第五章 特征值与特征向量

第三节 实对称矩阵的正交相似对角化

一、向量的内积

二、正交向量组

三、正交矩阵

四、实对称矩阵的性质

一、向量的内积

定义 设$\alpha=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{bmatrix}$, $\beta=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{bmatrix}$为$n$维向量，称

$$a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$$

为α与β的**内积**，记为(α,β)，即

$$(\alpha,\beta)=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n.$$

定义 若两向量α与β的内积$(\alpha,\beta)=0$，则称向量α与β **正交**，记为$\alpha\perp\beta$.

提醒 两列向量α与β的内积$(\alpha,\beta)=\alpha^T\beta$.

内积的运算性质

(1) $(\alpha,\beta)=\alpha^T\beta=\beta^T\alpha=(\beta,\alpha);$

(2) $(\alpha+\beta,\gamma)=(\alpha,\gamma)+(\beta,\gamma);$

(3) $(k\alpha,\beta)=k(\alpha,\beta),\ \forall\, k\in\mathbb{R};$

(4) $\alpha\neq 0\Leftrightarrow(\alpha,\alpha)>0,\ \ \alpha=0\Leftrightarrow(\alpha,\alpha)=0\,;$

(5) $(0,\alpha)=0^T\alpha=0;$

(6) $(\sum_{i=1}^{m}k_i\alpha_i,\beta)=\sum_{i=1}^{m}k_i(\alpha_i,\beta).$

定义 称$\|\alpha\| \triangleq \sqrt{(\alpha,\alpha)}$为$\alpha$的**长度**；

称长度为 1 的向量为**单位向量**.

当$\|\alpha\| > 0$时，向量$\dfrac{1}{\|\alpha\|}\alpha$是单位向量.

以数$\dfrac{1}{\|\alpha\|}$乘α称为将α**单位化**.

提醒 (1) $\|k\alpha\| = |k|\|\alpha\|$, 其中 k 为任意常数；

(2) 若$\alpha = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$，则

$$\|\alpha\| = \sqrt{(\alpha,\alpha)} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$$

例题 若 $\alpha=\begin{bmatrix}3\\2\\-4\\1\end{bmatrix},\beta=\begin{bmatrix}5\\-2\\4\\5\end{bmatrix}$，则

$$(\alpha,\beta)=0\Rightarrow\alpha\perp\beta.$$

$$\|\beta\|=\sqrt{(\beta,\beta)}=\sqrt{70}.$$

将 β 单位化得 $\dfrac{1}{\|\beta\|}\beta=\begin{bmatrix}5/\sqrt{70}\\-2/\sqrt{70}\\4/\sqrt{70}\\5/\sqrt{70}\end{bmatrix}.$

二、正交向量组

定义 定义了内积的实向量空间$\mathbb{R}^n$称为n维欧几里德空间，在$\mathbb{R}^n$中，

① 称不含零向量且两两正交的向量组为**正交向量组**.

② 由单位向量构成的正交组称为**规范正交组**或**标准正交组**；

③ 含n个向量的规范正交组$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$称为$\mathbb{R}^n$的一个**规范正交基**或**标准正交基**.

定理 任意正交向量组必为线性无关向量组.

证明 设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$任意正交组. 考虑

$$\sum_{i=1}^{s} k_i\alpha_i = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s = 0$$

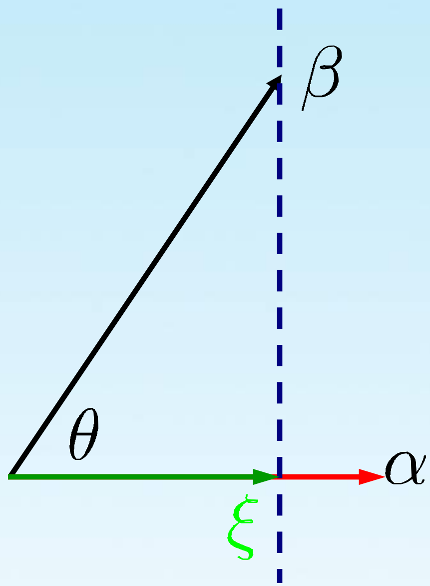
$$\Rightarrow \left(\sum_{i=1}^{s} k_i\alpha_i, \alpha_j\right) = 0, \forall j = 1,2,\cdots,s$$

