第五章 特征值与特征向量

第一节 特征值与特征向量

一、方阵的特征值与特征向量

二、特征值与特征向量的求法

三、特征值的性质

四、特征向量的性质

一、方阵的特征值与特征向量

定义 设 A 为 n 阶方阵，若存在数 λ 以及 n 维非零列向量 α, 使得

$$A\alpha = \lambda\alpha,$$

则称 λ 为方阵 A 的特征值，α 为 A 的属于或对应于特征值 λ 的特征向量.

提醒 若 α 为方阵 A 的特征向量，则一定有

$$\alpha \neq 0, \quad A\alpha \parallel \alpha,$$

即 $A\alpha$ 与 α 共线或平行，且 $A\alpha$ 与 α 的比值就是特征向量 α 所对应的特征值.

例题 设 $A=\begin{bmatrix}3 & 1\\5 & -1\end{bmatrix}$，因每行元素之和都为**4**，

则对任意的a，总有

$$\begin{bmatrix}3 & 1\\5 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\a\end{bmatrix}=4\begin{bmatrix}a\\a\end{bmatrix},$$

故对任意$a\neq 0$，向量$\begin{bmatrix}a\\a\end{bmatrix}$都是$A$的对应于

特征值 4 的特征向量.

命题 设 A 为 n 阶方阵，若 A 的每行元素之和都相等，且等于 λ，则 λ 就是 A 的一个特征值，且对任意的 $a \neq 0$，非零向量

$$\alpha = \begin{bmatrix} a \\ a \\ \vdots \\ a \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

都是 A 的对应于特征值 λ 的特征向量.

思考 若 $(a, a, \cdots, a)^T (a \neq 0)$ 为方阵 A 的特征向量，A 的每行元素之和会否相等？

课堂练习

1. 设$\alpha=(1,2,3)^T$, $A=\alpha\alpha^T$, 则A有特征值(　　).

(A) 1　　(B) 2　　(C) 3　　(D) 6　　(E) 14

2. 设$\alpha=(1,2,3)^T$, $A=E-3\alpha\alpha^T$, 则A必有特征值(　　　).

提醒 λ 是 A 的特征值

$\Leftrightarrow$ 存在向量 $\alpha \neq 0$, 使得 $A\alpha = \lambda\alpha$

$\Leftrightarrow$ 方程组 $(\lambda E - A)X = 0$ 定有非零解

$\Leftrightarrow |\lambda E - A| = 0$

定义 设 n 阶矩阵 $A = (a_{ij})_{n\times n}$，称

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix}$$

为方阵 A 的**特征多项式**，

$|\lambda E - A| = 0$为方阵 A 的**特征方程**.

提醒 A的全部特征值就是特征多项式

$$f(\lambda) = |\lambda E - A|$$

的全部根或零点，或特征方程

$$|\lambda E - A| = 0$$

的全部根或解.

提醒 若 $A = (a_{ij})_{n\times n}$为**三角阵**，则

$$|\lambda E - A| = (\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22})\cdots(\lambda - a_{nn})$$

从而 A 的特征值为 $a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}$.

三角阵的特征值就是其全部主对角元素

提醒 α 是 A 的对应于特征值 λ 的特征向量

$$\Leftrightarrow A\alpha = \lambda\alpha,\quad \alpha \neq 0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda E - A)\alpha = 0,\ \alpha \neq 0$$

$\Leftrightarrow \alpha$ 是 $(\lambda E - A)X = 0$ 的非零解

方阵 A 的属于特征值 λ 的全部特征向量，就是齐次线性方程组

$$(\lambda E - A)X = 0$$

的全部**非零**解.

提醒 属于特征值 λ 的全体特征向量连同零向量组成一个子空间 $\mathrm{Nul}(\lambda E - A)$，称为 λ 的**特征子空间**.

<u>**提醒**</u> 一个特征值有无穷多个特征向量与其对应，但一个特征向量只能对应一个特征值.

