第四章 向量空间

4.1 向量的定义及运算
4.2 向量组的线性相关性
4.3 向量组的极大线性无关组和秩
4.4 子空间
4.5 基和维数
4.6 矩阵的秩
4.7 线性方程组有解的条件及解的结构

第六节 矩阵的秩

一、矩阵的k阶子式及秩的定义

定义 在$m \times n$矩阵A中，任取k行k列，位于这些行、列交叉处的k^2个元素，按它们在A中的顺序构成的一个k阶行列式，称为矩阵A的一个**k阶子式**.

提醒 若A所有的r阶子式为零，则A的所有比r更高阶的子式（若存在）必等于零！故A的**非零子式**的最高阶数必存在，这就是矩阵的秩.

定义 矩阵 A 的非零子式的最高阶数 r 称为矩阵 A 的**秩**，记为 $\mathrm{r}(A)=\mathrm{rank}(A)=r.$

规定 零矩阵的秩为零，即 $\mathrm{r}(O)=0.$

提醒 若 A 有一个 r 阶子式不为零，则 $r(A)\geq r.$
若 A 的所有 $r+1$ 阶子式（若有）全为零，则 $r(A)\leq r.$

提醒 若 A 为 $m\times n$ 矩阵，则

$$\mathrm{rank}(A)=\mathrm{rank}(A^T)\leq\min\{m,n\}.$$

例题 求 $B=\begin{bmatrix}2 & -1 & 0 & 3 & -2\\ 0 & 3 & 1 & -2 & 5\\ 0 & 0 & 0 & 4 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ 的秩.

解答 B 是一个行阶梯形矩阵，有三个非零行，

则 B 的所有四阶子式全为零；

又有三阶子式 $\begin{vmatrix}2 & -1 & 3\\ 0 & 3 & -2\\ 0 & 0 & 4\end{vmatrix}\neq 0;$

因此， B 的非零子式的最高阶数为3，即

$\operatorname{rank}(B)=3.$

提醒 阶梯形矩阵的非零行行数就是它的秩.

二、矩阵的行秩及列秩

定义 矩阵 A 的行空间、列空间的维数分别称为 A 的**行秩**、**列秩**.

提醒 矩阵 A 的行秩即 A 的行向量组的秩，矩阵 A 的列秩即 A 的列向量组的秩.

定义 设 A 为 $m\times n$ 矩阵.

若 A 的列秩为 n，称 A 为**列满秩矩阵**；

若 A 的行秩为 m，称 A 为**行满秩矩阵**；

若 A 既是行满秩矩阵，又是列满秩矩阵，称 A 为**满秩矩阵**.

例题 求矩阵 $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{bmatrix}$ 的秩、行秩和列秩.

解答 A 有二阶子式 $\begin{vmatrix}1 & 2\\ 4 & 5\end{vmatrix}\neq 0,$ 没有三阶子式，

故 $\mathrm{rank}(A)=2;$

A的两个行向量线性无关，A的行秩 $=2;$

A的第 $1,2$ 个列向量线性无关，而三个二维列向量线性相关，故 A的列秩 $=2.$

问题 就以上矩阵而言，我们有

$$\mathrm{rank}(A)=A\text{的列秩}=A\text{的行秩}$$

该结论会否是个例？

引理1 对任意矩阵 A，有

$$A\text{的列秩} = A\text{的行秩}.$$

证明 A 的列秩是 A的主元列的数目，或者说是 A 的行最简形矩阵 B 中主元的数目.

又 B的每个主元对应一个非零行，这些行形成 A的行空间的基，因此 A的行秩也是 B 的主元数目.

从而， A的列秩 $=$ A的行秩.

引理2 对任意矩阵 A，有

$$A\text{的列秩} = \mathrm{r}(A).$$

证明 设 $A=(a_{ij})_{m\times n}=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$, $\mathrm{r}(A)=s$,

A的列秩 $=t$.

因 A的列秩 $=t$, 不妨设 A的前 t 列 $\beta_1,\beta_2,$ $\cdots,\beta_t$ 为 A的一个列极大无关组，并令 $B=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t)$.

由引理1有，B的行秩 $=$ B的列秩 $=t$, 从而B的行极大无关组构成 A 的一个 t 阶非零子式，因此 $\mathrm{rank}(A)=s\geq t$.

另一方面，因$\mathrm{r}(A)=s$, 则A有一个 s阶非零子式，该子式的s列线性无关，且可扩充为A中的 s 个列向量，则 A 中的这 s个列向量线性无关，从而有 A的列秩$=t\geq s=\mathrm{r}(A)$.

综上，既有A的列秩$\geq \mathrm{r}(A)$, 也有A的列秩$\leq \mathrm{r}(A)$,

所以 A的列秩$=\mathrm{r}(A)$.

由引理1和引理2，我们有如下结论.

定理 对任意矩阵 A，有

$$\mathrm{rank}(A)=A\text{的列秩}=A\text{的行秩}.$$

推论1 初等变换不改变矩阵的秩.

