

2019~2020 (I) 线性代数 (理工) 期末试卷 A 参考解答

一、填空题 (每小题 3 分, 共 18 分)

1. -1; 2. 3; 3. 6; 4. 0; 5. -8; 6. $y_1^2 - 3y_2^2 + 2y_3^2$

二、(14 分) 解: (1) $(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2k & 0 & k-1 \end{pmatrix}$,

因 $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2k & 0 & k-1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$, $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 也是 R^3 的一个基. (4 分)

$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2k & 0 & k-1 \end{pmatrix}$ 是基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 到基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 的过渡矩阵. (2 分)

(2) 设非零向量 ξ 在两组基下的坐标都是 $x = (x_1, x_2, x_3)^T \neq 0$, 则

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)x = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)x = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)Ax.$$

由坐标唯一性, 有 $Ax = x$ (3 分)

整理得线性方程组: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2k & 0 & k-2 \end{pmatrix} x = 0$ 存在非零解, 可得 $k = -2$.

..... (2 分)

此时方程组化为 $\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$, 可求得通解为 $x = (c, 0, -c)^T, c \in R$,

故 $\xi = c\alpha_1 - c\alpha_3, c \in R$ (3 分)

三、(14 分) 解: $(A, B) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & a+2 & 3 & -3 & a-4 \\ 0 & 0 & a-1 & 1-a & b+2 \end{pmatrix}$,

(1) $|A| \neq 0$, 即 $a \neq 1$ 且 $a \neq -2$ 时, 有唯一解. (4 分)

(2) $|A| = 0$ 时, $a = 1$ 或 $a = -2$.

当 $a = -2$, $(A, B) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b-4 \end{pmatrix}$,

故当 $a=-2, b=4$ 时, 有无穷多解, (2 分)

$$\text{此时 } (A, B) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ 全部解为 } X = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 \\ k_1 & k_2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, k_1, k_2 \in R. \\ \text{..... (3 分)}$$

$$\text{当 } a=1, (A, B) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b+2 \end{pmatrix},$$

故当 $a=1, b=-2$ 时, 方程组有无穷多解, (2 分)

$$\text{此时 } (A, B) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ 全部解为 } X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -k_1 & -k_2 \\ k_1-1 & k_2-1 \end{pmatrix}, k_1, k_2 \in R. \\ \text{..... (3 分)}$$

四、(10 分) 解: $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 7 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 5 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \dots (6 \text{ 分})$

故保留配方 1, 2, 4, 且配方 3 可由 1 份配方 1 和两份配方 2 组合出来. ... (4 分)

五、(12 分) 解: (1) 由已知, $A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, A \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix},$

所以 $\lambda=1$ 是 A 的特征值, $\alpha_1=(1,1,0)^T$ 是 A 属于 1 的特征向量;

$\lambda=-1$ 是 A 的特征值, $\alpha_2=(1,-1,0)^T$ 是 A 属于 -1 的特征向量.

..... (2 分)

由 $r(A)=2$ 知 $|A|=0$, 所以 $\lambda=0$ 是 A 的特征值, (2 分)

设 α_3 是 A 属于 0 的特征向量, 因实对称矩阵不同特征值的特征向量相互正交, 可取 $\alpha_3=(0,0,1)^T$ (2 分)

故矩阵 A 的特征值为 1, -1, 0, 特征向量依次为 $k_1(1,1,0)^T, k_2(1,-1,0)^T, k_3(0,0,1)^T$,

其中 k_1, k_2, k_3 均是不为零的任意实数. (2 分)

$$(2) \text{ 令 } P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Lambda = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{bmatrix}, \text{ 则 } P^{-1}AP = \Lambda.$$

$$\text{故 } A = P\Lambda P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad \dots\dots(4 \text{ 分})$$

$$\text{六、(12 分) 解法 I: } A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix},$$

求解特征方程可得 A 的特征值为 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = \lambda_3 = 6$. \dots\dots(2 \text{ 分})

对 $\lambda_1 = 0$, 解 $(0E - A)x = 0$, 得一个基础解系 $p_1 = (1, -2, 1)^T$,

$$\text{单位化得 } q_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right)^T. \quad \dots\dots(2 \text{ 分})$$

对 $\lambda_2 = \lambda_3 = 6$, 解 $(6E - A)x = 0$, 即 $x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$, 得一个基础解系

$p_2 = (-1, 0, 1)^T, p_3 = (2, 1, 0)^T$, (直接取正交基础解系 $(-1, 0, 1)^T, (1, 1, 1)^T$ 亦可)

$$\text{正交单位化得 } q_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^T, q_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right)^T. \quad \dots\dots(4 \text{ 分})$$

$$\text{令正交阵 } Q = [q_1, q_2, q_3] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{30}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{5}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \quad (2 \text{ 分}) \quad \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{30}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{5}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

则二次型 $f(X) = X^T A X$ 经正交变换 $X = QY$ 化为标准形 $6y_1^2 + 6y_2^2$. \dots\dots(2 \text{ 分})

解法 II: 由 α, β 的正交性, 有 $A\alpha = 6\alpha, A\beta = 6\beta$, 故 α, β 是 A 的属于 6 的特征向量. \dots\dots(2 \text{ 分})

注意到 A 的形式, A 的秩不超过 2 (等于 2), 故 0 是 A 的特征值.

