$$dN = \frac{2V}{8\pi^3} d^3k_x = \frac{2V}{8\pi^3} 4\pi k^2 dk = \frac{V}{\pi^2} k^2 dk$$

$$E = cp = chk/(2\pi)$$

$$E = h\nu$$

$$k = \frac{2\pi}{c} \nu$$

$$dN = \frac{V}{\pi^2} k^2 dk = \frac{V}{\pi^2} \left(\frac{2\pi}{c} \right)^3 \nu^2 d\nu$$

$$= \frac{8\pi V}{c^3} \nu^2 d\nu$$

当空腔处于温度为T的热平衡态时，空腔壁上的原子吸收和辐射的能量相等。空腔中某一频率的电磁驻波能量与原子中电子振动的能量相等。振动能量可以写为

$$H = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 + \frac{1}{2} mv^2$$

也就是有2个自由度。由经典能量均分定理，平均能量为

$$\bar{\varepsilon} = 2 \times \frac{1}{2} k_B T = k_B T$$

这样，在单位体积，温度为T的空腔内，频率在ν到$\nu + d\nu$之间的电磁波能量为

$$dE = \bar{\varepsilon} dN = \frac{8\pi k_B T}{c^3} \nu^2 d\nu$$

小孔的单色辐射出射度与这个能量密度成正比，比例系数为 $\frac{c}{4}$，于是

$$M_\nu = \frac{c}{4} \frac{8\pi k_B T}{c^3} \nu^2 d\nu = \frac{2\pi k_B T}{c^2} \nu^2 d\nu$$

这就是瑞利 - 金斯公式 。

如果在光子的分布$\{n_{K,\lambda}\}$中，只考虑某一特定模式$\boldsymbol{K},\lambda$的光子，而不管其他光子的模式时，那么就有以下的相对几率：

K,λ模式的光子数$n_{K,\lambda}=$	0	1	2	3	…
对应的相对几率为:	1	$e^{-\beta\hbar\omega}$	$e^{-2\beta\hbar\omega}$	$e^{-3\beta\hbar\omega}$	…

因此，我们可以从配分函数中，取出任一模式光子的信息．假如，我们要问某种模式$\boldsymbol{K},\lambda$的光子的平均数目$\bar{n}_{K,\lambda}$，立即可以写出

$$\bar{n}_{k,\lambda}=\frac{1\cdot e^{-\beta\hbar\omega}+2\cdot e^{-2\beta\hbar\omega}+3\cdot e^{-3\beta\hbar\omega}+\cdots}{1+e^{-\beta\hbar\omega}+e^{-2\beta\hbar\omega}+e^{-3\beta\hbar\omega}+\cdots}$$

$$=\frac{-\partial}{\partial(\beta\hbar\omega)}\ln[1+e^{-\beta\hbar\omega}+e^{-2\beta\hbar\omega}+\cdots]$$

$$=\frac{\partial}{\partial(\beta\hbar\omega)}\ln[1-e^{-\beta\hbar\omega}]$$

$$=\frac{1}{e^{\beta\hbar\omega}-1}. \tag{2.58}$$

普朗克认为，频率为ν的谐振子能量只能取$h\nu, 2h\nu, 3h\nu, 4h\nu...$，平均能量为

$$\bar{\varepsilon}=\frac{h\nu e^{-\frac{h\nu}{k_BT}}+2h\nu e^{-\frac{2h\nu}{k_BT}}+3h\nu e^{-\frac{3h\nu}{k_BT}}+...}{1+e^{-\frac{h\nu}{k_BT}}+e^{-\frac{2h\nu}{k_BT}}+e^{-\frac{3h\nu}{k_BT}}+...}$$

$$=\frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{k_BT}}-1}$$

$$dE = \bar{\varepsilon} dN = \frac{8\pi}{c^3} \frac{h\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1} d\nu$$

$$M_\nu = \frac{2\pi}{c^2} \frac{h\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1} d\nu$$