第二节　二次型化为标准形

一、正交变换法

二、配方法

三、合同变换法

由上节最后一个定理及推论知，任意二次型总能通过可逆线性变换化为标准形.

本节将介绍二次型化为标准形的方法：

配方法、正交变化法、合同变换法.

一、配方法

例题 用配方法化如下三元二次型

$$f=x_1^2+x_2^2-x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3$$

为标准形，并求出所用的可逆线性变换.

解答 二次型中含平方项 x_1^2，对 x_1 配方，消去所有含 x_1 的交叉项，得

$$\begin{aligned}f&=x_1^2+x_2^2-x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3\\&=(x_1+x_2+x_3)^2-4x_2x_3-2x_3^2\end{aligned}$$

再对 x_3 配方，消去所有含 x_3 的交叉项得

$$\begin{aligned} f &= (x_1+x_2+x_3)^2 - 4x_2x_3 - 2x_3^2 \\ &= (x_1+x_2+x_3)^2 - 2(x_2+x_3)^2 + 2x_2^2 \end{aligned}$$

令 $\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 + x_3 \\ y_2 = \qquad\ \ x_2 + x_3 \\ y_3 = \qquad\qquad\ \ x_2 \end{cases}$，即存在可逆线性变换

$$\begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 \\ x_2 = y_3 \\ x_3 = y_2 - y_3 \end{cases} \quad \text{or} \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

使得 $f(x_1, x_2, x_3) = y_1^2 - 2y_2^2 + 2y_3^2.$

提醒 在上题中，如果令

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 + x_3 \\ y_2 = \sqrt{2}x_2 \\ y_3 = x_2 + x_3 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} x_1 = y_1 - y_3 \\ x_2 = y_2/\sqrt{2} \\ x_3 = y_3 - y_2/\sqrt{2} \end{cases}$$

它仍是一可逆线性替换，但在这种线性替换下，二次型的标准形为$f(x_1, x_2, x_3) = y_1^2 + y_2^2 - 2y_3^2$.

显然，这个标准形与刚才的标准形是不同的，但它们都是原二次型的标准形．所以有

命题 二次型的标准形是不唯一的.

例题 用配方法化二次型

$$f\left(x_1,x_2,x_3\right)=2x_1x_2+2x_1x_3-6x_2x_3$$

为标准形，并求出所用的可逆线性变换.

解答 二次型中无平方项，但含x_1x_2，利用平方差公式作可逆线性变换，使新变量的二次型含平方项．作可逆线性变换

$$\begin{cases}x_1=y_1+y_2\\x_2=y_1-y_2\\x_3=y_3\end{cases}\quad\text{or}\quad\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&-1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix},$$

则

$$f(x_1,x_2,x_3)=2(y_1+y_2)(y_1-y_2)+2(y_1+y_2)y_3 \\ -6(y_1-y_2)y_3$$

$$=2y_1^2-2y_2^2-4y_1y_3+8y_2y_3$$

$$=2(y_1-y_3)^2-2(y_2-2y_3)^2+6y_3^2$$

作可逆线性变换

$$\begin{cases} z_1=y_1-y_3 \\ z_2=y_2-2y_3 \\ z_3=y_3 \end{cases} \quad \text{or} \quad \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix},$$

化二次型为标准形为

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2z_1^2 - 2z_2^2 + 6z_3^2,$$

所用可逆线性替换为

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix},$$

即

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}.$$

二、正交变换法

因任何实对称矩阵总可以正交相似（既相似又合同）对角化，得化二次型为标准形的正交变换法.

定理 对于任意 n 元实二次型

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = X^T AX,\ A = A^T$$

总存在正交矩阵 Q，使得原二次型在可逆线性变换 $X = QY$ 下成为标准形

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2,$$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 为 A 的全部特征值.

定义 当 Q 为正交矩阵时，称可逆线性变换 $X = QY$ 为**正交变换**.

例题 用正交变换法化二次型

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=2x_1x_2+2x_1x_3-2x_1x_4$$
$$-2x_2x_3+2x_2x_4+2x_3x_4$$

为标准形，并写出所用的正交变换.

