2018-2019 春微积分（I）-2 A 卷参考答案

一．填空题(每小题 4 分，共 5 分)

1．曲面 $z=2x^3-y^2$ 在点(1,1,1)处的切平面方程是（ $6x-2y-z-3=0$ ）.

解：$dz=6x^2dx-2ydy$，　$6x-2y-z-3=0$

2. 设 $z=\ln\sqrt{x^2+y^2}-\arctan\dfrac{y}{x}$，则 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{x=2,y=1}$ =（ $\dfrac{3}{5}$ ）.

解：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1}{2}\dfrac{2x}{x^2+y^2}-\dfrac{1}{1+\dfrac{y^2}{x^2}}\dfrac{-y}{x^2}=\dfrac{x+y}{x^2+y^2}$，$\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{x=2,y=1}=\dfrac{3}{5}$

3 设 $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}+\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}f(x,y)dxdy$，

则 $\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}f(x,y)dxdy=$（ $\dfrac{2\pi}{3(\pi-1)}$ ）.

解：$\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}f(x,y)dxdy=k=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}(\sqrt{1-x^2-y^2}+k)dxdy=\dfrac{2\pi}{3}+k\pi$

4. $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数，$f(x)=\begin{cases}\cos x-2, & -\pi\le x<0\\ \sin x+2, & 0<x<\pi\end{cases}$，

设 $s(x)$ 是其傅里叶级数的和函数，则 $s(\pi)=$（ $-\dfrac{1}{2}$ ）.

解：$s(\pi)=\dfrac{1}{2}[\lim\limits_{x\to-\pi^+}f(x)+\lim\limits_{x\to\pi^-}f(x)]=-\dfrac{1}{2}$

5. 二阶微分方程 $yy''+y'^2=1$ 的通解是（ $y^2=x^2+c_1x+c_2$ ）.

解：$d(yy')=d(x+c_1)$，$yy'=x+c$，

$y^2=2\int(x+c)dx=x^2+c_1x+c_2$

二．计算题(每小题 7 分，共 28 分)

6．设 $e^z+x-2xy+z-1=0$ 确定的函数 $z=z(x,y)$，

求(1) $\dfrac{\partial z}{\partial y}$，　(2) $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\right|_{(0,0)}$.

解：(1)方程两边同时对 y 求偏导：

(1) $(e^z+1)\frac{\partial z}{\partial y}-2x=0,$ ....(2 分)

$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2x}{e^z+1},$ ....(1 分)

(2) 方程 两边再同时对 x 求偏导：

(2) $e^z\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}+(e^z+1)\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-2=0$ ....(2 分)

把 x=0,y=0 代入原方程可得 $z=0$， $\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(0,0)}=\frac{2x}{e^z+1}=0$， ...(1 分)

再代入方程(2)，得 $\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(0,0)}=\frac{2}{e^z+1}=1$ ....(1 分)

7. 空间闭曲面 Σ **由** $x^2+y^2=1, z=0$ 和 $z=4+y$ **围成，求它的表面积.**

解： $S=\pi+\int_{x^2+y^2=1}(4+y)ds+\iint_{x^2+y^2\le 1}\sqrt{1+1}dxdy$ ....(4 分)

$=\pi+8\pi+\sqrt{2}\pi=(9+\sqrt{2})\ \pi$ ....(3 分)

8. 计算曲线积分 $I=\int_L(e^x\sin y-2y)dx+(e^x\cos y-3)dy$，

其中 L 为由点 A:(2,0)到点 B;(1,2)再到原点 **O**(0,0)的折线段.

解： $\because\ \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(e^x\sin y-2y)=e^x\cos y-2$,

$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(e^x\cos y-3)=e^x\cos y$,

$\therefore\frac{\partial P}{\partial y}\ne\frac{\partial Q}{\partial x}$，曲线积分与路径有关. .... (1 分)

补充有向线段 $\overline{OA}$ **: y=0, x 从 0 到 2. 由格林公式,得**........... (1 分)

$\int_{ABOA}=\iint_D(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy=2\iint_D dxdy=4,$ .... (3 分)

$\int_{\overline{OA}}=\int_0^2 0\cdot dx+(e^x-3)\cdot 0\cdot dx=0$, ... (1 分)

因此$\therefore$ $I=\int_{AMOA}-\int_{\overline{OA}}=4-0=4.$ .... (1 分)

9. 设可导函数$\phi(x)$满足$\phi(x)\cos x+2\int_0^x \phi(t)\sin t\,dt=x+1$，求$\phi(x)$.

解： 设$y=\phi(x)$，两边对x求导,得

$$y'\cos x+y\sin x=1$$ .... (2 分)

其通解为$y=c\cos x+\sin x.$ .... (4 分)

因为$x=0$时, $y=1$,得$c=1$. 所以$y=\cos x+\sin x.$ ....(1 分)

三. 解答题(每小题 9 分，共 27 分)

10. 设二元函数$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^k y}{4x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$.

(1) 当k为何值时$f(x,y)$在点(0,0)处连续;

(2) 当k为何值时$f(x,y)$在点(0,0)处可微.

解：(1) 令$x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta,$

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}} f(x,y)=\lim_{\rho\to0}\rho^{k-1}\frac{\cos\theta\sin\theta}{1+3\cos^2\theta}$$

因为$\forall\theta,\dfrac{\cos\theta\sin\theta}{1+3\cos^2\theta}$有界,

所以当$k>1$时$f(x,y)$在点(0,0)处连续. .... (3 分)

(2) 根据偏导数定义

$$f_x(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=0$$

$$f_y(0,0)=\lim_{k\to0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k}=0$$ .... (2 分)

讨论极限

$$\lim_{\rho\to0}\frac{[f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)]-[f_x(0,0)\Delta x+f_x(0,0)\Delta y]}{\rho}$$ .... (2 分)

$$=\lim_{\rho\to0}\rho^{k-2}\frac{\cos\theta\sin\theta}{1+3\cos^2\theta}$$

所以当$k>2$时$f(x,y)$在点(0,0)处可微. .... (2 分)

11. 设 $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}+\arctan x$, **(1)**把 $f(x)$ 展开成 x 的幂级数; **(2)**求 $f^{(2019)}(0)$.

