)=Y$.

已知向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$中每一个向量的长度都等于 2，而其中任意两不同向量的内积都为 1，证明向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$线性无关.

1，证明：设 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3+k_4\alpha_4+k_5\alpha_5=0$,

两边分别依次与 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 作内积, 由于每个向量的长度为2，不同两个向量的内积为1，可得：

$$\begin{cases} 4k_1+k_2+k_3+k_4+k_5=0, \\ k_1+4k_2+k_3+k_4+k_5=0, \\ k_1+k_2+4k_3+k_4+k_5=0, \\ k_1+k_2+k_3+4k_4+k_5=0, \\ k_1+k_2+k_3+k_4+4k_5=0. \end{cases} \quad (4分)$$

将5个式子相加得：$k_1+k_2+k_3+k_4+k_5=0$, 依次减去以上每个式子可得$k_1=k_2=k_3=k_4=k_5=0$. 从而有 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 线性无关.

若存在3维列向量不能由向量组 $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\k\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$ 线性表出，则 $k=$ ________.

设A为3阶实对称阵, $A^2-A=2E, tr(A)=0$,则二次型 X^TAX 的规范形为 ________.

多项选择：下述集合中，________不是 R^3 的子空间.

A. $\{(x_1,x_2,x_3)|\ x_1+2x_2=x_2+3x_3=0; x_1,x_2,x_3\in R\}$

B. $\{(x_1,x_2,x_3)|\ x_1x_2=0; x_1,x_2,x_3\in R\}$

C. $\{(x_1,x_2,x_3)|\ (x_1-x_2+x_3)^2+(3x_2-4x_3)^2=0; x_1,x_2,x_3\in R\}$

D. $\{(x_1,x_1+1,x_3)|x_1,x_3\in R\}$

E. $\{(x_1+1,x_2-1,x_1+x_2)|x_1,x_2\in R\}$.

求向量组 $\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\2\\3\\5\end{bmatrix},\alpha_2=\begin{bmatrix}4\\4\\6\\10\end{bmatrix},\alpha_3=\begin{bmatrix}4\\3\\4\\6\end{bmatrix},\alpha_4=\begin{bmatrix}1\\2\\4\\8\end{bmatrix}$ 张成的子空间的维数，以及该向量组的一个极大线性无关组，并用该极大线性无关组线性表示其余向量.

矩阵 $A=\begin{pmatrix}3&2&0\\5&3&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$ 满足方程 $A^2+B=AB+A^*$, 求矩阵 B.

$|A|=1$, 故 $A^2+B=AB+A^*\Rightarrow A^3+AB=A^2B+|A|E=A^2B+E$.

$\Rightarrow A^3-E=(A^2-A)B$. 易知 $|A-E|$ 可逆,

故 $AB=A^2+A+E\Rightarrow B=A+E+A^{-1}$.

由准对角阵的求逆公式有 $A^{-1}=\begin{pmatrix}-3&2&0\\5&-3&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$.

$$B=\begin{pmatrix}3&2&0\\5&3&0\\0&0&-1\end{pmatrix}+E+\begin{pmatrix}-3&2&0\\5&-3&0\\0&0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&4&0\\10&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}.$$

已知 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$ 和 $\beta_1=\begin{pmatrix}5\\1\\7\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}7\\2\\9\end{pmatrix}$ 为 $\boldsymbol{R}^3$ 的同一个子空间的两组基. 求出基 α_1,α_2 到基 β_1,β_2 的过渡矩阵，进一步求 $\beta_1+\beta_2$ 在基 α_1,α_2 下的坐标.

当 a,b 取何值时，方程组 $\begin{cases} x_1 - x_2 - 6x_3 - x_4 = b \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 6x_3 + 4x_4 = -1 \\ 3x_1 + 2x_2 + ax_3 + 7x_4 = -1 \end{cases}$ 有解？有解时求出通解.

证明：向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关的充分必要条件是向量组 $\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_2+\alpha_3$，$\alpha_3+\alpha_1$ 线性无关.

设方阵 A 使得 $A^3=2A$，证明 A^2-E 可逆，并求 A^2-E 的逆矩阵.

设 $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -2\\ 2 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 2\end{bmatrix}, \alpha=\begin{pmatrix}k\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$，若 $A\alpha$ 与 α 线性相关，则 $k=$________.

若 A 的伴随矩阵 $A^*=\begin{bmatrix}1 & 2 & 4 & 6\\ 0 & 2 & 2 & 4\\ 0 & 0 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$，则 A^2-A 的秩为 ________.

