第三节 正定二次型

一、二实次型的分类

二、惯性定理

三、二次型正定的判别方法

一、实二次型的分类

定义 设 $f = X^T AX\ (A = A^T)$ 为 n 元实二次型，

若对任意 $X = (c_1, c_2, \cdots, c_n)^T \neq 0$，有

① $X^T AX > 0$，则称 f 为**正定**二次型；

② $X^T AX < 0$，则称 f 为**负定**二次型；

③ $X^T AX \geq 0$，则称 f 为**半正定**二次型；

④ $X^T AX \leq 0$，则称 f 为**半负定**二次型；

⑤ $X^T AX$ 既可取得正值，又可取得负值，

则称 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ **不定**二次型.

提醒 显然可见 $\boxed{f\text{（半）负定} \Leftrightarrow -f\text{（半）正定}}$

定义 设A为实对称阵，二次型$f = X^T AX.$

若二次型 f 正定，称其矩阵A为**正定矩阵**；

若二次型 f 负定，称其矩阵A 为**负定矩阵**；

若二次型 f 不定，称其矩阵A 为**不定矩阵**；

若二次型 f 半正定，称A为**半正定矩阵**；

若二次型 f 半负定，称A为**半负定矩阵**.

提醒 显然可见: $\boxed{A\text{（半）负定} \Leftrightarrow -A\text{（半）正定}}$

提醒 （半）负定问题均可以转化为（半）正定问题来研究，本节主要讲正定问题.

例题 (1) 二次型 $f=x_1^2+2x_2^2+\cdots+nx_n^2$

及其矩阵 $A=\begin{bmatrix}1 & & & \\ & 2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & n\end{bmatrix}$ 正定；

(2) 二次型 $q(x_1,x_2)=-x_1^2-2x_2^2$

及其矩阵 $A=\begin{bmatrix}-1 & \\ & -2\end{bmatrix}$ 负定.

例题 二次型 $g=x_1^2+2x_2^2-3x_3^2-4x_4^2$

$$\text{及其矩阵}A_g=\begin{bmatrix}1 & & & \\ & 2 & & \\ & & -3 & \\ & & & -4\end{bmatrix}\text{不定.}$$

思考 判断二次型

$$\phi(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1^2+2x_2^2+3x_3^2$$

$$\text{及其矩阵}A_\phi=\begin{bmatrix}1 & & & \\ & 2 & & \\ & & 3 & \\ & & & 0\end{bmatrix}\text{的正定性.}$$

显然可见，当二次型为标准二次型，实对称矩阵为对角阵时，其类型很容易判断.

对一般的二次型而言，可以通过可逆线性变换将其化为为标准形，再判断其类型！实对称矩阵同理可判断.

但问题是：可逆线性变换前后两个二次型及其矩阵的正定性是一致的吗？

定理 可逆线性变换不改变二次型的类型！

证明 只证可逆线性变换不改变正定二次型的类型！

设正定二次型 $f = X^T AX$ 经可逆线性变换

$X = PY$ 后化为 $f = Y^T BY$，其中$B = P^T AP$.

现证明新二次型$f = Y^T BY$也正定.

对任意的$Y \neq 0$, 因 P 可逆，则$X = PY \neq 0$,

$$\Rightarrow Y^T BY = Y^T \left(P^T AP\right) Y = X^T AX > 0$$

$$\Rightarrow f = Y^T BY \text{ 正定.}$$

同理：可逆线性变换不改变其它二次型类型！

二、惯性定理

一个实二次型，既可以通过正交变换化为标准形，也可以通过配方法化为标准形．显然，同一个二次型的标准形是不唯一的．但仔细观察可发现，同一二次型的不同标准形所含的正平方项的项数是确定的，负平方项的项数也是确定的．

惯性定理 二次型$f = X^T AX (A = A^T)$经满秩线性变换后化为标准形，则正平方项项数和负平方项项数都是唯一确定的.

定义 设$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X^TAX(A=A^T)$为$n$元二次型，称$f$的标准形中所含正平方项的项数$p$和负平方项的项数$q$分别为二次型$f$和实对称矩阵$A$的**正惯性指数**和**负惯性指数**，称$s=p-q$为$f$的**符号差**.

提醒 若$\mathrm{rank}(f)=r$，则$p+q=r$，r与s同奇偶.

结合以上定义，可得惯性定理的如下推论：

推论1 二次型 $f = X^T AX(A = A^T)$和实对称矩阵 A的正负惯性指数就是A的正负特征值个数（要计算重数）.

推论2 任意二次型的规范形是唯一的.

推论3 二次型经过可逆线性变换不改变正负惯性指数，故相合同的两矩阵有相同的正负惯性指数.

推论4 两同阶实对称矩阵合同的充要条件为它们具有相同的正负惯性指数.

正负惯性指数与二次型类型间有何关系？

提醒 设n元二次型$f = X^T AX \left(A = A^T\right)$的正负正负惯性指数为$p, q$, 且$\mathrm{r}(f) = r = \mathrm{r}(A)$.

当$p = r = n, \ q = 0$时，f和A 正定；

当$p = r \le n, \ q = 0$时，f和A 半正定；

当$q = r = n, \ p = 0$时，f和A 负定；

当$q = r \le n, \ p = 0$时，f和A 半负定；

当 $p \ge 1, q \ge 1$ 时，f和A 不定.

例题 确定二次型 $f(x,y)=xy$ 的类型.

解答 二次型 $f(x,y)=xy$ 的矩阵为

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 0.5 \\ 0.5 & 0 \end{bmatrix},$$

因 $|A|<0$, 故 A 有一正一负两个特征值，

即二次型的正负惯性指数均为1，所以

该二次型为不定二次型.

三、二次型正定的判别方法

定理 设 $f = X^T AX \left(A = A^T\right)$ 为 n 元实二型，

则以下命题等价

① A 为正定矩阵，或 f 为正定二次型；

② A 的特征值全为正数；

③ A 或 f 的正惯性指数 $p = n$;

④ 存在可逆矩阵 C，使得 $C^T AC = E$;

⑤ 存在可逆矩阵 P，使得 $P^T P = A$;

提醒 命题④和⑤即实对称矩阵 $A \simeq E$.

证明 采用循环证明法.

