



第六章 二次型

- 6.1 二次型及其矩阵表示
- 6.2 二次型化为标准形
- 6.3 正定二次型



第一节 二次型及其矩阵表示

一、二次型及其矩阵表示

二、可逆线性变换

三、矩阵的合同



一、二次型及其矩阵表示

二次型的“型”意指齐次多项式，故二次型就是二次齐次多项式.

定义 称系数取自于数域 \mathbb{P} 的含有 n 个变量的二次齐次多项式

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = & a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n \\ & + a_{22}x_2^2 + \cdots + 2a_{2n}x_2x_n \\ & + \cdots \cdots \cdots \\ & + a_{nn}x_n^2 \end{aligned}$$

二次型的一般表示

为数域 \mathbb{P} 上的一个 n 元二次型.



定义 只含平方项的二次型

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{nn}x_n^2$$

称为**标准二次型**；

称各项系数为1, -1或0的标准二次型

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_r^2$$

为**规范二次型**；其中 $r \leq n$.

提醒 未经特别说明，本章讨论的二次型都为实二次型，即二次项系数均为实数的二次型。



设 $a_{ji} = a_{ij}$, $i < j$, 则 $2a_{ij}x_ix_j = a_{ij}x_ix_j + a_{ji}x_jx_i$.

利用矩阵的乘法运算, 二次型的一般形式可改为

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = & a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \cdots + a_{1n}x_1x_n \\ & + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{2n}x_2x_n \\ & + \cdots \cdots \cdots \\ & + a_{n1}x_nx_1 + a_{n2}x_nx_2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 \end{aligned}$$

二次型的矩阵表示

$$= (x_1, x_2, \cdots, x_n) \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$



如果令

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

则二次型的一般形式可改写为

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = X^T A X$$

矩阵表示

其中 A 为对称矩阵，称为**二次型 f 的矩阵**。

二次型 f 的秩： $\text{rank}(f) = \text{rank}(A)$

提醒 二次型与其矩阵一一对应！



提醒 标准二次型 $f = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{nn}x_n^2$ 的
矩阵为对角阵

$$A = \text{diag}(a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn})$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$r(f) = r(A)$ 为数 $a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}$ 中的非零
数的个数.



提醒 规范二次型

$$f = x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_r^2$$

的矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} E_p & & \\ & -E_{r-p} & \\ & & O \end{bmatrix}$$

其中 $r(f) = r(A) = r$.



例题 写出如下二次型的矩阵及秩.

$$f = (x_1, x_2, x_3) \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

解答 令 $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 则该二次型的矩阵为

$$A = \frac{1}{2}(B + B^T) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 2 & -3 & 0 \end{bmatrix},$$

该二次型的秩为 $\text{rank}(f) = \text{rank}(A) = 3$.



提醒 在上面例题中，虽然

$$f = (x_1, x_2, x_3) \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = X^T B X$$

但因 B 不对称，故它不是二次型 f 的矩阵；
从而

$$\text{rank}(f) \neq \text{rank}(B) = 2!$$

提醒 二次型的矩阵必须是对称矩阵！



在平面上，化二次曲线方程为标准形，实际上就是通过坐标轴的旋转来得到的，也即是用新变量的一次式代替原来的变量. 在此，我们仍沿用这种方法来化简一般二次型.

[illegible]

写成矩阵形式即为



$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \quad \text{或 } X = CY,$$

$$\text{其中 } X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad C = (c_{ij})_{n \times n}, \quad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}.$$

$X = CY$ 表示的变量间的替换称为**线性变换**.
当 C 可逆时, 称这种线性变换为**可逆线性变换**, 或者**满秩线性变换**, 或**非退化线性变换**.



为什么要用可逆线性变换?

提醒 若线性变换

[illegible]

不是可逆的，那么可能有的点就没有新坐标与之对应（该方程无解），而有的点却又有无穷多个新坐标与之对应，这样新二次就不能变回原二次型，这样的变换显然是没有意义的，所以我们要用可逆线性变换.



定理 对 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = X^T A X$ ($A = A^T$)
作可逆线性变换 $X = CY$, 则 f 化为

$$g(y_1, y_2, \dots, y_n) = Y^T B Y,$$

其中矩阵 $B = C^T A C$ 为二次型 g 的矩阵.

证明 因 $B = C^T A C$, 由题意有

$$f = X^T A X = Y^T (C^T A C) Y = Y^T B Y$$

易证 B 对称. 因 f 是二次型, 故 $A \neq 0$.

又 C 可逆且 $B = C^T A C$, 于是 $B \neq 0$. 故

$$g(y_1, y_2, \dots, y_n) = Y^T B Y$$

是二次型, 对称矩阵 B 为 g 的矩阵.



三、矩阵的合同

定义 设 A, B 均为 n 阶方阵，若存在可逆阵 C 使得 $B = C^T A C$ ，则称 A 与 B **合同**，记为 $A \simeq B$ 。

合同的性质

1. 矩阵的合同关系是一种等价关系。

2. A 与 B 正交相似 $\begin{matrix} & \nearrow A \sim B & \searrow \\ & & A \cong B \\ & \searrow A \simeq B & \nearrow \end{matrix}$

3. $A \simeq B \Rightarrow r(A) = r(B)$ (保秩性)

4. $A \simeq B$ 且 A 对称，则 B 也对称：保对称性

5. $A \simeq B \Rightarrow |A|$ 与 $|B|$ 同号 (保号性)



定理 任一实对称矩阵都合同于一对角阵.

证明 设 A 为一实对称矩阵；因任意实对称矩阵总能正交相似对角化，故存在正交矩阵 P 使得 $P^{-1}AP = \Lambda$ 为对角阵；又 $P^{-1} = P^T$ ，从而 $P^TAP = \Lambda$ ，即 $A \simeq \Lambda$. 得证.

推论 任意二次型都能经过可逆线性变换化为标准形.