# 成人高等学校招生考试

# 专升本　高等数学（二）

# 授课教师：劳老师

**课程知识框架**

第一章 极限与连续　　　　　　重点

第二章 一元函数微分学　　　　重点

第三章 一元函数积分学　　　　难点

第四章 多元函数微分学　　　　难点

第五章 概率论初步

## 第一章 极限与连续

一、函数的概念

1.函数的定义

设 A，B 是非空的数集，如果按照某种确定的对应关系 f，使得集合 A 中的任意一个数 x，在集合 B 中都有唯一确定的数 y 与之对应，则称 f 为定义在 A 上的函数，记做 $y=f(x)$，$x\in A$。其中 x 是自变量，集合 A 叫函数的定义域，y 是函数值，由所有的函数值组成的集合叫函数的值域，记做 $f(A)$

注意：构造函数的基本要素有两个，定义域 D 和对应关系 f。如果两个函数的定义域相同，对应关系也相同，那么这两个函数就是相同的，否则就是不同的。

2.函数的表示法

表示函数的主要方法有三种：

列表法、图像法以及解析法。

3.反函数的定义

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，值域为 $f(D)$。若对任意 $y\in f(D)$，在 D 内有唯一确定的

x 使 x=φ(y)，则称 x=φ(y)为 y=f(x)的反函数，记为 x=f^-1(y)，相应地，也称函数 y=f(x)是直接函数。

不是所有的函数在其定义域内都存在反函数。

提示：反函数与直接函数的图像关于直线 y=x 对称。

二、函数的性质

。1.单调性

设函数 f(x)的定义域为 D,区间 I⊂D。如果对于区间 I 上任意两点 $x_1$ 及 $x_2$,当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)<f(x_2)$(或 $f(x_1)>f(x_2)$)，则称函数 f(x)在区间 I 上是单调增(减)函数，I 称为函数 f(x)的单调递增(减)区间。

2.奇偶性

设函数 f(x)的定义域是 D。

设 D 关于原点对称，如果对于任意 x∈D，f(−x)=f(x)，称 f(x)为偶函数。

设 D 关于原点对称，如果对于任意 x∈D，f(−x)=−f(x)，称 f(x)为奇函数。

讲解归纳与举例

例：【计算题】判断函数 f(x)=ln(x+$\sqrt{1+x^2}$)的奇偶性

【答案】

解：

$$\because f(-x)=\ln(-x+\sqrt{1+(-x)^2})=\ln\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}=-\ln(x+\sqrt{1+x^2})=-f(x),$$

∴f(x)为奇函数。

3.有界性

设 f(x)在 D 上有定义，存在 M>0，对于任意的 x∈D 有|f(x)|≤M 成立，则称函数 f(x)在 D 上有界，否则称无界。

4.周期性

设函数 f(x)的定义域为 D。如果存在一个正数 T，对任意的 x∈D 有 f(x±T)∈f(x)，则称 f(x)为周期函数，T 称为 f(x)的周期，通常说周期函数的周期是指最小正周期。

三、初等函数

1.基本初等函数

（1）常值函数

函数表达式：y=C(C 为常数)，x∈$(-\infty,+\infty)$，图像是平行于 x 轴的直线。

（2）幂函数

- 函数表达式：$y=x^{\mu}$($\mu\in R$，是常数)
- 定义域：随着 μ 的不同而不同
- 性质：

当 μ ＞0 时，图像都经过点（1，1）和（0，0），在区间$[0,+\infty)$上是单调增加的；

当 μ<0 时，图像都经过点（1，1），在区间$(0,+\infty)$上是单调减少的。

（3）指数函数

- 函数表达式：$y=a^{x}$(a＞0 且 $a\neq1$)
- 定义域：R；
- 值域：（0，+∞）
- 性质：

函数图象都是上凹的；都经过点(0，1)；

当 a＞1 时，函数单调增加；

当 0<a<1 时，函数单调减少。

（4）对数函数

- 函数表达式：$y=\log_{a}x$(a＞0 且 $a\neq1$)(a＞0 且 a≠1)

定义域：$(0,+\infty)$；

值域：R

性质：

函数图像都经过点(1，0)；

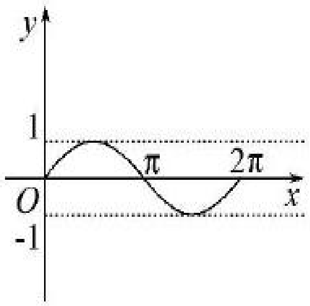
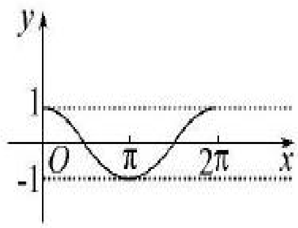
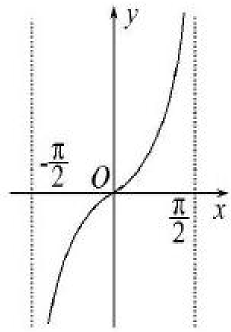
当 a＞1 时，函数单调增加；

当 0<a<1 时，函数单调减少。

特殊对数函数：以 a=e 为底的对数函数称为自然对数，简记为 y=lnx；以 a=10 为底的对数函数称为常用对数，简记为 y=lgx。

（5）三角函数

| 常见类型 | y=sinx | y=cosx | y=tanx |
| --- | --- | --- | --- |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 定义域 | R | R | x≠π/2+kπ (k∈Z) |
| 值域 | [−1, 1] | [−1, 1] | R |
| 性质 | 奇函数 | 偶函数 | 奇函数 |
| 图像 |  |  |  |

其他三角函数：y=secx；y=cscx；y=cotx。

常用公式：

① 倒数关系

$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$；$\csc x=\frac{1}{\sin x}$；$\sec x=\frac{1}{\cos x}$；$\cot x=\frac{\cos x}{\sin x}$

② 平方关系

$\sin^2 x+\cos^2 x=1$；$1+\tan^2 x=\sec^2 x.$

③ 二倍角关系

$\sin 2x=2\sin x\cos x$；$\tan 2x=\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$；

$\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x=2\cos^2 x-1=1-2\sin^2 x.$

（6）反三角函数

①$y=\arcsin x, x\in[-1,1], y\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$；

②$y=\arccos x, x\in[-1,1], y\in[0,\pi]$；

③$y=\arctan x, x\in(-\infty,+\infty), y\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right).$

2.复合函数

设函数 y=f(u)的定义域为 D1，函数 u= g(x)在 D 上有定义， g(D)⊂$D_1$，则由下式确定的函数 y=f[g(x)]，x∈ D 称为由函数 u= g(x)和函数 y= f(u)构成的复合函数，它的定义域为 D ，变量 u 称为中间变量，函数 g 与函数 f 构成的复合函数通常记为 f，g，即(f，g)(x)= f[g(x)]。

3.初等函数

由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的函数复合步骤所构成的并可用一个式子表示的函数，称为初等函数。例如：y=$\sqrt{X^3-1}$, y=cosx。

4.函数的四则运算

设函数 f(x)，g(x)的定义域依次为$D_1$，$D_2$，D=$D_1 \cap D_2 \neq \varnothing$，则我们可以定义这两个函数的下列运算：

和(差)：$F(x)=f(x)\pm g(x), x\in D$；

积：$G(x)=f(x)\cdot g(x)=f(x)g(x), x\in D$；

商：$H(x)=\frac{f(x)}{g(x)}, x\in D\{x|g(x)\neq 0, x\in D\}$

(指在 D 中剔除使 $g(x)=0$ 的 x 值).

四、数列极限的定义

1.数列的概念

如果按照某一法则，使得对任何一个正整数 n 有一个确定的数$x_n$，则得到一列有次序的数$x_1$，$x_2$，$x_3$,⋯，$x_n$,⋯，这一列有次序的数就叫做数列，记为{$x_n$}，其中第 n 项$x_n$叫做数列的一般项。

2.数列极限的描述性定义

对于数列{$x_n$}，如果当 n→∞时，$X_n$无限地趋于一个确定的常数 A，则称当 n 趋于无穷大时，数列{$x_n$}以常数 A 为极限，或称数列收敛于 A，记做$\lim\limits_{n\to\infty} X_n$ =A。

否则，称数列{$X_n$}没有极限；如果数列没有极限，就称数列是发散的。

五、数列极限的性质

1.唯一性：若数列{$x_n$}收敛，则其极限值必定唯一。

2.有界性：如果数列{$x_n$}收敛，则数列{$x_n$}一定有界。

3.夹逼性：如果数列{$x_n$}、{$y_n$}、{$z_n$}满足下列条件，

①$x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$，

②$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$=$\lim\limits_{n\to\infty} z_n$=A，

则数列{$y_n$}的极限存在，并且$\lim\limits_{n\to\infty} y_n$=A。

4.收敛准则：单调有界数列必有极限。

5. 四则运算定理：设数列$\{x_n\}$、$\{y_n\}$，其极限$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=A, \lim\limits_{n\to\infty} y_n=B$，则有

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = A \pm B$；

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = AB$；

（3）$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \frac{A}{B}(B \neq 0)$。

六、函数极限的定义

1.函数极限的描述性定义

设函数 f(x)在点$x_0$的某一去心邻域内有定义。如果存在常数 A，使得当 x→$x_0$时，，f(x)的值趋近于 A，那么常数 A 就叫做函数 f(x)当 x→$x_0$时的极限，记为$\lim\limits_{x\to x_0}f(x) = A$ 或 $f(x) \to A(当\ x \to x_0)$。

2.f(x)在$x_0$点的左右极限

对于函数 y=f(x)，如果当 x 从$x_0$的左(右)边无限地趋近与$x_0$时，函数 f(x)无限地趋近于一个常数 A，则称 A 为函数 f(x)当 x→$x_0$时的左(右)极限，记做 $f(x_0 - 0) = \lim\limits_{x\to x_0^-}f(x) = A(f(x_0 + 0) = \lim\limits_{x\to x_0^+}f(x) = A)$。

3.对于函数 y=f(x)，如果当 x→∞时，f(x)无限地趋近于一个常数 A，则称 A 为函数 f(x)当 x→∞时的极限，记做$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$=A 或 $f(x) \to A(x \to \infty)$。

4.对于函数 $f(x)$，如果当 $x \to +\infty$(x $\to -\infty$)时，$f(x)$无限地趋近于一个常数 A，则称 A 为函数 $f(x)$当 $x \to +\infty$(x $\to -\infty$)时的极限，记做$\lim\limits_{x\to +\infty}f(x) = A(\lim\limits_{x\to -\infty}f(x) = A)$。

5. $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$与$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$之间的关系$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在的充分必要条件是$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$都存在且相等。

6. $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)$，$\lim\limits_{x\to -\infty}f(x)$之间的关系$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 存 在 的 充 分 必 要 条 件 是 $\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)$与$\lim\limits_{x\to -\infty}f(x)$存在且相等。

讲解归纳与举例

例：【计算题】设$f(x)=\begin{cases} x, x<3 \\ 3x-1, x\geq 3\end{cases}$，讨论$x\to 3$时，$f(x)$的极限。

【答案】

解：

$\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-} x=3$, $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+}(3x-1)=8$,

$\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)\neq \lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$,

所以$x\to 3$时，$f(x)$的极限不存在。

例：【计算题】$f(x)=\frac{|x|}{x}$，判断函数$f(x)$在$x=0$处的函数极限是否存在。

【答案】

解：

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} -1=-1$，$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} 1=1$，$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)\neq \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$，所以$x\to 0$时，$f(x)$的极限不存在。

七、函数极限的性质

1. 唯一性：如果$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$存在，那么这极限唯一。

2. 四则运算性质：

设$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$，则

（1）$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=A\pm B$；

（2）$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]=AB$；

（3）$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A}{B}(B\neq 0)$。

3. 夹逼性

设函数 $f(x)$、$g(x)$、$h(x)$在点$x_0$的某个邻域内（点$x_0$可除外）满足 $g(x)\leq f(x)\leq h(x)$，且$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=A$，则有$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$。

讲解归纳与举例

例：【计算题】计算下列极限

（1）$\lim\limits_{x \to 2}\frac{x^2+5}{x-3}$；（2）$\lim\limits_{x \to \sqrt{3}}\frac{x^2-3}{x^2+1}$.

【答案】解：

（1）$\lim\limits_{x \to 2}(x^2+5)=9$，$\lim\limits_{x \to 2}(x-3)=-1 \neq 0$，

$\lim\limits_{x \to 2}\frac{x^2+5}{x-3}=\frac{9}{-1}=-9.$

例：【计算题】计算下列极限

（1）$\lim\limits_{x \to 2}\frac{x^2+5}{x-3}$；（2）$\lim\limits_{x \to \sqrt{3}}\frac{x^2-3}{x^2+1}$.

【答案】解：

（2）$\lim\limits_{x \to \sqrt{3}}(x^2-3)=0$，$\lim\limits_{x \to \sqrt{3}}(x^2+1)=4 \neq 0$，

$\lim\limits_{x \to \sqrt{3}}\frac{x^2-3}{x^2+1}=\frac{0}{4}=0.$

八、两类重要极限

1. $\lim\limits_{x \to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$

2. $\lim\limits_{x \to \infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$ 或 $\lim\limits_{x \to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$。

注意：上述两个重要极限的模式可看作为 $\lim\limits_{f(x) \to 0}\frac{\sin f(x)}{f(x)}=1$，$\lim\limits_{f(x) \to \infty}(1+\frac{1}{f(x)})^{f(x)}=e$ 或 $\lim\limits_{f(x) \to 0}(1+f(x))^{\frac{1}{f(x)}}=e$。

讲解归纳与举例

例：【计算题】计算极限 $\lim\limits_{x \to 0}(\frac{2-x}{2})^{\frac{2}{x}}$

【答案】

解：

$\lim\limits_{x\to 0}(\frac{2-x}{2})^{\frac{2}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}(1-\frac{x}{2})^{-\frac{2}{x}\cdot(-1)}=e^{-1}$。

九、无穷小量与无穷大量

1.无穷小与无穷大的概念

（1）无穷小量：

如果函数$f(x)$当$x\to x_0$(或$x\to\infty$)时的极限为零，那么称函数$f(x)$为当$x\to x_0$(或$x\to\infty$)时的无穷小。

（2）无穷大量：

如果函数 $f(x)$当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时，对应的函数值的绝对值$|f(x)|$无限增大，那么称函数 $f(x)$为当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时的无穷大。

讲解归纳与举例

例：【单选题】当$x\to 0$时，变量(　　)是无穷小量。

A。$\frac{1}{x}$　　B。$\frac{\sin x}{x}$

C。$e^x-1$　　D。$\frac{x+1}{x^2}$

【正确答案：C】

【答案解析】：无穷小量就是极限为 0 的量$\lim\limits_{x\to 0}(e^x-1)=0$

2.无穷小的性质

（1）有限个无穷小的和、差、积仍为无穷小量。

（2）有界函数与无穷小量之积仍为无穷小量。

（3）若$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)=A$，则$f(x)=A+\alpha$，且$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\alpha=0$。

推论：常数与无穷小的乘积是无穷小；

有限个无穷小的乘积也是无穷小。

讲解归纳与举例

例：【填空题】$\lim\limits_{x\to 0}x^2\sin\frac{1}{x}$为________。

【正确答案：0】

【答案解析】：$\sin\frac{1}{x}$是有界函数，$\lim\limits_{x\to 0}x^2=0$，

有界函数与无穷小的乘积还是无穷小，所以$\lim\limits_{x\to 0}x^2\sin\frac{1}{x}=0$。

3.无穷小量与无穷大量的关系

在自变量的同一变化中，如果 $f(x)$为无穷大，则$\frac{1}{f(x)}$为无穷小；反之，如果$f(x)$为无穷小，且 $f(x)\neq 0$，则$\frac{1}{f(x)}$为无穷大。

