第四章 向量空间

第五节 基和维数

一、子空间基的定义

二、子空间的维数

三、基变换与坐标变换公式

一、子空间基的定义

将向量组的极大无关组和秩的概念放在 $\mathbb{R}^n$ 的子空间 H 上来考察，就是子空间的基与维数.

$\mathbb{R}^n$的非零子空间包含无穷多个向量，在处理有关子空间的问题时，利用该子空间的生成集会更加方便. 子空间的生成集不唯一， 但不是所有的生成集都同样高效.

问题 什么样的生成集才是最高效的呢？

例题 设 $S=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}\subset\mathbb{R}^3$，其中

$$\alpha_1=(1,2,3),\ \alpha_2=(4,5,6),\ \alpha_3=(2,1,0).$$

证明：$\operatorname{span}\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}=\operatorname{span}\{\alpha_1,\alpha_3\}$.

证明 注意到 $\alpha_2=2\alpha_1+\alpha_3$，可知

与向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 与 α_1,α_3 等价；

又因为等价向量组生成的子空间相同；

所以 $\operatorname{span}\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}=\operatorname{span}\{\alpha_1,\alpha_3\}$.

提醒 在生成子空间 $\operatorname{span}\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$ 时，α_2 是冗余的！

一方面，若子空间 $\boldsymbol{H}$ 的生成集是线性相关的，则该生成集中至少有一个向量可以表示为其余向量的线性组合，从而可以从生成集中去除该向量，得到一个较小的，更高效的生成集.

另一方面，若子空间 $\boldsymbol{H}$ 的生成集是线性无关的，则该生成集中任意一个向量，比如 α, 不能表示为其余向量的线性组合， 从而少了该向量的其余向量不能生成 $\boldsymbol{H}$ 中的向量 α． 此时，少了任意一个向量的其余向量都不能成为 $\boldsymbol{H}$ 的生成集.

线性无关的生成集才是最小，最高效的生成集！

定义 $\mathbb{R}^n$的子空间H的线性无关生成集称为H的**基**(basis).

例题 可逆n阶方阵的n个列向量构成$\mathbb{R}^n$的基.

证明 设可逆方阵$A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$，其列向量组线性无关. 对$\mathbb{R}^n$中的任意向量$\beta$，向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\beta$线性相关，从而$\beta$能由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性表示，因此$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$是$\mathbb{R}^n$的基.

提醒 n阶单位阵的列向量组称为$\mathbb{R}^n$的**标准基**.

定理 设 $S=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_p\}$ 的 $\mathbb{R}^n$ 子集，

$H=\operatorname{span}\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_p\}$.

(1) 若 S 中的某个向量 α_k 是 S 中其余向量的线性组合，则从 S 中去掉 α_k 后剩余向量构成的集合仍然是 H 的生成集.

(2) 若 $H\neq\{0\}$，则必有 S 的某个子集构成 H 的基.

证明 证明略.

提醒 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_p$ 的每个极大无关组都是 $H=\operatorname{span}\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_p\}\,(\neq\{0\})$ 的基！

提醒 一个矩阵的列向量组的一个极大无关组就是该矩阵的列空间的一个基!

例题 已知 $A=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 & -9 \\ -2 & -2 & 2 & -8 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 7 & 1 \\ 3 & 4 & -1 & 11 & -8 \end{bmatrix}$

$=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)$，求 $\mathrm{Col}A$的基.

解答 经初等行变换，有

$$A \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = B,$$

易见，$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_5$ 为 A 的列向量组的一个极大无关组，也是 $\mathrm{Col}A$ 的一组基.

提醒 是 A 自身的主元列，而非行阶梯形矩阵 B 的主元列，构成了 $\mathrm{Col}A$ 的基.

定理 矩阵 A 的主元列构成 $\mathrm{Col}A$ 的一组基.

因矩阵的列向量组的一个极大无关组，就是该矩阵的列空间的一个基！同理，矩阵的行向量组的一个极大无关组，也构成该矩阵行空间的一个基.

因此可以采用求极大无关组的方法求矩阵行空间的基.

但因行等价的矩阵具有相同的行空间，故在求矩阵行空间的基时，还有如下方法.

提醒 矩阵 A 经初等行变换化为行阶梯形矩阵 B, 则 B 的非零行构成 A 和 B 行空间的一组基.

例题 设 $A=\begin{bmatrix}-2 & -5 & 8 & 0 & -17\\ 1 & 3 & -5 & 1 & 5\\ 3 & 11 & -19 & 7 & 1\\ 1 & 7 & -13 & 5 & -3\end{bmatrix}$, 求 $\mathrm{Row}A$, $\mathrm{Col}A$, $\mathrm{Nul}A$ 三空间的基.