提醒 当一个矩阵是满秩矩阵时，则必为方阵，因此，满秩矩阵就是可逆矩阵.

推论2 设A, B均为 $m\times n$矩阵，P为 m阶可逆矩阵， Q为n阶可逆矩阵，则

(1) $A\cong B \Leftrightarrow \operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}(B)$.

(2) $\mathrm{r}(A)=\mathrm{r}(PA)=\mathrm{r}(AQ)=\mathrm{r}(PAQ)$.

矩阵秩的求法 将矩阵用初等行变换化为阶梯形矩阵，则阶梯形矩阵中非零行的行数就是原矩阵的秩.

三、矩阵秩的一些重要结论

定理（秩定理） 若矩阵 A 的列数为 n，则

$$\mathrm{rank}(A)+\dim(NulA)=n.$$

证明 A 的主元列构成 $ColA$ 的基，故 $\mathrm{rank}(A)$ 恰好是 A 的主元列的数目，也是 A 的行最简形矩阵中主元列的数目.

而 $NulA$ 的维数等于方程组 $AX=O$ 中自由变量的个数，即 A 中非主元列的数目.

因此，$\mathrm{rank}(A)+\dim(NulA)$

$=A$ 的主元列数 $+A$ 的非主元列数

$=A$ 的总列数 $=n.$

定理 设 A,B 分别为 $m\times n,\ n\times s$ 矩阵，则

$$\operatorname{rank}(AB)\le\min\{\operatorname{rank}(A),\operatorname{rank}(B)\}.$$

证明 因 AB 的行向量组能由 B 的行向量组线性表示，故 AB 的行向量组的秩 $\le B$ 的行向量组的秩，即 AB 的行秩 $\le B$ 的行秩，故

$$\mathrm{r}(AB)\le\mathrm{r}(B).$$

从而有

$$\mathrm{r}(AB)=\mathrm{r}((AB)^T)=\mathrm{r}(B^TA^T)\le\mathrm{r}(A^T)=\mathrm{r}(A).$$

因此 $\mathrm{r}(AB)\le\min\{\mathrm{r}(A),\mathrm{r}(B)\}.$

推论 设 A, B 分别为 $s \times n, n \times s$ 矩阵.

若 $n < s$, 则行列式 $|AB| = 0$.

证明 $\mathrm{r}(AB) \le \mathrm{r}(A) \le \min\{n, s\} = n < s$

$\Rightarrow$ 方阵 AB 不满秩 $\Rightarrow |AB| = 0$.

问题 设 A, B 分别为 $s \times n, n \times s$ 矩阵且 $n \neq s$.

试问：$|AB| \times |BA| = ?$

关于矩阵的秩的一些重要结论

结论1 $\mathrm{r}(A \pm B) \le \mathrm{r}(A) + \mathrm{r}(B)$

结论2 $\mathrm{r}(A, B) \le \mathrm{r}(A) + \mathrm{r}(B)$

结论3 $C = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} \Rightarrow \mathrm{r}(C) = \mathrm{r}(A) + \mathrm{r}(B)$

结论4 $C = \begin{bmatrix} A & * \\ 0 & B \end{bmatrix} \Rightarrow \mathrm{r}(C) \ge \mathrm{r}(A) + \mathrm{r}(B)$

薛尔福斯特公式

定理 设 A, B, C 分别为 $s \times n, n \times t, t \times k$ 矩阵，则

$$\mathrm{r}(ABC) \geq \mathrm{r}(AB) + \mathrm{r}(BC) - \mathrm{r}(B)$$

证明 令$P = \begin{bmatrix} E & A \\ O & E \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} E & O \\ -C & E \end{bmatrix},$

$$M = \begin{bmatrix} ABC & O \\ O & B \end{bmatrix}, N = \begin{bmatrix} O & AB \\ -BC & B \end{bmatrix}.$$

经计算知 $PMQ = N$，又矩阵 P, Q 可逆，故

$$\mathrm{r}(ABC) + \mathrm{r}(B) = \mathrm{r}(M) = \mathrm{r}(N) \geq \mathrm{r}(AB) + \mathrm{r}(BC),$$

从而有 $\mathrm{r}(ABC) \geq \mathrm{r}(AB) + \mathrm{r}(BC) - \mathrm{r}(B).$

弗罗伯纽斯Frobinius公式

在薛尔福斯特公式经中令 $B=E$，得Frobinius公式.

推论 设 A, B 分别为 $s\times n, n\times t$ 矩阵，则

$$\mathrm{r}(AB)\geq \mathrm{r}(A)+\mathrm{r}(B)-n.$$

特别地，若还有 $AB=O$，则

$$\mathrm{r}(A)+\mathrm{r}(B)\leq n.$$

推论 设 A, B 分别为 $s\times n, n\times t$ 矩阵，满足 $AB=O$，$\mathrm{r}(A)=n$，则 $B=O$.

例题 设 A 是 $s\times n$ 矩阵且 $\mathrm{r}(A)=n$. 若矩阵 B, C 满足 $AB=AC$，则 $B=C$.