①⇒② 设λ是A的任一特征值，则$\lambda \in \mathbb{R}$且存在$X \in \mathbb{R}^n, X \neq 0$, 使得 $AX = \lambda X$.

f正定$\Rightarrow 0 < X^T AX = (AX)^T X = \lambda \|X\|^2$

$\Rightarrow \lambda > 0;$

②⇒③ 显然成立;

③⇒④ f 的正惯性指数$p = n$, 由惯性定理及推论，存在可逆线性变换$X = CY$使得

$$f = y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2,$$

该规范形的矩阵为E, 故$C^T AC = E$;

④⇒⑤ 令 $P = C^{-1}$, 则 P 可逆且

$$C^T AC = E \Rightarrow A = P^T P;$$

⑤⇒① 矩阵 P 可逆 $\Rightarrow PX \neq 0, \forall X \neq 0$

$$\Rightarrow f = X^T AX = (PX, PX) > 0$$

$\Rightarrow A$ 或 f 正定.

思考 根据以上定理，能否给出二次型 f 或实对称矩阵 A 负定的充要条件.

命题 设矩阵 P为 $m\times n$ 矩阵，则 PP^T, P^TP均为半正定矩阵.

特别地，当 $\mathrm{r}(P)=m$时，PP^T正定；

当 $\mathrm{r}(P)=n$ 时，P^TP 正定.

推论 设矩阵 P为 n 阶矩阵，则 PP^T, P^TP均为半正定矩阵.

特别地，当 P可逆时，PP^T, P^TP 均正定.

定义 称矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 位于**左上角**的子式

$$|A_k|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}$$

为 A 的 $k(k=1,2,\cdots,n)$ 阶**顺序主子式**.

霍尔魏茨定理 n元实二次型 $f=X^TAX\ (A=A^T)$

或 n 阶实对称矩阵 A 正定的充要条件为:

A的各阶顺序主子式均大于零.

证明略.

例题 已知三元二次型

$$f = {x_1}^2 + 2{x_2}^2 + (1-t)\,{x_3}^2 + 2tx_1x_2 + 2x_1x_3$$

为正定二次型，求 t 的取值范围.

解答 f 的矩阵为 $A = \begin{bmatrix} 1 & t & 1 \\ t & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1-t \end{bmatrix}$，则

f 正定 $\Leftrightarrow A$ 正定

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |A_1| = 1 > 0 \\ |A_2| = 2 - t^2 > 0 \\ |A_3| = t\,(t+1)\,(t-2) > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow -1 < t < 0 \Leftrightarrow t \in (-1, 0).$$

正定矩阵的性质

性质1 若 A, B 同阶正定，则 $A+B$ 正定.

性质2 若 A 正定， k 为正数，则 kA 正定.

性质3 正定矩阵的行列式大于零，故可逆，

正定矩阵的逆矩阵，伴随矩阵均正定.

性质4 若 A 正定，则 $A^k (k \in \mathbb{Z})$ 正定.

性质5 若 A 正定且 $B \simeq A$，则 B 正定.

性质6 正定矩阵的主对角元必大于零.

性质6的证明 因 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 正定，则对

只有第 i 分量不为零的 $e_i=\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}$, 有

$$(e_i)^T Ae_i>0\Rightarrow a_{ii}>0,\ \forall i=1,2,\cdots,n.$$

提醒 性质6的逆不成立. 如$A=\begin{bmatrix}1&2\\2&3\end{bmatrix}$.

思考 若 A, B 为同阶正定矩阵，AB 正定吗？

思考 若 A, B 为同阶正定矩阵，且 A 与 B 可交换，AB 正定吗？

思考 若 A, B 均为正定矩阵，$\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}$ 正定吗？

思考 若方阵 A 使得 $A^3 - 6A^2 + 11A - 6E = O$，$A$ 正定吗？

例题 设 A 为正定矩阵，证明:$|E+A|>1.$

证明 设 A 的全部特征值为$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n,$

则 $E+A$的全部特征值为

$$1+\lambda_1,1+\lambda_2,\cdots,1+\lambda_n.$$

$$A\text{正定}\Rightarrow\lambda_i>0,\ i=1,2,\cdots,n$$

$$\Rightarrow 1+\lambda_i>1,\ i=1,2,\cdots,n$$

$$\Rightarrow|E+A|=\prod_{i=1}^{n}(1+\lambda_i)>1.$$

例题 设$A_{n\times n}$为正定矩阵，向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r\in\mathbb{R}^n$

满足$\alpha_i\neq 0,\ \alpha_i^TA\alpha_j=0,\ i\neq j,\ \forall\, i,j=1,2,\cdots,r$

证明：向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关.

证明 设 $\sum\limits_{j=1}^{r}k_j\alpha_j=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r=0$，则

$$0=\alpha_i^TA\sum_{j=1}^{r}k_j\alpha_j=\sum_{j=1}^{r}k_j\alpha_i^TA\alpha_j=k_i\alpha_i^TA\alpha_i \quad \langle 1\rangle$$

因A正定且$\alpha_i\neq 0$，故有

$$\alpha_i^TA\alpha_i>0,\ \forall\, i=1,2,\cdots,r \qquad \langle 2\rangle$$

联立$\langle 1\rangle\,\langle 2\rangle$两式得 $k_i=0,\ i=1,2,\cdots,r.$

所以$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性无关.

1. A,B为同阶方阵且有相同的特征值，则（ ）.

$\mathbb{A}.A\sim B$ $\mathbb{B}.A\simeq B$ $\mathbb{C}.A=B$ $\mathbb{D}.|A|=|B|$

解答 答案$\mathbb{D}$必然正确，$\mathbb{A},\mathbb{B}$不正确，反例如

$$A=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix},$$

A,B有相同特征值，但$A\nsim B$，$A\not\simeq B$.

若$A\simeq B$，因B对称，则A对称，矛盾！

若$A\sim B$，因B为数量阵，则$A=B$，矛盾！

2. 实对称矩阵A满足$A^3-6A^2+11A-6E=0$,

证明： A是正定阵.

提示：特征值全正的实对称矩阵必正定!

3. 设$A=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}4&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$,

则A与B(　　).

(A) 合同且相似　　(B) 不合同但相似

(C) 合同但不相似　(D) 不合同也不相似

4. 若 A 与 B 为同阶实对称阵，且 $A \sim B$.

请问：A 与 B 合同吗？

5. 下列矩阵中，与 $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ 合同的有(　　　　).

