姓名_____________ 学号_______________ 课序号____

线性代数第 3 次测试试题

一、填空题：（每题 4 分，共 20 分）

1. 若$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1,x_2,x_3)\begin{bmatrix}1&2\lambda&0\\0&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$为正定二次型，则$\lambda$满足的条件为

($\lambda\in(-\sqrt{2},\sqrt{2}$).

2. 若实二次型$f(x_1,x_2,x_3)=ax_1^2+ax_2^2+(a-1)x_3^2+2x_1x_3-2x_2x_3$的规范型为$y_1^2-y_2^2$，则 $a=($ 0).

3. 设方阵A满足$A\begin{bmatrix}1&2\\2&-1\\3&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&-1\\4&1/2\\6&-1\end{bmatrix}$，$\mathrm{tr}A=-1/2$，则$|A|=($ 2)

4. 设A,B为三阶方阵，$A\sim B$，A的两个特征值为$\lambda_1=1$，$\lambda_2=2$，$|B|=2$，则行列式

$\begin{vmatrix}(A+E)^{-1}&0\\0&(2B)^*\end{vmatrix}=($ $\dfrac{64}{3}$).

5. 设A为 3 阶矩阵，$P=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$为三阶可逆矩阵，使得$P^{-1}AP=\mathrm{diag}(2,2,3)$，若三阶矩阵 $Q=(\xi_1+\xi_2,\xi_1-\xi_2,2\xi_3)$，则$Q^{-1}AQ==($ $\mathrm{diag}(2,2,3)$)

二、选择题：（每题 4 分，共 20 分）

1. 设A为三阶实对称矩阵，满足$A^3-6A^2+12A=8E$，二次型$f(X)=X^TAX$经正交变换

$X=QY$可化为(B)

A. $y_1^2+y_2^2+y_3^2$　B. $2y_1^2+2y_2^2+2y_3^2$　C. $2y_1^2+2y_2^2$　D. $2y_1^2+y_2^2+y_3^2$

2. 设A,B为n阶实对称矩阵， A为正定矩阵，且$X^TBX=X^TAX+x_n^2$，其中

$X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$，则(B)

A. $|A|>|B|$　B. $|A|<|B|$　C. $|A|=|B|$　D.无法确定$|A|$与$|B|$的关系

3. 设B为$n\times m$矩阵，且$\mathrm{r}(B)=n$，那么下列命题 ①$|BB^T|=0$， ②$BB^T\cong E$， ③BB^T可对角化， ④$BB^T\simeq E$中，正确的个数为(C)

A. 1　B. 2　C. 3　D. 4

4. 设λ，μ是矩阵A的两个不同的特征值，α，β是A的分别属于λ，μ的特征向量，则α，$A(\alpha+\beta)$线性无关的充分必要条件为(D)

A.$\lambda=0$　B. $\mu=0$　C. $\lambda\neq0$　D. $\mu\neq0$

5. 设A，B为三阶方阵，其中A能对角化且满足$A^2=A$，又$B^2+B=E$，$\mathrm{r}(AB)=2$，则A与如下矩阵(A)相似.

A.$\mathrm{diag}(1,0,1)$　B. $\mathrm{diag}(-1,0,-1)$　C. $\mathrm{diag}(1,1,1)$　D. $\mathrm{diag}(0,1,0)$

三、（本题 20 分） 设二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2-2x_1x_2-2x_1x_3+2ax_2x_3$经正交变换化为标准形$f=2y_1^2+2y_2^2+by_3^2$. (1) 求$a,b$的值；(2) 求所用的正交变换；(3) 若$X^TX=3$，求$f$ 的最大值.

