第五章 特征值与特征向量

第二节　矩阵的相似对角化

一、矩阵相似的概念

二、相似矩阵的性质

三、矩阵可对角化的条件

四、矩阵可对角化理论的应用

矩阵分解经常能解决很多问题，我们要考虑一种特殊的分解：$A=P\Lambda P^{-1}$, 其中Λ为对角阵这种分解很有用. 问题是：对一般矩阵，这种分解是否存在？若存在，如何求P,Λ?

一、矩阵相似的概念

定义 设A, B均为n阶矩阵，若有可逆矩阵P, 使得

$$P^{-1}AP = B,$$

则称 A 与 B **相似**，记为 $A \sim B.$

提醒 相似是一种特殊的等价关系，因

$$A \sim B \Rightarrow A \cong B.$$

提醒 相似这种等价关系具有如下三条性质：

① **反身性**： $A \sim A;$

② **对称性**： $A \sim B \Rightarrow B \sim A;$

③ **传递性**： $A \sim B, B \sim C \Rightarrow A \sim C.$

思考 若 $A \sim kE$, 则 $A = ?$ **答案** $A = kE$

提醒 数量矩阵（包括单位阵）只和自己相似！

二、矩阵相似的性质

定理 若矩阵 $A \sim B$, 则

(1) $|\lambda E - A| = |\lambda E - B|$;

相似矩阵具有相同的特征值；

(2) $\mathrm{tr} A = \mathrm{tr} B, \quad |A| = |B|$;

(3) $\mathrm{rank}\,(A) = \mathrm{rank}\,(B)$.

提醒 相似矩阵具有相同的特征多项式，相同的特征值，相同的迹，相同的秩，相同的行列式，相同的可逆性！

所以，矩阵之间的这种关系叫 “相似”！

定理 若矩阵 $A \sim B$, 则

(1) $A^k \sim B^k, \forall k \in \mathbb{N}$;

(2) $kA \sim kB$, k为任意常数;

(3) $f(A) \sim f(B)$, $f(x)$为任意多项式;

(4) $A^T \sim B^T$.

定理 若矩阵 $A \sim B$, 且 A可逆，则

(1) B可逆;

(2) $A^{-1} \sim B^{-1}$, $\quad A^* \sim B^*$;

(3) $A^k \sim B^k, \forall k \in \mathbb{Z}$.

思考 若 $A \sim B$, 且 A可逆，如下结论正确吗？

$$f(A) + A^{-1} + A^{*} \sim f(B) + B^{-1} + B^{*},$$

其中 $f(x)$ 为任意多项式.

思考 若矩阵$A \sim B$, $C \sim D$, 如下结论正确吗？

$$A + C \sim B + D.$$

例题 已知三阶矩阵 A 与三维列向量 α 使得 α, $A\alpha$, $A^2\alpha$ 线性无关，$A^3\alpha = 3A\alpha - 2A^2\alpha$, 求 A 的特征值.

解答 因向量组 α, $A\alpha$, $A^2\alpha$ 线性无关，故方阵 $Q = (\alpha, A\alpha, A^2\alpha)$ 可逆，且

$$AQ = A(\alpha, A\alpha, A^2\alpha) = (A\alpha, A^2\alpha, A^3\alpha)$$

$$= (A\alpha, A^2\alpha, 3A\alpha - 2A^2\alpha)$$

$$= (\alpha, A\alpha, A^2\alpha)\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} = QB,$$

其中 $B=\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&3\\0&1&-2\end{bmatrix}$.

则$Q^{-1}AQ=B$,即$A\sim B$，从而有相同的特征值.

易求得

$$|\lambda E-B|=\begin{vmatrix}\lambda&0&0\\-1&\lambda&-3\\0&-1&\lambda+2\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-1)(\lambda+3),$$

所以 A 的特征值为 $0,1,-3$.

相似性质的应用

① 若$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$，则$\lambda = ?$

答案 $1+4+5=\lambda+2+2 \Rightarrow \lambda = 6$

② 若$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & a & 7 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{bmatrix}$，则$a = ?\ b = ?$

答案 $\begin{cases} 2+a+3=1+2+b \\ 2\times a\times 3 = 1\times 2\times b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=3 \end{cases}$

三、矩阵可相似对角化的条件

若矩阵 A 与某对角阵相似，称 A 可相似对角化.

可相似对角化，简称可对角化.

