第四章 向量空间

第三节 向量组的极大无关组 向量组的秩

一、向量组的线性表示

二、向量组的极大无关组和秩

三、向量组的秩和极大无关组的求法

一、向量组的线性表示

定义 设 $\mathbf{A}:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$, $\mathbf{B}:\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 为两个向量组.

① 若 B 中的每个向量都可以由向量组 A 线性表示，则称向量组 B 能组由向量组 A 线性表示；

② 若向量组 A 与 B 能相互线性表示，则称向量组 A 与 B **等价**.

提醒 向量组之间的等价关系具有以下性质：

反身性　　**对称性**　　**传递性**

例题 设 A : $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 与 B : $\beta_1, \beta_2, , \beta_3$ 为两个 n 维列向量组，之间有如下关系

$$\begin{cases} \beta_1 = \alpha_1 \\ \beta_2 = \alpha_1 + \alpha_2 \\ \beta_3 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha_1 = \beta_1 \\ \alpha_2 = -\beta_1 + \beta_2 \\ \alpha_3 = -\beta_2 + \beta_3 \end{cases}$$

这种关系表明，向量组 B 可由向量组 A 线性表示；反解以上关系可得如下关系这表明，A 也可由向量组 B 线性表示；故有 A 与 B 可相互线性表示，即等价.

列向量组间的线性表示

提醒 设 $\mathbf{B}:\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 与 $\mathbf{A}:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 均为列向量组，若向量组B能由A线性表示，则存在数 $k_{1j},k_{2j},\cdots,k_{sj}$ 使得

$$\beta_j=k_{1j}\alpha_1+k_{2j}\alpha_2+\cdots+k_{sj}\alpha_s$$

$$=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)\begin{bmatrix}k_{1j}\\k_{2j}\\\vdots\\k_{sj}\end{bmatrix},\ j=1,2,\cdots,t.$$

系数矩阵

$\Leftrightarrow$ 存在矩阵 $K=(k_{ij})_{s\times t}$ 使得 $B=AK$, 其中

$$B=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t),\quad A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s).$$

行向量组间的线性表示

提醒 设 $\mathbf{B}:\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 与 $\mathbf{A}:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 均为**行**向量组，若向量组B能由A线性表示，

则存在数 $l_{i1},l_{i2},\cdots,l_{is}$ 使得

$$\beta_i=l_{i1}\alpha_1+l_{i2}\alpha_2+\cdots+l_{is}\alpha_s$$

$$=(l_{i1},l_{i2},\cdots,l_{is})\begin{bmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\vdots\\\alpha_s\end{bmatrix},\ i=1,2,\cdots,t.$$

系数矩阵

$\Leftrightarrow$ 存在矩阵 $L=(l_{ij})_{t\times s}$ 使得 $B=LA$, 其中

$$B^T=(\beta_1^T,\beta_2^T,\cdots,\beta_t^T),\ A^T=(\alpha_1^T,\alpha_2^T,\cdots,\alpha_s^T).$$

引理 若$C_{s\times n}=A_{s\times t}B_{t\times n}$,则矩阵$C$的列向量组能由矩阵$A$的列向量组线性表示，$B$为这一线性表示的系数矩阵；而矩阵$C$的行向量组能由$B$的行向量组线性表示，$A$为这一线性表示的系数矩阵.

定理 若向量组$A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$能由向量组$B:\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$线性表示，向量组$B$能由向量组$C:\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_l$线性表示，则向量组$A$也能由向量组$C$线性表示.

定理 设 $\mathbf{A}:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 与 $\mathbf{B}:\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 为两个向量组，若

① 向量组 B 可由 A 线性表示，

② $t>s$,

则向量组 B 必线性相关.

提醒 该定理的语言描述为: 少表多，多相关

若向量个数多的向量组能由向量个数少的向量组线性表示，则向量个数多的向量组一定线性相关.

$\mathbf{A}:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\ \mathbf{B}:\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$

证明 不妨设所给向量组都为列向量组.

因向量组 B 可由向量组 A 线性表示，由引理知，存在 $s\times t$ 矩阵 K 使得

$$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)K.$$

因 $s<t$, 则齐次方程组 $KX=0$ 必有非零解, 即 $\alpha\neq 0$ 使得 $K\alpha=0$，从而

$$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t)\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)K\alpha=0,$$

这表明齐次方程组 $(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t)X=0$ 也有非零解，故向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 线性相关.

命题 若 $s<n$, 则 $s\times n$ 齐次方程组必有非零解.

推论1 设 $\mathbf{A}:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 与 $\mathbf{B}:\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$

为两个向量组，若

① 向量组 B 可由向量组 A 线性表示，

② 向量组 B 线性无关.

则 $t \le s.$

推论2 任意 m 个 $n(n<m)$ 维向量线性相关.

