2018 微积分（1）-2 参考解答

一、计算题：（每题5分，共30分）

1、求曲线$x=\cos t,\ y=\sin t,\ z=t\cos t$上点$(1,0,0)$处的切线方程.

解: 对曲线方程关于t求导可得切向量为

$$(-\sin t,\ \cos t,\ \cos t-t\sin t).\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 3分$$

代入点$(1,0,0)$对应的参数$t=0$可得点$(1,0,0)$处的切向量为$(0,1,1)$. 于是, 切线方程为

$$\frac{x-1}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1}.\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 2分$$

2、求曲面$z=xy$在点$(-2,-3,6)$处的切平面方程.

解: 曲面$z=xy$的法向量是

$$(-z_x,-z_y,1)=(-y,-x,1),\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 3分$$

于是在点$(-2,-3,6)$处的法向量为$(3,2,1)$. 因此，所求切平面方程为

$3(x+2)+2(y+3)+z-6=0$，即

$$3x+2y+z+6=0.\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 2分$$

3、设$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|\ x+y\leqslant 1,\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0\}$，求$\iint\limits_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

解:

$$\begin{aligned}\iint\limits_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}x\mathrm{d}y\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 3分\\&=\int_0^1(x-x^2)\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}.\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 2分\end{aligned}$$

4、设Ω是曲面$z=\sqrt{x^2+y^2}$与平面$z=1$围成的区域, 求$\iiint\limits_{\Omega}(z+x^2y^3\sin z^4)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

解: 由Ω的对称性,

$$\iiint\limits_{\Omega} x^2y^3\sin z^4\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0.\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 1分$$

由截面法, 注意到 $D_z=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 |\ x^2+y^2\leqslant z^2\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 1分$

$$\begin{aligned}\therefore 原式&=\int_0^1\mathrm{d}z\iint\limits_{D_z} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\int_0^1\pi z^3\mathrm{d}z\\&=\frac{\pi}{4}.\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 3分\end{aligned}$$

5、设Γ是起点为$(1,0,1)$、终点为$(0,1,1)$的有向线段, 求$\int_{\Gamma}(y^2+z-x)\mathrm{d}y$.

解: Γ的参数方程$x=1-t, y=t, z=1$, $t:0\to 1$, $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 2分$

$$\begin{aligned}原式&=\int_0^1(t^2+t)\mathrm{d}t\\&=\frac{5}{6}.\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 3分\end{aligned}$$

6、求微分方程初值问题$\begin{cases}xy'-y=x^2\\y(1)=2018\end{cases}$的解.

解: 由$(\frac{y}{x})'=\frac{xy'-y}{x^2}=1$, 可得: $\frac{y}{x}=x+C.\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 2分$

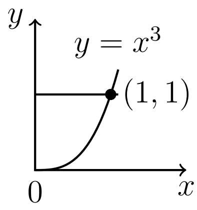
代入初始条件, 可得$C=2017$.于是方程的解为

$$y=x^2+2017x.\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 3分$$

二、**解答题**:（每题8分，共40分）

1、交换二次积分$I=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_{x^3}^1 \sqrt[3]{y^2}e^y\mathrm{d}y$的积分次序并计算$I$.

解: 画出积分区域: -- 2 分



$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \mathrm{d}y\int_0^{\sqrt[3]{y}} \sqrt[3]{y^2}e^y\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 ye^y\mathrm{d}y \text{ --------------------- 3分} \\ &= ye^y\Big|_0^1 - \int_0^1 e^y\mathrm{d}y \\ &= e-(e-1)=1. \text{ ------------ 3分} \end{aligned}$$

2、设曲线Γ的方程为$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ x+y+z=0 \end{cases}$，求$\int\limits_\Gamma (x+1)^2\mathrm{d}s$.

解: 由Γ的轮换对称性, 可得

$$\begin{aligned} \int\limits_\Gamma x^2\mathrm{d}s = \int\limits_\Gamma y^2\mathrm{d}s &= \int\limits_\Gamma z^2\mathrm{d}s \\ &= \frac{1}{3}\int\limits_\Gamma (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s \\ &= \frac{1}{3}\int\limits_\Gamma \mathrm{d}s = \frac{2\pi}{3}. \text{ ---------------------------4分} \end{aligned}$$

再由Γ关于原点的对称性, 可得 $\int\limits_\Gamma x\mathrm{d}s=0$. ------------ 2分

$$\int\limits_\Gamma (x+1)^2\mathrm{d}s = \int\limits_\Gamma (x^2+2x+1)\mathrm{d}s = \int\limits_\Gamma x^2\mathrm{d}s + \int\limits_\Gamma \mathrm{d}s = \frac{8\pi}{3}. \text{ -------2分}$$

3、设平面曲线L为$y=2\sqrt{1-\dfrac{x^2}{9}}$, 起点为$(3,0)$, 终点为$(-3,0)$, 求$\int\limits_L \dfrac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$.