解: $\because \dfrac{1}{1+x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n,\quad x\in(-1,1)$ .... (1 分)

$\therefore \dfrac{x}{1+x^2}=x\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n+1},\quad x\in(-1,1)$ .... (2 分)

$$\arctan x=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx=\int_0^1(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n})dx$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1},\quad x\in[-1,1]$$ .... (3 分)

$f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}+\arctan x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2n+2}{2n+1}(-1)^n x^{2n+1}$ .... (1 分)

$f^{(2019)}(0)=2019!a_{2019}=-2019!\dfrac{2020}{2019}=-2020\cdot 2018!$ .... (2 分)

12 求初值问题 $\begin{cases} y''-3y'+2y=-xe^x \\ y(0)=y'(0)=1 \end{cases}$ 的特解.

解: 对应特征方程为 $r^2-3r+2=0$，其特征根为 $r_1=1,r_2=2$

所以齐次方程的通解为 $y=C_1e^x+C_2e^{2x}$. .... (3 分)

因为 $\lambda=1$ 是单根，设非齐次方程特解为 $y^*=x(ax+b)e^x$ .... (2 分)

代入原方程，化简得 $a=\dfrac{1}{2},b=1$. 所以 $y^*=(\dfrac{1}{2}x^2+x)e^x$， .... (2 分)

从而原方程的通解为 $y=C_1e^x+C_2e^{2x}+(\dfrac{1}{2}x^2+x)e^x$ .... (1 分)

由 $y(0)=y'(0)=1$，得 $c_1=-1,c_2=2$

所以初值问题的特解为 $y=(\dfrac{1}{2}x^2+x+2)e^x-e^{2x}$. .... (1 分)

四. 证明题(7 分)

13. 证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}$ 条件收敛于 $\ln 2$.

证明： $\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$是调和级数，发散; .... (1 分)

又由莱布尼茨判别法，交错级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$收敛, ... (1 分)

则$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$条件收敛. .... (1 分)

考虑幂级数 $s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n$,收敛半径为 1, ... (1 分)

在绝对收敛区间为(-1,1)内,

$$s'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}(x^n)'=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{n-1}=\frac{1}{1+x},$$

$$s(x)=\int_0^x\frac{1}{1+x}dx=\ln(1+x)$$

.... (3 分)

因为 x=1 时，级数收敛,则 $s(1)=\lim_{x\to1^-}\ln(1+x)=\ln 2.$ .... (1 分)

五．应用题(每小题 9 分，共 18 分)

14．求曲面 $x^2+y^2-4x-4y+7=0$ 和平面 $x+z=8$ 交线上的点到 y 轴的最长距离和最短距离.

解：点 (x,y,z) 到 y 轴的距离为 $\sqrt{x^2+z^2}$ . ... (2 分)

令 $F=x^2+z^2+\lambda_1(x^2+y^2-4x-4y-7)+\lambda_2(x+z-8)$， .... (2 分)

$$\begin{cases} F_x=2x+\lambda_1(2x-4)+\lambda_2=0 \\ F_y=\lambda_1(2y-4)=0 \\ F_z=2z+\lambda_2=0 \\ F_{\lambda_1}=x^2+y^2-4x-4y-z-7=0 \\ F_{\lambda_2}=x+z-8=0 \end{cases}$$

.... (2 分)

解得 $(x,y,z)=(1,2,7)$或$(3,2,5)$ . ... (1分)

将这两个点分别代入目标函数，可得最大值 $5\sqrt{2}$ 和最小值 $\sqrt{34}$ .... (2 分)

15. 设空间曲面Σ： $z^2 = x^2 + y^2$ $(1 \le z \le 2$部分$)$，方向指向外侧，

计算曲面积分 $I = \iint_\Sigma \cos(y+z)dydz + y^2dzdx + (x+z^2)dxdy$.

解：作辅助面Σ_1： $z=1,\ (x,y)\in D_1 : x^2+y^2 \le 1$,方向指向下侧;

辅助面Σ_2： $z=2,\ (x,y)\in D_2 : x^2+y^2 \le 4$,方向指向上侧. .... (2 分)

$\Sigma+\Sigma_1+\Sigma_2$ 围成空间闭区域Ω ,方向指向外侧, 根据高斯公式, 有

$$\iint_{\Sigma+\Sigma_1+\Sigma_2} = \iiint_\Omega (2y+2z)dxdydz = 2\iiint_\Omega zdxdydz$$

$$= 2\int_1^2 zdz\iint_{D_z} dxdy = 2\pi\int_1^2 z\cdot z^2dz = \frac{15}{2}\pi, \quad \text{........................ (4 分)}$$

$$\iint_{\Sigma_1} = -\iint_{x^2+y^2\le 1}(x+1)dxdy = -\pi, \quad \text{........................ (1 分)}$$

$$\iint_{\Sigma_2} = \iint_{x^2+y^2\le 4}(x+4)dxdy = 16\pi, \quad \text{........................ (1 分)}$$

$$\therefore I = \iint_{\Sigma+\Sigma_1+\Sigma_2} - \iint_{\Sigma_1} - \iint_{\Sigma 2} = \frac{15}{2}\pi + \pi - 16\pi = -\frac{15}{2}\pi. \quad \text{.......... (1 分)}$$