4.无穷小量的阶的比较

设函数 $f(x)$和 $g(x)$是在自变量 x 同一变化过程中的无穷小量，即 $\lim f(x)=0$，$\lim g(x)=0$，且 $\lim\frac{f(x)}{g(x)}=A$。

（1）若 $A=0$，则称 $f(x)$是比 $g(x)$高阶的无穷小量，记作 $f(x)=o[g(x)]$；

（2）$A=\infty$，则称 $f(x)$是比 $g(x)$低阶的无穷小量；

（3）$A=C\neq 0$，1，则称 $f(x)$与 $g(x)$是同阶无穷小量；

（4）$A=1$，则称 $f(x)$与 $g(x)$时等价无穷小，记作 $f(x)\sim g(x)$。

5.无穷小的等价代换

设函数 f（x），g（x），h（x)是自变量 x 在同一变化过程中的无穷小量，且有 f（x)～g（x)，

（1）若 limf（x)h（x)=A，则 limg（x)h（x)=A

（2）若 $\lim\frac{h(x)}{f(x)}=B$，则 $\lim\frac{h(x)}{g(x)}=B$

常用等价无穷小，当$x\to 0$ 时：

（1）$x\sim\sin x\sim\tan x\sim\arcsin x\sim\arctan x\sim e^x-1\sim\ln(1+x)$

（2）$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$

（3）$(1+x)^\mu-1\sim\mu x$

十、函数在一点处的连续

1.函数在一点处连续的定义

定义 1：设函数 $y=f(x)$在点$x_0$的某个邻域内有定义，如果当自变量的改变量$\Delta x$(初值为$x_0$)趋近于 0 时，相应的函数改变量$\Delta y$ 也趋近于 0，即

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0,$$

则称函数 $y=f(x)$在点$x_0$处连续。

定义 2：设函数$y=f(x)$在点$x_0$的某个邻域内有定义，如果当$x\to x_0$时，函数$f(x)$的极限值存在，且等于$x_0$处的函数值$f(x_0)$，即

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，

则称函数 $y=f(x)$在点$x_0$处连续。

2. 左连续与右连续

设函数 $y=f(x)$，如果$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$，则称函数 $f(x)$在点$x_0$处左连续；如果$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$，则称函数 $f(x)$在点$x_0$处右连续。

3. 函数在一点连续的充要条件

函数 $y=f(x)$在点 $x_0$处左右都连续。

讲解归纳与举例

例：【计算题】设函数$f(x)=\begin{cases}-1,x<-1\\ x^2,-1\le x\le 1\\ 1,x>1\end{cases}$，求$f(x)$在$x=1$和$x=-1$处的连续性。

【答案】

解：$\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}x^2=1$，$\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}1=1$，$\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=f(1)$，$f(x)$在 $x=1$处连续。

同理，可求得 $f(x)$在 $x=-1$处是不连续的。

4. 函数在一点处连续与极限存在的关系

若函数 $f(x)$在点 $x_0$处连续，则 $f(x)$在点 $x_0$必有极限，但反之不成立。

5. 函数在一点处连续的性质

（1）四则运算连续性

设函数 $f(x)$和 $g(x)$在点$x_0$处连续，则它们的和(差)$f\pm g$、积 $f\cdot g$ 及商$\frac{f}{g}$(当 $g(x_0)\neq 0$ 时)都在点$x_0$连续。

（2）复合函数连续性

设函数 $u=g(x)$当 $x\to x_0$时极限存在且等于 a，即$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=a$，而函数 $y=f(u)$在点 $u=a$ 连续，那么复合函数 $y=f[g(x)]$当 $x\to x_0$时极限存在且等于 $f(a)$，即$\lim\limits_{x\to x_0}f[g(x)]=\lim\limits_{u\to a}f(u)=f(a)$。

（3）基本初等函数在它们的定义域内都是连续的。

（4）初等函数在其定义区间内为连续函数。

十一、函数在区间上的连续

1. 闭区间上连续函数的性质

（1）有界性定理：设函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，则 $f(x)$在$[a,b]$必有界。

（2）最大值与最小值定理：设函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，则 $f(x)$在$[a,b]$上必取得最大值和最小值。即存在$x_1,x_2\in[a,b]$，使得 $f(x_1)=m$，$f(x_2)=M$，且对任意的 $x\in[a,b]$，有 $m\leq f(x)\leq M$。

这里 m、M 分别称为 $f(x)$在$[a,b]$上的最小值与最大值。

（3）零点定理：设函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，且 $f(a)\cdot f(b)<0$，则在$(a,b)$内部至少存在一点$\varepsilon$，使得 $f(\varepsilon)=0$，则称点$\varepsilon$为函数 $f(x)$的零点。

（4）介值定理：设函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，且 $f(a)\neq f(b)$，而$\mu$是介于 $f(a)$与 $f(b)$之间的任意一个数，则在开区间$(a,b)$内至少存在一点$\varepsilon$，使得 $f(\varepsilon)=\mu$。

十二、函数间断点分类

1. 函数间断点的概念

设函数 $f(x)$在点$x_0$的某去心邻域内有定义，若函数 $f(x)$在点$x_0$不连续，则称$x_0$为函数 $f(x)$的间断点。

2. 间断点的分类

分类：若$x_0$是 $f(x)$的间断点，而 $f(x)$在$x_0$的左、右极限分别存在(包括相等或不等)，则称$x_0$为 $f(x)$的第一类间断点；若$x_0$是 $f(x)$的间断点，而 $f(x)$在$x_0$的左、右极限中至少有一个不存在，则称$x_0$为 $f(x)$的第二类间断点。

第一类间断点：

（1）可去间断点：如果$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，而 $f(x)$在$x_0$没有定义或者 $f(x_0)\neq A$。

（2）跳跃间断点：如果 $f(x)$在$x_0$的左、右极限分别存在，但并不相等，即$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$。

第二类间断点包括无穷间断点和振荡间断点。

当 $x\to x_0^-$或 $x\to x_0^+$时，函数 $f(x)\to\infty$，则称$x_0$为函数 $f(x)$的无穷间断点，如 $x=0$ 是 $f(x)=\frac{1}{x}$的无穷间断点；当 $x\to x_0$时，函数 $f(x)$的极限不存在，呈上下振荡情形，则称$x_0$为函数 $f(x)$的振荡间断点，如 $x=0$ 是 $f(x)=\sin\frac{1}{x}$的振荡间断点。

讲解归纳与举例

例：【填空题】函数$f(x)=\frac{x}{1+\frac{1}{x}}$的间断点是________。

【正确答案：$\mathrm{x}=0$，$\mathrm{x}=-1$】

【答案解析】：函数的间断点即为没有定义的点，函数$\mathrm{f(x)}=\frac{\mathrm{x}}{1+\frac{1}{\mathrm{x}}}$没有定义的点为$\mathrm{x}=0$，$\mathrm{x}=-1$.则函数$\mathrm{f(x)}=\frac{\mathrm{x}}{1+\frac{1}{\mathrm{x}}}$的间断点是$\mathrm{x}=0$，$\mathrm{x}=-1$.

例：【计算题】设函数$f(x)=\begin{cases}2x-1, x\le 1\\ 4-5x, x>1\end{cases}$，判断$x=1$是函数的哪一类型的间断点？

【答案】解：

$\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(2x-1)=1$，$\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(4-5x)=-1$，$\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)$，所以$x=1$是第一类间断点，为跳跃间断点。

## 第二章 一元函数微分学

### 一、导数的概念

1. 函数在一点处可导的定义

设函数$y=f(x)$在点$x_0$的某一邻域内有定义，给自变量$x$一增量$\Delta x$，对应函数$f(x)$的增量为$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$，

若极限$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$存在，该极限值称为函数$y=f(x)$在点$x_0$处的导数，记做$y'\big|_{x=x_0}$，$f'(x_0)$，$\frac{dy}{dx}\big|_{x=x_0}$，$\frac{df(x)}{dx}\big|_{x=x_0}$等。

若上面的极限不存在，则称函数$f(x)$在点$x_0$处不可导。

导数定义的另外等价形式有：

$f'(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}(\Delta x=h)$，或者$f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}(x=x_0+\Delta x)$。

讲解归纳与举例

例：【填空题】设函数$f(x)$在点$x=1$处可导，则$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(1-x)-f(1+2x)}{x}=$ ________。

【答案】解：

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(1-x)-f(1+2x)}{x}=-\lim_{x\to 0}\frac{f(1-x)-f(1)}{-x}-2\lim_{x\to 0}\frac{f(1+2x)-f(1)}{2x}$$
$$=-f'(1)-2f'(1)=-3f'(1)$$

2. 左右导数的定义

设函数 $y=f(x)$在点$x_0$及其左侧邻域内有定义，若极限

$$\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

存在，则称该极限值为在 $y=f(x)$在点$x_0$处的左导数，记做$f_-'(x_0)$。同理，可以定义右导数为$f_+'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$。

3. 函数在一点处可导的充分必要条件

函数 $y=f(x)$在点$x_0$处可导的充分必要条件是函数 $f(x)$在点$x_0$处的左、右导数都存在且相等。

讲解归纳与举例

例：【计算题】设函数$f(x)=\begin{cases}\frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}, x\neq 0\\ 0, x=0\end{cases}$，判断函数在$x=0$处是否可导。

【答案】

解：

左导数：$\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}-0}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{1+0}=1$，

右导数：$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}-0}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{1+\infty}=0$，

左导数≠右导数，则函数 $f(x)$在 $x=0$ 处不可导。

4. 可导与连续的关系

（1）若函数 $y=f(x)$在点$x_0$处可导，则函数 $f(x)$在点$x_0$处必定连续。

（2）若函数 $y=f(x)$在点$x_0$处连续，则函数 $f(x)$在点$x_0$处未必可导。

（3）若函数 $y=f(x)$在点$x_0$处不连续，则函数 $f(x)$在点$x_0$处一定不可导。

例如，$y=f(x)=|x|$，在点 $x=0$ 处连续，却不可导。

5. 函数在区间$(a，b)$内可导的定义

若函数 $y=f(x)$在区间$(a，b)$内每一点都可导，则称函数在区间$(a，b)$内可导。而当 x 在区间$(a，b)$内变动时，其导数构成了的 x 函数，叫做函数 $f(x)$的导函数，简称导数，记做 $y'$，$f'(x)$，$\frac{dy}{dx}$或$\frac{df}{dx}$。

6. 导数的几何意义

函数 $y=f(x)$在点$x_0$处导数 $f'(x_0)$在几何上表示曲线 $y=f(x)$在点 $M(x_0，f(x_0))$处的切线斜率，即 $f'(x_0)=\tan\alpha$，其中$\alpha$是切线的倾角。

如果 $y=f(x)$在点$x_0$处的导数为无穷大，这时曲线 $y=f(x)$的割线以垂直于 x 轴的直线 $x=x_0$为极限位置，即曲线 $y=f(x)$在点 $M(x_0，f(x_0))$处具有垂直于 x 轴的切线 $x=x_0$。

曲线 $y=f(x)$在点 $M(x_0,y_0)$处的切线方程为 $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$。法线方程为 $y-f(x_0)=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$。

讲解归纳与举例

例：【计算题】求函数$y=\ln x$在点$(e，1)$处的切线方程。

【答案】解：

$y'=\frac{1}{x}$，则切线斜率 $k=y'\big|_{x=e}=\frac{1}{e}$

所求切线为 $y-1=\frac{1}{e}(x-e)=\frac{1}{e}x-1$，化简得 $y=\frac{1}{e}x$，则函数 $y=\ln x$ 在点$(e,1)$处的切线方程为 $y=\frac{1}{e}x$。

7. 高阶导数

一般地，函数 $y=f(x)$的导数 $y'=f'(x)$仍然是 x 的函数。我们把 $y'=f'(x)$的导数叫做函数 $y=f(x)$的二阶导数，记做 $y''$，或 $f''(x)$，或$\frac{d^2y}{dx^2}$等。

类似地，二阶导数的导数，叫做三阶导数，三阶导数的导数叫做四阶导数，……，一般

地，$n-1$ 阶导数的导数叫做 n 阶导数，分别记做$y^{(n)}$，$f^{(n)}(x)$，$\frac{d^n y}{dx^n}$等。

二阶及二阶以上的导数统称高阶导数。$y'$称为一阶导数，$y'',y''',y^{(4)},\cdots,y^{(n)}$都称为高阶导数。

讲解归纳与举例

例：【计算题】设函数$y=2x^3+x^2+3x+1$，求$y''$。

【答案】解：

$y'=6x^2+2x+3$，则 $y''=12x+2$

二、求导方法

1. 基本初等函数的求导公式

（1）$C'=0$

（2）$(x^u)'=ux^{u-1}$

（3）$(\sin x)'=\cos x$

（4）$(\cos x)'=-\sin x$

（5）$(\tan x)'=\sec^2 x$

（6）$(\cot x)'=-\csc^2 x$

（7）$(\sec x)'=\sec x\tan x$

（8）$(\csc x)'=-\csc x\cot x$

（9）$(a^x)'=a^x\ln a$（$a>0$，且$a\neq 1$）

（10）$(e^x)'=e^x$

（11）$(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}$

（12）$(\ln x)'=\frac{1}{x}$

（13）$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

（14）$(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

（15）$(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}$

（16）$(\mathrm{arccot}\, x)'=-\frac{1}{1+x^2}$

2. 导数的四则运算

如果函数 $u = u(x)$及 $v = v(x)$在点 x 处可导具有导数，那么它们的和、差、积、商（除分母为零的点外）都在点 x 处可导，并且

（1）$(u \pm v)' = u' \pm v'$

（2）$(uv)' = u'v + uv'; (ku)' = ku'$（k 为常数）

（3）$(\frac{u}{v})' = \frac{u'v-uv'}{v^2}(v \neq 0)$

讲解归纳与举例

例：【计算题】求下列函数的导数

（1）$y = 5x^2 - 2^x + 3e^x + 3$；

（2）$y = x^3 + 4\cos x - \sin\frac{\pi}{2}$；

（3）$y = \frac{\sin x}{\cos x+1}$。

【答案】

解：

（1）$y' = 10x - 2^x\ln 2 + 3e^x$；

（2）$y' = 3x^2 - 4\sin x$；

（3）$y' = \frac{\cos x(\cos x+1)-\sin x(-\sin x+0)}{(\cos x+1)^2} = \frac{\cos^2 x+\cos x+\sin^2 x}{(\cos x+1)^2} = \frac{1}{\cos x+1}$。

3. 反函数的求导法则

如果函数 $x = f(y)$在某区间$I_y$内单调、可导且 $f'(y) \neq 0$，那么它的反函数 $y = f^{-1}(x)$在对应区间$I_x = \{x|x = f(y)，y \in I\}$内也可导，并且$[f^{-1}(x)]' = \frac{1}{f'(y)}$，或$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$。

讲解归纳与举例

例：【计算题】设函数$y = \arcsin x$，求$y'$。

【答案】解：

$\because y = \arcsin x$ 是 $x = \sin y$ 的反函数，

$\therefore y' = (\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

4. 复合函数的求导法则

如果 $u=g(x)$在点 x 可导，而 $y=f(u)$在点 $u=g(x)$可导，则复合函数 $y=f[g(x)]$在点 x 可导，且其导数为$\frac{dy}{dx}=f'(u)\cdot g'(x)$或$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$

复合函数的求导公式可以适用有限多次函数的复合。

讲解归纳与举例

例：【计算题】求下列函数的导数

（1）$y=\cos(x^3+1)$；

（2）$y=(x^5+x^3+1)^n$。

【答案】

解：

（1）$y'=-\sin(x^3+1)\cdot 3x^2=-3x^2\sin(x^3+1)$；

（2）$y'=n(x^5+x^3+1)^{n-1}\cdot(5x^4+3x^2)=n(5x^4+3x^2)(x^5+x^3+1)^{n-1}$

5. 隐函数的求导法

（1）显函数：形如 $y=f(x)$的函数称为显函数。

隐函数：由方程 $F(x,y)=0$ 所确定的函数称为隐函数。

（2）设 $y=f(x)$是由方程 $F(x,y)=0$ 所确定的隐函数。求 y'只需要、直接对方程 $F(x,y)=0$ 关于 x 求导，将 y 当成中间变量，以复合函数链式法则求之（也可以用多元函数的隐函数求导法）。