对角阵是结构最简单的矩阵之一．若 $A \sim \Lambda$, 其中 Λ 为对角矩阵，即 A 可对角化为 Λ, 由相似的性质易知，A与Λ有很多相同的性质，则通过过研究 Λ 的性质来达到研究 A 的性质的目的.

可是，一个矩阵在什么时候才可以对角化呢？

下面定理给出了矩阵可对角化的充要条件.

定理 设 A 为 n 阶方阵，则以下命题等价：

(1) A 可相似对角化.

(2) A有 n 个线性无关的特征向量.

证明 $(1) \Rightarrow (2)$ A 可对角化

$\Rightarrow$存在$\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$及可逆阵

$P = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ 使得 $P^{-1}AP = \Lambda$

$\Rightarrow AP = P\Lambda$

$\Rightarrow A\alpha_i = \lambda_i\alpha_i, i = 1, 2, \cdots, n$ $\quad (i)$

$P = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$可逆

$\Rightarrow \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$线性无关 $\quad (ii)$

$(i)(ii) \Rightarrow A$有 n 个线性无关的特征向量.

(2) $\Rightarrow$ (1) A有 n 个线性无关的特征向量，设为

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n,$$

分别属于特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$, 并令

$$P = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n),$$

$$\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n).$$

$\Rightarrow P$ 可逆且 $(A\alpha_1, A\alpha_2, \cdots, A\alpha_n)$

$$= (\lambda_1\alpha_1, \lambda_2\alpha_2, \cdots, \lambda_n\alpha_n)$$

$\Rightarrow P$ 可逆且 $AP = P\Lambda$

$\Rightarrow P$ 可逆且 $P^{-1}AP = \Lambda \Rightarrow A \sim \Lambda$

$\Rightarrow A$ 能对角化.

提醒 若矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 可对角化，则

① 与 A 相似的对角阵即是由 A 的全部特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 构成的对角阵

$$\Lambda=\operatorname{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n);$$

② 使得 $P^{-1}AP=\Lambda$ 成立的可逆矩阵 P 即是由 A 的分别属于特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 的线性无关的特征向量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为列向量组构成的矩阵

$$P=(X_1,X_2,\cdots,X_n).$$

定理 设 A 为 n 阶方阵，则如下命题等价:

① A可对角化；

② A 有 n 个线性无关的特征向量；

③ A 的任一特征值的代数重数与其几何重数相等.

定理 若矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$有n个不同特征值，或特征值全为单根，则 A可对角化.

提醒 以上命题是方阵可对角化的**充分**条件！

例题 矩阵 $A=\begin{bmatrix}3&1&1\\1&2&0\\1&0&2\end{bmatrix}$ 能对角化吗？若能，求出可逆矩阵 P 使得 $P^{-1}AP$ 为对角阵.

解答 经计算有

$$|\lambda E-A|=(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-4),$$

即三阶矩阵 A 有 3个不同的特征值

$$\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=4,$$

故 A 可对角化.

解$(\lambda_1 E - A)X = 0$得其基础解系为

$$X_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix};$$

解$(\lambda_2 E - A)X = 0$得其基础解系为

$$\xi_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix};$$

解$(\lambda_3 E-A)X=0$得其基础解系为

$$\eta_1=\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix};$$

令$P=(X_1,\xi_1,\eta_1)=\begin{bmatrix}-1&0&2\\1&-1&1\\1&1&1\end{bmatrix}$,

则 P 可逆， 使得 $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}1&&\\&2&\\&&4\end{bmatrix}$.

提醒 一定要注意可逆矩阵 P 的取法与相似对角阵之间的对应，如在上例中，若取

$$P=(X_3,X_1,X_2)=\begin{bmatrix}2&-1&0\\1&1&-1\\1&1&1\end{bmatrix}$$

则

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}\lambda_3&&\\&\lambda_1&\\&&\lambda_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&&\\&1&\\&&2\end{bmatrix}.$$

例题 证明矩阵 $A=\begin{bmatrix}2&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}$ 不能对角化.

证明 经计算有

$$|\lambda E-A|=(\lambda-1)^2(\lambda-2),$$

则 A 的特征值为 $\lambda_{1,2}=1,\ \lambda_3=2.$

经初等行变换有

$$\lambda_{1,2}E-A\to\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix},$$

只需对多重根验证即可

即 $3-\mathrm{r}(\lambda_{1,2}E-A)=1\neq 2$, 故 A 不能对角化.