(A) $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$　　(B) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

(C) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$　　(D) $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

1. 设 A为 n 阶实对称阵， $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$是 A 的分别属于特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 的两两正交的单位特征向量. 证明：

$$A = \lambda_1\alpha_1\alpha_1^T + \lambda_2\alpha_2\alpha_2^T + \cdots + \lambda_n\alpha_n\alpha_n^T$$

2. 设 A为 n 阶实对称阵，$\mathrm{rank}(A) = r$. 证明：A可表为 r 个秩为1的实对称矩阵的和.

3. 设 A为 n 阶实矩阵，且 $A^2 = kA(k \neq 0)$. 证明： A 必能对角化.

4. 设 A为 n 阶实对称阵，证明：存在 n 阶矩阵 B使得$AB + B^TA$正定的充要条件是：A 可逆.

1. 设 A为 n 阶实对称阵， $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$是 A 的分别属于特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 的两两正交的单位特征向量． 证明：

$$A = \lambda_1\alpha_1\alpha_1^T + \lambda_2\alpha_2\alpha_2^T + \cdots + \lambda_n\alpha_n\alpha_n^T$$

提示 由题知 $P = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$为正交矩阵，使得$P^{-1}AP = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$，从而

$$\begin{aligned} A &= P\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)P^{-1} \\ &= P\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)P^T \\ &= (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha_1^T \\ \alpha_2^T \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \\ &= \lambda_1\alpha_1\alpha_1^T + \lambda_2\alpha_2\alpha_2^T + \cdots + \lambda_n\alpha_n\alpha_n^T \end{aligned}$$

2. 设 A为 n 阶实对称阵，$\mathrm{rank}(A)=r$. 证明：A可表为 r 个秩为1的实对称矩阵的和.

提示 由题知存在正交矩阵 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$

使得 $P^{-1}AP=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_r,0,\cdots,0)$,

$$A=P\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_r,0,\cdots,0)P^{-1}$$
$$=P\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_r,0,\cdots,0)P^T$$

$$=(\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_n)\begin{bmatrix}\lambda_1 &&&&& \\ &\ddots&&&& \\ &&\lambda_r&&& \\ &&&0&& \\ &&&&\ddots& \\ &&&&&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_1^T \\ \vdots \\ \alpha_r \\ \alpha_{r+1} \\ \vdots \\ \alpha_n\end{bmatrix}$$

$$=\lambda_1\alpha_1\alpha_1^T+\lambda_2\alpha_2\alpha_2^T+\cdots+\lambda_r\alpha_r\alpha_r^T$$

3. 设 A为 n 阶实矩阵，且 $A^2 = kA(k \neq 0)$.

证明： A 必能对角化.

提示 $A^2 = kA$ 表明A只有特征值$0,\ k$.

$$A^2 = kA \Rightarrow \mathrm{r}(kE - A) + \mathrm{r}(0E - A) = n$$

$$\Rightarrow [n - \mathrm{r}(kE - A)] + [n - \mathrm{r}(0E - A)] = n$$

$\Rightarrow A$ 的特征值的几何重数之和等于 n

$\Rightarrow A$ 有 n 个线性无关的特征向量

$\Rightarrow A$ 必能对角化.

4. 设 A为 n 阶实对称阵，证明：存在 n 阶矩阵 B使得$AB+B^TA$正定的充要条件是：A 可逆.

提示 **充分性** A 可逆且实对称

$$\Rightarrow A \sim \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n), \lambda_i \neq 0$$

$$\Rightarrow A^2 \sim \mathrm{diag}(\lambda_1^2, \lambda_2^2, \cdots, \lambda_n^2), \lambda_i^2 > 0$$

$\Rightarrow A^2$正定 $\Rightarrow A^2 + A^TA = 2A^2$ 正定

$\Rightarrow AB + B^TA$ 正定，其中 $B = A$.

必要性 反证法 若A不可逆 $\Rightarrow AX = 0$ 有非零解

$\Rightarrow$ 存在 $X \neq 0$ 使得$AX = 0 \Rightarrow$ 存在$X \neq 0$ 使得

$$X^T(AB + B^TA)X = (AX)^T(BX) + (BX)^T(AX) = 0,$$

这与$AB + B^TA$正定矛盾，故 A 可逆.

第三节　正定二次型

一、二实次型的分类

二、惯性定理

三、二次型正定的判别方法

第三节　正定二次型

一、二实次型的分类

二、惯性定理

三、二次型正定的判别方法

一、实二次型的分类

定义 设 $f = X^T AX\ (A = A^T)$ 为 n 元实二次型，若对任意 $X = (c_1, c_2, \cdots, c_n)^T \neq 0$，有

① $X^T AX > 0$，则称 f 为**正定**二次型；

② $X^T AX < 0$，则称 f 为**负定**二次型；

③ $X^T AX \geq 0$，则称 f 为**半正定**二次型；

④ $X^T AX \leq 0$，则称 f 为**半负定**二次型；

⑤ $X^T AX$ 既可取得正值，又可取得负值，则称 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ **不定**二次型.

提醒 显然可见 $\boxed{f\text{（半）负定} \Leftrightarrow -f\text{（半）正定}}$

定义 设A为实对称阵，二次型$f=X^TAX$.

若二次型 f 正定，称其矩阵A为**正定矩阵**；

若二次型 f 负定，称其矩阵A 为**负定矩阵**；

若二次型 f 不定，称其矩阵A 为**不定矩阵**；

若二次型 f 半正定，称A为**半正定矩阵**；

若二次型 f 半负定，称A为**半负定矩阵**.

提醒 显然可见：$\boxed{A\text{（半）负定} \Leftrightarrow -A\text{（半）正定}}$

提醒 （半）负定问题均可以转化为（半）正定问题来研究，本节主要讲正定问题.

例题 (1) 二次型 $f=x_1^2+2x_2^2+\cdots+nx_n^2$

及其矩阵 $A=\begin{bmatrix}1 & & & \\ & 2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & n\end{bmatrix}$ 正定；

(2) 二次型 $q(x_1,x_2)=-x_1^2-2x_2^2$

及其矩阵 $A=\begin{bmatrix}-1 & \\ & -2\end{bmatrix}$ 负定.