讲解归纳与举例

例：【计算题】求由方程$xy+3x^2-5y-7=0$ 所确定的隐函数 $y=f(x)$的导数。

【答案】

解：

方程两边对 x 求导得：$y+xy'+6x-5y'=0$，

解得 $y'=\frac{-y-6x}{x-5}$

例：【计算题】求由方程$xy=e^{x+y}$所确定的隐函数$y=f(x)$的导数

【答案】

解：

对方程两边对 x 求导得：$y + xy' = e^{x+y}(1 + y')$，

解得 $y' = \frac{e^{x+y} - y}{x - e^{x+y}}$。

6. 对数求导法

适用于求幂指函数 $y = [u(x)]^{v(x)}$ 的导数，可先将函数表达式两端取自然对数，并利用对数相关性质将表达式简化，再利用隐函数的求导法将等号两端关于自变量进行求导，最后得出函数的导数，这称为对数求导法。

讲解归纳与举例

例：【计算题】设函数 $y = x^x$，求 $y'$。

【答案】

解：

方程两边同时取对数得：$\ln y = \ln x^x = x\ln x$，

方程两边同时对 x 求导得：$\frac{y'}{y} = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$，

即 $y' = y(\ln x + 1)$，且 $y = x^x$，则 $y' = x^x(\ln x + 1)$

7. 由参数方程所确定的函数的导数

设 y 与 x 的函数关系是由参数方程$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$确定的，则称此函数关系所表达的函数为由参数方程所确定的函数。

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \text{或} \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

例：【计算题】设$\begin{cases} x = \ln(1 + t) \\ y = 2t^2 \end{cases}$，求$\frac{dy}{dx}$。

【答案】

解：$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{1+t}$，$\frac{dy}{dt} = 4t$，则$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = 4t \cdot (1 + t)$

8. 高阶导数求导公式及运算法则

（1）高阶导数求导公式

①$(a^x)^{(n)}=a^x\ln^n a$

②$(e^{ax})^{(n)}=a^n e^{ax}$

③$(\sin kx)^{(n)}=k^n\sin(kx+n\cdot\frac{\pi}{2})$

④$(\cos kx)^{(n)}=k^n\cos(kx+n\cdot\frac{\pi}{2})$

⑤$(\frac{1}{x+b})^{(n)}=(-1)^n\cdot\frac{n!}{(x+b)^{n+1}}$

⑥$[\ln(x+b)]^{(n)}=(-1)^{n-1}\cdot\frac{(n-1)!}{(x+b)^n}$

（2）高阶求导运算法则

①$(u\pm v)^{(n)}=u^{(n)}\pm v^{(n)}$

②$(cu)^{(n)}=cu^{(n)}$（其中 c 常数）

③莱布尼兹公式$(uv)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k u^{(n-k)}v^{(k)}$（其中$C_n^k=\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$）

三、微分

1.微分的定义

设函数 $y=f(x)$在某区间内有定义，在点$x_0$取一增量$\Delta x$，$x_0$及$x_0+\Delta x$ 在这区间内，如果函数的增量可表示为

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=A\Delta x+o(\Delta x)$$

其中A是不依赖于$\Delta x$ 的常数，那么称函数$y=f(x)$在点$x_0$是可微的，而$A\Delta x$ 叫做函数$y=f(x)$在点$x_0$相应于自变量增量$\Delta x$ 的微分，记做 dy，即 $dy=A\Delta x$。

2.微分的几何意义

当$\Delta y$ 是曲线 $y=f(x)$上的点的纵坐标的增量时，dy 就是曲线的切线上点的坐标的相应增量。当$|\Delta x|$很小时，$|\Delta y-dy|$比$|\Delta x|$小得多，因此在点 M 的附近，我们可以切线段来近似代替曲线段。（即 $dy=\Delta y$）。

3.导数与微分的区别与联系

（1）导数和微分在几何意义上的区别：

导数：是函数图像在某一点处的切线的斜率，也就是纵坐标变化率和横坐标变化率的比值。

微分：是指函数图像在某一点处的切线在横坐标取得增量$\Delta x$ 以后，纵坐标取得的增量$\Delta y$。

（2）可导与可微的联系

可导与可微是等价的，可导的函数一定可微分，可微分的函数一定可导。

4. 函数可微的充分必要条件

函数 $y=f(x)$在点$x_0$处可微的充分必要条件是函数 $y=f(x)$在点$x_0$处可导，且当 $y=f(x)$在点$x_0$处可微时，其微分是$dy|_{x=x_0}=f'(x_0)dx$

5. 可微与连续的关系

函数在某一点处可微，则一定在该点处连续。

6. 一阶微分形式不变性

对于函数 $y=f(u)$，无论 u 是自变量还是中间变量，其一阶微分都具有形式 $dy=f'(u)du$

讲解归纳与举例

例：【计算题】设函数$y=\ln(1+e^{x^2})$，求$dy$。

【答案】

解：$y'=\frac{1}{1+e^{x^2}}\cdot e^{x^2}\cdot 2x=\frac{2xe^{x^2}}{1+e^{x^2}}$，则 $dy=\frac{2xe^{x^2}}{1+e^{x^2}}dx$

7. 微分法则

（1）基本初等函数的微分公式

$d(x^u)=ux^{u-1}dx$

$d(\sin x)=\cos xdx$

$d(\cos x)=-\sin xdx$

$d(\tan x)=\sec^2 xdx$

$d(\cot x)=-\csc^2 xdx$

$d(\sec x)=\sec x\tan xdx$

$d(\csc x)=-\csc x\cot xdx$

$d(a^x)=a^x\ln adx$

$d(e^x)=e^xdx$

$d(\log_a x)=\frac{1}{x\ln a}dx$

$d(\ln x)=\frac{1}{x}dx$

$d(\arcsin x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

$\mathrm{d}(\arccos x)=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$

$\mathrm{d}(\arctan x)=\dfrac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$

$\mathrm{d}(\mathrm{arccot} x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$

（2）函数和、差、积、商的微分法则

$\mathrm{d}(u\pm v)=\mathrm{d}u\pm \mathrm{d}v$；

$\mathrm{d}(Cu)=C\mathrm{d}u$；

$\mathrm{d}(u\cdot v)=v\mathrm{d}u\pm u\mathrm{d}v$；

$\mathrm{d}(\frac{u}{v})=\frac{v\mathrm{d}u-u\mathrm{d}v}{v^2}(v\neq 0)$。

四、0/0 型未定式极限

若函数 f(x)，g(x)满足：

（1）$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$；

（2）在点$x_0$的去心邻域上两者都可导，且 $g'(x)\neq 0$；

（3）$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$存在，则$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$。

五、∞/∞型未定式极限

若函数 f(x)，g(x)满足：

（1）$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\infty$；

（2）在点$x_0$的去心邻域上两者都可导，且 $g'(x)\neq 0$；

（3）$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$存在，则$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$。

六、其他类型未定式极限

1. $0\cdot\infty$；$\infty-\infty$型

$0\cdot\infty$；$\infty-\infty$型可变换成$\frac{0}{0}$或$\frac{\infty}{\infty}$型，再使用洛必达法则求解

2. $\infty^0$、$0^0$、$1^\infty$型可先取对数再取倒数变换成$\frac{0}{0}$或$\frac{\infty}{\infty}$型，再使用洛必达法则求解

讲解归纳与举例

例：【计算题】计算下列函数的极限

（1）$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2+2x+2}{x^2+x+1}$；

（2）$\lim\limits_{x\to 1}(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x})$；

【答案】

解：

（1）根据洛必达法则得：$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2+2x+2}{x^2+x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6x+2}{2x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6}{2}=3$

（2）$\lim\limits_{x\to 1}(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x})=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x\ln x-(x-1)}{(x-1)\ln x}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x}{\ln x+\frac{x-1}{x}}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{2}$

七、函数单调性的判定

设函数 y= f(x)在[a，b]上连续，在(a，b)内可导：

（1）如果在(a，b)内 f'(x) ＞0，则函数 y= f(x)在[a，b]上单调增加；

（2）如果在(a，b)内 f'(x) ＜0，则函数 y= f(x)在[a，b]上单调减少。

讲解归纳与举例

例：【计算题】求函数$y=2x^2+4x+1$的单调区间。

【答案】解：

$y'=4x+4$，令 $y'>0$ 解得 $x>-1$，令 $y'<0$ 解得 $x<-1$，则函数的单调增区间为$(-1,+\infty)$，单调减区间为$(-\infty,-1)$。

八、函数的极值和驻点

1.函数极值的定义

设函数 f(x)在点$x_0$的某个邻域内定义，对于去心邻域内的任一 x，若

（1）$f(x)<f(x_0)$，则称点$x_0$为函数的极大值点，$f(x_0)$为函数的极大值；

（2）$f(x)>f(x_0)$，则称点$x_0$为函数的极小值点，$f(x_0)$为函数的极小值。

极大值点与极小值点统称极值点，极大值与极小值统称极值。

2.函数的驻点

使得函数的导数值为零的点，称为函数的驻点，即 $f'(x_0)=0$，$x=x_0$为驻点。

3.函数取得极值的必要条件和充分条件

（1）必要条件

设 $f(x)$在$x_0$处可导，且在$x_0$处取得极值，那么 $f'(x_0)=0$。

（2）第一充分条件

设函数 $f(x)$在点$x_0$处连续，且在$x_0$的某去心邻域内可导。

①$x<x_0$时，$f'(x)>0$；$x>x_0$时，$f'(x)<0$，则 $f(x_0)$为极大值。

② $x<x_0$时，$f'(x)<0$；$x>x_0$时，$f'(x)>0$，则 $f(x_0)$为极小值。

③若 $f'(x)$在$x_0$点两侧符号相同，则$x_0$点不是 $f(x)$的极值点。

（3）第二充分条件

设函数 $f(x)$在$x_0$处具有二阶导数，且 $f'(x_0)=0$，$f''(x_0)\neq 0$，那么

①当 $f''(x_0)<0$ 时，函数 $f(x)$在$x_0$处取极大值。

② 当 $f''(x_0)>0$ 时，函数 $f(x)$在$x_0$处取极小值。

③当 $f''(x_0)=0$ 时，无法判断$x_0$是否为 $f(x)$的极值点。

4.函数极值的求法

利用导数来判定函数 $f(x)$的极值点，并求得极值，步骤如下：

（1）求出函数 $f(x)$的定义域。

（2）求出函数的一阶导数 $f'(x)$，在定义域内，找出一阶导数值为零的点以及不可导点。

（3）判断上述两类点两侧$f'(x)$的符号。利用极值的第一充分条件判定其是否为函数的极值点，若是，代入函数$f(x)$，求得极值。

（4）如果容易求得驻点处的二阶导数，可利用极值的第二充分条件判定其是否为函数的极值点，若是，代入函数 $f(x)$，求得极值。

讲解归纳与举例

例：【计算题】求函数$f(x)=x+\sqrt{1-x}$的极值。

【答案】

解：

函数 $f(x)$的定义域为$(-\infty,1]$，$f'(x)=1-\frac{1}{2\sqrt{1-x}}$，令 $f'(x)=0$ 解得 $x=\frac{3}{4}$，且 $x=1$ 为导数不存在的点，$x=1$ 为函数定义域的右端点，不存在右邻域，则不是极值点，$f''(x)=-\frac{1}{4(1-x)^{\frac{3}{2}}}$，则 $f''(\frac{3}{4})=-2<0$，根据极值的第二充分条件可知，$x=\frac{3}{4}$为函数的极大值点，对应的函数值为极大值，所以函数的极大值为 $f(\frac{3}{4})=\frac{3}{4}+\sqrt{1-\frac{3}{4}}=\frac{5}{4}$。

九、函数的最值

1.函数的最大值和最小值的定义

设函数 $y=f(x)$在闭区间$[a,b]$上有定义，$x_0\in[a,b]$，若对于任意 $x\in[a,b]$，恒有

$$f(x)\le f(x_0)(f(x)\ge f(x_0))$$

则称 $f(x_0)$为函数 $y=f(x)$在闭区间$[a,b]$上的最大（小）值，称$x_0$为 $f(x)$在$[a,b]$上的最大（小）值点

2.函数最大值和最小值的求法

假设函数在闭区间$[a,b]$上连续，则 $f(x)$在闭区间[a，b]上一定取得最大值和最小值（最值定理）。

所以可用如下方法求 $f(x)$在闭区间[a，b]上的最值：

（1）求出 $f(x)$在(a, b)内的驻点及不可导点

（2）计算 $f(x)$在各个驻点和不可导点的函数值及 $f(a)$，$f(b)$

（3）比较（2）中诸值的大小，得出的最大值即为 $f(x)$在$[a,b]$上的最大值，得出的量小值即为 $f(x)$在[a，b]上的最小值

十、曲线的凹凸性和拐点

1.曲线凹凸性的定义

如果在某区间内，曲线弧位于曲线上任意一点的切线的上方，则称曲线在这个区间内是凹的；如果在某区间内，曲线弧位于曲线上任意一点的切线的下方，则称曲线在这个区间内是凸的。

几何意义：设函数 $y=f(x)$在(a，b)内可导，若可导区间上的任意两点的连线总在该线段所对应的曲线弧的上方，则称此函数在(a，b)内是凹的；反之，若可导区间上的任意两点的连线总在该线段所对应的曲线弧的下方，则称此函数在(a，b)内是凸的。

2.曲线凹凸性的判定

设 $f(x)$在[a，b]上连续，在(a，b)内具有一阶导数和二阶导数，那么

（1）若在(a，b)内 $f''(x)>0$，则 $f(x)$在[a，b]上的图形是凹的。

（2）若在(a，b)内 $f''(x)<0$，则 $f(x)$在[a，b]上的图形是凸的。

3.曲线的拐点

连续曲线 $y=f(x)$上凹弧和凸弧的分界点，称为曲线的拐点。

4.曲线拐点的判定

对于在(a，b)内的连续曲线弧 $y = f(x)$，判定拐点的一般方法是：

（1）求出二阶导数 $f''(x)$。

（2）求使二阶导数为零的点和使二阶导数不存在的点。

（3)判定上述各点两侧，函数的二阶导数是否异号，如果 $f''(x)$在$x_0$的两侧异号，则$(x_0，f(x_0))$为曲线弧 $y = f(x)$的拐点。

讲解归纳与举例

例：【计算题】求曲线$y = 3x^4 - 4x^3 + 1$ 的凹凸区间及拐点坐标。

【答案】

解：

函数 $y = 3x^4 - 4x^3 + 1$ 的定义域为$(-\infty, +\infty)$，$y' = 12x^3 - 12x^2, y'' = 36x^2 - 24x = 36x(x - \frac{2}{3})$，令 $y'' = 0$，解得 $x = 0$ 和 $x = \frac{2}{3}$，当 $x < 0$ 时 $y'' > 0$，当 $0 < x < \frac{2}{3}$时，$y'' < 0$，当 $x > \frac{2}{3}$时 $y'' > 0$，综上所述，曲线的凹区间为$(-\infty, 0) \cup (\frac{2}{3}, +\infty)$，凸区间为$(0, \frac{2}{3})$，$x = 0$ 和 $x = \frac{2}{3}$左右两侧邻域都异号，即有两个拐点，当 $x = 0$ 时，$f(0) = 1$，当 $x = \frac{2}{3}$时，$f(\frac{2}{3}) = \frac{11}{27}$，即拐点坐标为$(0,1)$和$(\frac{2}{3}, \frac{11}{27})$。