解答：(1) 设$A=\begin{bmatrix}1&-1&-1\\-1&1&a\\-1&a&1\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}2&&\\&2&\\&&b\end{bmatrix}$，由题知

$$A\sim B\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{tr}A=\mathrm{tr}B\\ \mathrm{r}(2E-A)=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3=4+b\\ a=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-1\\ b=-1\end{cases}$$

(2) A的特征值（即B的特征值）为$\lambda_{1,2}=2,\lambda_3=-1.$

解$(\lambda_{1,2}E-A)X=0$得基础解系$X_1=(-1,1,0)^T,X_2=(-1,0,1)^T$；

将其正交化得

$$\alpha_1=X_1=(-1,1,0)^T,\qquad \alpha_2=X_2-\frac{(X_2,\alpha_1)}{(\alpha_1,\alpha_1)}\alpha_1=\frac{1}{2}(-1,-1,2)^T;$$

解$(\lambda_3E-A)X=0$得基础解系$X_3=(1,1,1)^T$；

将α_1,α_2,X_3单位化得

$$\xi_1=\frac{1}{\|\alpha_1\|}\alpha_1\begin{bmatrix}-1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\\0\end{bmatrix},\ \xi_2=\frac{1}{\|\alpha_2\|}\alpha_2\begin{bmatrix}-1/\sqrt{6}\\-1/\sqrt{6}\\2/\sqrt{6}\end{bmatrix},\ \xi_3=\frac{1}{\|X_3\|}X_3\begin{bmatrix}1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\end{bmatrix};$$

令$Q=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$，则$X=QY$即所用的正交变换.

(2) 若$X^TX=3$，即$\|X\|^2=3$，因所用变换为正交变换，故

$y_1^2+y_2^2+y_3^2=\|Y\|^2=\|X\|^2=3$

从而$f=2y_1^2+2y_2^2+by_3^2\le 2(y_1^2+2y_2^2+y_3^2)=6$，即$f$的最大值为 6.

四、（本题 20 分）设A为n阶实反对称矩阵，证明：

(1) 对任意n维列向量α，均有$\alpha^TA\alpha=0$； (2) 若k为非零实数，则$A+kE$可逆.

证明：(1) 注意到$\alpha^TA\alpha$为一个数，且A为n阶实反对称矩阵，故

$$\alpha^TA\alpha=(\alpha^TA\alpha)^T=\alpha^TA^T\alpha=\alpha^T(-A)\alpha=-\alpha^TA\alpha$$

$$\Rightarrow 2\alpha^TA\alpha=0\Rightarrow\alpha^TA\alpha=0.$$

(2) 用反证法

$A+kE$不可逆⇒存在非零向量α，使得$(A+kE)\alpha=0$

$\Rightarrow\alpha^T(A+kE)\alpha=0$【由(1)知$\alpha^TA\alpha=0$】

$\Rightarrow 0=\alpha^TA\alpha+\alpha^T(kE)\alpha=k\|\alpha\|^2$【$\alpha\ne0\Rightarrow\|\alpha\|^2>0$】

$\Rightarrow k=0$，

这与题设“k为非零实数”相矛盾，故$A+kE$可逆.

五、（本题 20 分）设A,B为n阶方阵，$\mathrm{r}(A)+\mathrm{r}(B)<n.$ 证明：

(1) A,B**有相同的特征值；**(2) A,B**有相同的特征向量.**

证明：(1) $\mathrm{r}(A)+\mathrm{r}(B)<n\Rightarrow\mathrm{r}(A)<n,\mathrm{r}(B)<n\Rightarrow|A|=0,|B|=0\Rightarrow A,B$有相同的特征值0；

(2) 令$C=\begin{bmatrix}A\\B\end{bmatrix}$，则$\mathrm{r}(C)\le\mathrm{r}(A)+\mathrm{r}(B)<n\Rightarrow CX=0$有非零解

$\Rightarrow\begin{cases}AX=0\\BX=0\end{cases}$有非零解$\Rightarrow AX=0$与$BX=0$有相同的非零解

$\Rightarrow(0E-A)X=0$与$(0E-B)X=0$有相同的非零解

$\Rightarrow A$与B有相同的（属于特征值零的）特征向量.