例题 二次型 $g = x_1^2 + 2x_2^2 - 3x_3^2 - 4x_4^2$

及其矩阵$A_g = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 2 & & \\ & & -3 & \\ & & & -4 \end{bmatrix}$不定.

思考 判断二次型

$\phi(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2$

及其矩阵$A_\phi = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 2 & & \\ & & 3 & \\ & & & 0 \end{bmatrix}$的正定性.

显然可见，当二次型为标准二次型，实对称矩阵为对角阵时，其类型很容易判断.

对一般的二次型而言，可以通过可逆线性变换将其化为为标准形，再判断其类型！实对称矩阵同理可判断.

但问题是：可逆线性变换前后两个二次型及其矩阵的正定性是一致的吗？

定理 可逆线性变换不改变二次型的类型！

证明 只证可逆线性变换不改变正定二次型的类型！

设正定二次型 $f = X^T AX$ 经可逆线性变换

$X = PY$ 后化为 $f = Y^T BY$，其中$B = P^T AP$.

现证明新二次型$f = Y^T BY$也正定.

对任意的$Y \neq 0$, 因 P 可逆，则$X = PY \neq 0$,

$$\Rightarrow Y^T BY = Y^T \left(P^T AP\right) Y = X^T AX > 0$$

$$\Rightarrow f = Y^T BY \text{ 正定.}$$

同理：可逆线性变换不改变其它二次型类型！

二、惯性定理

一个实二次型，既可以通过正交变换化为标准形，也可以通过配方法化为标准形．显然，同一个二次型的标准形是不唯一的．但仔细观察可发现，同一二次型的不同标准形所含的正平方项的项数是确定的，负平方项的项数也是确定的．

惯性定理 二次型$f=X^TAX(A=A^T)$经满秩线性变换后化为标准形，则正平方项项数和负平方项项数都是唯一确定的.

定义 设$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = X^T A X (A = A^T)$为$n$元二次型，称$f$的标准形中所含正平方项的项数$p$和负平方项的项数$q$分别为二次型$f$和实对称矩阵$A$的**正惯性指数**和**负惯性指数**，称$s = p - q$为$f$的**符号差**.

提醒 若$\mathrm{rank}(f) = r$，则$p + q = r$，r与s同奇偶.

结合以上定义，可得惯性定理的如下推论：

推论1 二次型 $f = X^T AX(A = A^T)$和实对称矩阵 A的正负惯性指数就是A的正负特征值个数（要计算重数）.

推论2 任意二次型的规范形是唯一的.

推论3 二次型经过可逆线性变换不改变正负惯性指数，故相合同的两矩阵有相同的正负惯性指数.

推论4 两同阶实对称矩阵合同的充要条件为它们具有相同的正负惯性指数.

正负惯性指数与二次型类型间有何关系?

提醒 设n元二次型$f = X^T AX \ (A = A^T)$的正负正负惯性指数为p, q, 且$\mathrm{r}(f) = r = \mathrm{r}(A)$.

当$p = r = n, \ q = 0$时，f和A 正定；

当$p = r \leq n, \ q = 0$时，f和A 半正定；

当$q = r = n, \ p = 0$时，f和A 负定；

当$q = r \leq n, \ p = 0$时，f和A 半负定；

当 $p \geq 1, q \geq 1$ 时，f和A 不定.

例题 确定二次型 $f(x,y)=xy$ 的类型.

解答 二次型 $f(x,y)=xy$ 的矩阵为

$$A=\begin{bmatrix}0 & 0.5\\ 0.5 & 0\end{bmatrix},$$

因 $|A|<0$, 故 A 有一正一负两个特征值，

即二次型的正负惯性指数均为1，所以

该二次型为不定二次型.

三、二次型正定的判别方法

定理 设 $f = X^T AX\ (A = A^T)$ 为 n 元实二型，

则以下命题等价

① A 为正定矩阵，或 f 为正定二次型；

② A 的特征值全为正数；

③ A 或 f 的正惯性指数 $p = n$;

④ 存在可逆矩阵 C，使得 $C^T AC = E$;

⑤ 存在可逆矩阵 P，使得 $P^T P = A$;

提醒 命题④和⑤即实对称矩阵 $A \simeq E$.

证明 采用循环证明法.

①⇒② 设 λ 是 A 的任一特征值，则 $\lambda \in \mathbb{R}$ 且存在 $X \in \mathbb{R}^n, X \neq 0,$ 使得 $AX = \lambda X.$

f 正定 $\Rightarrow 0 < X^T AX = (AX)^T X = \lambda \|X\|^2$

$\Rightarrow \lambda > 0;$

②⇒③ 显然成立;

③⇒④ f 的正惯性指数 $p = n,$ 由惯性定理及推论，存在可逆线性变换 $X = CY$ 使得

$$f = y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2,$$

该规范形的矩阵为 E，故 $C^T AC = E;$

④⇒⑤ 令 $P=C^{-1}$, 则 P 可逆且

$$C^TAC=E\Rightarrow A=P^TP;$$

⑤⇒① 矩阵 P 可逆 $\Rightarrow PX\neq 0,\forall X\neq 0$

$$\Rightarrow f=X^TAX=(PX,PX)>0$$

$\Rightarrow A$ 或 f 正定.

思考 根据以上定理，能否给出二次型 f 或实对称矩阵 A 负定的充要条件.

命题 设矩阵 P为 $m\times n$ 矩阵，则 PP^T, P^TP均为半正定矩阵.

特别地，当 $\mathrm{r}(P)=m$时，PP^T正定；

当 $\mathrm{r}(P)=n$ 时，P^TP 正定.

推论 设矩阵 P为 n 阶矩阵，则 PP^T, P^TP均为半正定矩阵.

特别地，当 P 可逆时，PP^T, P^TP 均正定.

定义 称矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 位于**左上角**的子式

$$|A_k|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}$$

为 A 的 $k(k=1,2,\cdots,n)$ 阶**顺序主子式**.

霍尔魏茨定理 n元实二次型 $f=X^TAX\ (A=A^T)$

或 n 阶实对称矩阵 A 正定的充要条件为:

A的各阶顺序主子式均大于零.

证明略.

例题 已知三元二次型

$$f = {x_1}^2 + 2{x_2}^2 + (1-t)\,{x_3}^2 + 2tx_1x_2 + 2x_1x_3$$

为正定二次型，求 t 的取值范围.

