第一章　极限与连续

【考点 1】函数的定义

形如 $y=f(x)$（$x\in D$），我们称 y 为 x 的一元函数，其中 x 称为自变量，y 称为因变量. x 的全体取值范围 D 称为函数 $f(x)$ 的定义域，y 的全体取值范围 Z 称为函数的值域. 一般而言，求定义域有一下几种情形：① $\frac{1}{f(x)}\Rightarrow f(x)\neq 0$；② $\sqrt{f(x)}\Rightarrow f(x)\geq 0$；

③ $\ln f(x)\Rightarrow f(x)>0$；④ $\arcsin f(x)\Rightarrow |f(x)|\leq 1$.

【考点 2】复合函数定义

设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_f，函数 $u=g(x)$ 的定义域为 D_g，且值域 $Z_g\subset D_f$，则由下式确定的函数 $y=f[g(x)]$，$x\in D_g$，称为由函数 $u=g(x)$ 与函数 $y=f(u)$ 构成的复合函数，它的定义域为 D_g，变量 u 称为中间变量.

【考点 3】初等函数

①幂函数：形如 $y=x^{\mu}$（$\mu\in R$ 并且是常数）的函数，即以底数为自变量，幂为因变量，指数为常数的函数称为幂函数.

②指数函数：函数 $y=a^x$（$a>0$ 且 $a\neq 1$）叫做指数函数.

③对数函数：函数 $y=\log_a x$（$a>0$ 且 $a\neq 1$）叫做对数函数.

特殊对数函数：以 $a=e$ 为底的对数函数称为自然对数，简记为 $y=\ln x$；以 $a=10$ 为底的对数函数称为常用对数，简记为 $y=\lg x$.

④三角函数：形如 $y=\sin x, y=\cos x, y=\tan x$ 这些函数就是三角函数.

⑤反三角函数：形如 $y=\arcsin x, y=\arccos x, y=\arctan x$ 这些函数就是反三角函数.

【考点 4】极限存在的充要条件

函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时极限存在的充分必要条件是左极限和右极限各自存在并且相等，即 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$.

【考点 5】函数极限的性质

（1）极限的唯一性：如果 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 存在，那么这极限唯一.

（2）夹逼定理：如果函数 $f(x)$、$g(x)$、$h(x)$ 满足 $f(x)\leq g(x)\leq h(x)$ 且 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to\infty}h(x)=A$，则有 $\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=A$.

【考点 6】极限的四则运算

设函数 $f(x)$、$g(x)$，其极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$，则

（1）$\lim\limits_{x\to x_0}\left[\alpha f(x)\pm\beta g(x)\right]=\alpha A\pm\beta B$（其中 α,β 为常数）；

（2）$\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)\cdot g(x)\right]=AB$；（3）$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A}{B}(B\neq 0)$.

【考点 7】无穷小与无穷大的概念及关系

（1）如果函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$（或 $x \to \infty$）时的极限为零，那么称函数 $f(x)$ 为当 $x \to x_0$（或 $x \to \infty$）时的无穷小.

（2）如果当 $x \to x_0$（或 $x \to \infty$）时，对应的函数值的绝对值 $|f(x)|$ 无限增大，那么称函数 $f(x)$ 为当 $x \to x_0$（或 $x \to \infty$）时的无穷大.

（3）无穷大与无穷小的关系：在自变量的同一变化中，如果 $f(x)$ 为无穷大，则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷小；反之，如果 $f(x)$ 为无穷小，且 $f(x) \neq 0$，则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷大.

【考点 8】无穷小的性质

①有限个无穷小的和也是无穷小；

②有界函数与无穷小的乘积还是无穷小.

【考点 9】无穷小的比较

设 $\lim f(x)=0$， $\lim g(x)=0$，两个函数都是在同一自变量的变化过程中的无穷小，且 $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)} = A$.

① $A=0$，则称 $f(x)$ 是比 $g(x)$ 高阶的无穷小，记作 $f(x)=o[g(x)]$；

② $A=\infty$，则称 $f(x)$ 是比 $g(x)$ 低阶的无穷小；

③ $A=C$，$(C \in R且C \neq 0)$，则称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是同阶无穷小；

④ $A=1$，则称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是等价无穷小，记作 $f(x) \sim g(x)$.