二、特征值与特征向量的求法

对一个给定的n阶方阵A，特征值与特征向量的求法及步骤为：

① 计算行列式$|\lambda E-A|$得A的特征多项式

$$f(\lambda)=|\lambda E-A|.$$

这是一个关于λ的n次多项式，

它的首项系数，即n次项的系数为1；

② 解特征方程$|\lambda E-A|=0$得A的全部特征值

$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$;

③ 对每个**相异**特征值λ_i，求出线性方程组

$$(\lambda_i E - A)X = 0$$

的全部**非零**解，这些非零解就是A的属于特征值λ_i的全部特征向量.

例题 求$A=\begin{bmatrix}3 & -4 & 4\\ 1 & -1 & -8\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}$的特征值与特征向量.

解答 方阵A的特征多项式

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix}\lambda-3 & 4 & -4\\ -1 & \lambda+1 & 8\\ 0 & 0 & \lambda+2\end{vmatrix} = (\lambda+2)(\lambda-1)^2,$$

$\Rightarrow$ A的特征值为$\lambda_1=-2, \lambda_{2,3}=1.$

因

$$\lambda_1 E - A = \begin{bmatrix} -5 & 4 & -4 \\ -1 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{row}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -28/9 \\ 0 & 1 & -44/9 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

故 $(\lambda_1 E - A)X = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 28/9 x_3 \\ x_2 = 44/9 x_3 \end{cases}$

令自由变量 $x_3 = 9k$ 得A 的属于特征值 λ_1的全部特征向量为

$$k\begin{bmatrix} 28 \\ 44 \\ 9 \end{bmatrix},$$ 其中$k \neq 0$为任意常数.

因

$$\lambda_{2,3}E - A = \begin{bmatrix} -2 & 4 & -4 \\ -1 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{row}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

故 $(\lambda_{2,3}E - A)X = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2x_2 \\ x_3 = 0 \end{cases}$

令自由变量 $x_2 = l$ 得 A 的属于特征值 $\lambda_{2,3}$ 的全部特征向量为

$$l\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{其中 } l \neq 0 \text{ 为任意常数.}$$

例题 求 $A=\begin{bmatrix}3 & 3 & 2\\ 1 & 1 & -2\\ -3 & -1 & 0\end{bmatrix}$的特征值与特征向量.

解答 因A的特征多项式

$$|\lambda E-A|=(\lambda-4)(\lambda+2i)(\lambda-2i),$$

故A的特征值为 $\lambda_1=2i,\ \ \lambda_2=-2i,\ \ \lambda_3=4.$

因

$$\lambda_1 E-A=\begin{bmatrix}2i-3 & -3 & -2\\ -1 & 2i-1 & 2\\ 3 & 1 & 2i\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{row}}\begin{bmatrix}1 & 0 & i\\ 0 & 1 & -i\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

故 $(\lambda_1 E - A)X = 0$ 的基础解系为 $\alpha = \begin{bmatrix} -i \\ i \\ 1 \end{bmatrix}$；

从而，A 的属于特征值 λ_1 的全部特征向量为

$$l\alpha = l\begin{bmatrix} -i \\ i \\ 1 \end{bmatrix}, l \neq 0 \text{为任意常数；}$$

因 $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1$, 故 A 的属于特征值 λ_2 的特征向量为

$$k\bar{\alpha} = k\overline{\begin{bmatrix} -i \\ i \\ 1 \end{bmatrix}} = k\begin{bmatrix} i \\ -i \\ 1 \end{bmatrix}, k \neq 0 \text{为任意常数；}$$

求 A 的属于特征值 λ_3 的全部特征向量：略

例题 求方阵$A=\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{bmatrix}$的特征值与特征向量.

解答 因方阵 A的特征多项式为

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-2&-2\\-2&\lambda-1&-2\\-2&-2&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-5)(\lambda+1)^2;$$

故A的特征值为 $\lambda_1=5,\lambda_{2,3}=-1.$

解$(\lambda_1 E - A)X = 0$得其基础解系为

$$\xi = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

则A的对应于特征值 $\lambda_1 = 5$的特征向量为

$$\alpha = k\xi = k\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, k \neq 0\text{为任意常数.}$$

解$(\lambda_{23}E-A)X=0$得其基础解系为

$$\eta_1=\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix},\quad \eta_2=\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix},$$

则 A 的属于特征值$\lambda_{23}=-1$的特征向量为

$$\beta=l_1\eta_1+l_2\eta_2=l_1\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}+l_2\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix},$$

其中,l_1,l_2为不全为零的任意常数.