$$\Rightarrow k_j(\alpha_j,\alpha_j) = 0, \forall j = 1,2,\cdots,s$$

$$\overset{\alpha_j \neq 0}{\Rightarrow} k_j = 0, \forall j = 1,2,\cdots,s$$

$\Rightarrow \alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关.

一向量在另一向量上的投影



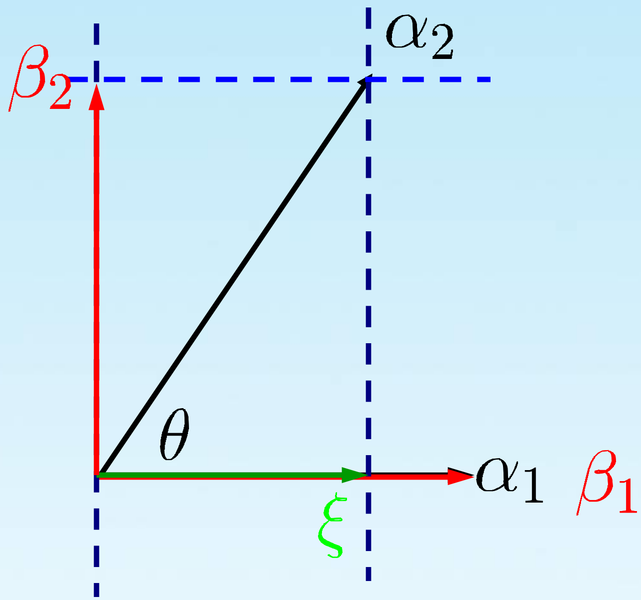
$$\xi = \|\beta\| \cos\theta \frac{1}{\|\alpha\|}\alpha$$