【考点 10】常见的等价无穷小

常见等价无穷小有：当 $x \to 0$ 时

（1） $x \sim \sin x \sim \arcsin x \sim \tan x \sim \arctan x$， $1-\cos x \sim \dfrac{1}{2}x^2$；

（2） $x \sim e^x - 1 \sim \ln(1+x)$， $a^x - 1 \sim x\ln a$；

（3） $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$.

【考点 11】两个重要极限

（1）当 $x \to 0$ 时，函数 $\dfrac{\sin x}{x}$ 趋向于 1，即极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

（2）当 $x \to \infty$ 时，函数 $(1+\dfrac{1}{x})^x$ 趋向于 e，即极限 $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x = e$ 或 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$.

【考点 12】函数连续的充分必要条件

函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续的充分必要条件：函数 $f(x)$ 在点 x_0 处左连续且右连续，即左极限＝右极限＝该点处的函数值.

【考点 13】函数的间断点的分类

$$\text{间断点}\begin{cases}\text{第一类间断点}\begin{cases}\text{可去间断点（左右极限存在且相等）}\\\text{跳跃间断点（左右极限存在但不等）}\end{cases}\\ \\ \text{第二类间断点}\\\text{（左右极限至少有一个不存在）}\end{cases}$$

【考点 14】闭区间上连续函数的性质

（1）有界性定理：设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 必有界.

（2）最值定理：设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上必取得最大值和最小值. 即存在 $x_1,x_2\in[a,b]$，使得 $f(x_1)=m,f(x_2)=M$，且对任意的 $x\in[a,b]$，有 $m\le f(x)\le M$.（这里 m、M 分别称为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最小值与最大值）

（3）零点定理：设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)\cdot f(b)<0$，则在 (a,b) 内部至少存在一点 ε，使得 $f(\varepsilon)=0$, 则称点 ε 为函数 $f(x)$ 的零点.

（4）介值定理：设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)\ne f(b)$，而 μ 是介于 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间的任意一个数，则在 (a,b) 内至少存在一点 ε，使得 $f(\varepsilon)=\mu$.

第二章　一元函数微分学

【考点 1】导数的定义

如果极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 存在，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导，极限值称为函数在点 x_0 处的导数，记为 $f'(x_0)$，或 $y'\big|_{x=x_0}$，$\dfrac{dy}{dx}\Big|_{x=x_0}$，$\dfrac{df(x)}{dx}\Big|_{x=x_0}$ 等.

导数定义的另外等价形式有：$f'(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}(\Delta x=h)$，

或者 $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}(x=x_0+\Delta x)$.

【考点 2】左导数与右导数的定义

左导数：如果极限 $\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 存在，则称该极限值称为函数在点 x_0 处的左导数，记为 $f'(x_0^-)$.

右导数：如果极限 $\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 存在，则称该极限值称为函数在点 x_0 处的右导数，记为 $f'(x_0^+)$.

【考点 3】导数的几何意义

如果函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处导数 $f'(x_0)$ 存在，则在几何上 $f'(x_0)$ 表示曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线的斜率，根据“点斜式”求直线方程的方法，就可以得到曲线在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线方程为 $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$.

曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的法线方程为 $y-f(x_0)=-\dfrac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$.

【考点 4】微分

如果函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内处处可微分，则有 $dy=f'(x)dx$.

【考点 5】导数的基本公式

$C'=0$ （C 为常数）	$(x^u)'=ux^{u-1}$
$(\sin x)'=\cos x$	$(\cos x)'=-\sin x$
$(\tan x)'=\sec^2 x$	$(\cot x)'=-\csc^2 x$
$(\sec x)'=\sec x\tan x$	$(\csc x)'=-\csc x\cot x$
$(a^x)'=a^x\ln a$	$(e^x)'=e^x$
$(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$	$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$
$(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(\arctan x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$	$(\text{arccot}\, x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$

【考点 6】导数的四则运算

若 $f(x)$， $g(x)$ 都可导，则

（1）$[f(x)\pm g(x)]'=f'(x)\pm g'(x)$ ； （2）$[Cf(x)]'=Cf'(x)$ （C 是常数）；

（3）$[f(x)\cdot g(x)]'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$ ；（4）$\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]'=\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$（其中 $g(x)\neq 0$ ）.

【考点 7】复合函数的求导法

如果 $u=g(x)$ 在点 x 可导，而 $y=f(u)$ 在点 $u=g(x)$ 可导，则复合函数 $y=f[g(x)]$ 在点 x 可导，且其导数为 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}$ 或 $\dfrac{dy}{dx}=f'(u)\cdot g'(x)$.