十一、曲线的渐近线

1. 曲线渐近线的定义

如果曲线上一点沿着曲线趋于无穷远时，该点与某条直线的距离趋于零，则称此直线为曲线的渐近线。

2. 渐近线分类

（1）水平渐近线

如果 $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A$ 或 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$（A 为常数），则 $y = A$ 是函数 $y = f(x)$的水平渐近线。

2. 铅直渐近线

如果 $\lim\limits_{x \to {x_0}^+} f(x) = \infty$或 $\lim\limits_{x \to {x_0}^-} f(x) = \infty$，则 $x = x_0$为函数 $y = f(x)$的铅直渐近线。

讲解归纳与举例

例：【计算题】求曲线$f=f(x)=\frac{x^2+x+3}{2x^2+1}$的水平渐近线

【答案】

解：

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+x+3}{2x^2+1}=\frac{1}{2}$，则曲线的水平渐近线为$y=\frac{1}{2}$。

## 第三章 一元函数积分学

一、不定积分的概念

1.原函数

如果在区间$I$上，可导函数$F(x)$的导数为$f(x)$，即$x\in I$时

$$F'(x)=f(x)$$

则称函数$F(x)$为$f(x)$在$I$上的一个原函数。

2.原函数的性质

（1)若$F(x)$为函数$f(x)$在某区间上的原函数，则$F(x)+C$也为函数$f(x)$在该区间上的原函数，其中$C$为任意常数。

（2）若$F(x)$和$G(x)$都是函数$f(x)$在某区间上的原函数，则$F(x)-G(x)=C$（$C$为任意常数）。

（3）若$F(x)$为函数$f(x)$在某区间上的一个原函数，则$F(x)+C$为函数$f(x)$在该区间上的所有原函数，其中$C$为任意常数。

3.不定积分的概念

在区间$I$内上，$f(x)$的所有原函数称为$f(x)$的不定积分，记做

$$\int f(x)\,dx$$

讲解归纳与举例

【例 1】已知$F$（$x$）是函数$f$（$x$）的一个原函数，则$\int f$（2x）$dx$=（　）

A。$F$（$x$）+$C$

B。$F$（$2x$）+$C$

C。$\frac{1}{2}$F（2x）$+$ C

D。$\frac{1}{2}$f（2x）$+$ C

答案：C

解析：因为$[\frac{1}{2}F(2x)+C]'=\frac{1}{2}f(2x)2=f(2x)$，所以$\int f(2x)dx=\frac{1}{2}F(2x)+C$。

4.原函数与不定积分的关系

原函数与不定积分是个别与全体的关系，或元素与集合的关系。

如果$F$（$x$）是$f$（$x$）的一个原函数，则

$$\int f(x)dx=F(x)+C$$

二、不定积分的性质

1. $\int kf(x)dx=k\int f(x)dx$ （$k$为不等于 0 的常数）。

2. $\int[f(x)\pm g(x)]dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx$

3.$(\int f(x)dx)'=f(x)$或$d(\int f(x)dx)=f(x)dx$。

4.$\int f'(x)dx=f(x)+C$或$\int df(x)=f(x)+C$。

讲解归纳与举例

【例 2】已知$F$（$x$）函数$f$（$x$）的一个原函数，下列式子中正确的是（ ）

A。$\int f'(x)dx=F(x)+C$

B。$[\int F(x)dx]'=f(x)$

C。$d[\int F(x)dx]=F(x)$

D。$[\int f(x)dx]'=f(x)$

答案：D

解析：A 项中$\int f'(x)dx=f(x)+C$；B 项中$[\int F(x)dx]'=F(x)$；C 项中$d[\int F(x)dx]=F(x)dx$；D 项中$[\int f(x)dx]'=[F(x)+C]'=f(x)$。

三、不定积分基本公式

常用的基本积分公式：

$$\int kdx = kx + C\text{（k 为常数）}$$

$$\int x^a dx = \frac{1}{a+1}x^{a+1} + C\text{（}a \neq -1\text{）}$$

$$\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = \int \csc^2 x\, dx = -\cot x + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \int \sec^2 x\, dx = \tan x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x + C$$

除了以上基本积分公式外，还有一下常用积分公式：

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = \arcsin\frac{x}{a} + C(a > 0)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C(a > 0)$$

$$\int \tan x\, dx = -\ln|\cos x| + C$$

$$\int \cot x\, dx = \ln|\sin x| + C$$

$$\int \frac{1}{\sin x}dx = \ln\left|\frac{1}{\sin x} - \cot x\right| + C$$

$$\int \frac{1}{\cos x}dx = \ln\left|\frac{1}{\cos x} + \tan x\right| + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$$

$$\int \frac{1}{x^2-a^2}dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$$

讲解归纳与举例

【例 3】求$\int (x^2+2x+3)\,dx$。

解：$\int (x^2+2x+3)\,dx=\int x^2dx+\int 2xdx+\int 3\,dx$

$$=\frac{1}{3}x^3+2\times\frac{1}{2}x^2+3x+C$$

$$=\frac{1}{3}x^3+x^2+3x+C。$$

四、第一换元积分法

1.第一换元积分法（凑微分法）

设$f(u)$具有原函数$F(u)$，$u=\varphi(x)$可导，$du=\varphi'(x)dx$，则$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)\,dx=\int f(u)\,du=F(u)+C=F[\varphi(x)]+C$。

（1）第一换元法是复合函数求导法则的逆运算，$\varphi'(x)dx=d[\varphi(x)]$也是微分运算的逆运算，目的是将$\varphi'(x)dx$凑成中间变量$u$的微分，转化成对中间变量的积分。

（2）第一换元法是一种非常灵活的计算方法，始终贯穿着“逆向思维”的特点因此对初学者较难适应，学生应熟悉一些基本例题。

2.常用的凑微分公式 （$a$，$b$均为常数，且$a\neq 0$）

$$dx=\frac{1}{a}d(ax+b)$$

$$xdx=\frac{1}{2a}d(ax^2+b)$$

$$x^a dx=\frac{1}{a(a+1)}d(ax^{a+1}+b)(a\neq -1)$$

$$\frac{1}{\sqrt{x}}dx=\frac{2}{a}d\left(a\sqrt{x}+b\right)$$

$$\frac{1}{x^2}dx=-\frac{1}{a}d\left(\frac{a}{x}+b\right)$$

$$\frac{1}{x}dx=d(\ln|x|+b)$$

$$e^x dx=d(e^x+b)$$

$$\cos dx=\frac{1}{a}d(a\sin x+b)$$

$$\sin dx=-\frac{1}{a}d(a\cos x+b)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=d(\arcsin x)=-d(\arccos x)$$

$$\frac{1}{1+x^2}dx = d(\arctan x) = -d（\text{arccot}x）$$

3.第一换元积分法的解题步骤

（1）换元：$f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx$的形式，令$u=\varphi(x)$，$du=\varphi'(x)dx$，于是有

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = \int f（u）du$$

（2）积分：计算$\int f（u）du = F（u）+C$

（3）还原：把$u=\varphi(x)$代入已求出的$F（u）+C$中，得到答案$F[\varphi(x)]+C$

讲解归纳与举例

【例 4】求$\int \tan x\,dx$

解：$\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = -\int \frac{1}{\cos x}d\cos x$

$$\overset{令u=\cos x}{=} -\int \frac{1}{u}du$$

$$= -\ln|u| + C$$

$$= -\ln|\cos x| + C。$$

五、第二换元积分法

1.第二换元积分法

设$x=\varphi(t)$是单调，可导的函数且$\varphi'(t)\neq 0$，又设$f[\varphi(t)]\varphi'(t)$有原函数$\phi(t)$，则

$$\int f（x）dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt = \phi(t) + C = \phi\left[\varphi^{-1}（x）\right] + C$$

2.第二换元法常用的基本类型

（1）无理代换

被积函数含有根式$\sqrt[n]{ax+b}$

可令$\sqrt[n]{ax+b} = t$，则$x = \frac{t^n - b}{a}$，可化为有理式的积分。

（2）三角代换

被积函数含有$\sqrt{a^2 - x^2}$（$a > 0$），

令 $x = a\sin t$（并约定 $t \in [-\frac{\pi}{2}，\frac{\pi}{2}]$）则$\sqrt{a^2 - x^2} = a\cos t$，

$dx = a\cos t dt$ 可将原积分化作三角有理函数的积分。

被积函数含有$\sqrt{a^2 + x^2}$（$a > 0$），

令 $x = a\tan t$，并约定 $t \in$（$-\frac{\pi}{2}$，$\frac{\pi}{2}$），则$\sqrt{a^2+x^2} = a\sec t$，

$dx = a\sec^2 t dt$ 可将原积分化作三角有理函数的积分。

被积函数含有$\sqrt{x^2-a^2}$（$a > 0$），当 $x \geq a$ 时，

令 $x = a\sec t$，并约定 $t \in [0$，$\frac{\pi}{2}$），则$\sqrt{x^2-a^2} = a\tan t$，

$dx = a\sec t\tan t dt$，当 $x \leq -a$ 时，可令 $u = -x$，则 $u \geq a$，将原积分化作三角有理函数的积分。

3.第二换元积分法的解题步骤

（1）换元：变量代换$x$=$\varphi(t)$

$$\int f（x） dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt$$

（2）积分：$f[\varphi(t)]\varphi'$（$t$）$dt$=$\phi(t)$+$C$

（3）还原：由$x$=$\varphi(t)$解出其反函数$t$=$\varphi$ˆ（−1）（$x$），代回去，即

$$\int f（x） dx = \phi(t) + C = \phi[\varphi^{-1}(x)] + C$$

讲解归纳与举例

【例 5】求$\int \frac{1}{2+\sqrt{x+1}}dx$。

解：令$\sqrt{x+1} = t$，则 $x = t^2 - 1$，$dx = 2tdt$，

$$\int \frac{1}{2+\sqrt{x+1}}dx = 2\int \frac{t}{2+t}dt = 2\int \frac{2+t}{2+t}dt - 2\int \frac{2}{2+t}dt = 2\int dt - 4\int \frac{1}{2+t}dt$$

$= 2t - 4\ln|2+t| + C = 2\sqrt{x+1} - 4\ln$（$2+\sqrt{x+1}$）$+ C$。

【例 6】求$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}dx$（$a > 0$）。

解：利用公式 $1+\tan^2 t = \sec^2 t$ 来消去根式$\sqrt{x^2+a^2}$，将积分转化为三角函数的积分，令 $x = a\tan t$，则 $dx = a\sec^2 t dt$，$\sqrt{x^2+a^2} = a\sec t$，

所以$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}dx = \int \frac{1}{a\sec t}\cdot a\sec^2 t dt = \int \sec t dt = \ln|\sec t + \tan t| + C_1$

$$= \ln\left|\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a} + \frac{x}{a}\right| + C_1$$

$$= \ln\left|x + \sqrt{x^2+a^2}\right| + C。$$

六、不定积分的分部积分法

1. 分部积分法

设函数$u$=$u$（$x$），$v$=$v$（$x$）具有连续的导函数，则有

$\int \mathrm{uv'}\,\mathrm{dx} = \mathrm{uv} - \int \mathrm{vu'}\,\mathrm{dx}$。或$\int \mathrm{u}\,\mathrm{dv} = \mathrm{uv} - \int \mathrm{v}\,\mathrm{du}$。

2. 分部积分法常用的基本类型

（1）被积函数为$\mathrm{x^n}$为指数（三角）函数的乘积，由于指数（三角）函数凑进$dx$仍是指数（三角）函数的微分，而对$\mathrm{x^n}$求导时，将使幂函数的次数降低。故对此类型一般是将$\mathrm{x^n}$作为$u$，把指数（三角）函数当作$v$，其“凑微分”的方法是：$\mathrm{e^{ax}dx} = \frac{1}{\mathrm{a}}\mathrm{d(e^{ax})}$，$\mathrm{cosaxdx} = \frac{1}{\mathrm{a}}\mathrm{d(sinax)}$，⋯

（2）被积函数为幂函数与对数（反三角）函数的乘积，由于$(\ln \mathrm{x})' = \frac{1}{\mathrm{x}}$，比$(\mathrm{arctanx})' = \frac{1}{1+\mathrm{x}^2}$不再是对数（反三角）函数，而幂函数“凑进”dx，$\mathrm{x^a dx} = \frac{1}{\mathrm{a+1}}\mathrm{d(x^{a+1})}$仍是幂函数，故对此类型一般是把对数（反三角）函数作为 u，把幂函数作为 v。

讲解归纳与举例

【例 6】求$\int \mathrm{xe^x}\,\mathrm{dx}$。

解：$\int \mathrm{xe^x}\,\mathrm{dx} = \int \mathrm{xde^x} = \mathrm{xe^x} - \int \mathrm{e^x}\,\mathrm{dx} = \mathrm{xe^x} - \mathrm{e^x} + \mathrm{C} = \mathrm{e^x}（\mathrm{x} - 1）+ \mathrm{C}$。

【例 7】求$\int \mathrm{x^2}\ln\mathrm{xdx}$。

解：$\int \mathrm{x^2 lnxdx} = \frac{1}{3}\int \mathrm{lnxdx^3} = \frac{1}{3}\mathrm{x^3lnx} - \frac{1}{3}\int \mathrm{x^3}\,\mathrm{dlnx}$

$$= \frac{1}{3}\mathrm{x^3lnx} - \frac{1}{3}\int \mathrm{x^3}\cdot\frac{1}{\mathrm{x}}\mathrm{dx}$$
$$= \frac{1}{3}\mathrm{x^3lnx} - \frac{1}{3}\int \mathrm{x^2dx}$$

$$= \frac{1}{3}x^3lnx - \frac{1}{9}x^3 + C。$$

七、一些简单有理函数的积分

1. 长除法

将假分式化为一个整式与真分式之和的方法——长除法。

2. 有理函数积分

分子和分母均为$x$的多项式的分式函数称为有理函数。

若被积函数不是有理真分式，要先将其化为多项式与有理真分式（分子自变量的最高次数小于分母）的和，其次要根据被积函数的特点，通过适当的恒等变形（加一项和减一项），将其分解为可求不定积分的简单函数后求积分。

讲解归纳与举例

【例 8】求$\int \frac{x+1}{x^2-5x+6}dx$。

解：$\frac{x+1}{x^2-5x+6}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3}=\frac{A(x-3)+B(x-2)}{(x-2)(x-3)}=\frac{(A+B)x-3A-2B}{(x-2)(x-3)}$,

通过系数比较得$\begin{cases} A+B=1 \\ -3A-2B=1 \end{cases}$，解得：$\begin{cases} A=-3 \\ B=4 \end{cases}$,

所以$\frac{x+1}{x^2-5x+6}=-\frac{3}{x-2}+\frac{4}{x-3}$,

则$\int \frac{x+1}{x^2-5x+6}dx=\int\left(-\frac{3}{x-2}+\frac{4}{x-3}\right)dx=-3\ln|x-2|+4\ln|x-3|+C$。

八、定积分的概念

设函数$y=f(x)$在区间$[a,b]$上有界，在$(a,b)$内任意插入$n-1$个分点

$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{i-1}<x_i<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$,

把区间$[a,b]$分成 n 个小区间

$[x_0,x_1]$，$[x_1,x_2]$，…，$[x_{i-1},x_i]$，…，$[x_{n-1},x_n]$,

各小区间的长度依次为：$\Delta x_1=x_1-x_0$，$\Delta x_2=x_2-x_1$，$\cdots\Delta x_n=x_n-x_{n-1}$