解答 经初等行变换，化 A 为行阶梯形矩阵.

$$A\to B=\begin{bmatrix}1 & 3 & -5 & 1 & 5\\ 0 & 1 & -2 & 2 & -7\\ 0 & 0 & 0 & -4 & 20\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

则 B 的前三行构成 $\mathrm{Row}A$ 的一组基：

$$\{(1,3,-5,1,5),\ (0,1,-2,2,-7),\ (0,0,0,-4,20)\};$$

$$A \to B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

因B的主元位于第$1,2,4$列，故A的第$1,2,4$列

构成 $\mathrm{Col}A$ 的一组基：$\left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \\ 11 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix} \right\}$;

为求 $\mathrm{Nul}A$ 的基，化 A为行最简形

$$A \to B \to C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A \to B \to C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

令自由未知量 $x_3 = k, x_5 = l$, 得

$$\mathrm{Nul}A = \left\{ k \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + l \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} : k, l \in \mathbb{R} \right\},$$

$$\mathrm{Nul}A=\left\{k\begin{bmatrix}-1\\2\\1\\0\\0\end{bmatrix}+l\begin{bmatrix}-1\\-3\\0\\5\\1\end{bmatrix}:k,l\in\mathbb{R}\right\}$$

$\mathrm{Nul}A$的一组基为：$\left\{\begin{bmatrix}-1\\2\\1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\-3\\0\\5\\1\end{bmatrix}\right\}.$

提醒 将 $AX=O$ 的解写成参数形式的过程同时可以确定 $\mathrm{Nul}A$ 的一组基.

二、子空间的维数

子空间的基是不唯一的，那基中所含向量个数呢？

定理 设 H 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间，$S=\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_p\}$ 是 H 的生成集. 若 $m>p$，则 H 中任意任意 m 个向量必线性相关.

定理 若子空间 H 有一组基包含 p 个向量，则 H 的任一组基都恰含有 p 个向量.

提醒 以上定理表明，子空间的每一组基含有的向量个数必相同的.

定义 $\mathbb{R}^n$ 的非零子空间 H 的任一组基中所含向量的个数称为 H的**维数**，记为 $\dim H$.

零空间的维数规定为0.

提醒 向量空间的维数与向量的维数的区别

提醒 $\mathrm{Nul}A$ 的维数是方程组 $AX = O$ 中自由变量的个数.

$\mathrm{Col}A$ 的维数是 A 的主元列的数目.

提醒 $\mathbb{R}^3$的子空间可以按照维数进行分类：

0 维子空间：$\{0\}$

1 维子空间：由一个非零向量生成，
几何上是过原点的直线；

2 维子空间：由两个线性无关向量生成，
几何上是过原点的平面；

3 维子空间：$\mathbb{R}^3$

定理 若H是$\mathbb{R}^n$的子空间, $\dim H = p$, 则

(1) H中任意 p个线性无关的向量都构成 H的一组基;

(2) 若H 中 p 个向量构成 H 的生成集, 则这 p 个向量也构成H的一组基.

定理 若$\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p\}$是子空间 H的基，则H中的每个向量能且仅能用一种方式表为$\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p\}$的线性组合.

提醒 以上定理说明了子空间H 的基相对于生成集的一个优点：向量的表示法唯一.

定义 设$\mathrm{B}=\{\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_p\}$是子空间$H$的基.

H中的向量X若可表成

$$X=c_1\beta_1+c_2\beta_2+\ldots+c_p\beta_p,$$

称系数$c_1,c_2,\cdots,c_p$为向量X在基B下的**坐标**，记为$\begin{bmatrix} c_2 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_p \end{bmatrix}$.

提醒 基向量组可以建立一个H中的坐标系统.

提醒 一个向量在一个基下的坐标是唯一的.

提醒 $\mathbb{R}^n$ 中的向量 X 在单位向量组构成的标准基$\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$下的坐标即为 X.

$$\begin{bmatrix}2\\5\end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = 2\cdot e_1 + 5\cdot e_2.$$

例题 $\beta_1 = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$, $\beta_2 = \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$ 是 $\mathbb{R}^2$ 的一组基，

$X \in \mathbb{R}^2$ 在基 β_1, β_2下的坐标为 $\begin{bmatrix}-2\\3\end{bmatrix}$, 则

$$X = (-2)\beta_1 + 3\beta_2 = (-2)\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\6\end{bmatrix}.$$

例题 在$\mathbb{R}^3$中，求向量$\alpha=(1,7,3)^T$在基

$$\beta_1=\begin{bmatrix}2\\0\\-1\end{bmatrix},\ \beta_2=\begin{bmatrix}1\\3\\2\end{bmatrix},\ \beta_3=\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix}.$$

下的坐标.