$$= \frac{\|\beta\| \cdot \|\alpha\| \cos\theta}{\|\alpha\|^2}\alpha$$

$$= \frac{(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}\alpha$$

ξ: 向量 β 在向量 α 上的投影（向量）

施密特正交化方法的几何解释

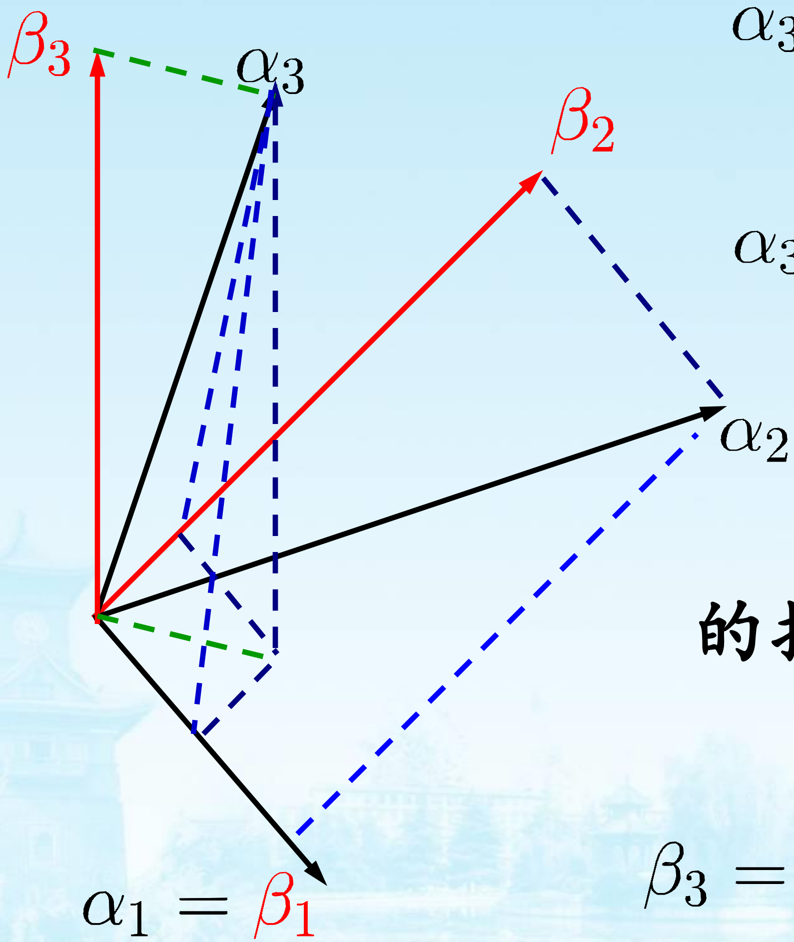


$$\xi = \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1$$

ξ：向量α_2在向量 β_1上的**投影**（向量）

$$\beta_2 = \alpha_2 - \xi = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1$$

施密特正交化方法的几何解释



α_3 在 β_1 上的投影：$\dfrac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1$

α_3 在 β_2 上的投影：$\dfrac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2$

α_3 在 β_1,β_2 所在平面上的

的投影：$\dfrac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1 + \dfrac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1 - \frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2$$

线性无关向量组必可正交化

定理 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性无关，令

$$\beta_1 = \alpha_1, \qquad \beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\beta_s = \alpha_s - \frac{(\alpha_s, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1 - \frac{(\alpha_s, \beta_2)}{(\beta_2, \beta_2)}\beta_2 - \cdots - \frac{(\alpha_s, \beta_{s-1})}{(\beta_{s-1}, \beta_{s-1})}\beta_{s-1},$$

则 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$ 为正交向量组；

提醒 以上正交化方法称为施密特正交化方法.

将向量组 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$ 单位化，可得

$$\gamma_1 = \frac{1}{\|\beta_1\|}\beta_1,\ \gamma_2 = \frac{1}{\|\beta_2\|}\beta_2,\ \cdots,\ \gamma_s = \frac{1}{\|\beta_s\|}\beta_s$$

则 $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_s$ 为一规范正交向量组；

且对任意的 $k = 1, 2, \cdots, s$, 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k$ 与 $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_k$ 等价.

$\boxed{\text{线性无关组}} \Longrightarrow \boxed{\text{正交组}} \Longrightarrow \boxed{\text{规范正交组}}$

例题 用施密特正交化方法将如下向量组

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix}$$

规范正交化.

解答 首先将向量组正交化

$$\beta_1 = \alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} - \frac{4}{4}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix},$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{(\alpha_3, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1 - \frac{(\alpha_3, \beta_2)}{(\beta_2, \beta_2)}\beta_2$$

$$= \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix} - \frac{12}{4}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{-32}{16}\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix};$$

则 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 为正交向量组. 将其单位化得规范正交组

$$\gamma_1 = \frac{1}{\|\beta_1\|}\beta_1 = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}, \quad \gamma_2 = \frac{1}{\|\beta_2\|}\beta_2 = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \\ -1/2 \end{bmatrix},$$

$$\gamma_3 = \frac{1}{\|\beta_3\|}\beta_3 = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{bmatrix}.$$

提醒 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ 是规范正交组，不是规范正交基.

三、正交矩阵

定义 设n阶实矩阵A满足$A^TA=E$，则称矩阵A为**正交矩阵**.

提醒 A为正交矩阵$\Leftrightarrow A^T=A^{-1}$.

正交矩阵的性质 设P,Q为同阶正交矩阵，则

① $P^T=P^{-1}$，且它们都为正交矩阵；

② PQ为正交矩阵；

③ $|P|=1$或-1.

提醒 单位矩阵是正交矩阵. 正交矩阵的转置矩阵，逆矩阵，负矩阵，幂都是正交矩阵.