\dots\dots(2 \text{ 分})

因为 A 实对称, 故 0 的特征向量与 α, β 正交, 可取 $\gamma = (1, -2, 1)^T$.

$$p_2 = (0, 1, 2)^T, p_3 = (1, 0, -1)^T \quad \dots\dots(2 \text{ 分})$$

$$q_2 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}} \right)^T, q_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{30}}, \frac{2}{\sqrt{30}}, -\frac{1}{\sqrt{30}} \right)^T$$

对 α, β, γ 单位化得

$$q_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right)^T, q_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^T, q_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right)^T. \quad \dots\dots (2 \text{ 分})$$

$$\text{令正交阵 } Q = [q_1, q_2, q_3] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}, \quad \dots\dots (2 \text{ 分})$$

$$\text{则 } A = Q \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} Q^T, \text{ 或 } Q^T A Q = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

故二次型 $f(X) = X^T A X$ 经正交变换 $X = QY$ 化为标准形 $6y_1^2 + 6y_2^2$. $\dots\dots (2 \text{ 分})$

解法 III: 注意到 A 的形式和 α, β 的正交性,

$$\text{对 } \alpha, \beta \text{ 单位化得 } q_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right)^T, q_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^T, \quad \dots\dots (2 \text{ 分})$$

$$\text{并求得与 } \alpha, \beta \text{ 正交的单位向量为 } q_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right)^T. \quad \dots\dots (2 \text{ 分})$$

$$\text{有 } A = 2\alpha\alpha^T + 3\beta\beta^T = 6q_1q_1^T + 6q_2q_2^T = [q_1, q_2, q_3] \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1^T \\ q_2^T \\ q_3^T \end{bmatrix}. \quad \dots\dots (4 \text{ 分})$$

$$\text{令正交阵 } Q = [q_1, q_2, q_3] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}, \quad \dots\dots (2 \text{ 分})$$

$$\text{则 } A = Q \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} Q^T, \text{ 或 } Q^T A Q = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

故二次型 $f(X) = X^T A X$ 经正交变换 $X = QY$ 化为标准形 $6y_1^2 + 6y_2^2$. $\dots\dots (2 \text{ 分})$

七、证明题 (每小题 7 分, 共 14 分)

1. 证明: $B = BE_m = BAC = E_n C = C$ (3 分)

$$r_A \geq r_{BA} = n, \quad r_A \geq r_{AC} = m, \quad \text{故 } r_A \geq \max\{m, n\}. \quad \text{..... (2 分)}$$

$$\text{又 } r_A \leq \min\{m, n\}, \quad \text{故 } m = n. \quad \text{..... (2 分)}$$

2. 证明: 因 $(B^T AB)^T = B^T A^T (B^T)^T = B^T AB$, 故 $B^T AB$ 为 r 阶对称阵. (2 分)

任意 r 维向量 $x \neq 0$, 有 $Bx \neq 0$, (否则由 $r_B = r$ 有 $x = 0$) (2 分)

则 $x^T B^T ABx = (Bx)^T A(Bx) > 0$, 故 $B^T AB$ 正定. (3 分)

八、(6 分) (1) 证明: 由已知, $A\alpha_1 = \alpha_1, A\alpha_2 = -\alpha_2, A\alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_3$.

$$\text{设 } k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 = 0, \quad (1)$$

$$\text{用 } A \text{ 左乘并化简得 } (k_1 + k_3)\alpha_1 - k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 = 0,$$

$$\text{两式相减得 } 2k_1\alpha_1 + k_3\alpha_2 = 0,$$

因为 α_1, α_2 分属于 A 的不同特征值, 故线性无关, 所以 $k_1 = k_3 = 0$,

代入(1)式, 由 $\alpha_2 \neq 0$, 可得 $k_2 = 0$. 故 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关. (4 分)

$$(2) \text{ 由已知, } A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ 即 } AP = P \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\text{因为 } P \text{ 可逆, 故 } P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad \text{..... (2 分)}$$