解答 设α在基β_1,β_2,β_3下的坐标为$(x_1,x_2,x_3)^T$，则

$$\alpha=x_1\beta_1+x_2\beta_2+x_3\beta_3=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$$

也即有 $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 3 \end{bmatrix}.$

对增广矩阵作初等行变换，有

$$\widetilde{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 7 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix},$$

则 α 在基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 下的坐标为 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}.$

三、基变换与坐标变换公式

子空间的基不唯一，且同一向量在不同基下的坐标是不同的. 下面研究随着基的改变，向量坐标的变化规律.

定义 设 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 和 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n$ 是n维向量空间 $\mathbb{R}^n$的两组基，且

$$\begin{cases} \eta_1 = a_{11}\varepsilon_1 + a_{21}\varepsilon_2 + \cdots + a_{n1}\varepsilon_n \\ \eta_2 = a_{12}\varepsilon_1 + a_{22}\varepsilon_2 + \cdots + a_{n2}\varepsilon_n \\ \qquad \vdots \\ \eta_n = a_{1n}\varepsilon_1 + a_{2n}\varepsilon_2 + \cdots + a_{nn}\varepsilon_n \end{cases} \qquad (\star)$$

基变换公式

或

$$(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)\,A$$

其中 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，则称 A 是由基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 到基 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$ 的**过渡矩阵**，其中 A 的第 j 列是向量 $\eta_j(j=1,2,\cdots,n)$ 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 下的坐标.

定理 设 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ (I) 与 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n$(II) 是 n 维向量空间 $\mathbb{R}^n$ 的两组基，且

$$(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n) A.$$

若 $\alpha \in \mathbb{R}^n$ 在基 (I) 和基 (II)下的坐标分别为 $X, Y,$ 则

(1) 过渡矩阵是可逆矩阵，且

$$(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n) = (\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n) A^{-1}.$$

(2) $X = AY, \quad Y = A^{-1}X.$

坐标变换公式

证明 基(I)可由基(II)线性表出，设为

$$(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)B,$$

由已知条件，有

$$\begin{aligned}(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)&=[(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)A]B\\&=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)(AB),\end{aligned}$$

而

$$(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)E$$

由坐标的唯一性，有

$$AB=E,$$

故过渡矩阵 A 可逆，且 $B=A^{-1}$.

由已知条件，有

$$\alpha = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)\, X = (\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)\, Y$$
$$= (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)\, AY,$$

由坐标的唯一性，有

$$X = AY,$$

进而有

$$Y = A^{-1}X.$$

例题 考虑 $\mathbb{R}^2$中的两组基：

$$(\mathrm{I})\ \varepsilon_1=\begin{bmatrix}1\\-4\end{bmatrix},\ \varepsilon_2=\begin{bmatrix}3\\-5\end{bmatrix};$$

$$(\mathrm{II})\ \eta_1=\begin{bmatrix}-9\\1\end{bmatrix},\ \eta_2=\begin{bmatrix}-5\\-1\end{bmatrix}.$$

求基 (I) 到基 (II) 的过渡矩阵.

解答 设基 (I) 到基 (II) 的过渡矩阵为 A, 则有

$$(\eta_1,\eta_2)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2)\,A.$$

于是问题归结为解矩阵方程

$$\begin{bmatrix}1&3\\-4&-5\end{bmatrix}A=\begin{bmatrix}-9&-5\\1&-1\end{bmatrix}\Rightarrow A=\begin{bmatrix}6&4\\-5&-3\end{bmatrix}.$$

海纳百川 有容乃大

例题 在 $\mathbb{R}^3$ 中，由基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 到基

$$\beta_1=\begin{bmatrix}2\\0\\-1\end{bmatrix},\ \beta_2=\begin{bmatrix}1\\3\\2\end{bmatrix},\ \beta_3=\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix}.$$

的过渡矩阵为 $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&4\\0&0&1\end{bmatrix}$，求出基

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$; 并求向量 $\alpha=(1,7,3)^T$在基

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的坐标.

解答 由基变换公式，

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)\,A^{-1}$$

$$=\begin{bmatrix}2&1&2\\0&3&1\\-1&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-2&5\\0&1&-4\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2&-3&8\\0&3&-11\\-1&4&-12\end{bmatrix}.$$

$$\Rightarrow \alpha_1=\begin{bmatrix}2\\0\\-1\end{bmatrix},\ \alpha_2=\begin{bmatrix}-3\\3\\4\end{bmatrix},\ \alpha_3=\begin{bmatrix}8\\-11\\-12\end{bmatrix}.$$

设向量 $\alpha=(1,7,3)^T$在基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的坐标为 $(x_1,x_2,x_3)^T$，则

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\7\\3\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)^{-1}\begin{bmatrix}1\\7\\3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2&-3&8\\0&3&-11\\-1&4&-12\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1\\7\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\-5\\-2\end{bmatrix}.$$