提醒 推论2 的语言描述即：

向量个数大于向量维数的向量组必线性相关

推论3 设$\Sigma_1: \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$与$\Sigma_2: \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$为两个$n$维向量组，若

① 向量组Σ_2与向量组Σ_1都线性无关；

② 向量组Σ_2与Σ_1等价，

则$t = s.$

提醒 推论3的语言描述即

两个**等价**的**线性无关**向量组包含的**向量个数必相同**.

二、向量组的极大线性无关组和秩

定义 设$\Sigma' : \alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_r}$与$\Sigma : \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$为两个向量组，$r \le s$，满足

① Σ'为Σ的部分组；

② Σ'线性无关；

③ Σ 中任一向量都可由Σ' 线性表示；

则称向量组Σ'是Σ的一个**极大线性无关组**.

极大线性无关组简称**极大无关组**.

提醒 在条件①②下，条件 ③等价于

③′ Σ中任意 $r+1$个向量(若存在)线性相关.

提醒 ➢ 一个向量组的极大无关组，就是能表示该向量组本身的**向量个数最少**的部分组.

提醒 ➢ 一个向量组的极大无关组必与自身等价. 所以，一个向量组的极大无关组，就是与**自身等价**的**线性无关**的**部分组**.

提醒 ➢ 只含零向量的向量组没有极大无关组.

提醒 ➢ 若一个向量组本身线性无关，则它的极大无关组就是其自身.

例题 在向量组

$$\Sigma:\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\alpha_2=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix},\alpha_3=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\alpha_4=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$$

中可以验证，部分组

$$\Sigma_1:\alpha_1,\alpha_2\quad \Sigma_2:\alpha_1,\alpha_3\quad \Sigma_3:\alpha_1,\alpha_4$$
$$\Sigma_4:\alpha_2,\alpha_3\quad \Sigma_5:\alpha_2,\alpha_4\quad \Sigma_6:\alpha_3,\alpha_4$$

都是向量组Σ的极大无关组.

提醒 向量组的极大无关组未必唯一！

定理 同一向量组的任意两个极大无关组是等价的，且包含相同个数的向量.

定义 向量组 $\Sigma:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 的极大无关组所含向量的个数，称为该**向量组的秩**，记为

$$\mathrm{r}(\Sigma)=\mathrm{rank}\left(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\right).$$

规定 零向量组的秩为零，即$\mathrm{r}\left(0,0,\cdots,0\right)=0.$

提醒 向量组的秩唯一，而极大无关组未必唯一. 秩比极大无关组更为本质地刻画了向量组的内在属性.

推论4 设 $\Sigma:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$为一向量组，则

$$\Sigma\text{ 线性无关}\Leftrightarrow \mathrm{r}\left(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\right)=s$$

$$\Sigma\text{ 线性相关}\Leftrightarrow \mathrm{r}\left(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\right)<s$$

推论5 若$\Sigma_1:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$可由$\Sigma_2:\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$线性表示，则$\mathrm{r}(\Sigma_1)\le\mathrm{r}(\Sigma_2)$.

证明 设向量组Σ_1,Σ_2的极大无关组分别为

$$\Sigma_1':\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_p}\quad,\Sigma_2':\beta_{k_1},\beta_{k_2},\cdots,\beta_{k_q}.$$

则 $\mathrm{r}(\Sigma_1)=\mathrm{r}(\Sigma_1')=p$, $\mathrm{r}(\Sigma_2)=\mathrm{r}(\Sigma_2')=q$.

因Σ_1可由Σ_2线性表示，则Σ_1'可由Σ_2'线性表示；又Σ_1'与Σ_2'都线性无关，故$p\le q$.

于是$\mathrm{r}(\Sigma_1)\le\mathrm{r}(\Sigma_2)$.

推论 等价向量组的秩相等.

例如 向量组 $\mathbf{A}: \alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

的秩为 $\mathrm{r}(\mathbf{A}) = \mathrm{r}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 2.$

向量组 $\mathbf{B}: \beta_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \beta_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \beta_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

的秩为 $\mathrm{r}(\mathbf{B}) = \mathrm{r}(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = 2.$

思考 两个有相同的秩的向量组等价吗？不一定

思考 两个向量组有相同的秩，并且其中一个可被另一个线性表出，则这两个向量组等价？

三、向量组的秩和极大线性无关组的求法

定理 若$\Sigma_1:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$和$\Sigma_2:\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$均为列向量组且矩阵$A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$可经初等行变换化为矩阵$B=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)$. 则以下命题等价

① $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$为$\Sigma_1$的极大无关组;

② $\beta_{i_1},\beta_{i_2},\cdots,\beta_{i_r}$为$\Sigma_2$的极大无关组.

提醒 初等行变换不改变列向量组的线性关系.

例题 求向量组$\alpha_1=\begin{bmatrix}-1\\1\\0\\0\end{bmatrix}$, $\alpha_2=\begin{bmatrix}-1\\2\\-1\\1\end{bmatrix}$, $\alpha_3=\begin{bmatrix}0\\-1\\1\\-1\end{bmatrix}$,

$\alpha_4=\begin{bmatrix}1\\-3\\2\\3\end{bmatrix}$, $\alpha_5=\begin{bmatrix}2\\-6\\4\\1\end{bmatrix}$的秩及一个极大无关组，并将不在极大无关组里的其余向量用该极大无关组线性表示.