设 $\alpha_1=(1,2,-1,0)^T,\alpha_2=(1,1,0,2)^T,\alpha_3=(2,1,1,k)^T$，由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 可生成 R^4 的子空间 H.

若 H 的维数为 2，则 $k=$________.

设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，方程组 $Ax=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ 的通解为 $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$，其中 c 为任意实数，则 $\alpha_1+2\alpha_2=$________.

设 A 为 3 阶方阵，$|A+E|=|A-E|=0$，A 的迹 $tr(A)=2$，则 $\left|A^2+A^*-E\right|=$________.

设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 在正交变换 $x=Py$ 下的标准形为 $y_1^2+2y_2^2-3y_3^2$，其中 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$．若 $Q=(-\alpha_1,\alpha_3,\alpha_2)$，则 $f(x_1,x_2,x_3)$ 在正交变换 $x=Qy$ 下的标准形为

________________.

设原二次型的矩阵为 A，由题知

$$P^TAP=\begin{bmatrix}1&&\\&2&\\&&-3\end{bmatrix},Q=PB,B=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow Q^TAQ=B^T(P^TAP)B$$

$$=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&&\\&2&\\&&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&&\\&-3&\\&&2\end{bmatrix}$$

已知$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是$R^3$的一个基，$\beta_1=2\alpha_1+2k\alpha_3$, $\beta_2=2\alpha_2$, $\beta_3=\alpha_1+(k-1)\alpha_3$.

（1）证明β_1,β_2,β_3为R^3的一个基。求出基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$到基$\beta_1,\beta_2,\beta_3$的过渡矩阵。

（2）k为何值时，存在非零向量ξ，其在两组基下的坐标相同，并求出所有的ξ.

解：（1）$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ 2k & 0 & k-1\end{pmatrix}$,

因$\begin{vmatrix}2 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ 2k & 0 & k-1\end{vmatrix}=-4\neq 0$，$\beta_1,\beta_2,\beta_3$也是$R^3$的一个基。

$A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ 2k & 0 & k-1\end{pmatrix}$是基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$到基$\beta_1,\beta_2,\beta_3$的过渡矩阵。

（2）设非零向量ξ在两组基下的坐标都是$x=(x_1,x_2,x_3)^T\neq 0$，则

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)x=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)x=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)Ax.$$

由坐标唯一性，有　　$Ax=x$　　..

整理得线性方程组：$\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\2k&0&k-2\end{pmatrix}x=0$存在非零解，可得$k=-2$

....

此时方程组化为$\begin{cases}x_1+x_3=0\\x_2=0\end{cases}$，可求得通解为$x=(c,0,-c)^T,c\in R$，

故　$\xi=c\alpha_1-c\alpha_3,c\in R$.　　..

设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ 2 & a & 1\\ -1 & 1 & a\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 1 & a\\ -a-1 & b\end{pmatrix}$，当 a,b 为何值时，方程组 $AX=B$

有唯一解？当 a,b 为何值时，方程组有无穷多解，此时求其全部解。

解：$(A,B)\rightarrow\begin{pmatrix}1 & -1 & -1 & 2 & 2\\ 0 & a+2 & 3 & -3 & a-4\\ 0 & & & & \end{pmatrix}$

故当 $a=-2, b=4$ 时，有无穷多解，

（1）$|A|\neq 0$，即 $a\neq 1$ 且 $a\neq -2$ 时，有唯一解。

（2）$|A|=0$ 时，$a=1$ 或 $a=-2$.

当 $a=-2$，$(A,B)\rightarrow\begin{pmatrix}1 & -1 & -1 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 3 & -3 & -6\\ 0 & 0 & 0 & 0 & b-4\end{pmatrix}$，

故当 $a=-2, b=4$ 时，有无穷多解，

此时 $(A,B)\to\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，全部解为 $X=\begin{pmatrix}k_1 & k_2\\ k_1 & k_2\\ -1 & -2\end{pmatrix}, k_1,k_2\in R$.

当 $a=1$，$(A,B)\to\begin{pmatrix}1 & -1 & -1 & 2 & 2\\ 0 & 3 & 3 & -3 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & b+2\end{pmatrix}$，

故当 $a=1, b=-2$ 时，方程组有无穷多解，

此时 $(A,B)\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，全部解为 $X=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -k_1 & -k_2\\ k_1-1 & k_2-1\end{pmatrix}, k_1,k_2\in R$.

设 A 为 3 阶实对称矩阵，A 的秩为 2，且 $A\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & -1\\0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -1\\1 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}$.