三、特征值的性质

定理 设$A=(a_{ij})_{n\times n}$, $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$为$A$的全部特征值，则

$$(1)\ \sum_{i=1}^{n}\lambda_i=\sum_{i=1}^{n}a_{ii} \qquad (2)\ \prod_{i=1}^{n}\lambda_i=|A|$$

其中$\mathrm{tr}A=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}$ 称为矩阵A的**迹**.

证明 因$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$为$A$的特征值，则

$$|\lambda E-A|=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_n)\ \cdots\ \langle 1\rangle$$

另一方面

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \lambda^n - (\sum_{i=1}^{n} a_{ii})\lambda^{n-1} + \cdots \qquad \langle 2 \rangle$$

比较$\langle 1 \rangle$ $\langle 2 \rangle$两式中λ^{n-1}的系数，即得

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

在$\langle 1 \rangle$式中令$\lambda = 0$可得

$$|0E - A| = (0 - \lambda_1)(0 - \lambda_2)\cdots(0 - \lambda_n)$$

$$\Rightarrow |-A| = (-\lambda_1)(-\lambda_2)\cdots(-\lambda_n)$$

$$\Rightarrow (-1)^n|A| = (-1)^n\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

$$\Rightarrow |A| = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

推论 方阵A可逆$\Leftrightarrow A$的特征值均不为零.

$|A| = 0 \Leftrightarrow$ 零是A的特征值.

定理 设λ是A的特征值，α为A的属于特征值λ的特征向量，$f(x)$为多项式，则

(1) λ^k为A^k的特征值；其中k为**任意自然数**；

α为矩阵A^k的对应于λ^k的特征向量.

(2) $f(\lambda)$是矩阵$f(A)$的特征值；

α是$f(A)$的属于特征值$f(\lambda)$的特征向量.

提醒 定理包含了多项式的诸多特殊情形，如

$f(x) = a_0$, $f(x) = ax$, $f(x) = x^k$.

幂矩阵，方阵多项式的特征值与特征向量

定理 设λ是A的特征值，α为A的对应于特征值λ的特征向量，若A可逆，则

(1) $\dfrac{1}{\lambda}$为A^{-1}的特征值；

α为矩阵A^{-1}的对应于$\dfrac{1}{\lambda}$的特征向量.

(2) λ^k为A^k的特征值；其中k为**任意整数**；

α为矩阵A^k的对应于λ^k的特征向量.

(3) $\dfrac{|A|}{\lambda}$为A^*的特征值；

α为矩阵A^*的对应于$\dfrac{|A|}{\lambda}$的特征向量.

逆矩阵，幂矩阵，伴随矩阵的特征值与特征向量

例题 设 $A=(a_{ij})_{3\times 3}$ 的特征值为

$$\lambda_1=-3,\lambda_2=1,\lambda_3=2.$$

① 证明：A 为可逆矩阵；

② 求 $a_{11}+a_{22}+a_{33}$ 的值和 A^{-1}, A^* 的特征值；

③ 求 $\det\left(A^3-3A+E\right)=?$

① **证明** $|A|=\lambda_1\lambda_2\lambda_3=(-3)\times 1\times 2=-6\neq 0$

$\Rightarrow A$ 可逆.

证明:因 A 无零特征值，故 A 可逆.