思考 正交矩阵的伴随矩阵是正交矩阵吗？

方阵为矩阵正交的充要条件

定理 设Q为n阶实矩阵，则Q为正交矩阵的充要条件为：Q的行或列向量组是规范正交基.

证明 将Q列分块为$Q=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$，则

$$Q^TQ=\begin{bmatrix}\alpha_1^T\\ \alpha_2^T\\ \vdots\\ \alpha_n^T\end{bmatrix}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$$

$$=\begin{bmatrix}\alpha_1^T\alpha_1 & \alpha_1^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_1^T\alpha_n\\ \alpha_2^T\alpha_1 & \alpha_2^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_2^T\alpha_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \alpha_n^T\alpha_1 & \alpha_n^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_n^T\alpha_n\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow Q^TQ=\begin{bmatrix} \|\alpha_1\|^2 & (\alpha_1,\alpha_2) & \cdots & (\alpha_1,\alpha_n) \\ (\alpha_2,\alpha_1) & \|\alpha_2\|^2 & \cdots & (\alpha_2,\alpha_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\alpha_n,\alpha_1) & (\alpha_2,\alpha_n) & \cdots & \|\alpha_n\|^2 \end{bmatrix}$$

于是，

Q为正交矩阵$\Leftrightarrow Q^TQ=E$

$$\Leftrightarrow \|\alpha_i\|^2=1,(\alpha_i,\alpha_j)=0,\forall i,j,\ i\neq j$$

$$\Leftrightarrow \|\alpha_i\|=1,\alpha_i\perp\alpha_j=0,\forall i,j,\ i\neq j$$

$\Leftrightarrow \alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$是规范正交基.

例题 判断下列矩阵是否为正交矩阵：

$$(1)\begin{bmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -3 \end{bmatrix} \quad (2)\begin{bmatrix} 2/3 & 2/3 & 1/3 \\ 2/3 & -1/3 & -2/3 \\ 1/3 & -2/3 & 2/3 \end{bmatrix}$$

例题 已知 A 为对称矩阵，满足

$$A^2 - 4A + 3E = 0,$$

请问：矩阵 $A - 2E$为正交矩阵吗？

四、实对称矩阵的性质

复数域上的一般矩阵，其特征值为复数，但对实对称矩阵而言，其特征值、特征向量具有特殊性质.

性质1 实对称矩阵的特征值都是实数.

推论 实对称矩阵的特征向量均为实向量.

性质2 实对称矩阵的属于不同特征值的特征向量不仅线性无关，而且正交.

证明 设α, β为实对称矩阵A的属于不同特征值λ_1, λ_2的特征向量， 则

$$\alpha \neq 0,\ \beta \neq 0,\ A\alpha = \lambda_1\alpha,\ A\beta = \lambda_2\beta,$$

于是有

$$\lambda_1\alpha^T\beta = (\lambda_1\alpha)^T\beta = (A\alpha)^T\beta = \alpha^T A^T \beta$$

$$= \alpha^T (A\beta) = \alpha^T (\lambda_2\beta) = \lambda_2\alpha^T\beta$$

$$\Rightarrow (\lambda_1 - \lambda_2)\alpha^T\beta = (\lambda_1 - \lambda_2)(\alpha, \beta) = 0$$

$$\overset{\lambda_1 \neq \lambda_2}{\Rightarrow} (\alpha, \beta) = 0$$

$\Rightarrow \alpha$ 与 β 正交.

性质3 实对称矩阵一定可以正交相似对角化！即：若 A 为 n 阶实对称矩阵，则一定存在正交矩阵 Q 使得 $Q^{-1}AQ$ 为对角阵！

推论1 若 A 为 n 阶实对称矩阵，λ 为 A 的 k 重**特征值**，则 A 有 k 个属于 λ 的线性无关或正交的特征向量.

提醒 对实对称矩阵而言，特征值的代数重数与几何重数总相等！

推论2 n 阶实对称矩阵一定有 n 个正交的单位特征向量.