例题 矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{bmatrix}$能对角化吗？若能，求出可逆矩阵 P 使得 $P^{-1}AP$ 为对角阵.

解答 经计算有 $|\lambda E-A|=(\lambda+1)^2(\lambda-5)$,

故 A 的特征值为 $\lambda_{1,2}=-1,\ \lambda_3=5.$

经初等行变换有

$$\lambda_{1,2}E-A\to\begin{bmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},$$

只需对多重根验证即可

$$\lambda_{1,2}E - A \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

只需对多重根验证即可

即 $3 - \mathrm{r}\left(\lambda_{1,2}E - A\right) = 2$， 即多重特征值 λ_{12} 的代数重数与其几何重数相等，且没有其它的多重特征值，故 A 能对角化.

由上知 $\left(\lambda_{12}E - A\right) X = 0$ 的基础解系为

$$X_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, X_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix};$$

解$(\lambda_3 E - A)X = 0$得其基础解系为

$$\eta_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix};$$

令$P = (X_1, X_2, \eta_1) = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$,

则P可逆，使得$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 5 \end{bmatrix}$.

思考 在上题中，若令 $P=(X_1, X_1+2X_2, 9\eta_1)$，$P^{-1}AP=?$

思考 二阶方阵 A 满足 $|A|<0$，A能对角化吗？为什么？

四、矩阵可对角化理论的应用

例题 已知 $A=\begin{bmatrix}4 & -5\\ 2 & -3\end{bmatrix}$, 求 A^n.

解答 因 $|\lambda E-A|=(\lambda-2)(\lambda+1)$,

矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1=2, \lambda_2=-1$,

矩阵 A 的特征值全为单根，故可对角化.

解 $(\lambda_1 E-A)X=0$ 得基础解系 $\xi=\begin{bmatrix}5\\ 2\end{bmatrix}$;

解 $(\lambda_2 E-A)X=0$ 得基础解系 $\eta=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$;

令 $P=(\xi,\eta)=\begin{bmatrix}5 & 1\\ 2 & 1\end{bmatrix}$, 则

$$P^{-1}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -2 & 5\end{bmatrix},$$

且

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}2 & \\ & -1\end{bmatrix}.$$

从而有

$$P^{-1}A^nP=\left(P^{-1}AP\right)^n=\begin{bmatrix}2 & \\ & -1\end{bmatrix}^n=\begin{bmatrix}2^n & \\ & (-1)^n\end{bmatrix},$$

所以

$$A^n = P\begin{bmatrix}2^n & \\ & (-1)^n\end{bmatrix}P^{-1}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{bmatrix}5 & 1\\ 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2^n & 0\\ 0 & (-1)^n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -2 & 5\end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{bmatrix}5\times 2^n - 2\times(-1)^n & 5\times(-1)^n - 5\times 2^n\\ 2^{n+1} - 2\times(-1)^n & 5\times(-1)^n - 2^{n+1}\end{bmatrix}$$

思考 以上例题中的n可取负整数吗？

例题 设

$$\eta_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \eta_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \ \eta_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

为$A_{3\times 3}$的分别属于特征值

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 3$$

的特征向量，求 A.

解答 设 $P=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -2\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}$, 则

$$P^{-1}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}2 & 2 & 2\\ 3 & 0 & -3\\ 1 & -2 & 1\end{bmatrix}.$$

于是

$$AP=A(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=(A\eta_1,A\eta_2,A\eta_3)$$

$$=(\lambda_1\eta_1,\lambda_2\eta_2,\lambda_3\eta_3)=(0,\eta_2,3\eta_3)$$

从而有

$$A = (0, \eta_2, 3\eta_3)\, P^{-1}$$

$$= \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -6 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

课堂练习

1. 若矩阵 $A_{n\times n}, B_{n\times n}$有相同的特征值，也都有 n 个线性无关的特征向量，则（　　）

(A) $A=B$　　(B) $A\neq B$ 但 $|A-B|=0$

(C) $A\sim B$　　(D) $|A|=|B|$但未必有 $A\sim B$

2. 已知 $\begin{bmatrix}-2 & 0 & 0\\ 2 & x & 2\\ 3 & 1 & 1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & y & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$,求 $x, y.$

3. 已知 $\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 4 & -2\\ -3 & -3 & x\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & y & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$,求 $x, y.$