②**解答** $a_{11}+a_{22}+a_{33}=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0;$

由于A 可逆，故A^{-1}的特征值为

$$\lambda_1^{-1}=-\frac{1}{3},\ \lambda_2^{-1}=1,\ \lambda_3^{-1}=\frac{1}{2}$$

从而 A^*的特征值为

$$\frac{|A|}{\lambda_1}=2,\quad \frac{|A|}{\lambda_2}=-6,\quad \frac{|A|}{\lambda_3}=-3$$

③**解答** 由矩阵多项式的特征值结论知：

$f(A)=A^3+3A+E$ 的特征值为

$$f(\lambda_1)=\lambda_1^3-3\lambda_1+1$$
$$=(-3)^3-3\times(-3)+1=-17;$$

$$f(\lambda_2) = \lambda_2^3 - 3\lambda_2 + 1$$
$$= 1^3 - 3 \times 1 + 1 = -1;$$
$$f(\lambda_3) = \lambda_3^3 - 3\lambda_3 + 1$$
$$= 2^3 - 3 \times 2 + 1 = 3;$$

从而有

$$|A^3 - 3A + E| = f(\lambda_1)f(\lambda_2)f(\lambda_3)$$
$$= (-17) \times (-1) \times 3 = 51$$

定理 方阵 A 与其转置矩阵有相同的特征值.

证明 因 $|\lambda E - A| = \left|(\lambda E - A)^T\right| = \left|\lambda E - A^T\right|,$

即 A 与 A^T 特征多项式相同，故特征值相同.

命题 若n阶矩阵A满足$f(A)=0$，则A的特征值λ必满足$f(\lambda)=0$. 其中$f(x)$为多项式.

证明 设α为A的对应于特征值λ的特征向量，则

$$A\alpha=\lambda\alpha,\quad \alpha\neq 0,$$

从而有

$$f(A)\alpha=f(\lambda)\alpha,\quad \alpha\neq 0,$$

因$f(A)=0$，所以

$$0=f(\lambda)\alpha,\quad \alpha\neq 0,$$

上式表明$f(\lambda)=0$.

例题 设矩阵A满足$A^2=2A+8E$，求A的特征值.

解答 由题意知，A的矩阵多项式

$$f(A)=A^2-2A-8E=0,$$

由上页命题知，A的特征值λ必满足

$$f(\lambda)=\lambda^2-2\lambda-8=0,$$

解之即得$\lambda=-2 \text{ or } 4.$

特征值的代数重数，几何重数及其关系

提醒 设A为 n 阶方阵，且

$$f(\lambda)=|\lambda E-A|=(\lambda-\lambda_0)^k g(\lambda),$$

其中$k\in\mathbb{Z}^+$, 多项式$g(\lambda)$没有因式$\lambda-\lambda_0$.

k： λ_0的**代数重数**；

$\dim(\mathrm{Nul}(\lambda_0 E-A))$： λ_0的**几何重数**；

定理 设A为$n\times n$矩阵, λ为A的k重特征值，则A的属于特征值λ的特征向量中线性无关的最大个数不多于k.

提醒 设A为 n 阶方阵，λ_0为 A 的特征值，其代数重数为k，几何重数为 t，则

$$1 \leq t \leq k.$$

$$t = \dim(\mathrm{Nul}(\lambda_0 E - A)) = n - \mathrm{r}(\lambda_0 E - A)$$

$(\lambda_0 E - A)X = 0$中自由变量个数

$(\lambda_0 E - A)X = 0$的基础解系中的向量个数

$\lambda_0 E - A$的行阶梯形矩阵的零行数

A的属于λ_0的线性无关特征向量最大个数

四、特征向量的性质

定理 方阵的对应于不同特征值的特征向量线性无关.

证明 设 A 为 n 阶方阵，$\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_t$ 是 A 的分别属于特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_t$ 的特征向量，则

$$A^l \xi_i = \lambda_i^l \xi_i, \forall i = 1, 2, \cdots, t, l = 1, 2, \cdots .$$

设

$$k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \cdots + k_t\xi_t = 0 \quad \cdots\cdots \langle 1 \rangle$$

在 $\langle 1 \rangle$式两边逐次左乘 $A, A^2, \cdots, A^{t-1}$，得

$$\begin{cases} k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \cdots + k_t\xi_t = 0 \\ \lambda_1 k_1\xi_1 + \lambda_2 k_2\xi_2 + \cdots + \lambda_t k_t\xi_t = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \lambda_1^{t-1} k_1\xi_1 + \lambda_2^{t-1} k_2\xi_2 + \cdots + \lambda_t^{t-1} k_t\xi_t = 0 \end{cases}$$