（1）求 A 的所有特征值与特征向量；（2）求矩阵 A.

解：（1）由已知，$A\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$，$A\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}$，

所以 $\lambda=1$ 是 A 的特征值，$\alpha_1=(1,1,0)^T$ 是 A 属于 1 的特征向量；

$\lambda=-1$ 是 A 的特征值，$\alpha_2=(1,-1,0)^T$ 是 A 属于 -1 的特征向量。

由 $r(A)=2$ 知 $|A|=0$，所以 $\lambda=0$ 是 A 的特征值，

设 α_3 是 A 属于 0 的特征向量，因实对称矩阵不同特征值的

特征向量相互正交，可取 $\alpha_3=(0,0,1)^T$.

故矩阵 A 的特征值为 $1,-1,0$，特征向量依次为 $k_1(1,1,0)^T, k_2(1,-1,0)^T, k_3(0,0,1)^T$，

其中 k_1,k_2,k_3 均是不为零的任意实数。

（2）令 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&-1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，$\Lambda=\begin{bmatrix}1&&\\&-1&\\&&0\end{bmatrix}$，则 $P^{-1}AP=\Lambda$.

故 $A=P\Lambda P^{-1}=\begin{bmatrix}1&-1&0\\1&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&0\\1&-1&0\\0&0&1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$.

设 A 是 $m\times n$ 矩阵，并存在 $n\times m$ 矩阵 B 和 C，使得 $BA=E_n, AC=E_m$，其中 E_n 和 E_m 分别为 n 阶单位矩阵和 m 阶单位矩阵。证明：$m=n, B=C$.

证明：$B=BE_m=BAC=E_nC=C$.

$r_A\geq r_{BA}=n$，$r_A\geq r_{AC}=m$，故 $r_A\geq \max\{m,n\}$.

又 $r_A\leq \min\{m,n\}$，故 $m=n$.

设 A 是 n 阶对称正定矩阵，B 是秩为 r 的 $n\times r$ 矩阵。证明：$B^T AB$ 是对称正定矩阵

证明：因 $\left(B^T AB\right)^T = B^T A^T \left(B^T\right)^T = B^T AB$，故 $B^T AB$ 为 r 阶对称阵.

任意 r 维向量 $x \neq 0$；有 $Bx \neq 0$，（否则由 $r_B = r$ 有 $x = 0$）

则 $x^T B^T ABx = (Bx)^T A(Bx) > 0$，故 $B^T AB$ 正定。

A 为 3 阶矩阵，$1,-1$ 是 A 的特征值，其特征向量分别为 α_1,α_2，且 $A\alpha_3=\alpha_1+\alpha_3$.

（1）证明：$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关；　　（2）令 $P=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]$，求 $P^{-1}AP$.

设 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0$，　(1)

用 A 左乘并化简得 $(k_1+k_3)\alpha_1-k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0$，

两式相减得 $2k_1\alpha_1+k_3\alpha_2=0$，

因为 α_1,α_2 分属于 A 的不同特征值，故线性无关，所以 $k_1=k_3=0$，

代入(1)式，由 $\alpha_2\neq 0$，可得 $k_2=0$. 故 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关。

（2）由已知，$A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{bmatrix}1&0&1\\0&-1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，即 $AP=P\begin{bmatrix}1&0&1\\0&-1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，

因为 P 可逆，故 $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&-1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$.

设 A 是 $m\times r$ 矩阵，则对任意 $r\times n$ 矩阵 B，$r(AB)=r(B)$ 的充要条件是 $r(A)=r$.

充分性：因$r(A)=r$，故

$$r(B)\geq r(AB)\geq r(A)+r(B)-r=r(B),$$

所以$r(AB)=r(B)$;

必要性：用反证法. 如果$r(A)\neq r$，即$r(A)<r$，则齐次线性方程组$AX=0$必有非零解，这表明存在$r\times n$矩阵$B\neq 0$使得$AB=0$，从而$r(AB)=0$，$r(B)>0$，这与题设$r(AB)=r(B)$相矛盾，故$r(A)=r$.

设 A 为 n 阶矩阵，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_n$ 为 n 维列向量，$\alpha_n\neq0, A\alpha_1=\alpha_2, A\alpha_2=\alpha_3,\cdots, A\alpha_{n-1}=\alpha_n, A\alpha_n=0$，则 $\lambda=0$ 是 A 的 n 重特征根.