在每个小区间$[x_{i-1},x_i]$上任取一点$\varepsilon_i$（$x_{i-1}\le\varepsilon_i\le x_i$），作函数值$f(\varepsilon_i)$与小区间长度$\Delta x_i$的乘积$f(\varepsilon_i)\Delta x_i$（$i=1,2,\cdots,n$），并作出和$S=\sum_{i=1}^{n}f(\varepsilon_i)\Delta x_i$，记$\lambda\max\{\Delta x_1,\Delta x_2,\cdots,\Delta x_n\}$，如果不论对$[a,b]$怎样分法，也不论在小区间$[x_{i-1},x_i]$上点$\varepsilon_i$怎样取法，只要$\lambda\to 0$时，和 S 总趋于确定的极限 I，这时我们称这个极限 I 为函数$f(x)$在区间$[a,b]$上的定积分（简称积分），记作$\int_a^b f(x)dx$，即$\int_a^b f(x)dx=I=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\varepsilon_i)\Delta x_i$，其中$f(x)$叫做被积函数，$f(x)dx$叫做被积表达式，x 叫做积分变量，a 叫做积分下限，b 叫做积分上限，$[a,b]$叫做积分区间。

九、定积分的几何意义

1. 若在区间$[a,b]$上$f(x)>0$，则定积分$\int_a^b f(x)dx$的值为由曲线$y=f(x)$，直线$x=a$，

$x = b$，$y = 0$ 所围成图形即曲边梯形的面积(S)，即

$$\int_a^b f(x)\,dx = S$$

2. 若在区间$[a，b]$上 $f(x) < 0$，则定积分$\int_a^b f(x)\,dx$的值为由曲线 $y = f(x)$，直线 $x = a$，$x = b$，$y = 0$ 所围成图形即曲边梯形的面积(S)的相反数，即

$$\int_a^b f(x)\,dx = -S$$

3. 若在区间$[a，b]$上 $f(x)$ 的值有正有负，则定积分$\int_a^b f(x)\,dx$的值为由曲线 $y = f(x)$，直线 $x = a$，$x = b$，$y = 0$ 所围成封闭平面图形面积的代数和。

十、函数可积条件

1. 函数可积的充分条件

（1）设$f(x)$在区间$[a，b]$上连续，则$f(x)$在$[a，b]$上可积。

（2）设$f(x)$在区间$[a，b]$上有界，且只有有限个间断点，则$f(x)$在$[a，b]$上可积。

（3）设$f(x)$在区间$[a，b]$上单调有界，则$f(x)$在$[a，b]$上可积。

2. 函数可积的必要条件

设$f(x)$在区间$[a，b]$上可积，则$f(x)$在区间$[a，b]$上有界。

十一、定积分的性质

设 $f(x)$，$g(x)$ 在区间$[a，b]$上都是可积函数，则有

1. $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

2. $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

3. 被积函数的常数因子可以提到积分号外面，即

$$\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx \text{（k 是常数）}$$

4. 函数的和（差）的定积分等于它们定积分的和（差），即

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$$

5. 如果在区间$[a，b]$上，$f(x) = 1$，则

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b dx = b - a$$

6. 如果将积分区间分成两部分，则在整个区间上的定积分等于这两个部分区间上的定积分之和，即 $a < c < b$，则

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx$$

7. 如果在区间$[a,b]$上恒有$f(x)\geq 0$，则$\int_a^b f(x)\,dx\geq 0$。

8. 如果$f(x)$在区间$[a,b]$上的最大值和最小值分别是 M 和 m，则

$$m(b-a)\leq\int_a^b f(x)\,dx\leq M(b-a)$$

9. 设$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，则至少存在一点$\xi\in[a,b]$，使得

$$\int_a^b f(x)\,dx=f(\xi)(b-a)$$

讲解归纳与举例

【例 9】设$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}, & 0\leq x\leq 1\\ e^{-x}, & 1<x\leq 3\end{cases}$，求$\int_0^3 f(x)\,dx$。

解：因为$f(x)$在$[0,3]$上有界，且只有一个第一类间断点，故定积分$\int_0^3 f(x)\,dx$存在。根据定积分的对积分区间具有可加性，有

$$\begin{aligned}\int_0^3 f(x)\,dx&=\int_0^1 f(x)\,dx+\int_1^3 f(x)\,dx=\int_0^1\sqrt{x}\,dx+\int_1^3 e^{-x}dx\\&=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1+(-e^{-x})\Big|_1^3\\&=\frac{2}{3}+e^{-1}-e^{-3}。\end{aligned}$$

十二、定积分的计算方法

1. 变上限的定积分

若函数$f(x)$在区间$[a,b]$上可积，根据定积分的性质 6，对任意的$x\in[a,b]$，$f(x)$在$[a,x]$上也可积，于是有

$$\phi(x)=\int_a^x f(t)\,dt,\ x\in[a,b]$$

定义了一个以积分上限 x 为自变量的函数，称为积分上限的函数。

2. 变上限积分的求导

如果函数$f(x)$在区间$[a,b]$上连续，则变上限积分$\phi(x)=\int_a^x f(t)\,dt\,(a\leq x\leq b)$在$[a,b]$上可导，且它的导数是

$$\phi'(x)=\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt=f(x)\,(a\leq x\leq b)$$

讲解归纳与举例

【例 10】计算$\frac{d}{dx}\int_0^{x^2}\sqrt{1+t^2}\,dt$。

解：根据变上限定积分的算法可得：$\frac{d}{dx}\int_0^{x^2}\sqrt{1+t^2}\,dt=2x\sqrt{1+x^4}$。

3. 牛顿—莱布尼兹公式

如果函数 F（x）是连续函数 f（x）在区间$[a,b]$上的一个原函数，则

$$\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)$$

或记作

$$\int_a^b f(x)\,dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a)$$

4. 定积分的换元积分法

（1）凑微分

设函数 f（x）在区间$[a,b]$上连续，若函数 $x=\varphi(t)$满足：

①$\varphi(\alpha)=a$，$\varphi(\beta)=b$；

②$\varphi(t)$在$[\alpha,\beta]$（或$[\beta,\alpha]$）上单调且连续；

③$\varphi'(t)$在$[\alpha,\beta]$上连续则

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt$$

此方法为凑微分法。

（2）拆微分

换元公式也可以反过来使用，即

$$\int_a^b f[\varphi(x)]\varphi'(x)\,dx=\int_\alpha^\beta f(t)\,dt$$

（3）定积分与不定积分的区别

定积分：数值；

不定积分：函数。

5. 定积分的分部积分法

设函数 u（x），v（x）是区间$[a, b]$上的连续可导函数，则

$(uv)' = u'v + uv'$，故$\int_a^b (uv)' \, dx = \int_a^b u'v \, dx + \int_a^b uv' \, dx$，

$$\int_a^b u \, dv = (uv)|_a^b - \int_a^b v \, du$$

或$\int_a^b (uv)' \, dx = (uv)|_a^b - \int_a^b u'v \, dx$。

此公式称为定积分的分部积分公式。

讲解归纳与举例

【例 11】求$\int_0^1 x\ln(1 + x) dx$。

解：令 $u = \ln(1 + x)$，$v' = x = \left(\frac{x^2-1}{2}\right)'$，故由分部积分法得

$$\int_0^1 x\ln(1+x)dx = \int_0^1 \ln(1+x)\left(\frac{x^2-1}{2}\right)'dx$$
$$= \frac{x^2-1}{2}\ln(1+x)\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{1+x}\cdot\frac{x^2-1}{2}dx$$
$$= -\int_0^1 \frac{1}{2}(x-1)dx = \frac{1}{4}。$$

6. 奇偶函数在其对称区间上的定积分

设 $f(x)$是区间$[-a, a]$上的连续函数。

（1）若 $f(x)$是奇函数，则$\int_{-a}^a f(x)dx = 0$

（2）若 $f(x)$是偶函数，则$\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$

十三、无穷区间上的反常积分

定义：积分区间为无穷区间的积分称为无穷区间上的反常积分。

设函数 $f(x)$在区间$[a, +\infty]$上连续，取 $t > a$，如果极限$\lim\limits_{t\to+\infty}\int_a^t f(x) \, dx$ 存在，则称此极限为函数 $f(x)$在无穷区间$[a, +\infty]$上的反常积分，记作$\int_a^{+\infty} f(x) \, dx$，即$\int_a^{+\infty} f(x) \, dx = \lim\limits_{t\to+\infty}\int_a^t f(x) \, dx$ 这时也称反常积分$\int_a^{+\infty} f(x) \, dx$ 收敛；如果上述极限不存在，函数 $f(x)$在无穷区间$[a, +\infty]$上的反常积分$\int_a^{+\infty} f(x) \, dx$ 就没有意义，习惯上称反常积分$\int_a^{+\infty} f(x) \, dx$ 发散，这时记号$\int_a^{+\infty} f(x) \, dx$ 不在表示数值了。

类似地，设函数 $f(x)$在区间$(-\infty, b)$上连续，取 $t < b$，如果极限$\lim\limits_{t\to-\infty}\int_t^b f(x) \, dx$ 存在，

则称此极限函数 f(x)在区间$(-\infty，b)$上的反常积分，记作$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$，即$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{t\to-\infty}\int_{t}^{b} f(x)\,dx$

这时也称反常积分$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$ 收敛；如果上述极限不存在，就称反常积分$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$ 发散。

设函数在区间$(-\infty，+\infty)$上连续，如果反常积分$\int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx$ 和$\int_{0}^{+\infty} f(x)\,dx$ 都收敛，则称上述两反常积分之和为函数 f(x)在无穷区间$(-\infty，+\infty)$上的反常积分，记作$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$，即

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{+\infty} f(x)\,dx$$
$$= \lim_{t\to-\infty}\int_{t}^{0} f(x)\,dx + \lim_{t\to+\infty}\int_{0}^{t} f(x)\,dx$$

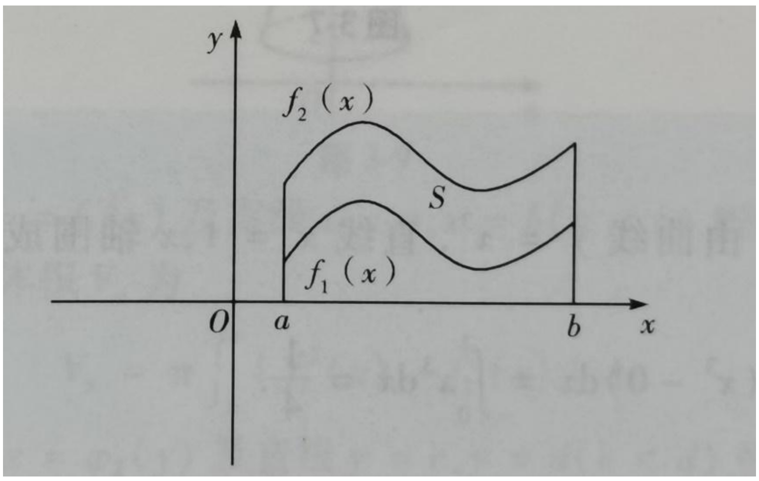
这时也称反常积分$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ 收敛；否则就称反常积分$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ 发散。

十四、定积分的应用—求平面图形的面积

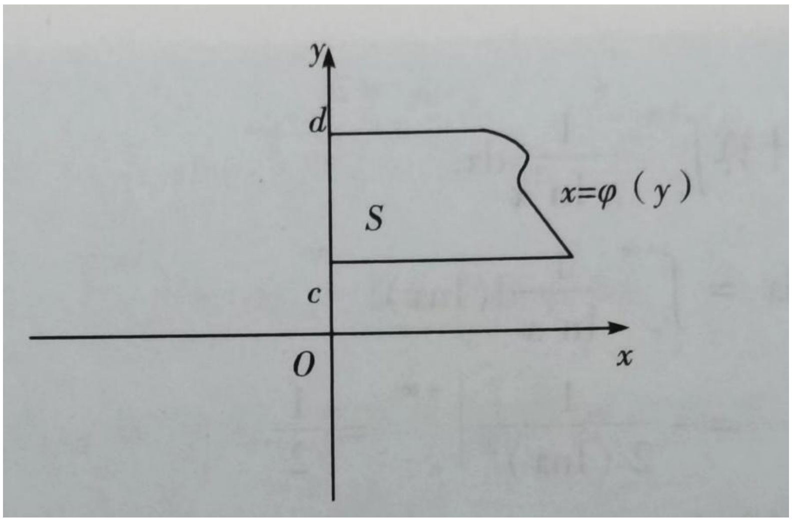
1. 由曲线 $y = f(x)$，直线 $x = a$，$x = b(a < b)$及 x 轴所围成的封闭平面图形的面积 S 为 $S = \int_{a}^{b} |f(x)|\,dx$。

2. 由曲线 $y = f_1(x)$，$y = f_2(x)\big(f_2(x) > f_1(x)\big)$及直线 $x = a$，$x = b(a < b)$所围成的封闭平面图形的面积 S 为

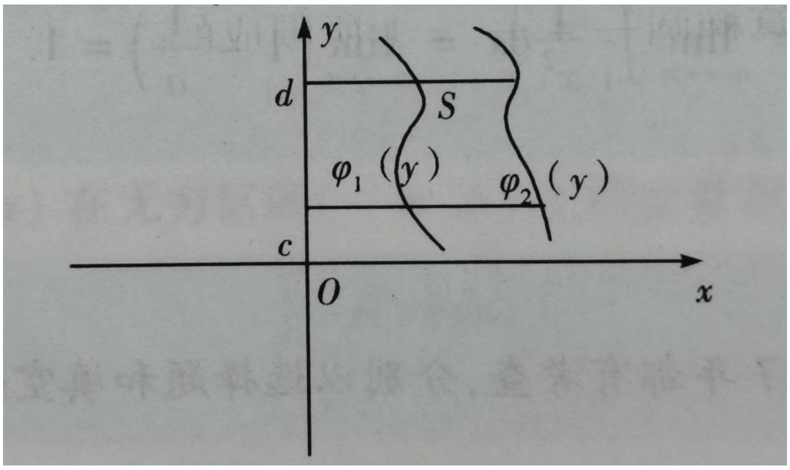
$$S = \int_{a}^{b} [f_2(x) - f_1(x)]\,dx$$




3. 由曲线 $x = \varphi(y)$，直线 $y = c$，$y = c(c < d)$及 y 轴所围成的封闭平面图形的面积 S 为 $S = \int_{c}^{d} |\varphi(y)|\,dy$




4. 由曲线 $x=\varphi_1(y)$，$x=\varphi_2(y)\left(\varphi_2(y)>\varphi_1(y)\right)$及直线 $y=c$，$y=c(c<d)$所围成的封闭平面图形的面积 S 为 $S=\int_c^d[\varphi_2(y)-\varphi_1(y)]\,dy$




讲解归纳与举例

【例 12】求由抛物线$y^2=2x$，直线 $y=x-4$ 所围成的图形的面积。

解：由题可得，先解方程组

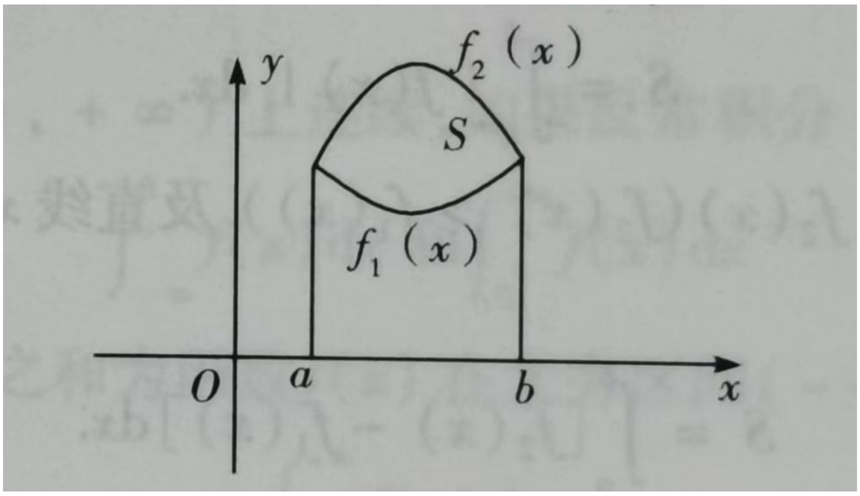
$\begin{cases}y^2=2x\\y=x-4\end{cases}$，得交点$(2，-2)$及$(8，4)$。