将上式写成矩阵形式，有

$$(k_1\xi_1, k_2\xi_2, \cdots, k_t\xi_t)\begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_1^{t-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_2^{t-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_t & \lambda_t^2 & \cdots & \lambda_t^{t-1} \end{bmatrix} = 0$$

$$(k_1\xi_1, k_2\xi_2, \cdots, k_t\xi_t)\begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1^{t-1} \\ 1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_2^{t-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_t & \cdots & \lambda_t^{t-1} \end{bmatrix} = 0$$

因$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_t$互不相同，上式中的范德蒙德矩阵可逆，故

$$(k_1\xi_1, k_2\xi_2, \cdots, k_t\xi_t) = 0 \Rightarrow k_i\xi_i = 0,\ i = 1, 2, \cdots, t.$$

又因$\xi_i \neq 0$, 所以$k_i = 0, i = 1, 2, \cdots, t.$

从而$\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_t$线性无关.

定理 设n阶方阵A有不同特征值$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$，重数分别为$t_1, t_2, \cdots, t_s$，$\xi_{i1}, \xi_{i2}, \cdots, \xi_{il_i}$是$A$的属于特征值$\lambda_i$的$l_i (i = 1, 2, \cdots, s)$个线性无关的特征向量，则向量组

$$\xi_{11}, \cdots, \xi_{1l_1}, \xi_{21}, \cdots, \xi_{2l_2}, \cdots, \xi_{s1}, \cdots, \xi_{sl_s}$$

线性无关，且

$$l_1 + l_2 + \cdots + l_s \le t_1 + t_2 + \cdots + t_s = n.$$

推论 设A为$n \times n$矩阵，则A**至多有**n个线性无关的特征向量；若A有n个不同的特征值，则A有n个线性无关的特征向量.

例题 设ξ_1,ξ_2为矩阵A的属于不同特征值的特征向量. 证明：$\xi_1+\xi_2$不是A的特征向量.

证明 设ξ_1,ξ_2分别属于特征值 **反证法**

若$\xi_1+\xi_2$是A的特征向量，则存在，使得

$$A(\xi_1+\xi_2)=\lambda(\xi_1+\xi_2)\Rightarrow A\xi_1+A\xi_2=\lambda\xi_1+\lambda\xi_2$$

因 $A\xi_i=\lambda_i\xi_i, i=1,2$，故

$$\lambda_1\xi_1+\lambda_2\xi_2=\lambda\xi_1+\lambda\xi_2\Rightarrow(\lambda_1-\lambda)\xi_1+(\lambda_2-\lambda)\xi_2=0$$

因ξ_1,ξ_2属于不同特征值，故ξ_1,ξ_2无关，且

$$\lambda_1-\lambda=0=\lambda_2-\lambda\Rightarrow\lambda_1=\lambda_2$$

与题设矛盾，故$\xi_1+\xi_2$不是A的特征向量.

课堂回答

1.已知 $X=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ 是方阵 $A=\begin{bmatrix}2&-1&2\\5&a&3\\-1&b&-2\end{bmatrix}$ 的特征向量，求a,b以及X所对应特征值λ.

2. 矩阵 $\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{bmatrix}$ 的特征值是 (　　).

$A.1,0,1$　$B.1,1,2$　$C.-1,1,2$　$D.-1,1,1$

3. 三阶矩阵 A有特征值 $-1,2,4$,则下列矩阵中，满秩矩阵有(　　).

$A.\ E+A$　$B.\ A+2E$　$C.\ 2E-A$　$D.\ A-4E$

思考题

设A为三阶矩阵，若非齐次线性方程组$AX=\beta$的通解为$3\beta+k_1\eta_1+k_2\eta_2$，求矩阵$A$的特征值与特征向量.

答案： $\lambda_1=\dfrac{1}{3},\ k\beta, k\neq 0;$

$\lambda_{2,3}=0,\ k_1\eta_1+k_2\eta_2, k_1, k_2$不全为零.