第四章 向量空间

第四节　子空间

一、子空间的定义

二、矩阵的列空间行空间和零空间

一、子空间的定义

定义 设H是$\mathbb{R}^n$的非空子集. 若H满足性质:

(1) $\alpha, \beta \in H \Rightarrow \alpha+\beta \in H$;

(2) $\alpha \in H, k \in \mathbb{R} \Rightarrow k\alpha \in H$.

则称 H为$\mathbb{R}^n$的**子空间**.

提醒 子空间是对加法和数乘运算（或线性运算）封闭的 $\mathbb{R}^n$ 的非空子集.

提醒 任何子空间H必含有零向量，即 $0 \in H$.

提醒 两个特殊子空间，平凡子空间：$\mathbb{R}^n$, $\{0\}$.

例题 若 $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}^n$，则 $H = \operatorname{span}\{\alpha_1, \alpha_2\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间.

证明 对任意的 $k \in \mathbb{R}$, 及 H 中的任意两向量

$$\xi = s_1\alpha_1 + s_2\alpha_2, \quad \eta = t_1\alpha_1 + t_2\alpha_2,$$

有

$$\xi + \eta = (s_1 + t_1)\alpha_1 + (s_2 + t_2)\alpha_2 \in H;$$

$$k\xi = (ks_1)\alpha_1 + (ks_2)\alpha_2 \in H.$$

由定义， H 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间.

定理 若 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p \in \mathbb{R}^n$，则 $H = \operatorname{span}\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_p\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间.

定理 等价向量组生成的子空间必相同.

证明 设 A : $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 与 B : $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$ 为两个等价向量组.

因 A 能由 B 线性表示，则 A 的每个线性组合必能表为 B 的线性组合，故

$$\mathrm{span}\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s\} \subset \mathrm{span}\{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t\};$$

同理，因 B 能由 A 线性表示，从而有

$$\mathrm{span}\{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t\} \subset \mathrm{span}\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s\}.$$

所以

$$\mathrm{span}\{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t\} = \mathrm{span}\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s\}.$$

例题 过原点的直线是一维子空间，不过原点的直线不是子空间.

提醒 子空间的一个直观描述：过原点的平面.

例题 判别以下集合是否为向量空间.

$$(1)\ V_1 = \left\{ (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T : \sum_{i=0}^{n} x_i = 0 \right\}$$

$$(2)\ V_2 = \left\{ (1, x_2, \cdots, x_n)^T : x_2, \cdots, x_n \in \mathbb{R} \right\}$$

解答 (1) 对 V_1 中的任意两个向量

$$\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n)^T,\ \beta = (b_1, b_2, \cdots, b_n)^T,$$

$$V_1 = \left\{ (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T : \sum_{i=0}^{n} x_i = 0 \right\}$$

有 $\sum_{i=0}^{n} a_i = 0, \sum_{i=0}^{n} b_i = 0 \Rightarrow \sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i) = 0$

$$\Rightarrow \alpha + \beta = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \cdots, a_n + b_n)^T \in V_1;$$

对任意 $\lambda \in \mathbb{R}$, $\quad \sum_{i=0}^{n} \lambda a_i = \lambda \sum_{i=0}^{n} a_i = 0$

$$\Rightarrow \lambda\alpha = (\lambda a_1, \lambda a_2, \cdots, \lambda a_n)^T \in V_1;$$

所以，V_1是向量空间.

$$V_2 = \left\{ (1, x_2, \cdots, x_n)^T : x_2, \cdots, x_n \in \mathbb{R} \right\}$$

对集合 V_2 而言，当

$$\alpha = (1, a_2, \cdots, a_n)^T \in V_2,$$

却有

$$2\alpha = (2, 2a_2, \cdots, 2a_n)^T \notin V_2,$$

故 V_2 不是子空间.

提醒 还可更简单地解释为:

因 $O \notin V_2$, 故 V_2 不是子空间.

二、矩阵的列空间行空间零空间

矩阵 A 的列向量组的全部线性组合构成的集合，记为 $\mathrm{Col}A$.

若 $A=(a_{ij})_{m\times n}=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$，则

$$\mathrm{Col}A \triangleq \mathrm{span}\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}\subset\mathbb{R}^m.$$

定理 若 A 为 $m\times n$ 矩阵，则 $\mathrm{Col}A$ 是 $\mathbb{R}^m$ 的子空间.

定义 称 $\mathrm{Col}A$ 称为矩阵 A 的**列空间**.