【考点 8】隐函数的求导法

若 $y=f(x)$ 是由方程 $F(x,y)=0$ 所确定的隐函数，且 $y=f(x)$ 可导，为了求 $\dfrac{dy}{dx}$，方程两端同时对 x 求导，用复合函数求导法则计算，对 y 关于 x 的求导写成 y'，然后运用移项合并等解得 y' 即可.

【考点 9】参数方程确定的函数的求导法

由参数方程给出的平面曲线就是通过含有参数 t 的方程 $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$，

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\bullet\frac{dt}{dx}=\psi'(t)\frac{1}{\varphi'(t)}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

【考点 10】洛必达法则

$\frac{0}{0}$ 型（$\frac{\infty}{\infty}$ 型）未定式的洛必达法则：设函数 $f(x),g(x)$ 满足以下条件

（1）$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0,\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$（或有 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty,\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\infty$）；

（2）在点 x_0 的某一去心邻域内，$f'(x)$ 和 $g'(x)$ 都存在，且 $g'(x)\neq 0$；

（3）极限 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$（$A$ 可为实数也可为 ∞），

则有 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$.

【考点 11】函数的单调性

若函数 $y=f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导：

（1）若在 (a,b) 内 $f'(x)>0$，则函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调增加；

（2）若在 (a,b) 内 $f'(x)<0$，则函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调减少.

【考点 12】函数的极值

设函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内有定义，x_0 是 (a,b) 内的某一点，则：

（1）如果点 x_0 存在一个邻域，使得对此邻域内的任一点 $x(x\neq x_0)$，总有 $f(x)<f(x_0)$，则称 $f(x_0)$ 为函数的一个极大值，称 x_0 为函数 $f(x)$ 的一个极大值点；

（2）如果点 x_0 存在一个邻域，使得对此邻域内的任一点 $x(x\neq x_0)$，总有 $f(x)>f(x_0)$，则称 $f(x_0)$ 为函数的一个极小值，称 x_0 为函数 $f(x)$ 的一个极小值点.

【考点 13】极值的第一充分条件

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续，且在 x_0 的某去心邻域内可导，则：

（1）在 $x=x_0$ 的左侧邻域内（$x<x_0$ 时），$f'(x)>0$，右侧邻域内（$x>x_0$ 时），$f'(x)<0$，则 $f(x)$ 在点 x_0 处取得极大值，即 $f(x_0)$ 为函数的极大值；

（2）在 $x=x_0$ 的左侧邻域内（$x<x_0$ 时），$f'(x)<0$，右侧邻域内（$x>x_0$ 时），$f'(x)>0$，则 $f(x)$ 在点 x_0 处取得极小值，即 $f(x_0)$ 为函数的极小值；

（3）若 $f'(x)$ 在点 $x=x_0$ 左右邻域内 $f'(x)$ 的符号保持不变（同号），则 $f(x_0)$ 必不是极值.

【考点 14】极值的第二充分条件

设函数 $f(x)$ 在 x_0 处有二阶导数，且 $f'(x_0)$=0，$f''(x_0)\neq 0$，则：

（1）当 $f''(x_0)<0$ 时，$f(x_0)$ 为极大值，x_0 为极大值点；

（2）当 $f''(x_0)>0$ 时，$f(x_0)$ 为极小值，x_0 为极小值点.

【考点 15】函数凹凸性的判定

设 $f(x)$ 在区间 I 上 $f''(x)>0(f''(x)<0)$，则函数曲线 $y=f(x)$ 在区间 I 内是凹（凸）的.

【考点 16】函数的拐点

曲线上凹与凸的分界点，称为曲线的拐点.

设 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 的某去心邻域内二阶可导，如果 $f''(x)$ 在点 x_0 的左右两侧邻域异号，而且 $f''(x_0)=0$ 或 $x=x_0$ 处不存在二阶导数，则点 $(x_0,f(x_0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

第三章　一元函数积分学

【考点 1】不定积分性质

（1）设 $f(x)$ 存在一个原函数 $F(x)$，则

①$[\int f(x)dx]'=f(x)$ 或 $d[\int f(x)dx]=f(x)dx$.

②$\int F'(x)dx=F(x)+C$ 或 $\int dF(x)=F\left(x\right)+C$.

