



第四章 向量空间

- 4.1 向量的定义及运算
- 4.2 向量组的线性相关性
- 4.3 向量组的极大线性无关组和秩
- 4.4 子空间
- 4.5 基和维数
- 4.6 矩阵的秩
- 4.7 线性方程组有解的条件及解的结构



第二节 向量组的线性相关性

- 一、线性相关和线性无关的定义
- 二、线性相关和线性无关的性质
- 三、向量组线性相关性的判定



一、线性相关和线性无关的定义

若向量 β 是向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 的线性组合，
则向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n, \beta$ 之间**有线性关系**。

例如： (1) $\alpha_4 = \alpha_1 - 2\alpha_2 + 3\alpha_3$

向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 之间有线性关系；

(2) $\xi_1 = (1, 0, 0)^T, \xi_2 = (0, 1, 0)^T, \xi_3 = (0, 0, 1)^T$

因 ξ_1, ξ_2, ξ_3 中任一向量都不能表为其余向量的线性组合，故 ξ_1, ξ_2, ξ_3 之间没有线性关系。

显然，这两个向量组有着本质的区别，为此，
本节将讨论这两种不同类型的向量组。



问题 应该如何区分向量组是否有线性关系呢？

对于给定向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ，考虑关系式

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_n\alpha_n = 0$$

当 $k_1 = k_2 = \dots = k_n = 0$ 时，上式对任意向量组必定成立！

例如 当组合系数**都为零时**，对上页中的两组向量组，都有

$$0\alpha_1 + 0\alpha_2 + 0\alpha_3 + 0\alpha_4 = 0,$$

$$0\xi_1 + 0\xi_2 + 0\xi_3 = 0.$$

此时，不能区分向量组是否有线性关系！



但对于向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ ，还可以取**不全为零**的 $k_1 = 1, k_2 = -2, k_3 = 3, k_4 = -1$ 使得

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 + k_4\alpha_4 = 0$$

成立！

而对于向量组 ξ_1, ξ_2, ξ_3 ，**找不到不全为零**的 k_1, k_2, k_3 使得

$$k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + k_3\xi_3 = 0$$

成立！

启发 区分向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 是否有线性关系，应考虑：是否存在**不全为零**的 k_1, k_2, \dots, k_n 使得 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_n\alpha_n = 0$ 成立？



定义 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 为一向量组, 若存在一组 **不全零** 的数 k_1, k_2, \dots, k_s 使得

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s = 0,$$

则称向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ **线性相关**;
否则, 称该向量组**线性无关**.

定理 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ **线性相关** (**线性无关**)
的充要条件是: 齐次线性方程组

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_s\alpha_s = 0$$

有**非零解** (**仅有零解**).



例题 令 $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$

- (1) 判断 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的线性相关性;
- (2) 若向量组线性相关, 求 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 之间的一个非平凡线性关系.

解答 考虑如下方程组 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = 0$

$$\Leftrightarrow x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

对其增广矩阵进行初等行变换, 有



$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

因系数矩阵的主元列数少于未知量个数，故以上齐次线性方程组必有非零解，所以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关；

为确定 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的线性关系，化为行最简形矩阵

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

原方程组同解于 $\begin{cases} x_1 - 2x_3 = 0, \\ x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$



令自由变量 $x_3 = k$, 得原方程组的解为

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2k \\ -k \\ k \end{bmatrix}, k \text{ 为任意常数};$$

从而 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的线性关系为 $2k\alpha_1 - k\alpha_2 + k\alpha_3 = 0$
 k 为任意常数;

于是 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的非平凡线性关系为

$$2k\alpha_1 - k\alpha_2 + k\alpha_3 = 0, k \neq 0 \text{ 为任意常数};$$

令 $k = 2$, 得 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的一个非平凡线性关系为

$$4\alpha_1 - 2\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0.$$



提醒 给定矩阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, 则
 $AX = O \Leftrightarrow x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_n\alpha_n = 0.$

A 的列向量组线性相关 (或无关)
 $\Leftrightarrow AX = O$ 有非零解 (只有零解)

A 的列向量组之间的每个非平凡线性关系
对应于 $AX = O$ 的一个非零解.