此题取纵坐标 y 为积分变量可便于计算，它的变化范围为区间$[-2，4]$，相应的原左右两条曲线是 $x=\frac{y^2}{2}$和 $x=4+y$。根据公式，所求面积为 $A=\int_{-2}^{4}\left(4+y-\frac{y^2}{2}\right)dy=\left(\frac{y^2}{2}+4y-\frac{y^3}{6}\right)\Big|_{-2}^{4}=18.$

5. 由相交曲线 $y=f_1(x)$，$y=f_2(x)\left(f_2(x)>f_1(x)\right)$所围成的封闭平面图形的面积 S 为

$$S=\int_a^b [f_2(x)-f_1(x)]\,dx$$

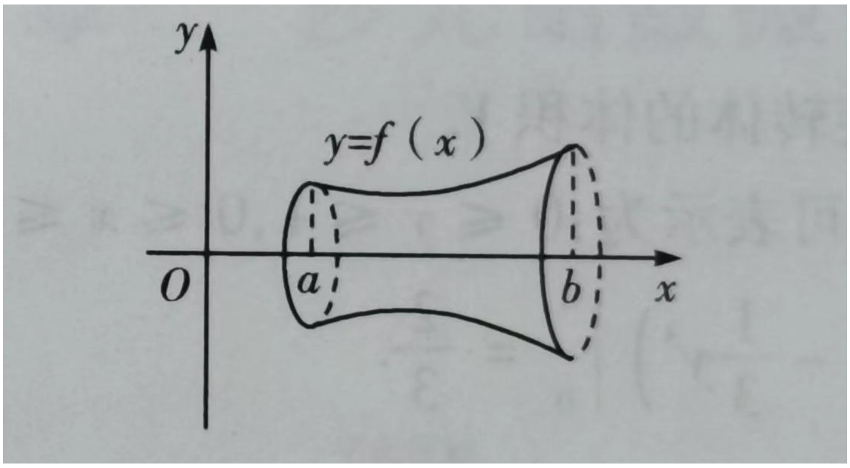
其中 a 是交点中的 x 的最小值，b 是交点中的 x 的最大值。




十五、定积分应用—求旋转体的体积

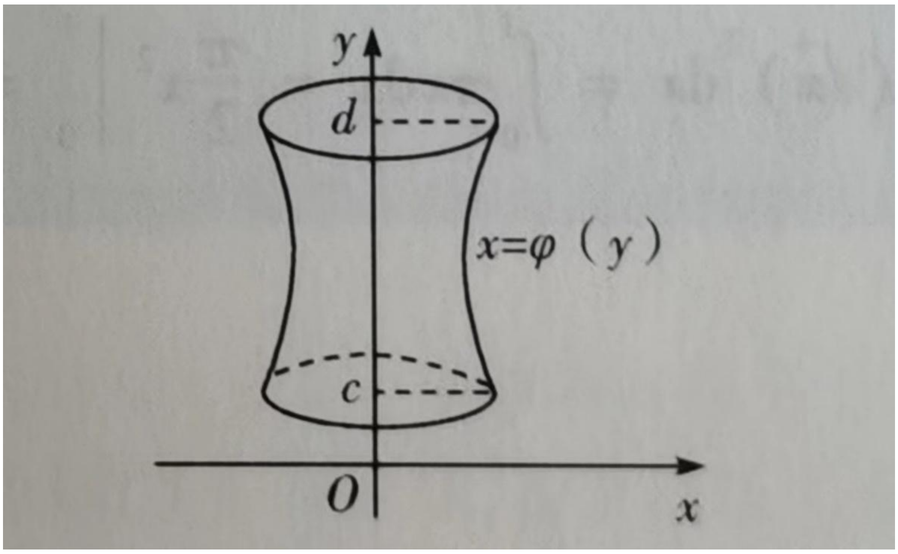
1. 由曲线 $y=f(x)$，直线 $x=a$，$x=b(a<b)$及 x 轴所围成的封闭图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积 V，为

$$V=\pi\int_a^b f^2(x)dx$$




2. 由曲线 $x=\varphi(y)$，直线 $y=c$，$y=d(c<d)$及 y 轴所围成的封闭图形绕 y 轴旋转一周所得旋转体的体积 V，为

$$V=\pi\int_c^d \varphi^2(y)dy$$




3. 由曲线 $y=f_1(x)$，$y=f_2(x)$及直线 $x=a$，$x=b(a<b)$所围成的封闭图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积$V_x$，为

$$V_x=\pi\int_a^b\left|f_2^2(x)-f_1^2(x)\right|dx$$

4. 由曲线 $x=\varphi_1(y)$，$x=\varphi_2(y)$及直线 $y=c$，$y=d(c<d)$所围成的封闭图形绕 y 轴旋转一周所得旋转体的体积$V_y$，为

$$V_y=\pi\int_c^d\left|\varphi_2^2(y)-\varphi_1^2(y)\right|dy$$

讲解归纳与举例

【例 13】求曲线$y=\sin x$，$y=\cos x\left(0\le x\le\frac{\pi}{2}\right)$和$x$轴所围成的图形绕$x$轴旋转一周而称的旋转体的体积。

解：两曲线 $y=\sin x$，$y=\cos x$ 在 $0\le x\le\frac{\pi}{2}$内的交点是 $B\left(\frac{\pi}{4}，\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$。由于在 $0\le x\le\frac{\pi}{2}$内，曲边梯形的曲边是一个分段函数，故所求的旋转体体积可以分作两个小旋转体的体积之和，即有

$$V=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\pi\sin^2 x dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\pi\cos^2 x dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{2}\pi\,(1-\cos2x)dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\pi(1+\cos2x)\,dx$$
$$=\frac{\pi^2}{4}-\frac{\pi}{2}。$$

# 第四章 多元函数微分学

一、多元函数

1. 平面区域

设点$P_0(x_0，y_0)$是平面内一点，到点$P_0(x_0，y_0)$的距离小于$\delta$的点 $P(x，y)$的全体，称为$P_0$点的$\delta$邻域，记做 $U(P_0，\delta)$，即

$$U(P_0，\delta) = \{P \in R^2 \big| |P_0P| < \delta\}$$

或

$$U(P_0，\delta) = \left\{P \in R^2 \middle| \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta\right\}$$

2. 函数

（1）一元

y 为一变量，其值由 x 在集合 D 内的取值而唯一确定，D 称为定义域。

记做 $f(x)，x \in D$

值域$\{y|y = f(x)，x \in D\}$

图像$\{(x，y)|y = f(x)，x \in D\}$

（2）二元

z 为一变量，其值由点$(x，y)$在集合 D 内的取值而唯一确定，D 称为定义域

记做 $f(x，y)，(x，y) \in D$

值域$\{z|z = f(x，y)，(x，y) \in D\}$

图像$\{(x，y，z)|z = f(x，y)，(x，y) \in D\}$

3. 二元函数的几何意义

在空间直角坐标系中，二元函数 $z = f(x，y)$的图形通常是一张曲面。如 $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$的图像是上半球面。

4. 多元函数的定义

设 D 为一个非空的 n 元有序数组的集合，f 为某一确定的对应法则，若对于每一个有序数组$(x_1，x_2，\cdots，x_n) \in D$，通过对应法则 f，都有唯一确定的实数 z 与之对应，则称 z 为$x_1$，$x_2$，$\cdots$，$x_n$的 n 元函数，记做

$$z = f(x_1，x_2，\cdots，x_n)$$

其中$x_1$，$x_2$，…，$x_n$是自变量，z 是因变量，非空有序数组的集合 D 是定义域。

二、二元函数的极限

设二元函数 $z=f(x,y)$在点$P_0(x_0,y_0)$的某一去心邻域内有定义，点 $P(x,y)$为该邻域内任意一点，当点 $P(x,y)$以任意方式趋近于点$P_0(x_0,y_0)$时，函数 $z=f(x,y)$的值都趋近于一个确定的常数 A，则称 A 是函数 $z=f(x,y)$当点 $P(x,y)$趋近于点$P_0(x_0,y_0)$时的极限，记做

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A$$

或

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A$$

三、二元函数的连续性

1.在一点处的连续

函数 $z=f(x,y)$如果在点$P_0(x_0,y_0)$的某邻域内有定义，且有

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=f(x_0,y_0)$$

则称函数 $z=f(x,y)$在点$P_0(x_0,y_0)$处连续；否则，称函数 $z=f(x,y)$在点$P_0(x_0,y_0)$处间断。

2.在区域内的连续

如果函数 $z=f(x,y)$在区域 D 内的每个点$(x,y)$处都连续，则称函数 $z=f(x,y)$在区域 D 内连续。

3.多元函数的连续性质

（1）多元连续函数的和、差、积仍为连续函数；在分母不为零的点处，连续函数之商仍为连续函数。

（2）多元连续函数的复合函数也是连续函数。

（3）多元初等函数在其定义域内任一区域或闭区域上都是连续函数。

（4）最值定理。有界闭区域$D$内连续的函数，在区域$D$内必能取得最大值与最小值。

（5）介值定理。有界闭区域$D$内连续的函数，在区域$D$内必能取得介于最大值与最小值之间的任意值。

四、偏导数

1.增量

函数 $z=f(x, y)$，$P_0(x_0, y_0)\in D$

偏增量：自变量从$P_0(x_0, y_0)$变化到$P_1(x_0+\Delta x, y_0)\in D$，则函数值的增量称为偏增量，记做

$$\Delta_x z=f(x_0+\Delta x, y_0)-f(x_0, y_0)$$

自变量从$P_0(x_0, y_0)$变化到$P_2(x_0, y_0+\Delta y)\in D$，则函数值的增量称为偏增量，记做

$$\Delta_y z=f(x_0, y_0+\Delta y)-f(x_0, y_0)$$

全增量：自变量从$P_0(x_0, y_0)$变化到$P_3(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)\in D$，则函数值的增量称为全增量，记做

$$\Delta z=f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0, y_0)$$

2. 二元函数偏导数的定义

定义：设二元函数 $z=f(x, y)$在点$P_0(x_0, y_0)$的某邻域内有定义，点 $P(x_0+\Delta x, y_0)$为该邻域内任意一点（y 恒为$y_0$），如果

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x, y_0)-f(x_0, y_0)}{\Delta x}$存在，则称此极限值为函数 $z=f(x, y)$在点$(x_0, y_0)$处对 x 的偏导数，记做

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0, y_0)}, \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0, y_0)}, f_x(x_0, y_0)\text{或}z_x(x_0, y_0)$$

同样地，点 $P(x_0, y_0+\Delta y)$为该邻域内任意一点（x 恒为$x_0$），如果

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0, y_0+\Delta y)-f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

存在，则称此极限值为 $z=f(x, y)$在点$P_0(x_0, y_0)$处对 y 的偏导数，记作：

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(x_0, y_0)}, \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0, y_0)}, f_y(x_0, y_0)\text{或}z_y(x_0, y_0)$$

3. 偏导函数的定义

如果二元函数$z=f(x, y)$在区域$D$内任一点$(x, y)$处对$x$或者对$y$的偏导数存在，即存在$f_x(x, y)$或者$f_y(x, y)$，则称这两个偏导数是$x$，$y$的偏导函数，简称偏导数。

4. 几何意义

$f_x(x_0, y_0)$是过曲面$z=f(x, y)$上点$M_0\left(x_0, y_0, f(x_0, y_0)\right)$的曲线$\begin{cases}z=f(x, y)\\ y=y_0\end{cases}$在点$M_0$处的切线$T_x$对 x 轴的斜率$f_y(x_0, y_0)$类似。

5. 二阶偏导数

函数 $z=f(x, y)$在区域 D 内偏导数$f_x(x, y)$，$f_y(x, y)$一般仍为 x，y 的二元函数，可以对它们再次求偏导数（若存在），称偏导数的偏导数为二阶偏导数，共有四种情形：

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f_{xx}(x, y),$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f_{yy}(x, y),$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_{yx}(x, y),$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=f_{xy}(x, y)。$$

讲解归纳与举例

【例 1】（1）求 $z=x^y$的一阶偏导数；

（2）求 $z=f$（x，y）$=x^2+3xy+y^2$在点（1，2）处的一阶偏导数。

解：(1)把 y 看做常数，对 x 求导，得$f_x(x, y)=yx^{y-1}$，把 x 看做常数，对 y 求导，得$f_y(x, y)=x^y\ln x$；

（2）把 y 看做常数，对 x 求导，得$f_x$（x，y）$=2x+3y$，把 x 看做常数，对 y 求导，得$f_y$（x，y）$=3x+2y$，

所求点处的偏导数分别为$f_x$（1，2）$=2+6=8$，$f_y$（1，2）$=3+4=7$.

【例 2】求函数 $z=\ln(x^2+y^2)$的二阶偏导数。

解：因为 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x}{x^2+y^2}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2y}{x^2+y^2}$，

所以 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2x}{x^2+y^2}\right)=\frac{2(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2x}{x^2+y^2}\right)=\frac{-4xy}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2y}{x^2+y^2}\right)=\frac{-4xy}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2y}{x^2+y^2}\right)=\frac{2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

五、全微分

1. 定义

设二元函数 $z=f(x,y)$在点$(x_0,y_0)$的某邻域内有定义，如果 $z=f(x,y)$在点$(x_0,y_0)$的全增量

$$\Delta z=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$$

可表示为$\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho)$

其中 A，B 是与$\Delta x$，$\Delta y$ 无关的常数。$\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$，$o(\rho)$是比$\rho$高阶的无穷小，则称 $A\Delta x+B\Delta y$ 为函数 $z=f(x,y)$在点$(x_0,y_0)$处的全微分，记作 dz，即 $dz=A\Delta x+B\Delta y$，也称函数 $z=f(x,y)$在点$(x_0,y_0)$处的可微。

2. 可微与连续、偏导的关系

（1）可微必连续。

（2）可微则偏导数必存在，且 $dz=z_x dx+z_y dy$。

（3）偏导数$z_x$，$z_y$存在是可微分的必要条件，但不是充分条件！

3. 全微分存在的必要条件

若函数$z=f(x,y)$在点$(x_0,y_0)$处可微，则$f(x,y)$在该点的两个偏导数存在，并且

$$A=\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}，B=\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$$

则

$$\left.dz\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}=\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}dx+\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}dy$$

4. 全微分存在的充分条件

如果函数 $z=f(x,y)$在点$(x,y)$存在连续的偏导数$f_x(x,y)$，$f_y(x,y)$，则函数 $z=f(x,y)$在点$(x,y)$可微。

讲解归纳与举例

【例 3】设 $z=xe^{xy}+y$，求 $\left.dz\right|_{(1,1)}$。

解：因为偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}=e^{xy}(1+xy)$，$\frac{\partial z}{\partial y}=x^2e^{xy}+1$，在全平面连续，所以函数 z 在任意点可微，且 $dz=e^{xy}(1+xy)dx+(x^2e^{xy}+1)dy$，特别地，在点$(1,1)$的全微分等于 $\left.dz\right|_{(1,1)}=2edx+(e+1)dy$。

六、复合函数的偏导数

1. 复合函数的链式法则

设函数 $u=u(x,\ y)$，$v=v(x,\ y)$都在点$(x,\ y)$具有对 x 及 y 的连续偏导数，且函数 $z=f(u,\ v)$在对应点$(u,\ v)$具有连续偏导数，则复合函数 $z=f\big(u(x,\ y),\ v(x,\ y)\big)$在对应点$(x,\ y)$处具有连续偏导数，且有遵循以下链式法则：