（2）$\int kf(x)dx=k\int f(x)dx$；

（3）$\int\left[f(x)\pm g(x)\right]dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx$.

【考点 2】基本积分公式

①常量函数：$\int 0dx=C$，$\int kdx=kx+C(k\text{为常数})$；

②幂函数：$\int x^a dx=\frac{1}{a+1}x^{a+1}+C(a\neq -1)$；

③指数函数：$\int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+C(a>0,\text{且}a\neq 1)$，$\int e^x dx=e^x+C$；

④对数函数：$\int\frac{1}{x}dx=\ln|x|+C$；

⑤三角函数：$\int\cos xdx=\sin x+C$，$\int\sin xdx=-\cos x+C$，

$\int\frac{1}{\cos^2 x}dx=\int\sec^2 xdx=\tan x+C$，$\int\frac{1}{\sin^2 x}dx=\int\csc^2 xdx=-\cot x+C$，$\int\sec x\tan xdx=\sec x+C$，

$\int\csc x\cot xdx=-\csc x+C$；

⑥反三角函数：$\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\arcsin x+C=-\arccos x+C$，

$\int\frac{1}{1+x^2}dx=\arctan x+C=-\text{arccot}\,x+C$.

【考点 3】第一类换元法（凑微分法）

设 $F(u)$ 是 $f(u)$ 的一个原函数，$\varphi'(x)$ 是连续函数，那么 $\int f\left[\varphi(x)\right]\varphi'(x)dx=F\left[\varphi(x)\right]+C$，第一

类换元法计算的关键在于<u>把被积表达式凑成两部分</u>,一部分为 $d\left[\varphi(x)\right]$,另一部分为 $f\left[\varphi(x)\right]$.

【考点 4】第二类换元法

设 $\varphi(t)$ 具有连续的导函数，其反函数存在且可导，如果函数 $f(x)$ 连续且 $\int f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)dt=\Phi(t)+C$ ，则有<u>换元公式</u>：$\int f(x)dx=\int f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)dt=\Phi\left[\varphi^{-1}(x)\right]+C$ ，这个方法我们称之为第二换元法.

【考点 5】分部积分法

设连续函数 $u=u(x),v=v(x)$ ，由微分法则可得：

$d(uv)=udv+vdu\Rightarrow udv=uv-\int vdu$ ，即 $\int u(x)dv(x)=u(x)v(x)-\int v(x)du(x)$.

【考点 6】定积分的性质

（1）<u>常数性质</u>：$\int_a^a f(x)dx=0,\int_a^b dx=b-a$ ；

（2）<u>反区间性质</u>：若 $a>b$，则 $\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$ ；

（3）<u>线性性质</u>：$\int_a^b\left[f(x)\pm g(x)\right]dx=\int_a^b f(x)dx\pm\int_a^b g(x)dx$ ；

（4）<u>区间可加性</u>：$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$ ；

（5）<u>保序性</u>：$\int_a^b f(x)dx\geq 0(a<b)$ （区间 $\left[a,b\right]$ 上 $f(x)\geq 0$ ）；

（6）<u>估值定理</u>：$m(b-a)\leq\int_a^b f(x)dx\leq M(b-a)(a<b)$ ；

（7）<u>积分中值定理</u>：$\int_a^b f(x)dx=f(\xi)(b-a)$ （ $\xi\in\left[a,b\right]$ ）.

【考点 7】牛顿-莱布尼茨公式

设函数 $f(x)$ 在 $\left[a,b\right]$ 上连续，$F(x)$ 是 $f(x)$ 在 $\left[a,b\right]$ 上的一个原函数，则有

$$\int_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a)\ .$$

【考点 8】定积分换元法

设（1） $f(x)$ 是区间 $\left[a,b\right]$ 上的连续函数；

（2） $\varphi'(t)$ 在 $\left[\alpha,\beta\right]$ 连续，且 $\varphi'(t)\neq 0,t\in\left(\alpha,\beta\right)$；

（3） $\varphi(\alpha)=a,\varphi(\beta)=b$，

则有 $\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)dt$.