解答 f 的矩阵为 $A = \begin{bmatrix} 1 & t & 1 \\ t & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1-t \end{bmatrix}$， 则

f 正定 $\Leftrightarrow A$ 正定

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |A_1| = 1 > 0 \\ |A_2| = 2 - t^2 > 0 \\ |A_3| = t\,(t+1)\,(t-2) > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow -1 < t < 0 \Leftrightarrow t \in (-1, 0).$$

正定矩阵的性质

性质1 若 A, B 同阶正定，则 $A+B$ 正定.

性质2 若 A 正定， k 为正数，则 kA 正定.

性质3 正定矩阵的行列式大于零，故可逆，

正定矩阵的逆矩阵，伴随矩阵均正定.

性质4 若 A 正定，则 $A^k (k \in \mathbb{Z})$ 正定.

性质5 若 A 正定且 $B \simeq A$，则 B 正定.

性质6 正定矩阵的主对角元必大于零.

性质6的证明 因 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 正定，则对

只有第 i 分量不为零的 $e_i=\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}$, 有

$$(e_i)^T Ae_i>0\Rightarrow a_{ii}>0,\ \forall i=1,2,\cdots,n.$$

提醒 性质6的逆不成立. 如 $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{bmatrix}$.

思考 若 A, B 为同阶正定矩阵，AB 正定吗？

思考 若 A, B 为同阶正定矩阵，且 A 与 B 可交换，AB 正定吗？

思考 若 A, B 均为正定矩阵，$\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}$ 正定吗？

思考 若方阵 A 使得 $A^3 - 6A^2 + 11A - 6E = O$, A 正定吗？

例题 设 A 为正定矩阵，证明:$|E+A|>1.$

证明 设 A 的全部特征值为$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n,$

则 $E+A$的全部特征值为

$$1+\lambda_1,1+\lambda_2,\cdots,1+\lambda_n.$$

$$A\text{正定}\Rightarrow\lambda_i>0,\ i=1,2,\cdots,n$$

$$\Rightarrow 1+\lambda_i>1,\ i=1,2,\cdots,n$$

$$\Rightarrow|E+A|=\prod_{i=1}^{n}(1+\lambda_i)>1.$$

例题 设 $A_{n\times n}$ 为正定矩阵，向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r\in\mathbb{R}^n$

满足 $\alpha_i\neq 0,\ \alpha_i^T A\alpha_j=0,\ i\neq j,\ \forall\, i,j=1,2,\cdots,r$

证明：向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关.

证明 设 $\sum_{j=1}^{r} k_j\alpha_j=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r=0$，则

$$0=\alpha_i^T A\sum_{j=1}^{r}k_j\alpha_j=\sum_{j=1}^{r}k_j\alpha_i^T A\alpha_j=k_i\alpha_i^T A\alpha_i \quad \langle 1\rangle$$

因 A 正定且 $\alpha_i\neq 0$，故有

$$\alpha_i^T A\alpha_i>0,\ \forall\, i=1,2,\cdots,r \quad \langle 2\rangle$$

联立 $\langle 1\rangle\ \langle 2\rangle$ 两式得 $k_i=0,\ i=1,2,\cdots,r.$

所以 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关.

1. A,B为同阶方阵且有相同的特征值，则（　　）.

$\mathbb{A}.A\sim B$　$\mathbb{B}.A\simeq B$　$\mathbb{C}.A=B$　$\mathbb{D}.|A|=|B|$

解答 答案$\mathbb{D}$必然正确，$\mathbb{A},\mathbb{B}$不正确，反例如

$$A=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix},$$

A,B有相同特征值，但 $A\nsim B$, $A\not\simeq B$.

若$A\simeq B$, 因 B对称，则 A 对称，矛盾！

若 $A\sim B$, 因 B为数量阵，则 $A=B$, 矛盾！

2. 实对称矩阵A满足$A^3-6A^2+11A-6E=0$,

证明： A是正定阵.

提示：特征值全正的实对称矩阵必正定!

3. 设$A=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}4&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$,

则A与B(　　).

(A) 合同且相似　　(B) 不合同但相似

(C) 合同但不相似　(D) 不合同也不相似

4. 若 A 与 B 为同阶实对称阵，且 $A \sim B.$

请问：A 与 B 合同吗？

5. 下列矩阵中，与 $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ 合同的有(　　　　).

(A) $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$　　(B) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

(C) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$　　(D) $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

1. 设 A为 n 阶实对称阵， $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$是 A 的分别属于特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 的两两正交的单位特征向量. 证明：

$$A = \lambda_1\alpha_1\alpha_1^T + \lambda_2\alpha_2\alpha_2^T + \cdots + \lambda_n\alpha_n\alpha_n^T$$

2. 设 A为 n 阶实对称阵，$\mathrm{rank}(A) = r$. 证明：A可表为 r 个秩为1的实对称矩阵的和.

3. 设 A为 n 阶实矩阵，且 $A^2 = kA(k \neq 0)$. 证明： A必能对角化.

4. 设 A为 n 阶实对称阵，证明：存在 n 阶矩阵 B使得$AB + B^T A$正定的充要条件是：A 可逆.

1. 设 A为 n 阶实对称阵， $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$是 A 的分别属于特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 的两两正交的单位特征向量． 证明：

$$A = \lambda_1\alpha_1\alpha_1^T + \lambda_2\alpha_2\alpha_2^T + \cdots + \lambda_n\alpha_n\alpha_n^T$$

提示 由题知 $P = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$为正交矩阵，

使得$P^{-1}AP = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$，从而

$$\begin{aligned} A &= P\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)P^{-1} \\ &= P\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)P^T \\ &= (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha_1^T \\ \alpha_2^T \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \\ &= \lambda_1\alpha_1\alpha_1^T + \lambda_2\alpha_2\alpha_2^T + \cdots + \lambda_n\alpha_n\alpha_n^T \end{aligned}$$

海纳百川 有容乃大

2. 设 A为 n 阶实对称阵，$\operatorname{rank}(A)=r$. 证明：A可表为 r 个秩为1的实对称矩阵的和.