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}$$

讲解归纳与举例

【例 4】求函数 $z=(x^2+y^2)e^{\frac{x^2+y^2}{xy}}$的一阶偏导数。

解：令$u=x^2+y^2$，$v=xy$，则$z=ue^{\frac{u}{v}}$. 应用公式，有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=2x\left(e^{\frac{u}{v}}+\frac{u}{v}e^{\frac{u}{v}}\right)+y\left(-\frac{u^2}{v^2}e^{\frac{u}{v}}\right)$$
$$=e^{\frac{u}{v}}\left[2x\left(1+\frac{u}{v}\right)-y\frac{u^2}{v^2}\right]=\frac{x^4-y^4+2x^3y}{x^2y}e^{\frac{x^2+y^2}{xy}}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=2y\left(e^{\frac{u}{v}}+\frac{u}{v}e^{\frac{u}{v}}\right)+x\left(-\frac{u^2}{v^2}e^{\frac{u}{v}}\right)$$
$$=e^{\frac{u}{v}}\left[2y\left(1+\frac{u}{v}\right)-x\frac{u^2}{v^2}\right]=\frac{x^4-y^4+2xy^3}{xy^2}e^{\frac{x^2+y^2}{xy}}.$$

2. 一阶全微分形式不变形

设函数 $u=u(x,\ y)$和 $v=v(x,\ y)$都在点$(x,\ y)$处具有对 x 和 y 的连续偏导数，且函数 $z=f(u,\ v)$在对应点$(u,\ v)$处具有连续偏导数，则有

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=\frac{\partial z}{\partial u}du+\frac{\partial z}{\partial v}dv$$

七、隐函数的偏导数

1. 一元隐函数存在定理

设函数 $F(x, y)$满足：

（1）点$P_0(x_0, y_0)$的某邻域内有连续偏导数；

（2）$F(x_0, y_0)=0$，$F_y(x_0, y_0)\neq 0$。

则在点$P_0(x_0, y_0)$的某邻域内，方程 $F(x, y)=0$ 能确定唯一的单值连续函数 $y=y(x)$，且

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}$$

2. 二元隐函数存在定理

设函数 $F(x, y, z)$满足：

（1）点$P_0(x_0, y_0, z_0)$的某邻域内有连续偏导数$F_x$，$F_y$，$F_z$。

（2）$F(x_0, y_0, z_0)=0$，$F_y(x_0, y_0, z_0)\neq 0$。

则在点$P_0(x_0, y_0, z_0)$的某邻域内，方程 $F(x, y, z)=0$ 能确定唯一的单值连续函数 $z=z(x, y)$，且

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}$$

讲解归纳与举例

【例 5】设方程$e^z-xyz=0$ 确定了 z 是 x，y 的隐函数，求$\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$和$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

解：令 $F(x, y, z)=e^z-xyz$，则 $F_x=-yz$，$F_y=-xz$，$F_z=e^z-xy$，

故当$e^z-xy\neq 0$时，有$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=\frac{yz}{e^z-xy}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=\frac{xz}{e^z-xy}$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{yz}{e^z-xy}\right)=\frac{\left(z+y\frac{\partial z}{\partial y}\right)(e^z-xy)-yz\left(e^z\frac{\partial z}{\partial y}-x\right)}{(e^z-xy)^2}$$

将$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{xz}{e^z-xy}$代入，并且$e^z=xyz$

可得$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{x^2y^2z}{(e^z-xy)^3}$

八、二元函数的无条件极值

1. 二元函数极值的定义（无条件极值）

设函数 $z=f(x, y)$在点$(x_0, y_0)$的某邻域内有定义，若对于该邻域内任意点$(x, y)$，有$f(x, y)\le f(x_0, y_0)$（或 $f(x, y)\ge f(x_0, y_0)$），则称该函数在点$(x_0, y_0)$处取得极大值（极小值），称点$(x_0, y_0)$为极大值点（极小值点），极大值和极小值统称为极值，使得函数取得极值的点称为极值点。

2. 极值存在的必要条件

设函数 $z=f(x, y)$在点$(x_0, y_0)$处存在偏导数，且在该点处取得极值，则有

$$f_x(x_0, y_0)=0,\ f_y(x_0, y_0)=0$$

驻点$f_x(x, y)=0$，$f_y(x, y)=0$ 同时成立的点$(x_0, y_0)$。

3. 极值存在的充分条件

设函数 $z=f(x, y)$在点$(x_0, y_0)$的某邻域内具有一阶和二阶连续偏导数，且

$f_x(x_0, y_0)=0$，$f_y(x_0, y_0)=0$

令 $A=f_{xx}(x_0, y_0)$，$B=f_{xy}(x_0, y_0)$，$C=f_{yy}(x_0, y_0)$，则

（1）当 $AC-B^2>0$ 时，函数具有极值，且当 $A<0$ 时 $z=f(x, y)$在点$(x_0, y_0)$处取得极大值；当 $A>0$，$z=f(x, y)$在点$(x_0, y_0)$处取得极小值。

（2）当 $AC-B^2<0$ 时，$f(x_0, y_0)$不是函数的极值。

（3）当 $AC-B^2=0$ 时 $f(x_0, y_0)$可能是函数的极值，也可能不是。

讲解归纳与举例

【例 6】求二元函数 $f(x,y)=\frac{x^2}{2}-xy+y^2+3x$ 的极值。

解：$f_x=x-y+3, f_y=-x+2y$

令$\begin{cases}x-y+3=0\\-x+2y=0\end{cases}$，解得 $x=-6, y=-3.$

$f_{xx}(x,y)=1, f_{xy}(x,y)=-1, f_{yy}(x,y)=2$

$A=f_{xx}(-6,-3)=1, B=f_{xy}(-6,-3)=-1, C=f_{yy}(-6,-3)=2$

$AC-B^2=1>0, A>0$，故 $f(x,y)$在点$(-6,-3)$处取得极小值，极小值为 $f(-6,-3)=-9.$

九、二元函数的条件极值

1. 定义

求函数 $z=f(x，y)$在条件$\varphi(x，y)=0$ 下的极值，称为条件极值。

2.条件极值（拉格朗日乘数法）

设 $f(x，y)$是目标函数，$\varphi(x，y)=0$ 是约束条件，$f(x，y)$与$\varphi(x，y)=0$ 具有连续的偏导数，构造拉格朗日函数 $F(x，y，\lambda)=f(x，y)+\lambda\varphi(x，y)$，其中$\lambda$为拉格朗日乘数，联立方程组

$$\begin{cases} F_x=f_x(x，y)+\lambda\varphi_x(x，y)=0 \\ F_y=f_y(x，y)+\lambda\varphi_y(x，y)=0 \\ F_\lambda=\varphi(x，y)=0 \end{cases}$$

解出$x，y，\lambda$的值，其中$(x，y)$就是可能的极值点坐标。

讲解归纳与举例

【例 7】求函数 $f(x,y)=x^2+y^2$在条件 $3x+4y=5$ 下的极值。

解：构造拉格朗日函数 $F(x,y,\lambda)=x^2+y^2+\lambda(3x+4y-5)$

求解可得 $x=\frac{3}{5},y=\frac{4}{5},\lambda=-\frac{2}{5}$，则唯一驻点$(\frac{3}{5},\frac{4}{5})$可能是极值点。

由几何意义可知，函数 $f(x,y)=x^2+y^2$表示平面内直线 $3x+4y=5$ 上一点到原点的距离的平方，可知必存在最短距离，即原点到直线的距离。因此唯一驻点$(\frac{3}{5},\frac{4}{5})$是极小值点，极小值为 $f(\frac{3}{5},\frac{4}{5})=1.$

# 第五章 概率论初步

一、两个基本的计数原理

1.分类加法计数原理

完成一件事，总共有 n 类不同的方案，在第一类方案中有$m_1$种不同的方法，在第二类方案中有$m_2$种不同的方法，⋯，在第 n 类方案中有 m 种不同的方法，那么完成这件事共有

$N = m_1 + m_2 + \cdots + m_n$种不同的方法。

2.分步乘法计数原理

完成一件事，总共有 n 个步骤，在第一步中有$m_1$种不同的方法，在第二步中有$m_2$种不同的方法，…，在第 n 步中有 m 种不同的方法，那么完成这件事共有 $N = m_1 \times m_2 \times \cdots \times m_n$种不同的方法。

讲解归纳与举例

【例 1】在 1 本数学书、3 本不同的语文书 7 本不同的英语书中各选一本，共有______种不同的选法。

【答案】21

【解析】

完成此过程，共有三个步骤，满足分步计数原理，即第一步从 1 本数学书选一本，第二步从 3 本不同的语文书中任选一本，第三步从 7 本不同的英语书中任选一本。选法共有：1×3×7=21（种）。

【例 2】在 4 本不同的数学书、6 本不同的语文书 8 本不同的英语书中任选一本，共有______种不同的选法。

【答案】18

【解析】

完成此过程，共有三类选择方法，满足分类计数原理，即从 4 本不同的数学书中任选一本，从 6 本不同的语文书中任选一本，从 8 本不同的英语书中任选一本。选法共有：4+6+8=18（种）。

二、排列与组合

1.排列

一般地，从 n 个不同的元素中取出 $m(m \le n)$个元素，按照一定的顺序排成一列，叫做从 n 个不同的元素中取出 m 个元素的一个排列。

注：两个排列相同，当且仅当两个排列的元素完全相同，且元素排列的顺序也相同。从 n 个不同的元素中取出 $m(m \le n)$个元素的所有不同排列的个数，叫做从 n 个不同的元素中取出 m 个元素的排列数，用符号$A_n^m$表示。

排列数公式$A_n^m = n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)$

其中 $n,m\in N^*$，并且 $m\le n$。

全排列：n 个不同的元素全部取出的一个排列，叫做 n 个元素的一个全排列。这时公式中 $m=n$，即$A_n^n=n(n-1)(n-2)\cdots\cdots 3\cdot 2\cdot 1.$

阶乘：正整数 1 到 n 的连乘积叫做 n 的阶乘，用 n!表示。

$$A_n^n=n(n-1)(n-2)\cdots\cdots 3\cdot 2\cdot 1=n!$$

$$A_n^m=\frac{A_n^n}{A_{n-m}^{n-m}}=\frac{n!}{(n-m)!}$$

规定$n!=1.$

2.组合

一般地，从 n 个不同的元素中取出 $m(m\le n)$个元素合成一组，叫做从 n 个不同的元素中取出 m 个元素的一个组合。

从 n 个不同的元素中取出 $m(m\le n)$个元素的所有不同组合的个数，叫做从 n 个不同的元素中取出 m 个元素的组合数，用符号$C_n^m$表示。

组合数公式

$$C_n^m=\frac{A_n^m}{A_m^m}=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{m!}$$

其中：$n,m\in N^*$，并且 $m\le n$。

$$C_n^m=\frac{n!}{m!\,(n-m)!}$$

规定$C_n^0=C_n^n=1$

性质：$C_n^m=C_n^{n-m}$

$C_{n+1}^m=C_n^m+C_n^{m-1}$

讲解归纳与举例

【例 3】甲、乙、丙、丁 4 人排成一行，其中甲、乙必须排在两端，则不同的排法共有（　）个。

A。2 种　　　　B。4 种

C。8 种　　　　D。24 种

【答案】B

【解析】

甲、乙排两端的排法：$A_2^2=2$ 丙、丁排中间的排法：$A_2^2=2$ 所以总共的排法：$A_2^2=2\times 2=4$

种。

【例 4】一个圆上有 5 个不同的点，以这 5 个点中任意 3 个点为顶点的三角形共有（　）个。

A。60 个

B。15 个

C。5 个

D。10 个

【答案】D

【解析】从 5 个点中任意抽 3 个：$C_5^3=\frac{5\times4\times3}{3\times2}=10$ 个。

三、随机事件

1.随机试验

在概率论中，我们把对自然现象的每一次观察或所做的每一次科学试验，统称为试验所谓随机试验，指满足下列条件的试验：

（1）试验在相同条件下可以重复进行。

（2）每次试验的可能结果不唯一，并且所有可能的试验结果预先是可知的。

（3）对于每次试验，到底是其中哪一个结果发生预先是不能确定的。如抛掷硬币的试验随机试验常用$E$表示。

2.随机事件的概念

（1）随机事件：在一定条件 S 下，可能发生也可能不发生的事件，常用大写字母 $A,B,C$ 等表示随机事件。

（2）必然事件：在一定条件 S 下，必然会发生的事件，常用$\Omega$表示。

（3）不可能事件：在一定条件 S 下，必然不会发生的事件，常用$\emptyset$表示。

3.基本事件和样本空间

（1）基本事件

在试验中，能够用来描绘一个事件且不能再分的最简单的事件称为基本事件，或称样本点，一般用$\omega$表示。

（2）样本空间

随机试验的所有基本事件组成的集合，称为样本空间通常用大写的希腊字母$\Omega$表示。

如：在抛硬币的试验中，基本事件数（样本点数）有 2 个，可用$\omega_1$表示“正面朝上”，$\omega_2$表示“反面朝上”。那么，该试验的样本空间为：$\Omega=\{\omega_1,\omega_2\}$。

4. 频率与概率

（1）事件的频率

在相同的条件 S 下，重复 n 次试验，观察某一事件 A 是否出现，称 n 次试验中事件 A 出现的次数$n_A$为事件 A 出现的频数，称事件 A 出现的比例

$$f_n(A)=\frac{n_A}{n}$$

为事件 A 出现的频率

（2）概率的统计定义

在相同条件下，大量重复进行同一试验时，随机事件 A 发生的频率

会在某个常数附近摆动，则把这个常数记做 P(A)，称为事件 A 的概率，简称 A 的概率。

讲解归纳与举例

【例 9】一个袋中有 10 个乒乓球,其中 7 个橙色 3 个白色，从中任取 2 个，设事件 A 为“所取的 2 个乒乓球颜色不同”，求事件 A 发生的概率 P(A)。

【解析】$P(A)=\frac{C_7^1C_3^1}{C_{10}^2}=\frac{7}{15}$

四、随机事件的关系及运算

1. 随机事件间的关系

（1）事件的包含关系

若事件 A 发生必然导致事件 B 发生，则称事件 B 包含了事件 A，记做 $A\subset B$。

（2）事件的相等关系

设 $A,B\subset\Omega$，若 $A\subset B$，同时有 $B\subset A$，称 A 与 B 相等，记为 $A=B$。

（3）并（和）事件

事件 A 与事件 B 中至少有一个发生的事件称为 A 和 B 的和事件或并事件，记做 $A\cup B$ 或 $A+B$。

（4）积（交）事件

事件 A 与事件 B 同时发生的事件，称为事件 A 和事件 B 的积事件或交事件，记做 AB

或 $A\cap B$。

（5）差事件

事件 A 发生事件 B 不发生，称为事件 A 与事件 B 的差事件，记做 $A-B$。

（6）不相容事件（互斥事件）

若两个事件 A 与 B 不能同时发生，即 $AB=\emptyset$，称 A 与 B 为互不相容事件（或互斥事件）。

（7）对立事件（互逆事件）

如果两个事件 A 与 B 满足：$A\cup B=\Omega, A\cap B=\emptyset$，则称 A 与 B 为对立（或互逆）事件，并称 B 是 A 的逆事件 A 的逆事件记做：A。

2.随机事件的运算满足的运算律

（1）对任何事件$A$，有

$$A\supset A, A\supset\emptyset;$$
$$\Omega\supset A, \overline{\overline{A}}=A;$$
$$A\cap A=A, A\cap\emptyset=\emptyset;$$
$$A\cap\Omega=A, A+\emptyset=A;$$
$$A+\Omega=\Omega, \overline{A}\cap A=\emptyset;$$
$$\overline{A}\cup A=\Omega, \overline{A}=\Omega-A$$

（2）对于任何事件 A，B，有

$$A+B\supset A, A+B\supset B;$$
$$A\cap B\subset A, A\cap B\subset B。$$

（3）对于事件 A，B，C，如果 $A\subset B$ 且 $B\subset C$，那么 $A\subset C$。

（4）对于事件 A，B，C，有

交换律：$A+B=B+A; AB=BA$

结合律：$(A+B)+C=A+(B+C); (AB)C=A(BC)$

分配律：$(A+B)C=AC+BC; (AB)+C=(A+C)(B+C)$

对偶律：$\overline{A+B}=\overline{A}\overline{B};\ \overline{AB}=\overline{A}+\overline{B}$