将实对称矩阵正交对角化的方法与步骤

① 求出 A 的全部不同特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$, 其代数重数分别为 $k_1, k_2, \cdots, k_s$;

② 对任意 $i = 1, 2, \cdots, s$, 求出齐次线性方程组 $(\lambda_i E - A) X = 0$ 的基础解系

$$X_{i1}, X_{i2}, \cdots, X_{ik_i},$$

将其正交化后得 A 的 k_i 个属于 λ_i 的正交的特征向量

$$\beta_{i1}, \beta_{i2}, \cdots, \beta_{ik_i};$$

③ 将正交向量组

$$\begin{array}{cccc} \beta_{11}, & \beta_{12}, & \cdots, & \beta_{1k_1}, \\ \beta_{21}, & \beta_{22}, & \cdots, & \beta_{2k_2}, \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \beta_{s1}, & \beta_{s2}, & \cdots, & \beta_{sk_s} \end{array}$$

单位化，得规范正交基

$$\begin{array}{cccc} \gamma_{11}, & \gamma_{12}, & \cdots, & \gamma_{1k_1}, \\ \gamma_{21}, & \gamma_{22}, & \cdots, & \gamma_{2k_2}, \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \gamma_{s1}, & \gamma_{s2}, & \cdots, & \gamma_{sk_s} \end{array}$$

④ 令

$$Q=(\gamma_{11},\gamma_{12}\cdots,\gamma_{1k_1},\gamma_{21},\gamma_{22},\cdots,\gamma_{2k_2},$$

$$\cdots,\gamma_{s1},\gamma_{s2},\cdots,\gamma_{sk_s}),$$

则矩阵Q为正交矩阵，使得

$$Q^{-1}AQ=Q^TAQ=\begin{bmatrix} \overbrace{\lambda_1 \; \ddots \; \lambda_1}^{k_1} & & & & \\ & \overbrace{\lambda_2 \; \ddots \; \lambda_2}^{k_2} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \overbrace{\lambda_s \; \ddots \; \lambda_s}^{k_s} \end{bmatrix}$$

例题 设 $A=\begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{bmatrix}$，求正交矩阵 Q 使 $Q^{-1}AQ$ 为对角矩阵.

解答 经计算有 $|\lambda E - A| = (\lambda-1)^2(\lambda-10)$，

则 A 的特征值为 $\lambda_1 = 10,\ \lambda_{2,3} = 1.$

解 $(\lambda_1 E - A)X = 0$ 得其基础解系为

$$X_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix};$$

解 $(\lambda_{2.3}E-A)X=0$ 得其基础解系为

$$\alpha_1=\begin{bmatrix}-2\\1\\0\end{bmatrix},\ \alpha_2=\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix};$$

将α_1,α_2正交化得 $\beta_1=\alpha_1=\begin{bmatrix}-2\\1\\0\end{bmatrix},$

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}2\\4\\5\end{bmatrix};$$

将X_{11},β_1,β_2单位化得

$$\gamma_1=\frac{1}{|X_{11}|}X_{11}=\begin{bmatrix}-1/3\\-2/3\\2/3\end{bmatrix},$$

$$\gamma_2=\frac{1}{|\beta_1|}\beta_1=\begin{bmatrix}-2/\sqrt{5}\\1/\sqrt{5}\\0\end{bmatrix},$$

$$\gamma_3=\frac{1}{|\beta_2|}\beta_2=\begin{bmatrix}2\sqrt{5}/15\\4\sqrt{5}/15\\\sqrt{5}/3\end{bmatrix}.$$

令 $Q=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)=\begin{bmatrix} -\dfrac{1}{3} & -\dfrac{2}{\sqrt{5}} & \dfrac{2}{3\sqrt{5}} \\ -\dfrac{2}{3} & \dfrac{1}{\sqrt{5}} & \dfrac{4}{3\sqrt{5}} \\ \dfrac{2}{3} & 0 & \dfrac{\sqrt{5}}{3} \end{bmatrix}$

则 Q 为正交矩阵且

$$Q^{-1}AQ=\begin{bmatrix} 10 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}.$$

例题 已知三阶实对称矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1 = 2$, $\lambda_{2,3} = 1$. $\xi_2 = (1,1,-1)^T$, $\xi_3 = (2,3,-3)^T$ 为属于特征值 $\lambda_{2,3}$ 的特征向量. 求属于特征值λ_1的一个特征向量及矩阵A.