提示 由题知存在正交矩阵 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$

使得 $P^{-1}AP=\operatorname{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_r,0,\cdots,0)$,

$$
\begin{aligned}
A&=P\operatorname{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_r,0,\cdots,0)P^{-1}\\
&=P\operatorname{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_r,0,\cdots,0)P^{T}\\
&=(\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_n)\begin{bmatrix}\lambda_1&&&&&\\&\ddots&&&&\\&&\lambda_r&&&\\&&&0&&\\&&&&\ddots&\\&&&&&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_1^T\\\vdots\\\alpha_r\\\alpha_{r+1}\\\vdots\\\alpha_n\end{bmatrix}\\
&=\lambda_1\alpha_1\alpha_1^T+\lambda_2\alpha_2\alpha_2^T+\cdots+\lambda_r\alpha_r\alpha_r^T
\end{aligned}
$$

3. 设 A为 n 阶实矩阵，且 $A^2 = kA(k \neq 0)$.

证明： A 必能对角化.

提示 $A^2 = kA$ 表明A只有特征值$0,\ k$.

$$A^2 = kA \Rightarrow \mathrm{r}(kE - A) + \mathrm{r}(0E - A) = n$$

$$\Rightarrow [n - \mathrm{r}(kE - A)] + [n - \mathrm{r}(0E - A)] = n$$

$\Rightarrow$ A 的特征值的几何重数之和等于 n

$\Rightarrow$ A 有 n 个线性无关的特征向量

$\Rightarrow$ A 必能对角化.

4. 设 A为 n 阶实对称阵，证明：存在 n 阶矩阵 B使得$AB+B^TA$正定的充要条件是：A 可逆.

提示 **充分性** A 可逆且实对称

$$\Rightarrow A \sim \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n), \lambda_i \neq 0$$

$$\Rightarrow A^2 \sim \mathrm{diag}(\lambda_1^2, \lambda_2^2, \cdots, \lambda_n^2), \lambda_i^2 > 0$$

$\Rightarrow A^2$正定 $\Rightarrow A^2 + A^TA = 2A^2$ 正定

$\Rightarrow AB + B^TA$ 正定，其中 $B = A.$

必要性 反证法 若A不可逆 $\Rightarrow AX = 0$ 有非零解

$\Rightarrow$ 存在 $X \neq 0$ 使得$AX = 0 \Rightarrow$ 存在$X \neq 0$ 使得

$$X^T(AB + B^TA)X = (AX)^T(BX) + (BX)^T(AX) = 0,$$

这与$AB + B^TA$正定矛盾，故 A 可逆.

一、实二次型的分类

定义 设 $f = X^T AX\ (A = A^T)$ 为 n 元实二次型，

若对任意 $X = (c_1, c_2, \cdots, c_n)^T \neq 0$，有

① $X^T AX > 0$，则称 f 为**正定**二次型；

② $X^T AX < 0$，则称 f 为**负定**二次型；

③ $X^T AX \geq 0$，则称 f 为**半正定**二次型；

④ $X^T AX \leq 0$，则称 f 为**半负定**二次型；

⑤ $X^T AX$既可取得正值，又可取得负值，

则称$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ **不定**二次型.

提醒 显然可见 $\boxed{f\ \text{(半)}\ \text{负定} \Leftrightarrow -f\ \text{(半)}\ \text{正定}}$

定义 设A为实对称阵，二次型$f=X^TAX.$

若二次型 f正定，称其矩阵 A为**正定矩阵**；

若二次型 f负定，称其矩阵A为**负定矩阵**；

若二次型 f不定，称其矩阵A为**不定矩阵**；

若二次型 f半正定，称A为**半正定矩阵**；

若二次型 f半负定，称A为**半负定矩阵**.

提醒 显然可见: $\boxed{A\text{（半）负定} \Leftrightarrow -A\text{（半）正定}}$

提醒 （半）负定问题均可以转化为（半）正定问题来研究，本节主要讲正定问题.

例题 (1) 二次型 $f=x_1^2+2x_2^2+\cdots+nx_n^2$

及其矩阵 $A=\begin{bmatrix}1 & & & \\ & 2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & n\end{bmatrix}$ 正定；

(2) 二次型 $q(x_1,x_2)=-x_1^2-2x_2^2$

及其矩阵 $A=\begin{bmatrix}-1 & \\ & -2\end{bmatrix}$ 负定.

例题 二次型 $g = x_1^2 + 2x_2^2 - 3x_3^2 - 4x_4^2$

及其矩阵 $A_g = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 2 & & \\ & & -3 & \\ & & & -4 \end{bmatrix}$ 不定.

思考 判断二次型

$\phi(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2$

及其矩阵 $A_\phi = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 2 & & \\ & & 3 & \\ & & & 0 \end{bmatrix}$ 的正定性.

显然可见，当二次型为标准二次型，实对称矩阵为对角阵时，其类型很容易判断.

对一般的二次型而言，可以通过可逆线性变换将其化为为标准形，再判断其类型！实对称矩阵同理可判断.

但问题是：可逆线性变换前后两个二次型及其矩阵的正定性是一致的吗?

定理 可逆线性变换不改变二次型的类型！

证明 只证可逆线性变换不改变正定二次型的类型！

设正定二次型 $f = X^T AX$ 经可逆线性变换

$X = PY$ 后化为 $f = Y^T BY$，其中 $B = P^T AP$.

现证明新二次型 $f = Y^T BY$ 也正定.

对任意的 $Y \neq 0$，因 P 可逆，则 $X = PY \neq 0$,

$$\Rightarrow Y^T BY = Y^T \left(P^T AP\right) Y = X^T AX > 0$$

$$\Rightarrow f = Y^T BY \text{ 正定.}$$

同理：可逆线性变换不改变其它二次型类型！

二、惯性定理

一个实二次型，既可以通过正交变换化为标准形，也可以通过配方法化为标准形．显然，同一个二次型的标准形是不唯一的．但仔细观察可发现，同一二次型的不同标准形所含的正平方项的项数是确定的，负平方项的项数也是确定的．

惯性定理 二次型 $f = X^T AX(A = A^T)$经满秩线性变换后化为标准形，则正平方项项数和负平方项项数都是唯一确定的.

定义 设$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X^TAX(A=A^T)$为$n$元二次型，称$f$的标准形中所含正平方项的项数$p$和负平方项的项数$q$分别为二次型$f$和实对称矩阵$A$的**正惯性指数**和**负惯性指数**，称$s=p-q$为$f$的**符号差**.

提醒 若$\text{rank}(f)=r$，则$p+q=r$，r与s同奇偶.