证明：(1) 证明$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_n$线性无关. 设

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (\star)$$

由已知条件可得$A^n\alpha_1=A^{n-1}\alpha_2=\cdots=A\alpha_n=0$，用$A^{n-1}$左乘

$(\star)$两端式得$k_1\alpha_n=0$，因$\alpha_n\neq0$，故$k_1=0$.

再依次用 $A^{n-2},A^{n-3},\cdots$左乘 $(\star)$ 式两端可得

$k_2=k_3=\cdots=k_n=0$. 所以$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_n$线性无关.

(2) 其次，由$A\alpha_1=\alpha_2, A\alpha_2=\alpha_3, \cdots, A\alpha_{n-1}=\alpha_n, A\alpha_n=0$有

$$A(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\begin{bmatrix}0 & & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & 1 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 0\end{bmatrix}(\circledast);$$

令矩阵$P=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_n)$，因$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_n$线性无关，故矩阵$P$

可逆，$(\circledast)$式表明$P^{-1}AP=B$，其中$B=\begin{bmatrix}0 & & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & 1 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 0\end{bmatrix}$,

即A与B相似，；显然$\lambda=0$是B的n重特征根，所以也是An重特征根.

（2）的另一证法：由（1）知 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 为 R^n 一个基，从而，任意 n 维向量 β 都可表为

$$\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n,$$

$$\Rightarrow A^n\beta = k_1A^n\alpha_1 + k_2A^n\alpha_2 + \cdots + k_nA^n\alpha_n$$

$$\Rightarrow A^n\beta = 0$$

$$\Rightarrow A^n = 0$$

$\Rightarrow$ A 的任意特征值 λ 必满足 $\lambda^n = 0$

$\Rightarrow$ A 的特征值全为零

$\Rightarrow$ 0 是 A 的 n 重特征值.

关于矩阵方程 $AX=B$ 的求解，其中 A 不可逆.

例题 解矩阵方程 $\begin{bmatrix}1 & 1\\2 & 2\end{bmatrix}X=\begin{bmatrix}2 & 3\\4 & 6\end{bmatrix}$.

分析 显然, X 为二阶矩阵. 因 $\begin{bmatrix}1 & 1\\2 & 2\end{bmatrix}$ 不可逆，故需设出未知矩阵 X 的元素，根据矩阵方程得出线性方程组，解线性方程组得到 X 的元素，即可求出 X.

解答 设 $X=\begin{bmatrix}x_1 & x_2\\x_3 & x_4\end{bmatrix}$, 则由 $\begin{bmatrix}1 & 1\\2 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1 & x_2\\x_3 & x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 3\\4 & 6\end{bmatrix}$

得线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 2 \\ x_2 + x_4 = 3 \\ 2x_1 + 2x_3 = 4 \\ 2x_2 + 2x_4 = 6 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 - x_3 \\ x_2 = 3 - x_4 \end{cases}$$

令 $x_3 = k_1, x_4 = k_2$，得

$$X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-k_1 & 3-k_2 \\ k_1 & k_2 \end{bmatrix},$$

其中k_1, k_2为任意常数.

定理 设 A, B 分别为 $m\times n, n\times m$ 矩阵，则

$$\lambda^n|\lambda E_m - AB| = \lambda^m|\lambda E_n - BA|.$$

证明 注意到

$$\begin{bmatrix} E & B \\ O & E \end{bmatrix}\begin{bmatrix} O & O \\ A & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} BA & BAB \\ A & AB \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} BA & O \\ A & O \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E & B \\ O & E \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} O & O \\ A & AB \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} BA & O \\ A & O \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \left|\lambda E_{m+n} - \begin{bmatrix} O & O \\ A & AB \end{bmatrix}\right| = \left|\lambda E_{m+n} - \begin{bmatrix} BA & O \\ A & O \end{bmatrix}\right|$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} \lambda E_n & O \\ -A & \lambda E_m - AB \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda E_n - BA & O \\ -A & \lambda E_m \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow |\lambda E_n| \cdot |\lambda E_m - AB| = |\lambda E_n - BA| \cdot |\lambda E_m|$$

$$\Rightarrow \lambda^n |\lambda E_m - AB| = \lambda^m |\lambda E_n - BA|.$$

推论1 设A, B分别为$m \times n, n \times m$ 矩阵，则AB 与与BA有相同的**非零**特征值.

推论2 设 A, B分别为$m \times n, n \times m$ 矩阵，则

$$|E_m - AB| = |E_n - BA|.$$

推论3 设A, B 都为n阶矩阵，则

$$|\lambda E - AB| = |\lambda E - BA|.$$

此时，AB与BA有相同的特征值.