解: 首先, $P_y=\dfrac{\partial}{\partial y}(\dfrac{-y}{x^2+y^2})=\dfrac{-(x^2+y^2)+2y^2}{(x^2+y^2)^2}=\dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$,

$Q_x=\dfrac{\partial}{\partial x}(\dfrac{x}{x^2+y^2})=\dfrac{(x^2+y^2)-2x^2}{(x^2+y^2)^2}=\dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$.

既然 $P_y=Q_x$, 于是曲线积分与路径无关; ------------ 3分

取新的路径 L'： $y=\sqrt{9-x^2}$, 起点为$(3,0)$, 终点为$(-3,0)$. L'的参数方程 $x=3\cos\theta,\ y=3\sin\theta$, 其中$\theta$从0变化到$\pi$. ------------- 2分

代入曲线积分可得

$$\text{原式}=\frac{1}{9}\int_0^{\pi}(9\sin^2\theta+9\cos^2\theta)\mathrm{d}\theta=\pi. \quad \text{------------- 3分}$$

4、设曲面Σ是球面$z=\sqrt{2-x^2-y^2}$与锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$围成立体的表面, Σ的方向指向外侧, 求$\iint\limits_{\Sigma}x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

解: 由高斯公式,

$$\text{原式}=\iiint\limits_{\Omega}(2x+2y+2z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z. \quad \text{------------- 2分}$$

由Ω的对称性, 可得$\iiint\limits_{\Omega}x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint\limits_{\Omega}y\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0$.

$$\begin{aligned}\therefore \text{原式}&=2\iiint\limits_{\Omega}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\ &=2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi/4}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\sqrt{2}}r\cos\varphi\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r \quad \text{------------- 4分}\\ &=4\pi\int_0^{\pi/4}\cos\varphi\sin\varphi\mathrm{d}\varphi=\pi. \quad \text{------------- 2分}\end{aligned}$$

5、设$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt[3]{x^2y^4}}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$, (1)求$\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$和$\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$; (2)判断$f(x,y)$在点$(0,0)$处是否可微; (3)设向量$l=(\dfrac{\sqrt{2}}{2},-\dfrac{\sqrt{2}}{2})$, 求$\dfrac{\partial f}{\partial l}(0,0)$.

解: (1)因为$f(x,0)=0$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x,0)|_{x=0}=0$.

同理, 因为$f(0,y)=0$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}f(0,y)|_{y=0}=0$. ------------- 2分

(2) 令$\Delta y=k\Delta x$, 通过计算下列极限,发现其与k有关, 从而极限不存在.

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{f(0+\Delta x,0+\Delta y)-f(0,0)-f_x(0,0)\Delta x-f_y(0,0)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$$
$$=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\sqrt[3]{(\Delta x)^2(\Delta y)^4}}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt[3]{(\Delta x)^2(k\Delta x)^4}}{(\Delta x)^2+(k\Delta x)^2}=\frac{k^{4/3}}{1+k^2}.$$

因此,由定义可知函数 $f(x,y)$在点$(0,0)$处不可微. -------------- 3分

(3)因为 $l=(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2})=(\cos\alpha,\cos\beta)$, 由方向导数的定义可得

$$\frac{\partial f}{\partial l}(0,0)=\lim_{t\to 0^+}\frac{f(0+t\cos\alpha,0+t\cos\beta)-f(0,0)}{t}$$
$$=\lim_{t\to 0^+}\frac{1}{t}\cdot\frac{\sqrt[3]{t^6\cos^2\alpha\cos^4\beta}}{\sqrt{t^2\cos^2\alpha+t^2\cos^2\beta}}=\frac{1}{2}.$$ ------------- 3分

三、**应用题**: （每题9分，共18分）

1、求圆$x^2+y^2=1$上一点, 使得该点到$A(0,0)$、$B(3,0)$、$C(0,4)$的距离的平方之和最小.

解: 令$f(x,y,\lambda)=x^2+y^2+(x-3)^2+y^2+x^2+(y-4)^2+\lambda(x^2+y^2-1)$.

------------- 3分

由方程组

$$\begin{cases} f_x=4x+2(x-3)+2\lambda x=0\\ f_y=4y+2(y-4)+2\lambda y=0\\ f_\lambda=x^2+y^2-1=0\end{cases}$$ -------------- 3分

可解得驻点为$(x,y)=(\pm\frac{3}{5},\pm\frac{4}{5})$; 由题意可知所求的点为$(\frac{3}{5},\frac{4}{5})$. ------ 3分

2、设函数$y=f(x)$处处二阶可导，并且$f(1)=f'(1)+4=e$，其函数图像上任意一点(x,y)处的切线与y轴的交点为$(0,u(x))$，若$u-u'=y+2x^2$，求函数$y=f(x)$.