提醒 显然，$\mathrm{Col}A=\{\beta:\exists X\in\mathbb{R}^n,\text{s. t. }\beta=AX\}$，

因此，$\mathrm{Col}A$ 也称为 A 的值域空间 $\mathrm{Range}(A)$.

例题 已知 $A=\begin{bmatrix}1 & -3 & -4\\ -4 & 6 & -2\\ -3 & 7 & 6\end{bmatrix}$, $\beta=\begin{bmatrix}3\\ 3\\ -4\end{bmatrix}$, 判断 β 是否在 $\mathrm{Col}A$ 中.

解答 β 在 $\mathrm{Col}A$ 中当且仅当方程组 $AX=\beta$ 有解.

用行变换化增广矩阵为行阶梯形矩阵，有

$$(A,\beta)=\begin{bmatrix}1 & -3 & -4 & 3\\ -4 & 6 & -2 & 3\\ -3 & 7 & 6 & -4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & -3 & -4 & 3\\ 0 & -6 & -18 & 15\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

显然，线性方程组 $AX=\beta$ 相容，故 β 在 $\mathrm{Col}A$ 中.

矩阵 A 的行向量组的全部线性组合构成的集合，记为 $\operatorname{Row} A$.

设 $m \times n$ 矩阵 $A = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_m \end{bmatrix}$, 则

$$\operatorname{Row} A = \operatorname{span}\{\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_m\} \subset \mathbb{R}^n.$$

定理 若 A 为 $m \times n$ 矩阵，则 $\operatorname{Row} A$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间.

定义 称 $\operatorname{Row} A$ 称为矩阵 A 的**行空间**.

初等行变换不会改变列向量组的线性关系，但会改变行向量组的线性关系，但如下结果成立.

定理 矩阵 A 经初等行变换化为 B, 则 A 与 B 有相同的行空间.

证明 因 B 由 A 经初等行变换得到，则 B 的行向量能由 A 的行向量组线性表示. 因初等行变换可逆，则 A 的行向量组也能由 B 的行向量组线性表示. 从而 A 与 B 两矩阵的行向量组等价，因而生成的子空间相同，即 $\mathrm{Row}\,A = \mathrm{Row}\,B$.

提醒 行等价的两矩阵有相同的行空间.

设 A 为一矩阵，齐次线性方程组 $AX=0$ 的全部解构成的集合，记为

$$\mathrm{Nul}A=\{X\in\mathbb{R}^n : AX=0\}.$$

定理 若 A 为 $m\times n$ 矩阵，则 $\mathrm{Nul}A$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间.

定义 称 $\mathrm{Nul}A$ 称为矩阵 A 的**零空间**.

等价地，m 个方程 n 个未知量的齐次线性方程组 $AX=O$ 的解集是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间，称为 $AX=O$ 的**解空间**.

例题 求 Nul$A$ 的一个生成集，其中

$$A=\begin{bmatrix}-3 & 6 & -1 & 1 & -7\\ 1 & -2 & 2 & 3 & -1\\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4\end{bmatrix}.$$

解答 首先，用初等行变换可化 A 为行最简形.

$$A\to\begin{bmatrix}1 & -2 & 0 & -1 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

$$AX=O\text{同解于}\begin{cases}x_1-2x_2-x_4+3x_5=0\\ x_3+2x_4-2x_5=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x_1=2x_2+x_4-3x_5\\ x_3=-2x_4+2x_5\end{cases}$$

令自由变量 $x_2=k_1, x_4=k_2, x_5=k_3$, 得通解为

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2k_1+k_2-3k_3\\k_1\\-2k_2+2k_3\\k_2\\k_3\end{bmatrix}=k_1\begin{bmatrix}2\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}1\\0\\-2\\1\\0\end{bmatrix}+k_3\begin{bmatrix}-3\\0\\2\\0\\1\end{bmatrix}$$

则 α,β,γ是 $\mathrm{Nul}A$ 的生成集，其中

$$\alpha=\begin{bmatrix}2\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix},\beta=\begin{bmatrix}1\\0\\-2\\1\\0\end{bmatrix},\gamma=\begin{bmatrix}-3\\0\\2\\0\\1\end{bmatrix}.$$

怎样求 $\mathrm{Nul}A$ 的生成集？

(1) 将A用初等行变换化为行最简形

(2) 写出相应的最简方程组

(3) 将全部解用向量表示，并写成线性组合形式

(4) 解的线性组合中具体的向量构成所求生成集