【考点 9】定积分分部积分法

在定积分中，如果有连续函数 $u=u(x),v=v(x)$ ，则有

$$\int_a^b u(x)dv(x)=\left[u(x)v(x)\right]\Big|_a^b-\int_a^b v(x)du(x).$$

【考点 10】定积分求平面图形面积

直角坐标系下：$A=\int_a^b\left[f(x)-g(x)\right]dx$；

【考点 11】定积分求旋转体体积

（1）连续曲线 $y=f(x)\geq 0$，直线 $x=a$，$x=b(a<b)$ 及 x 轴所围成的曲边梯形绕 x 轴旋转一周而成的旋转体的体积：$V=\pi\int_a^b f^2(x)dx$；

（2）连续曲线 $x=\varphi(y)$，直线 $y=c$，$y=d(c<d)$ 及 y 轴所围成的曲边梯形绕 y 轴旋转一周而成的旋转体的体积：$V=\pi\int_c^d \varphi^2(y)dy$.

第四章　多元函数微分学

【考点 1】一阶偏导数

（1）如果极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta_x z}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$ 存在，则称此极限为函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处对 x 的偏导数，记作 $z_x(x_0,y_0),f_x(x_0,y_0),\dfrac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(x_0,y_0)}$；

（2）如果极限 $\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{\Delta_y z}{\Delta y}=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}$ 存在，则称此极限为函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处对 y 的偏导数，记作 $z_y(x_0,y_0),f_y(x_0,y_0),\dfrac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(x_0,y_0)}$.

【考点 2】一阶偏导数的求法

二元或以上的多元函数的偏导数对某一自变量求偏导数时，只需要把其余自变量看作常数，运用一元函数求导公式与法则进行即可. 如 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 对 x 求偏导，则将 y 看作常数，$y'=0$；$\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 对 y 求偏导，则将 x 看作常数，$x'=0$.

【考点 3】多元函数二阶偏导数

（1）对 x 的二阶偏导：$z_{xx}(x,y)=f_{xx}(x,y)=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$；

（2）先对 x 后对 y 的二阶混合偏导：$z_{xy}(x,y)=f_{xy}(x,y)=\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$；

（3）先对 y 后对 x 的二阶混合偏导：$z_{yx}(x,y)=f_{yx}(x,y)=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$；

（4）对 y 的二阶偏导：$z_{yy}(x,y)=f_{yy}(x,y)=\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

【考点 4】多元函数全微分

如果函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 处的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$ 都存在，则函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 处的全微分为 $dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$.

【考点 5】多元函数复合求导

（1）复合函数的中间变量均为一元函数时，函数 $z=f(u,v)$ 在对应点 (u,v) 具有连续偏导数，则复合函数 $f(\varphi(t),\psi(t))$ 在点 t 可导，则 $\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{du}{dt}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dt}$；

（2）复合函数的中间变量均为多元函数时，函数 $z=f(u,v)$ 在对应点 (u,v) 具有连续偏导数，则复合函数 $z=f(\varphi(x,y),\psi(x,y))$ 在点 (x,y) 的两个偏导数存在，则

$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}$； .

（3）复合函数的中间变量既有一元函数，又有多元函数时，函数 $z=f(u,v)$ 在对应点 (u,v) 具有连续偏导数，则复合函数 $z=f(\varphi(x,y),\psi(y))$ 在点 (x,y) 的两个偏导数存在，且有

$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dy}$.

【考点 6】二元隐函数求导

若函数 $F(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 附近具有连续的偏导数，且 $f_y(x_0,y_0)\neq 0,F(x_0,y_0)=0$ ，方程 $F(x,y)=0$ 能确定具有连续导数 $y=f(x)$，满足 $y_0=f(x_0)$，则 $\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}$.

【考点 7】条件极值（拉格朗日乘数法）

设 $f(x,y)$ 是目标函数，$\varphi(x,y)=0$ 是约束条件，$f(x,y)$ 与 $\varphi(x,y)=0$ 具有连续的偏导数，构造拉格朗日函数 $F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$，其中 λ 为拉格朗日乘数，联立方程组

$$\begin{cases}F_x=f_x(x,y)+\lambda\varphi_x(x,y)=0\\F_y=f_y(x,y)+\lambda\varphi_y(x,y)=0\\F_\lambda=\varphi(x,y)=0\end{cases}$$

解出 x,y,λ 的值，其中 (x,y) 就是可能的极值点坐标.