提醒 矩阵 A 的列或行向量组的线性相关性简称为矩阵 A 的列线性相关性或行线性相关性.



例题 判断 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \\ 5 & 8 & 0 \end{bmatrix}$ 的列线性相关性.

解答 对 A 进行初等行变换化为阶梯形矩阵,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \\ 5 & 8 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 12 \end{bmatrix}$$

显然可见, $AX = O$ 仅有零解, 因此
矩阵 A 列线性无关.



提醒

给定矩阵 $A = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$, 则

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_n\alpha_n = 0$$

$$\Leftrightarrow x_1\alpha_1^T + x_2\alpha_2^T + \dots + x_n\alpha_n^T = 0$$

$$\Leftrightarrow A^T X = O$$

A 的行向量组线性相关（或无关）

$\Leftrightarrow A^T X = O$ 有非零解（只有零解）

A 的行向量组之间的每个非平凡线性关系
对应于 $A^T X = O$ 的一个非零解.



例题 判断 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -9 \end{bmatrix}$ 的行线性相关性.

解答 对 A^T 进行初等行变换化为阶梯形矩阵,

$$A^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & -9 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

显然可见, $A^T X = O$ 有非零解, 因此矩阵 A 行线性相关.

结论 若向量组 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ 线性无关, 且

$$k_1 \xi_1 + k_2 \xi_2 + \dots + k_n \xi_n = 0,$$

则必有 $k_1 = 0, k_2 = 0, \dots, k_n = 0$.



例题 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 判断向量组 $\beta_1 = \alpha_1 + \alpha_2, \beta_2 = \alpha_2 + \alpha_3, \beta_3 = \alpha_3 + \alpha_1$ 的线性相关性.

解答 考虑齐次线性方程组

$$x_1\beta_1 + x_2\beta_2 + x_3\beta_3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x_1(\alpha_1 + \alpha_2) + x_2(\alpha_2 + \alpha_3) + x_3(\alpha_3 + \alpha_1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x_1 + x_3)\alpha_1 + (x_1 + x_2)\alpha_2 + (x_2 + x_3)\alpha_3 = 0$$

因 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 故
$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

该方程组只有零解, 即 $x_1 = x_2 = x_3 = 0$,
所以向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性无关.



- ① 含有零向量的向量组必线性相关.
- ② 若向量组中仅含有一个向量 $\Sigma : \alpha$, 则
向量组 Σ 线性相关 $\Leftrightarrow \alpha = 0$.
向量组 Σ 线性无关 $\Leftrightarrow \alpha \neq 0$.
- ③ 若向量组中仅含有两个向量 $\Sigma : \alpha, \beta$, 则
向量组 Σ 线性相关 $\Leftrightarrow \alpha = s\beta$ or $\beta = t\alpha$,
即: 两向量对应分量成比例.

几何意义

- ① 两向量线性相关: 两向量共线.
- ② 三向量线性相关: 三向量共面.



证明 只证明第三个结论.

必要性 因 α, β 线性相关, 则存在不全为零的数 k, l , 使得 $k\alpha + l\beta = 0$.

若 $k \neq 0$, 则 $\alpha = -\frac{l}{k}\beta = s\beta$;

若 $l \neq 0$, 则 $\beta = -\frac{k}{l}\alpha = t\alpha$.

充分性 不妨设 $\alpha = s\beta$, 则

$$(-1)\alpha + s\beta = 0.$$

因 $-1, s$ 不全为零, 故 α, β 线性相关.



定理 若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ (*) 线性无关, 而向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s, \beta$ (**) 线性相关, 则 β 可由向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ (*) 线性表示且表示法唯一.

证明 因向量组 (**) 线性相关, 故存在不全为零的数 k_1, k_2, \cdots, k_s, k 使得

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s + k\beta = 0 \quad (1)$$

又向量组 (*) 线性无关, 则可断定 $k \neq 0$.



又向量组 (*) 线性无关, 则可断定 $k \neq 0$.

实际上, 假设 $k = 0$, 因 k_1, k_2, \dots, k_s, k 不全为零及 (1) 式知, k_1, k_2, \dots, k_s 不全为零, 使得

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s = 0.$$

从而向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ (*) 线性相关, 与题设矛盾, 故 $k \neq 0$.