结合以上定义，可得惯性定理的如下推论：

推论1 二次型 $f = X^T AX(A = A^T)$和实对称矩阵 A的正负惯性指数就是 A的正负特征值个数（要计算重数）.

推论2 任意二次型的规范形是唯一的.

推论3 二次型经过可逆线性变换不改变正负惯性指数，故相合同的两矩阵有相同的正负惯性指数.

推论4 两同阶实对称矩阵合同的充要条件为它们具有相同的正负惯性指数.

正负惯性指数与二次型类型间有何关系？

提醒 设n元二次型$f=X^TAX\ (A=A^T)$的正负正负惯性指数为$p,\ q,$ 且$\mathrm{r}(f)=r=\mathrm{r}(A).$

当$p=r=n,\ q=0$ 时，f 和 A 正定；

当$p=r\le n,\ q=0$ 时，f 和 A 半正定；

当$q=r=n,\ p=0$ 时，f 和 A 负定；

当$q=r\le n,\ p=0$ 时，f 和 A 半负定；

当 $p\ge 1,\ q\ge 1$ 时，f 和 A 不定.

例题 确定二次型 $f(x,y)=xy$ 的类型.

解答 二次型 $f(x,y)=xy$ 的矩阵为

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 0.5 \\ 0.5 & 0 \end{bmatrix},$$

因 $|A|<0$, 故 A 有一正一负两个特征值，

即二次型的正负惯性指数均为1，所以

该二次型为不定二次型.

三、二次型正定的判别方法

定理 设 $f = X^T AX \, (A = A^T)$ 为 n 元实二型，则以下命题等价

① A 为正定矩阵，或 f 为正定二次型；

② A 的特征值全为正数；

③ A 或 f 的正惯性指数 $p = n;$

④ 存在可逆矩阵 C，使得 $C^T AC = E;$

⑤ 存在可逆矩阵 P，使得 $P^T P = A;$

提醒 命题④和⑤即实对称矩阵$A \simeq E.$

证明 采用循环证明法.

①⇒② 设 λ 是 A 的任一特征值，则 $\lambda \in \mathbb{R}$ 且存在 $X \in \mathbb{R}^n, X \neq 0$, 使得 $AX = \lambda X$.

f 正定 $\Rightarrow 0 < X^T AX = (AX)^T X = \lambda \|X\|^2$

$\Rightarrow \lambda > 0;$

②⇒③ 显然成立；

③⇒④ f 的正惯性指数 $p = n$, 由惯性定理及推论，存在可逆线性变换 $X = CY$ 使得

$$f = y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2,$$

该规范形的矩阵为 E, 故 $C^T AC = E$;

④$\Rightarrow$⑤ 令 $P=C^{-1}$, 则 P 可逆且

$$C^TAC=E\Rightarrow A=P^TP;$$

⑤$\Rightarrow$① 矩阵 P 可逆 $\Rightarrow PX\neq 0, \forall X\neq 0$

$$\Rightarrow f=X^TAX=(PX,PX)>0$$

$\Rightarrow A$ 或 f 正定.

思考 根据以上定理，能否给出二次型 f 或实对称矩阵 A 负定的充要条件.

命题 设矩阵 P 为 $m\times n$ 矩阵，则 PP^T, P^TP 均为半正定矩阵.

特别地，当 $\mathrm{r}(P)=m$ 时，PP^T 正定；

当 $\mathrm{r}(P)=n$ 时，P^TP 正定.

推论 设矩阵 P 为 n 阶矩阵，则 PP^T, P^TP 均为半正定矩阵.

特别地，当 P 可逆时，PP^T, P^TP 均正定.

定义 称矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 位于**左上角**的子式

$$|A_k|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}$$

为 A 的 $k(k=1,2,\cdots,n)$ 阶**顺序主子式**.

霍尔魏茨定理 n元实二次型 $f=X^TAX\ (A=A^T)$ 或 n 阶实对称矩阵 A 正定的充要条件为：A的各阶顺序主子式均大于零.

证明略.

例题 已知三元二次型

$$f = {x_1}^2 + 2{x_2}^2 + (1-t)\,{x_3}^2 + 2tx_1x_2 + 2x_1x_3$$

为正定二次型，求 t的取值范围.

解答 f 的矩阵为 $A = \begin{bmatrix} 1 & t & 1 \\ t & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1-t \end{bmatrix}$, 则

f 正定 $\Leftrightarrow A$ 正定

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |A_1| = 1 > 0 \\ |A_2| = 2 - t^2 > 0 \\ |A_3| = t\,(t+1)\,(t-2) > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow -1 < t < 0 \Leftrightarrow t \in (-1, 0).$$

正定矩阵的性质

性质1 若 A, B 同阶正定，则 $A+B$ 正定.

性质2 若 A 正定， k 为正数，则 kA 正定.

性质3 正定矩阵的行列式大于零，故可逆，

正定矩阵的逆矩阵，伴随矩阵均正定.

性质4 若 A 正定，则 $A^k (k \in \mathbb{Z})$ 正定.

性质5 若 A 正定且 $B \simeq A$，则 B 正定.

性质6 正定矩阵的主对角元必大于零.

性质6的证明 因 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 正定，则对

只有第 i 分量不为零的 $e_i=\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}$, 有

$$(e_i)^T A e_i>0\Rightarrow a_{ii}>0,\ \forall i=1,2,\cdots,n.$$

提醒 性质6的逆不成立． 如 $A=\begin{bmatrix}1&2\\2&3\end{bmatrix}$.

思考 若 A, B 为同阶正定矩阵，AB正定吗?

思考 若 A, B 为同阶正定矩阵，且 A 与 B 可交换，AB 正定吗?

思考 若 A, B均为正定矩阵，$\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}$正定吗?

思考 若方阵 A 使得$A^3 - 6A^2 + 11A - 6E = O,$ A 正定吗?

例题 设 A 为正定矩阵，证明：$|E+A|>1.$

证明 设 A 的全部特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n,$

则 $E+A$的全部特征值为

$$1+\lambda_1, 1+\lambda_2, \cdots, 1+\lambda_n.$$

$$A\text{正定} \Rightarrow \lambda_i>0,\ i=1,2,\cdots,n$$

$$\Rightarrow 1+\lambda_i>1,\ i=1,2,\cdots,n$$

$$\Rightarrow |E+A|=\prod_{i=1}^{n}(1+\lambda_i)>1.$$

例题 设 $A_{n\times n}$为正定矩阵，向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r\in\mathbb{R}^n$

满足 $\alpha_i\neq 0,\ \alpha_i^T A\alpha_j=0,\ i\neq j,\ \forall\, i,j=1,2,\cdots,r$

证明：向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关.

