四川大学期末考试试题（闭卷）

（2017——2018 学年第 2 学期） A 卷

课程号：201138040　　课序号：　　课程名称：微积分（I）-2　　任课教师：　　成绩：

适用专业年级：　　学生人数：　　印题份数：　　学号：　　姓名：

考 生 承 诺

我已认真阅读并知晓《四川大学考场规则》和《四川大学本科学生考试违纪作弊处分规定（修订）》，郑重承诺：

1、已按要求将考试禁止携带的文具用品或与考试有关的物品放置在指定地点；

2、不带手机进入考场；

3、考试期间遵守以上两项规定，若有违规行为，同意按照有关条款接受处理。

考生签名：

注：考试时间 120 分钟。请将答案写在答题纸规定的方框内，否则记 0 分。

一、计算题(每小题 5 分，共 30 分)

1. 求曲线 $x=\cos t,\ y=\sin t,\ z=t\cos t$ 上点 $(1,0,0)$ 处的切线方程.

2. 求曲面 $z=xy$ 在点 $(-2,-3,6)$ 处的切平面方程.

3. 设 $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x+y\leqslant 1,\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0\}$，求 $\iint\limits_D x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

4. 设 Ω 是曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与平面 $z=1$ 围成的区域, 求 $\iiint\limits_\Omega (z+x^2y^3\sin z^4)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

5. 设 Γ 是起点为 $(1,0,1)$ 、终点为 $(0,1,1)$ 的有向线段, 求 $\int_\Gamma (y^2+z-x)\mathrm{d}y$.

6. 求微分方程初值问题 $\begin{cases} xy'-y=x^2 \\ y(1)=2018 \end{cases}$ 的解.

二、解答题 (每小题 8 分，共 40 分)

1. 交换二次积分 $I=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_{x^3}^1 \sqrt[3]{y^2}e^y\mathrm{d}y$ 的积分次序并计算 I.

2. 设曲线 Γ 的方程为 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ x+y+z=0 \end{cases}$，求 $\int_\Gamma (x+1)^2\mathrm{d}s$.

3. 设平面曲线 L 为 $y=2\sqrt{1-\dfrac{x^2}{9}}$，起点为 $(3,0)$，终点为 $(-3,0)$，求 $\int_L \dfrac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$.

4. 设曲面 Σ 是球面 $z=\sqrt{2-x^2-y^2}$ 与锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 围成立体的表面， Σ 的方向指向外侧，求 $\iint\limits_\Sigma x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

试卷编号：

5. $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt[3]{x^2y^4}}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$，(1)求$\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$和$\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$；

(2)判断 $f(x,y)$ 在点$(0,0)$处是否可微； (3)设向量$l=(\dfrac{\sqrt{2}}{2},-\dfrac{\sqrt{2}}{2})$，求$\dfrac{\partial f}{\partial l}(0,0)$.

三、应用题 (每小题 9 分，共 18 分)

1. 求圆$x^2+y^2=1$上一点, 使得该点到$A\left(0,0\right)$、$B\left(3,0\right)$、$C\left(0,4\right)$的距离的平方之和最小.

2. 设函数 $y=f(x)$ 处处二阶可导, 其函数图像上任意一点(x,y)处的切线与 y 轴的交点为 $\left(0,u(x)\right)$，若$u-u'=y+2x^2$，并且$f(1)=f'(1)+4=e$，求函数$y=f(x)$.

四、证明题 (每小题 6 分，共 12 分)

1. 设可微函数$f(x,y,z)$满足: $f(t^a x,t^b y,t^c z)=t^{a+b+c}f(x,y,z),\forall t>0$，其中 a,b,c 都是正整数. 求证: $ax\dfrac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}+by\dfrac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}+cz\dfrac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}=(a+b+c)f(x,y,z)$.

2. 设Σ为曲面$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1\,(a,b,c>0)$，$I=\iint\limits_{\Sigma}\mathrm{d}S$，$\alpha=1-\dfrac{c^2}{a^2},\beta=1-\dfrac{c^2}{b^2}$.

(1) 求证: $I=2\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{\dfrac{1-\alpha\dfrac{x^2}{a^2}-\beta\dfrac{y^2}{b^2}}{1-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$D_{xy}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\leqslant 1\}$.

(2) 上述积分很难直接计算，试用你的想法给出$\dfrac{1}{\pi}I$的估算公式，并给出该公式在 $a=1,b=2,c=3$时的结果. (保留两位小数, 合理的估值均可得分)