由 $k \neq 0$ 及 (1) 式, 可得

$$\beta = -\frac{k_1}{k}\alpha_1 - \frac{k_2}{k}\alpha_2 - \dots - \frac{k_s}{k}\alpha_s,$$

这表明, β 可由向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ (*) 线性表示.



再证明表示法的唯一性. 若

$$\beta = t_1\alpha_1 + t_2\alpha_2 + \cdots t_s\alpha_s \quad (2)$$

$$\beta = l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 + \cdots l_s\alpha_s \quad (3)$$

两式相减得

$$(t_1 - l_1)\alpha_1 + (t_2 - l_2)\alpha_2 + \cdots (t_s - l_s)\alpha_s = 0.$$

又向量组(*) 线性无关, 故

$$t_i - l_i = 0, i = 1, 2, \cdots, s,$$

即 $t_i = l_i, i = 1, 2, \cdots, s$. 这表明 β 由向量组 (*) 的两种线性表示法(2)(3) 是相同的, 故表示法唯一.



二、线性相关和线性无关的性质

性质1 设 $\Sigma: \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ ($s > 1$) 为一向量组, 则

Σ 线性相关 $\Leftrightarrow \Sigma$ 中 至少有一个 向量可由

其它 $s - 1$ 个向量线性表示

Σ 线性无关 $\Leftrightarrow \Sigma$ 中 任一个向量都不能 由

其它 $s - 1$ 个向量线性表示

证明 只证明第一个结论.

必要性 因向量组 Σ 线性相关, 则存在不全为零的数 k_1, k_2, \dots, k_s , 使得

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s = 0.$$



不妨设 $k_1 \neq 0$, 则有

$$\alpha_1 = -\frac{k_2}{k_1}\alpha_2 - \cdots - \frac{k_n}{k_1}\alpha_n,$$

即 α_1 可由其余 $s-1$ 个向量线性表出.

充分性 不妨设 $\alpha_s = k_1\alpha_1 + \cdots + k_{s-1}\alpha_{s-1}$, 则存在不全为零的数 $k_1, \cdots, k_{s-1}, k_s (= -1)$ 使得

$$k_1\alpha_1 + \cdots + k_{s-1}\alpha_{s-1} + k_s\alpha_s = 0.$$

从而向量组 Σ 线性相关.



判定命题正误:

1. 零向量可以由任何一个向量组线性表示.
2. 一个向量组内的任何一个向量都可由这个向量组线性表示.
3. 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性相关, 则存在不为零的数 k_1, k_2, \dots, k_m 使得

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_m\alpha_m = 0.$$

4. 因 k_1, k_2, \dots, k_m 都为零时,

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_m\alpha_m = 0,$$

故向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性无关.



5. 只有当 k_1, k_2, \dots, k_m 都为零时, 才有

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_m\alpha_m = 0,$$

则向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性无关.

不定项选择: n 维向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关.

A $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_n\alpha_n = 0$ 当且仅当
 $k_1 = k_2 = \dots = k_n = 0$.

B $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_n\alpha_n = 0$ 只有零解.

C 矩阵 $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ 可逆.

D 行列式 $|(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)| \neq 0$.



性质2 若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ ($s > 1$) (*) 的任何一个部分组线性相关, 则向量组 (*) 线性相关;
若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ ($s > 1$) (*) 线性无关, 则 (*) 的任何一个部分组线性无关.

部分相关, 整体相关; 整体无关, 部分无关



性质3 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ (*) 为 n 维向量组, 则

$$(*) \text{ 线性相关} \Leftrightarrow |A| = 0$$

$$(*) \text{ 线性无关} \Leftrightarrow |A| \neq 0$$

其中当(*)为**列**向量组时, 矩阵

$$A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n);$$

当(*)为**行**向量组时, 矩阵 $A = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}.$

提醒 **性质3**中的向量组要求**向量个数与维数**相同.



性质4 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s (*)$ 为一向量组，则

增维性质

① 若 $(*)$ 线性无关，则在 $(*)$ 中的每个向量的相同位置添加 t 个分量之后所得的向量组也线性无关；

减维性质

② 若 $(*)$ 线性相关，则在 $(*)$ 中的每个向量去掉相同位置的 k 个分量之后所得的向量组也线性相关。

本身相关，减维相关；本身无关，增维无关



例题 行阶梯形矩阵的非零行构成一个线性无关的行向量组. 例如

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 & -6 \\ 0 & 2 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

提醒 行阶梯形矩阵的非零行构成一个线性无关的行向量组.