（4）对于事件$A$，$B$，$C$，或另一种写法如下：

交换律：$A\cup B=B\cup A; A\cap B=B\cap A$

结合律：$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C); A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$

分配律：$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C); A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

对偶律：$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}=\overline{A}\overline{B};\ \overline{AB}=\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$

讲解归纳与举例

【例 5】设事件$A$发生的概率为 0。7，则$A$的对立事件发生的概率为(　　)

【答案】0。3

【解析】$\mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}}) = 1 - \mathrm{P}(\mathrm{A}) = 0。7 = 0。3$

【例 6】假定某人做 10 个选择题，每个题做对的概率均为$\frac{1}{4}$。

（1）该同学做对 3 道题的概率；

（2）该同学至少做对 3 道题的概率。

【解析】

（1）$\mathrm{P}\{\mathrm{X} = 3\} = \mathrm{C}_{10}^{3}(\dfrac{1}{4})^{3}(\dfrac{3}{4})^{7}$。

（2）$\mathrm{P}\{\mathrm{X} \geq 3\} = 1 - \mathrm{P}\{\mathrm{X} = 0\} - \mathrm{P}\{\mathrm{X} = 1\} - \mathrm{P}\{\mathrm{X} = 2\}$

$$=1 - \mathrm{C}_{10}^{0}(\tfrac{1}{4})^{0}(\tfrac{3}{4})^{10} - \mathrm{C}_{10}^{1}(\tfrac{1}{4})^{1}(\tfrac{3}{4})^{9} - \mathrm{C}_{10}^{2}(\tfrac{1}{4})^{2}(\tfrac{3}{4})^{8}。$$

五、古典概型

1.古典概型的定义

随机试验若具有下述特征：

（1）样本空间的元素（基本事件）只有有限个。

（2）每个基本事件出现的可能性是相等的。

（3）称这种数学模型为古典概型。

2.古典概型的性质

（1）有限性：样本空间中含有有限个基本事件。

（2）等可能性：样本空间中每个基本事件发生的概率相同。

3.古典概型中随机事件的概率计算公式

设古典概型中随机试验 E 的样本空间$\Omega$由 n 个基本事件组成，而随机事件 A 包含 $k(k \leq n)$个基本事件，则事件 A 发生的概率为。

六、概率

1.概率的公理化定义

设 E 是随机试验，且是它的样本空间。对于 E 的每一个事件 A 赋予一个实数，记为 P(A)，称为事件 A 的概率，如果集合函数 P(A)满足下列条件：

（1）非负性：对于每一个事件 A，有

$$0 \le P(A) \le 1$$

（2）规范性：

$$P(\Omega) = 1，P(\emptyset) = 0$$

（3）可列可加性：设$A_1, A_2, \cdots$是两两互不相容的事件，即对于$A_i, A_j = \emptyset, i \ne j, i, j = 1,2, \cdots$，有 $P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots$

2.概率的性质

（1）$P(\emptyset) = 0$

（2）（有限可加性）若$A_1, A_2, \cdots A_n$是两两互不相容的事件，则有

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n)$$

（3）设 $A, B$ 是两个事件，有 $P(B - A) = P(B) - P(AB)$

特别地，若 $A \subset B$，则有 $P(B - A) = P(B) - P(A)$且有 $P(A) \le P(B)$

（4）对于任一事件 A，有

$$0 \le P(A) \le 1$$

（5）（逆事件的概率）对于任一事件 A，有

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

（6）（加法公式）对于任意两个事件 $A, B$，有

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

推广：

设$A_1, A_2, A_3$是任意三个事件，则有

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1A_2) - P(A_1A_3) - P(A_2A_3) + P(A_1A_2A_3)$$

讲解归纳与举例

【例 7】设 A,B 为两个随机事件，且相互独立，$P(A) = 0。6$，$P(B) = 0。4$，$P(AB) = 0。24$，则 $P(A - B) = (\ \ )$

A。0。24

B。0。36

C。0。4

D。0。6

【答案】B

【解析】因 A，B 相互独立，故 $P(A-B)=P(A)-P(AB)=$ 0。6-0。24=0。36.

七、条件概率

1.条件概率的概念

设事件 B 的概率 $P(B)>0$，对任意事件 A，称 $P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$ 为在已知事件 B 发生 P(B) 的条件下事件 A 发生的条件概率。

2.条件概率的相关公式

（1）乘法公式

对任意两事件$A,B$，若$P(A)>0$，则$P(AB)=P(A)P(B|A)$

一般地，设$A_1,A_2,\cdots A_n$为任意$n$个事件，若$P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$，则

$P(A_1A_2\cdots A_{n-1})=P(A_1)\cdot P(A_2|A_1)\cdot P(A_3|A_1A_2)\cdots\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1})$

（2）全概率公式

设随机试验对应的样本空间为$\Omega$，设$A_1,A_2,\cdots,A_n$是样本空间$\Omega$的一个划分，$B$是任意一个事件，则

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)\,P(B|A_i)$$

设事件$A_1,A_2,\cdots,A_n$满足如下两个条件：

①$A_1,A_2,\cdots,A_n$互不相容，且 $P(A_i)>0,i=1,2,\cdots,n$

②$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n=\Omega$即$A_1,A_2,\cdots,A_n$至少有一个发生。则称$A_1,A_2,\cdots,A_n$是样本空间$\Omega$的一个划分。当$A_1,A_2,\cdots,A_n$是$\Omega$的一个划分时，每次试验有且只有其中的一个事件发生。

（3）贝叶斯公式

设$A_1,A_2,\cdots,A_n$是样本空间的一个划分，B 是任意一个事件，且 $P(B)>0$，则

$$P(A_i|B)=\frac{P(A_i)P(B|A_i)}{P(B)}=\frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{k=1}^{n}P(A_k)P(B|A_k)},i=1,2,\cdots,n$$

讲解归纳与举例

【例 8】甲乙两人同时射击同一目标，甲命中的概率为 0。6，乙命中的概率为 0。5，甲、乙同时命中目标的概率为 0。3，现已知目标被射中，或它是甲射中的概率。

【解析】A：甲命中，B：乙命中，C：命中，C = A + B。

$$P(A|C)=\frac{P(AC)}{P(C)}=\frac{P(A)}{P(A+B)}$$

$$=\frac{P(A)}{P(A)+P(B)-P(AB)}$$

$$=\frac{0。6}{0。6+0。5-0。3}=\frac{3}{4}$$

八、相互独立事件

1.相互独立事件的概念

事件$A$（或$B$）是否发生对事件$B$（或$A$）发生的概率没有影响，这样的两个事件叫做相互独立事件。

若事件$A,B$相互独立，则

$$P(AB)=P(A)P(B)$$

推广：

设$A_1,A_2,\cdots,A_n$为 n 个事件，如果对于任意整数 $k(1\le k\le n)$和任意 k 个整数 $1\le i_1<i_2<\cdots<i_n\le n$，有

$$P\left(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k}\right)=P\left(A_{i_1}\right)P\left(A_{i_2}\right)\cdots\cdots P\left(A_{i_k}\right)$$

则称事件$A_1,A_2,\cdots,A_n$相互独立，简称$A_1,A_2,\cdots,A_n$独立；如果对于任意两个整数 $1\le i_1\le i_2\le i_n$，有

$$P\left(A_{i_1}A_{i_2}\right)=P\left(A_{i_1}\right)P\left(A_{i_2}\right)$$

则称事件$A_1,A_2,\cdots,A_n$两两独立

2.相互独立事件的性质

（1）一般地，$P(AB)=P(A)\cdot P(B|A)=P(B)\cdot P(A|B)$。

（2）随机事件$A_1,A_2,\cdots,A_n$相互独立一定两两独立；反之，他们两两独立不一定相互独立。

（3）如果事件 $A,B$ 相互独立，则 A 与$\overline{B}$,$\overline{A}$与 B,$\overline{A}$与$\overline{B}$也都相互独立。

（4）必然事件与任何事件都是相互独立的。

（5）互斥事件一定不是独立事件。

3.事件 A 与 B 相互独立的充要条件

（1）若 $P(A)>0$，则 A 与 B 相互独立的充分必要条件是

$$P(B)=P(B|A)$$

（2）若 $P(B)>0$ 则 A 与 B 相互独立的充分必要条件是

$$P(A) = P(A|B)$$

九、离散型随机变量

1.随机变量

设随机试验$E$的每一个可能的结果（样本点）$\omega$唯一地对应一个实数 $X(\omega)$，则称 $X = X(\omega)$ 为随机变量，通常用大写字母 X,Y,Z 等表示随机变量。

2.离散型随机变量

若随机变量$X$只取有限多个或可列无限多个值，则称$X$为离散型随机变量。

3.离散型随机变量的概率分布

设离散型随机变量 X 所有可能取的值为$x_k(k = 1,2,\cdots)$，X 取各个可能值的概率，即事件$\{X = x_k\}$的概率为

$$P\{X = x_k\} = p_k(k = 1,2,\cdots)$$

由概率的定义，$p_k$满足如下两个条件：

（1）$0 \le p_k \le 1, k = 1,2,\cdots$

（2）$\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$

我们称式 $P\{X = x_k\} = p_k(k = 1,2,\cdots)$为离散型随机变量 X 的分布律。分布律也可以用表格的形式来表示：

| $X$ | $x_1$ | $x_2$ | $\cdots$ | $\boldsymbol{x}x_n\boldsymbol{n}$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $p p_k$ | $p p_1$ | $p p_2$ | $\cdots$ | $p p_n n$ | $\cdots$ |

4.随机变量的分布函数

设$X$是一个随机变量，x 是任意实数，函数

$$F(x) = P\{X \le x\}, -\infty < x < \infty$$

称为$X$的分布函数。

5.离散型随机变量的分布列的性质

（1）$0 \le p_k \le 1, k = 1,2,\cdots$

（2）$\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$

（3）离散型随机变量在某一范围内取值的概率等于它取这个范围内各个值的概率之和。

6.离散型随机变量的分布函数的性质

（1）$0 \le F(x) \le 1$

（2）$F(x)$是不减函数

（3）$\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = F(+\infty) = 1$

$\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = F(-\infty) = 0$

（4）$P\{x \le b\} = F(b)$

（5）$P\{a < X \le b\} = P\{X \le b\} - P\{X \le a\} = F(b) - F(a)(a < b)$

特别地，

$$P\{X > a\} = 1 - P\{X \le a\} = 1 - F(a)$$

讲解归纳与举例

【例 9】设离散型随机变量 X 的分布律为

| X | -1 | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|
| P | 2a | a | 3a | 4a |

则 a=（ ）。

A. 0.1　　　　　　B. 0.2

C. 0.3　　　　　　D. 0.4

【答案】A

【解析】由概率分布的性质可知 2a + a +3a + 4a = 10a = 1，得 a = 0.1。

十、常见的离散型随机变量的概率分布模型

1. $0-1$ 分布（两点分布）

设随机变量$X$只可能取 0 与 1 两个值，它的分布律是

$$P\{X = k\} = p^k(1-p)^{1-k}, k = 0,1(0 < p < 1)$$

则称$X$服从以$p$为参数的$(0-1)$分布或两点分布。

$(0-1)$分布的分布律也可写成

| X | 0 | 1 |
|---|---|---|
| P | 1-p | p |

2. 二项分布

如果在一次试验中某事件发生的概率是$p$，那么在$n$次独立重复试验中这个事件发生$k$次的概率是

$P\{X = k\} = C_n^k p^k q^{n-k}$（其中$k = 0,1,\cdots,n, q = 1-p$）

于是得到随机变量$X$的概率分布如下

| X | 0 | 1 | … | K |
|---|---|---|---|---|
| P | | | … | $C_n^k p^k q^{n-k}$ |

我们称这样的随机变量 X 服从二项分布，记做$X \sim B(n,p)$，其中$n,p$为参数，并记做$C_n^k p^k q^{n-k} = B(n,p)$

当随机变量的总体很大且抽取的样本容量相对于总体来说又比较小，而每次抽取时又只有两种试验结果，此时可以把它看做独立重复试验，利用二项分布求其分布列。

3.几何分布

设$\xi$是一个无穷次贝努里试验序列中事件$A$首次发生时所需的试验次数，且可能的值为 1，2，…而取各个值的概率为

$$P\{\xi = k\} = (1-p)^{k-1}p = q^{k-1}p, k = 1,2,\cdots$$

其中$0 < p < 1, q = 1-p$，则称$\xi$服从几何分布.记为$\xi \sim g(k,p)$。易验证

（1）$P\{\xi = k\} = pq^{k-1} > 0, k = 1,2,\cdots$

（2）$\sum_{k=1}^{\infty} pq^{k-1} = 1$

随机变量号的概率分布列为

4.泊松分布

设随机变量 X 所有可能取的值为 0，1，2，…，而取各个值的概率为

$$P\{X = k\} = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}(k = 0,1,2,\cdots)$$

其中$\lambda > 0$是常数，则称 X 服从参数为入的泊松分布，记为$X \sim P(\lambda)$

十一、期望

1.离散型随机变量的期望

设离散型随机变量$X$的分布律为

$$P\{X = x_k\} = p_k, k = 1,2,\cdots,n$$

称$\sum_{k=1}^{n} x_k p_k$为随机变量 X 的数学期望，简称期望或均值，记为$E(X)$。即

$$E(X) = \sum_{k=1}^{n} x_k p_k$$

2.期望的性质

（1）$E(C) = C$（C 是常数）

（2）$E(cX) = cE(X)$

（3）$E(aX+b)=aE(X)+b$

（4）$E(a_1X+a_2Y)=a_1E(X)+a_2E(Y)$

（5）若 X,Y 相互独立，则 $E(XY)=E(X)E(Y)$

十二、方差

1. 离散型随机变量的方差

一般地，若离散型随机变量$X$的分布列为

| $\boldsymbol{X}$X | $\boldsymbol{x}x_1$ | $\boldsymbol{x}x_2$ | ⋯ | $\boldsymbol{x}x_i\boldsymbol{i}$ | ⋯ | $\boldsymbol{x}x_n\boldsymbol{n}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $P$P | $pp_1$ | $pp_2$ | ⋯ | $pp_i i$ | ⋯ | $p_n n$ |

称

$$D(X)=\sum_{i=1}^{n}[x_i-E(X)]^2p_i$$

为随机变量$X$的方差，其刻画了随机变量与其期望$E(X)$的平均偏离程度。

2. 方差的性质

（1）$D(C)=0$

（2）$D(X+C)=D(X)$

（3）$D(cX)=c^2D(X)$

（4）$D(cX+b)=c^2D(X)$

（5）若 X,Y 相互独立，则 $D(X+Y)=D(X)+D(Y)$

（6）期望与方差的关系：$D(X)=E(X^2)-E^2(X)$

3. 常见离散型随机分布的期望和方差

十三、标准差

| 分布 | 分布函数 | 期望 | 方差 |
|---|---|---|---|
| $(0-1)$分布 | $P\{X=0\}=q,P\{X=1\}=p,$ $0<p<1,q=1-p$ | $p$ | $pq$ |
| 二项分布 | $P\{X=k\}=C_n^kp^kq^{n-k},k=0,1,\cdots,n,$ $0<p<1,q=1-p$ | $np$ | $npq$ |
| 几何分布 | $P\{X=k\}=q^{k-1}p,k=0,1,\cdots,n,$ $0<p<1,q=1-p$ | $\frac{1}{p}$ | $\frac{1-p}{p^2}$ |
| 泊松分布 | $P\{X=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},k=0,1,2,\cdots,\lambda>0$ | $\lambda$ | $\lambda$ |

随机变量 X 的标准差$\sigma(X)$（或称均方差）为方差的算术根，即

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$$