解答 设属于λ_1的一特征向量$\xi_1 = (x_1, x_2, x_3)^T$. 因实对称阵的属于不同特征值的特征向量正交，所以

$$\begin{cases}(\xi_1,\xi_2)=0\\(\xi_1,\xi_3)=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x_1+x_2-x_3=0\\2x_1+3x_2-3x_3=0\end{cases}$$

解之得属于λ_1 的一特征向量$\xi_1 = (0,1,1)^T$.

令$P=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\begin{bmatrix}0&1&2\\1&1&3\\1&-1&-3\end{bmatrix}$，　则

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}.$$

从而

$$A=P\begin{bmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}P^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&3/2&1/2\\0&1/2&3/2\end{bmatrix}.$$

例题 已知三阶实对称矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1=1$, $\lambda_2=2$, $\lambda_3=-2$. $\xi_1=(1,-1,1)^T$ 为属于特征值 λ_1 的特征向量. 且 $B=A^5-4A^3+E$.

(1) 验证 ξ_1 是 B 的特征向量;

(2) 求 B 的全部特征值与特征向量;

(3) 求 B.

提示 (1) 验证略.

(2) 设 A 的属于特征值 λ_2, λ_3 的特征向量为 $(x_1,x_2,x_3)^T$, 则 $x_1-x_2+x_3=0$, 解之得属于 λ_2, λ_3 的特征向量分别为

$$\xi_2=(1,1,0)^T, \xi_3=(1,-1,-2)^T.$$

因$B=f(A)$, 其中$f(x)=x^5-4x^3+1$，故B的特征值为

$$f(1)=-2, f(2)=f(-2)=1.$$

且B也为实对称矩阵，ξ_1,ξ_2,ξ_3是B的分别属于特征值$-2,1,1$的特征向量，所以

$$B(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=(-2\xi_1,\xi_2,\xi_3)$$

$$B=(-2\xi_1,\xi_2,\xi_3)(\xi_1,\xi_2,\xi_3)^{-1}$$

$$=\begin{bmatrix}-2 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 1\\ -2 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}0 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

补充练习

1. 设 α 为三维单位列向量，则 $\mathrm{rank}(E-\alpha\alpha^T)=?$

2. 设 A 为三阶实对称矩阵， $\mathrm{rank}(A)=2,\ A^2=A.$ 求 A 的特征值.

3. 设 A 为三阶实对称矩阵，特征值为 $3,\ -6,\ 0.$ $\alpha_1=(1,a,1)^T,\ \alpha_2=(a,a+1,1)^T$ 为分别属于特征值 $3,\ -6$ 的特征向量，求矩阵 A .

1\. 2　　2. 1, 1, 0　　3. $\begin{bmatrix} -2 & -1 & 4 \\ -1 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & -2 \end{bmatrix}$

4. 设 A 为三阶实对称矩阵，$\mathrm{r}(A)=2$, $AB=-2B$.

其中 $B=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&2&1\\-1&1&1\end{bmatrix}$. 求 A 的特征值和特征向量，并求 $\mathrm{rank}(A^*)$.

---

4. $\lambda_{1,2}=-2, k_1\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}; \lambda_3=0, k\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}$

$\mathrm{rank}(A^*)=1$

5. 已知三阶矩阵A 的第一行元素全为 1, 且 $\alpha_1=(1,1,1)^T, \alpha_2=(1,0,-1)^T, \alpha_3=(1,-1,0)^T$ 为 A 的三个特征向量，求 $A, (A-1.5E)^{2020}$.

5. $A=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}$; $1.5^{2020}E$