解: $u(x)-y=y'(0-x)$, $u(x)=y-xy'$, $u'(x)=y'-y'-xy''=-xy''$.

因为$u-u'=y-xy'+xy''=y+2x^2$，则当$x\neq 0$时, $y''-y'=2x$. -------4分

解方程$y''-y'=2x$，可得$y=C_1e^x+C_2-x^2-2x$. ------------- 3分

再由 $f(1)=f'(1)+4=e$，可得$y=e^x-x^2-2x+3$. ------------- 2分

四、证明题: （每题6分，共12分）

1、设可微函数$f(x,y,z)$满足: $f(t^a x,t^b y,t^c z)=t^{a+b+c}f(x,y,z)$, $\forall t>0$, 其中 a, b, c 都是正整数. 求证:

$$ax\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)+by\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)+cz\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)=(a+b+c)f(x,y,z).$$

证明: 令$u=t^a x$, $v=t^b y$, $w=t^c z$, $k=a+b+c$.

对$f(u,v,w)=t^k f(x,y,z)$关于t求导可得:

$$\frac{\partial f}{\partial u}(u,v,w)\cdot at^{a-1}x+\frac{\partial f}{\partial v}(u,v,w)\cdot bt^{b-1}y+\frac{\partial f}{\partial w}(u,v,w)\cdot ct^{c-1}z=kt^{k-1}f(u,v,w).$$

--- 4分

上述表达式中令$t=1$, 即有

$$ax\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)+by\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)+cz\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)=(a+b+c)f(x,y,z).$$

--- 2分

2、设Σ为曲面$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ $(a,b,c>0)$, $I=\iint\limits_{\Sigma}\mathrm{d}S$, $\alpha=1-\dfrac{c^2}{a^2}$, $\beta=1-\dfrac{c^2}{b^2}$.

(1) 求证:

$$I=2\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{\frac{1-\alpha\dfrac{x^2}{a^2}-\beta\dfrac{y^2}{b^2}}{1-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\ D_{xy}:\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1.$$

(2) 上述积分很难直接计算, 试用你的想法给出$\dfrac{1}{\pi}I$的估算公式, 并给出该公式在$a=1$, $b=2$, $c=3$时的结果. (保留两位小数, 合理的估值均可得分)

证: (1) $z=c\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}}$, $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{c^2}{a^2}\dfrac{x}{z}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{c^2}{b^2}\dfrac{y}{z}$, ------------ 1分

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}S &= \sqrt{1+\left(-\frac{c^2}{a^2}\frac{x}{z}\right)^2+\left(-\frac{c^2}{b^2}\frac{y}{z}\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \sqrt{1+\frac{c^2\dfrac{x^2}{a^4}}{1-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}}+\frac{c^2\dfrac{y^2}{b^4}}{1-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \sqrt{\frac{1-(1-\dfrac{c^2}{a^2})\dfrac{x^2}{a^2}-(1-\dfrac{c^2}{b^2})\dfrac{y^2}{b^2}}{1-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \sqrt{\frac{1-\alpha\dfrac{x^2}{a^2}-\beta\dfrac{y^2}{b^2}}{1-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \quad \text{------------ 2分}
\end{aligned}
$$

由曲面Σ的对称性, 只需要计算上半椭球面积的2倍; 因此,

$$
I=2\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{\frac{1-\alpha\dfrac{x^2}{a^2}-\beta\dfrac{y^2}{b^2}}{1-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\ D_{xy}:\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1. \quad \text{------------ 1分}
$$

(2) 合理估值范围: $4\min\{a^2,b^2,c^2\}\leqslant\dfrac{1}{\pi}I\leqslant 4\max\{a^2,b^2,c^2\}$. 参考估值公式:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\pi}I\approx\frac{4}{3}(a^2+b^2+c^2), \\
&\frac{1}{\pi}I\approx\frac{4}{3}(ab+bc+ac), \\
&\frac{1}{\pi}I\approx 4\sqrt[p]{\frac{a^pb^p+b^pc^p+a^pc^p}{3}},\ p>0.
\end{aligned}
$$

当$a=1,\ b=2,\ c=3$时, 合理范围是 $4\leqslant\dfrac{1}{\pi}I\leqslant 36$. 事实上$I\approx 15.57$; 估值结果在$[10,20]$上给2分; 估值结果在$[4,10)\cup(20,36]$上给1分.