解答 令$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)$，并对$A$作初等行变换将其化为阶梯形矩阵，有

$$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)$$

$$=\begin{bmatrix}-1&-1&0&1&2\\1&2&-1&-3&-6\\0&-1&1&2&4\\0&1&-1&3&1\end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow\begin{bmatrix}-1&-1&0&1&2\\0&1&-1&-2&-4\\0&0&0&5&5\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}=B$$

因阶梯形矩阵B有3个非零行，故有

$$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)=3.$$

why?

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 为该向量组的一个极大无关组.

这是因为

1. 阶梯形矩阵的主元列构成的向量组为其列向量组的极大无关组; B 的第1, 2, 4列构成的向量组为 B 的列向量组的极大无关组;
2. 再由上面定理知， A 的第1, 2, 4列构成 A 的列向量组的极大无关组.

极大无关组能表示极大无关组之外的向量！

怎么表示？

为将其余向量用该极大无关组线性表示，

对以上的行阶梯形矩阵 B 作进一步的初等行变换，

将 B 化为行最简形矩阵，得

$$A \to B \to C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

显然，在$C=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4,\gamma_5)$里有

$$\gamma_3=1\cdot\gamma_1+(-1)\cdot\gamma_2$$

$$\gamma_5=1\cdot\gamma_1+(-2)\cdot\gamma_2+1\cdot\gamma_4$$

从而，在$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)$里，也有

$$\alpha_3=1\cdot\alpha_1+(-1)\cdot\alpha_2=\alpha_1-\alpha_2$$

$$\begin{aligned}\alpha_5&=1\cdot\alpha_1+(-2)\cdot\alpha_2+1\cdot\alpha_4\\&=\alpha_1-2\alpha_2+\alpha_4.\end{aligned}$$

向量组的秩及极大无关组的求法

① 若$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 为列向量组，令

$$A = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s)$$

若 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 为行向量组，令

$$A = (\alpha_1^T, \alpha_2^T, \cdots, \alpha_s^T)$$

② $A \xrightarrow{\text{一系列初等行变换}} B$ 阶梯形矩阵

$\mathrm{r}(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s) = B$ 的非零行的行数

③ 由 B 的非零首元所在的列，找到A的相应列，即得到A 的一个列极大无关组，即向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 的一个极大无关组.

提醒 若还需要把不在极大无关组中的向量用极大无关组表示，则将其化为约当阶梯形矩阵，此时的极大无关组必须取每一阶梯的第一列，则可轻易地将其余向量用极大无关组线性表示.

提醒 化为阶梯形矩阵的过程就是寻找极大无关组的过程；化为行最简形矩阵的过程就是寻找其余向量用极大无关组表示的过程.

例题 求向量组 $\alpha_1=(1,-1,2,4)$, $\alpha_2=(0,3,1,2)$, $\alpha_3=(3,0,7,14)$, $\alpha_4=(1,-1,2,0)$, $\alpha_5=(2,1,5,6)$ 的秩及一个极大无关组，并将其余向量用该极大无关组线性表示.

解答 令 $A=\left(\alpha_1^T,\alpha_2^T,\alpha_3^{\mathrm{T}},\alpha_4^T,\alpha_5^T\right)$，并对 A 作初等行变换将其化为行最简形矩阵

$$A=\left(\alpha_1^T,\alpha_2^T,\alpha_3^{\mathrm{T}},\alpha_4^T,\alpha_5^T\right)=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 7 & 2 & 5 \\ 4 & 2 & 14 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$
= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 7 & 2 & 5 \\ 4 & 2 & 14 & 0 & 6 \end{bmatrix}
\xrightarrow[\text{等行变换}]{\text{一系列初}}
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

故 $\mathrm{r}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5) = 3$，部分组$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ 是向量组$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$的一个极大无关组，且

$$
\alpha_3 = 3\alpha_1 + \alpha_2, \qquad \alpha_5 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4.
$$

例题 求向量组

$$\alpha_1=(2,1,-3,1),\ \alpha_2=(1,1,1,1),$$
$$\alpha_3=(3,1,-7,1),\ \alpha_4=(5,3,-5,x)$$

的秩及一个极大无关组.

解答 令 $A=(\alpha_1^T,\alpha_2^T,\alpha_3^{\mathrm{T}},\alpha_4^T)$，并对 A 作初等行变换将其化为阶梯形矩阵

$$A=(\alpha_1^T,\alpha_2^T,\alpha_3^{\mathrm{T}},\alpha_4^T)=\begin{bmatrix}2&1&3&5\\1&1&1&3\\-3&1&-7&-5\\1&1&1&x\end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & x-3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & x-3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

当 $x = 3$ 时，$\mathrm{r}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = 2$,

α_1, α_2 为一极大无关组；

当 $x \neq 3$ 时，$\mathrm{r}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = 3$,

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ 为一极大无关组.