解答 二次型的矩阵为

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix};$$

因 $|\lambda E-A|=(\lambda+3)(\lambda-1)^3$,

故A 的特征值为$\lambda_{1,2,3}=1,\lambda_4=-3;$

解$(\lambda_{1,2,3}E-A)X=0$得其基础解系为

$$X_1=\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix},\ X_2=\begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix},\ X_3=\begin{bmatrix}-1\\0\\0\\1\end{bmatrix},$$

将X_1,X_2,X_3正交化，得

$$Y_1=X_1=\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix},$$

$$Y_2 = X_2 - \frac{(X_2, Y_1)}{(Y_1, Y_1)} Y_1 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$Y_3 = X_3 - \frac{(X_3, Y_1)}{(Y_1, Y_1)} Y_1 - \frac{(X_3, Y_2)}{(Y_2, Y_2)} Y_2 = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix};$$

解$(\lambda_4 E - A)X = 0$得其基础解系为$X_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

将Y_1, Y_2, Y_3, X_4单位化得规范正交基

$$\beta_1 = \frac{1}{\|Y_1\|}Y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix}, \quad \beta_2 = \frac{1}{\|Y_2\|}Y_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}1\\-1\\2\\0\end{bmatrix},$$

$$\beta_3 = \frac{1}{\|Y_3\|}Y_3 = \frac{\sqrt{3}}{6}\begin{bmatrix}-1\\1\\1\\3\end{bmatrix}, \quad \beta_4 = \frac{1}{\|X_4\|}X_4 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{bmatrix},$$

令 $Q=(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)$

$$=\begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{6}/6 & -\sqrt{3}/6 & 1/2 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{6}/6 & \sqrt{3}/6 & -1/2 \\ 0 & \sqrt{6}/3 & \sqrt{3}/6 & -1/2 \\ 0 & 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix},$$

则Q是正交矩阵，满足

$$Q^TAQ=Q^{-1}AQ=\operatorname{diag}(1,1,1,-3),$$

作正交变换$X=QY$，化原二次型为标准形

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=y_1^2+y_2^2+y_3^2-3y_4^2.$$

例题 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2$
$+2\lambda x_1x_2+2\mu x_2x_3+2x_1x_3$

经正交变换化为$f=2y_2^2+y_3^2$, 求λ,μ.

解答 由题知$A=\begin{bmatrix}1&\lambda&1\\\lambda&1&\mu\\1&\mu&1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}0&&\\&2&\\&&1\end{bmatrix}$,

故 A的特征值为$0,2,1$, 从而有

$$\begin{cases}|0E-A|=0\\|1E-A|=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(\lambda-\mu)^2=0\\(\lambda+\mu)^2=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\lambda=0,\ \mu=0.$$

1 正交变换的特点：保持向量的内积，长度不变！

即当Q为正交矩阵时，则

$$(QX,QY)=(X,Y),\ |X|=|QX|.$$

从而，正交变换能保持向量间的夹角不变！

2 正交变法换化二次曲线、二次曲面的方程为标准形时，能保持图形的几何性质如形状，大小等.

3 正交变换法只能将二次型化为标准形，不能范化为规形！配方法可以化为标准形，也可化为规范形！

三、合同变换法

用可逆线性替换化 $X=CY$ 二次型 $f=X^TAX$ 为标准形，等同于将对称阵 A 合同变换为对角阵 Λ.

C 可逆 $\Leftrightarrow C=P_1P_2\cdots P_t$

$\Lambda=C^TAC=P_t^T\cdots P_2^TP_1^TAP_1P_2\cdots P_t.$

对 A 施行成对的初等行列变换

$$P_t^T\cdots P_2^TP_1^TAP_1P_2\cdots P_t$$

可将 A 化为与之合同的对角阵，$C=P_1P_2\cdots P_t.$

根据左行右列的原则，构造 $2n \times n$ 矩阵 $\begin{bmatrix} A \\ E \end{bmatrix}$

对其施行成对的初等行列变换将A 化为对角阵，

相应地，E 就被化成了 C.