第五章　概率论初步

【考点 1】排列

一般地，从 n 个不同的元素中取出 m(m≤n)个元素，按照一定的顺序排成一列，叫做从 n 个不同的元素中取出 m 个元素的一个排列. 两个排列相同，当且仅当两个排列的元素完全相同，且元素排列的顺序也相同. 从 n 个不同的元素中取出 m(m≤n)个元素的所有不同排列的个数，

叫做从 n 个不同的元素中取出 m 个元素的排列数，用符号 A_n^m 表示.

【考点 2】组合

一般地，从 n 个不同的元素中取出 m(m≤n)个元素合成一组，叫做从 n 个不同的元素中取出 m 个元素的一个组合. 从 n 个不同的元素中取出 m(m≤n)个元素的所有不同组合的个数，叫做从 n 个不同的元素中取出 m 个元素的组合数，用符号 C_n^m 表示.

【考点 3】随机事件间的关系

（1）事件的包含关系：若事件 A 发生必然导致事件 B 发生，则称事件 B 包含了事件 A，记做 A⊂B.

（2）事件的相等关系：设 A,B⊂Ω，若 A⊂B，同时有 B⊂A，称 A 与 B 相等，记为 A=B.

（3）并（和）事件：事件 A 与事件 B 中至少有一个发生的事件称为 A 和 B 的和事件或并事件，记做 A∪ B 或 A+B.

（4）积（交）事件：事件 A 与事件 B 同时发生的事件，称为事件 A 和事件 B 的积事件或交事件，记做 AB 或 A∩ B.

（5）差事件：事件 A 发生事件 B 不发生，称为事件 A 与事件 B 的差事件，记做 A−B.

（6）不相容事件（互斥事件）：若两个事件 A 与 B 不能同时发生，即 AB=∅ ，称 A 与 B 为互不相容事件（或互斥事件）.

【考点 4】古典概型的定义

随机试验若具有下述特征：（1）样本空间的元素（基本事件）只有有限个.

（2）每个基本事件出现的可能性是相等的.（3）称这种数学模型为古典概型.

【考点 5】概率的性质

（1）P(∅)=0

（2）（有限可加性）若 A_1，$A_2,\cdots A_n$是两两互不相容的事件，则有

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots P(A_n)$$

（3）设 A,B 是两个事件，有 P(B−A)=P(B)−P(AB)

特别地，若 A⊂B，则有 P(B−A)=P(B)−P(A)，且有 P(A)≤P(B)

（4）对于任一事件 A，有 0≤P(A)≤1

（5）（逆事件的概率）对于任一事件 A，有 $P(\overline{A})=1-P(A)$

（6）（加法公式）对于任意两个事件 A,B，有 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

【考点 6】条件概率的概念

设事件 B 的概率 P(B)>0，对任意事件 A，称 $P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}$ 为在已知事件 B 发生 $P(B)$ 的条件下事件 A 发生的条件概率.

【考点 7】相互独立事件的概念

事件 A（或 B）是否发生对事件 B（或 A）发生的概率没有影响，这样的两个事件叫做相互独立事件.若事件 A,B 相互独立，则 P(AB)=P(A)P(B).

【考点 8】离散型随机变量的分布列的性质

（1） $0 \le p_k \le 1, k = 1,2\cdots$

（2） $\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$

（3）离散型随机变量在某一范围内取值的概率等于它取这个范围内各个值的概率之和.

【考点 9】0−1 分布（两点分布）

设随机变量 X 只可能取 0 与 1 两个值，它的分布律是

$P\{X = k\} = p^k (1-p)^{1-k}, k = 0,1(0 < p < 1)$

则称 X 服从以 p 为参数的(0−1)分布或两点分布.

【考点 10】二项分布

如果在一次试验中某事件发生的概率是 p，那么在 n 次独立重复试验中这个事件发生 k 次的概率是 $P\{X = k\} = C_n^k p^k q^{n-k}$

【考点 11】离散型随机变量的期望

设离散型随机变量 X 的分布律为 $P\{X = x_k\} = p_k, k = 1,2,\cdots,n$ 称 $\sum_{k=1}^{n} x_k p_k$ 为随机变量 X 的数学期望，简称期望或均值，记为 E(X). 即 $E(X) = \sum_{k=1}^{n} x_k p_k$

【考点 12】期望的性质

（1）E(C)=C（C 是常数）

（2）E(cX)=cE(X)

（3）E(aX+b)=aE(X)+b

（4）E(aX+bY)=aE(X)+bE(Y)

（5）若 X,Y 相互独立，则 E(XY)=E(X)E(Y).