行阶梯形矩阵的主元列构成一个线性无关的列向量组.



例题 判断下列向量组是否线性相关？

$$(1) \alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \alpha_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

解答 取所给向量组的前三个分量，得向量组为

$$\alpha'_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \alpha'_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \alpha'_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

因行列式 $|(\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3)| \neq 0$ ，故 $\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3$ 线性无关，从而 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 也线性无关；



$$(2) \beta_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \beta_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \beta_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}, \beta_4 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

解答 法一：因行列式

$$|(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & -5 \end{vmatrix} = 0,$$

故向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ 线性相关.



$$(2) \beta_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \beta_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \beta_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}, \beta_4 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

解答 法二：经观察可见

$$\beta_1 + \beta_2 = \beta_3,$$

即 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性相关，故 $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$

也线性相关.

部分相关，整体相关



三、向量组线性相关性的判断

抽象向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性相关的判断

先假设

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n = 0, \quad (*)$$

再由已知条件判断方程组 (*) 是仅有零解，还是有非零解？此处的 k_1, k_2, \cdots, k_n 相当于未知量.

- ① 若 (*) 仅有零解，即 k_1, k_2, \cdots, k_n 必须全为0，则向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性无关；
- ② 若 (*) 有非零解，即 k_1, k_2, \cdots, k_n 可以不全为零，则向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性相关.



常见错误说法 因 $x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_s = 0$ 时有

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_s\alpha_s = 0,$$

故向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关.

例题 若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性无关, 那么向量组 $\alpha_1 + \alpha_2, \dots, \alpha_{r-1} + \alpha_r, \alpha_r + \alpha_1$ 的线性相关性如何?

解答 设

$$k_1(\alpha_1 + \alpha_2) + \dots + k_{r-1}(\alpha_{r-1} + \alpha_r) + k_r(\alpha_r + \alpha_1) = 0,$$



即

$$(k_1 + k_r) \alpha_1 + (k_1 + k_2) \alpha_2 + \cdots + (k_{r-1} + k_r) \alpha_r = 0,$$

由于 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 线性无关, 则

$$\begin{cases} k_1 + k_2 = 0 \\ \vdots \\ k_{r-1} + k_r = 0 \\ k_r + k_1 = 0 \end{cases} \quad \langle 1 \rangle$$

以上方程组的系数行列式



$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{cases} 2, & r = 2k + 1, \\ 0, & r = 2k. \end{cases}$$

- ① 当 r 为奇数时, 方程组 $\langle 1 \rangle$ 仅有零解, 即 k_1, k_2, \cdots, k_r 必全为零, 则所要讨论向量组线性无关;
- ② 当 r 为偶数时, 方程组 $\langle 1 \rangle$ 有非零解, 即 k_1, k_2, \cdots, k_r 可不全为零, 故所讨论向量组线性相关.



例题 已知 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关, $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关. 判断 α_1 能否由 α_2, α_3 线性表示?
并证明你的结论.

解答 因 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关, 故 α_2, α_3 线性无关;
又 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关, 故 α_1 能由 α_2, α_3 线性表示.

问题 α_1 能否由向量组 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性表示?



例题 已知 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是三维列向量组, A 为三阶方阵. 若 $A\alpha_1, A\alpha_2, A\alpha_3$ 线性无关, 则 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 也线性无关, 且 A 可逆.

例题 已知 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是三个 n 维向量, A 为 n 阶方阵. 若 $A\alpha_1 = \alpha_1 \neq 0, A\alpha_2 = \alpha_1 + \alpha_2,$
 $A\alpha_3 = \alpha_2 + \alpha_3.$ 则 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关.

例题 已知 α 是一个 n 维向量, A 为 n 阶方阵. 若 $A^{m-1}\alpha \neq 0, A^m\alpha = 0,$ 则
 $\alpha, A\alpha, A^2\alpha, \dots, A^{m-1}\alpha$ 线性无关.