例题 设 n 阶矩阵 A 满足 $A^2-3A-10E=0.$

证明：$\operatorname{rank}(A-5E)+\operatorname{rank}(A+2E)=n.$

证明 $A^2-3A-10E=0 \Rightarrow (A-2E)(A-5E)=0$

$\Rightarrow \mathrm{r}(A-2E)+\mathrm{r}(A-5E)\le n;$

$\mathrm{r}(A-5E)+\mathrm{r}(A+2E)$

$\ge \mathrm{r}((A-5E)-(A+2E))=\mathrm{r}(-7E)=n;$

于是 $\operatorname{rank}(A-5E)+\operatorname{rank}(A+2E)=n.$

例题 设 A^* 是 $n(n \geq 2)$ 阶矩阵 A 的伴随矩阵.

证明：$$\mathrm{r}(A^*) = \begin{cases} n, & \mathrm{r}(A) = n; \\ 1, & \mathrm{r}(A) = n-1; \\ 0, & \mathrm{r}(A) < n-1. \end{cases}$$

证明 (1) $\mathrm{r}(A) = n \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow |A^*| = |A|^{n-1} \neq 0$

$\Rightarrow \mathrm{r}(A^*) = n.$

(2) $\mathrm{r}(A) = n-1 \Rightarrow |A| = 0 \Rightarrow A^*A = |A|E = 0$

$\Rightarrow \mathrm{r}(A^*) + \mathrm{r}(A) \leq n \Rightarrow \mathrm{r}(A^*) \leq n - \mathrm{r}(A) = 1$

$\mathrm{r}(A) = n-1 \Rightarrow A$ 有 $n-1$ 阶子式 $M_{ij} \neq 0$

$\Rightarrow A^*$ 有元素 $A_{ij} \neq 0 \Rightarrow A^* \neq 0 \Rightarrow \mathrm{r}(A^*) \geq 1$

综上所述，有 $\mathrm{r}(A^*) = 1.$

(3) $\mathrm{r}(A) < n-1 \Rightarrow A$的所有$n-1$阶子式全为零

$\Rightarrow A$ 的所有元素的余子式全为零

$\Rightarrow A^*$有元素$A_{ij}=0 \Rightarrow A^*=0 \Rightarrow \mathrm{r}(A^*)=0.$

例题 设向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$能由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性表示为

$$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)K,$$

其中K为$s\times r$矩阵，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关.

证明：$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$线性无关$\Leftrightarrow \mathrm{r}(K)=r.$

证明 设 $x_1\beta_1 + x_2\beta_2 + \cdots + x_r\beta_r = 0$, 即

$$(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_r)X = 0, \text{ where } X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s)KX = 0.$$

因 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$线性无关，故 $KX = 0.$

$KX = 0$ 只有零解 $\Leftrightarrow \mathrm{r}(K) = r.$

这也是$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_r$ 线性无关的充要条件.

四、课堂练习

1. 设 A 为 $n \times n$ 矩阵，证明：

$$\mathrm{r}(A) + \mathrm{r}(A+E) \geq n.$$

提示 $E = A + E - A$

$$\Rightarrow \mathrm{r}(E) = \mathrm{r}(A + E - A)$$

$$\Rightarrow n \leq \mathrm{r}(A+E) + \mathrm{r}(-A)$$

$$\Rightarrow n \leq \mathrm{r}(A+E) + \mathrm{r}(A)$$

2. 设 A, B 均为 $n \times n$ 非零矩阵且 $AB = 0$, 则以下关于 $\mathrm{r}(A), \mathrm{r}(B)$ 的说法，正确的是（　　）.

① 必有一个等于零

② 都小于 n

③ 一个小于 n，一个等于 n

④ 都等于 n

正确答案 ②

3. 设矩阵 $A=\begin{bmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k \end{bmatrix}$ 且 $\mathrm{r}(A)=3$，则

$k=(\qquad)$.

4. 设A,B 均为$n\times n$ 矩阵且$A^2-AB=E$，

设 $\mathrm{rank}\,(AB-BA-A)=(\qquad)$.

5. 设 $n\times n$ 矩阵 A 满足 $A^2=A$，证明

$$\mathrm{r}(A)+\mathrm{r}(A-E)=n$$

提示 $A^2=A\Rightarrow A(A-E)=0$

$$\Rightarrow 0=\mathrm{r}(A(A-E))\geq \mathrm{r}(A)+\mathrm{r}(A-E)-n$$

$$\Rightarrow \mathrm{r}(A)+\mathrm{r}(A-E)\leq n\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\langle 1\rangle$$

$$E=A+E-A$$

$$\Rightarrow n=\mathrm{r}(A+E-A)\leq \mathrm{r}(A)+\mathrm{r}(E-A)$$

$$\Rightarrow \mathrm{r}(A)+\mathrm{r}(A-E)\geq n\quad\cdots\cdots\cdots\quad\langle 2\rangle$$

$$\langle 1\rangle\,\langle 2\rangle\Rightarrow \mathrm{r}(A)+\mathrm{r}(A-E)=n$$