证明 设 $\sum\limits_{j=1}^{r}k_j\alpha_j=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r=0,$ 则

$$0=\alpha_i^T A\sum_{j=1}^{r}k_j\alpha_j=\sum_{j=1}^{r}k_j\alpha_i^T A\alpha_j=k_i\alpha_i^T A\alpha_i \quad \langle 1\rangle$$

因A正定且$\alpha_i\neq 0$，故有

$$\alpha_i^T A\alpha_i>0,\ \forall\, i=1,2,\cdots,r \qquad \langle 2\rangle$$

联立$\langle 1\rangle\,\langle 2\rangle$两式得 $k_i=0,\ i=1,2,\cdots,r.$

所以$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性无关 .

1. A, B为同阶方阵且有相同的特征值，则(　　).

$\mathbb{A}.A \sim B$　$\mathbb{B}.A \simeq B$　$\mathbb{C}.A = B$　$\mathbb{D}.|A| = |B|$

解答 答案 $\mathbb{D}$ 必然正确，$\mathbb{A}, \mathbb{B}$不正确，反例如

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

A, B有相同特征值，但 $A \nsim B$, $A \not\simeq B$.

若$A \simeq B$, 因 B对称，则 A对称，矛盾！

若$A \sim B$, 因 B为数量阵，则 $A = B$，矛盾！

2. 实对称矩阵A满足$A^3-6A^2+11A-6E=0,$

证明： A是正定阵.

提示：特征值全正的实对称矩阵必正定!

3. 设$A=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}4&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$,

则A与B(　　).

(A) 合同且相似　　(B) 不合同但相似

(C) 合同但不相似　(D) 不合同也不相似

4. 若 A 与 B 为同阶实对称阵，且 $A \sim B$.

请问：A 与 B 合同吗?

5. 下列矩阵中，与 $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ 合同的有(　　　　).

(A) $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$　　(B) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

(C) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$　　(D) $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

1. 设 A为 n 阶实对称阵， $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$是 A 的分别属于特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 的两两正交的单位特征向量. 证明：

$$A = \lambda_1\alpha_1\alpha_1^T + \lambda_2\alpha_2\alpha_2^T + \cdots + \lambda_n\alpha_n\alpha_n^T$$

2. 设 A为 n 阶实对称阵，$\mathrm{rank}(A) = r$. 证明：A可表为 r 个秩为1的实对称矩阵的和.

3. 设 A为 n 阶实矩阵，且 $A^2 = kA(k \neq 0)$.
证明： A必能对角化.

4. 设 A为 n 阶实对称阵，证明：存在 n 阶矩阵 B使得$AB + B^T A$正定的充要条件是：A 可逆.

1. 设 A为 n 阶实对称阵， $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$是 A 的分别属于特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 的两两正交的单位特征向量. 证明：

$$A = \lambda_1\alpha_1\alpha_1^T + \lambda_2\alpha_2\alpha_2^T + \cdots + \lambda_n\alpha_n\alpha_n^T$$

<u>**提示**</u> 由题知 $P = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$为正交矩阵，

使得$P^{-1}AP = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$，从而

$$\begin{aligned}
A &= P\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)P^{-1} \\
&= P\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)P^T \\
&= (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha_1^T \\ \alpha_2^T \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \\
&= \lambda_1\alpha_1\alpha_1^T + \lambda_2\alpha_2\alpha_2^T + \cdots + \lambda_n\alpha_n\alpha_n^T
\end{aligned}$$

2. 设 A为 n 阶实对称阵，$\operatorname{rank}(A)=r$. 证明：
A可表为 r个秩为1的实对称矩阵的和.

提示 由题知存在正交矩阵 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$
使得 $P^{-1}AP=\operatorname{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_r,0,\cdots,0)$,

$$
\begin{aligned}
A &= P\operatorname{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_r,0,\cdots,0)P^{-1} \\
&= P\operatorname{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_r,0,\cdots,0)P^{T}
\end{aligned}
$$

$$
=(\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_n)\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_r & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_1^T \\ \vdots \\ \alpha_r \\ \alpha_{r+1} \\ \vdots \\ \alpha_n\end{bmatrix}
$$

$$
=\lambda_1\alpha_1\alpha_1^T+\lambda_2\alpha_2\alpha_2^T+\cdots+\lambda_r\alpha_r\alpha_r^T
$$

3. 设 A为 n 阶实矩阵，且 $A^2=kA(k\neq 0)$.

证明： A必能对角化.

提示 $A^2=kA$表明A只有特征值$0,\ k$.

$$A^2=kA\Rightarrow \mathrm{r}(kE-A)+\mathrm{r}(0E-A)=n$$

$$\Rightarrow [n-\mathrm{r}(kE-A)]+[n-\mathrm{r}(0E-A)]=n$$

$\Rightarrow A$的特征值的几何重数之和等于 n

$\Rightarrow A$有n 个线性无关的特征向量

$\Rightarrow A$必能对角化.

4. 设 A为 n 阶实对称阵，证明：存在 n 阶矩阵 B使得$AB+B^TA$正定的充要条件是：A 可逆.

提示 **充分性** A 可逆且实对称

$$\Rightarrow A \sim \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n), \lambda_i \neq 0$$

$$\Rightarrow A^2 \sim \mathrm{diag}(\lambda_1^2, \lambda_2^2, \cdots, \lambda_n^2), \lambda_i^2 > 0$$

$\Rightarrow A^2$正定 $\Rightarrow A^2 + A^TA = 2A^2$ 正定

$\Rightarrow AB + B^TA$ 正定，其中 $B = A.$

必要性 反证法 若A不 可逆 $\Rightarrow AX = 0$ 有非零解

$\Rightarrow$ 存在 $X \neq 0$ 使得$AX = 0 \Rightarrow$ 存在 $X \neq 0$ 使得

$$X^T(AB+B^TA)X = (AX)^T(BX) + (BX)^T(AX) = 0,$$

这与 $AB+B^TA$正定矛盾，故 A可逆.