esprit
Ecole Supérieure Privée d'Ingénierie et de Technologies

Ecole Supérieure Privée d'Ingénierie et de Technologie

Département de Mathématiques	EXAMEN	Date : 03/06/2013
Classe : 4 INFO B	ANALYSE NUMÉRIQUE	Durée 1 h 30

La précision et la clarté de la rédaction seront prises en compte dans l'évaluation de la copie.
Le barème, donné à titre indicatif, est susceptible de modification.
Les calculatrices non programmables sont autorisées.
Documents non autorisés

EXERCICE 1 (8 POINTS)

1) Soient les points d'interpolation suivants : (-1 ; -1); (0 ; 1); (1 ; 0) et (2 ; 0). Trouvez le polynôme d'interpolation de degré 3 passant par ces points :
   a) à l'aide des polynômes de Lagrange.
   b) Les différences divisées.

2) Soient les fonctions définies par f : $x \to \sqrt{x-1}$ et g : $x \to \sin\left(\frac{\pi}{2}(x-1)\right)$, et trois points $x_0 = 1$, $x_1 = 3$ et $x_2 = 2$.
   a. Montrer, sans le calculer, que f et g ont le même polynôme d'interpolation sur le support $\{x_0, x_1, x_2\}$.
   b. Calculer le polynôme de Lagrange qui interpole f et g sur le support donné.
   c. Trouver la valeur approchée de g au point x = 1,75 et donner une majoration de l'erreur d'interpolation (à partir de la valeur exacte de g).

EXERCICE 2 (6 POINTS)

On considère l'équation matricielle AX = b

$$\text{Où} \quad A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad b = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

1. Donner la décomposition LU de la matrice A
2. Résoudre le système linéaire AX = b.
3. Donner la matrice de Jacobi associée à la matrice A

EXERCICE 3 (6 POINTS)

Soit f : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = x^3 - 2$. On veut approcher le zéro α de f par la méthode de point fixe suivante :

$$(I) \qquad \begin{cases} x_0 \text{ donnée,} \\ x_{k+1} = g_\omega(x_k) \text{ pour tout } k \geq 0 \end{cases}$$

Avec g_ω: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$g_\omega(x) = (1-\omega)x^3 + \left(1 - \frac{\omega}{3}\right)x + 2(\omega - 1) + \frac{2\omega}{3x^2} \qquad \omega \in \mathbb{R}$$

1. Pour quelles valeurs du paramètre ω la méthode de point fixe (I) est-elle consistante ? (*i.e.* α est un point fixe de g_ω)
2. Pour quelles valeurs du paramètre ω la méthode de point fixe (I) est-elle d'ordre 2 ?
3. Existe-t-il des valeurs du paramètre ω pour lesquelles la méthode de point fixe (I) serait d'ordre 3 ?

Exercice I.

x_i	-1	0	1	2
y_i	-1	1	0	0

1/ Avec les polynôme de LAGRANGE.

$$P_3(x) = \sum_{i=0}^{3} y_i L_i(x) = -L_0(x) + L_1(x).$$ 1

calculons L_0 et L_1

$$L_0(x) = \frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(-1-0)(-1-1)(-1-2)} = \frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{-6}$$ 1

$$L_1(x) = \frac{(x+1)(x-1)(x-2)}{(0+1)(0-1)(0-2)} = \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{2}$$ 1

$$P_3(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{6} + \frac{3x^3 - 6x^2 - 3x + 6}{6}$$

$1 = \frac{41}{16}$

$$= \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{6}x + 1$$ 1

2) Avec les différences divisées.

-1	-1			
		2		
0	1		$-3/2$	
		-1		$2/3$
1	0		$1/2$	
		0		
2	0			

3pts.

$$P_3(x) = -1 + 2(x+1) - \frac{3}{2}x(x+1) + \frac{2}{3}\left(x(x+1)(x-1)\right)$$

$$= \frac{2}{3}x^3 - \frac{2}{3}x - \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 2x + 2 - 1$$

1 pt.

$$= \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{6} + 1.$$

II $\quad f(x) = \sqrt{x-1} \qquad g(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}(x-1)\right)$

$x_0 = 1 \quad x_1 = 3/2 \quad x_2 = 2.$

il est clair que

$\forall x_i \; i = 0,1,2 \qquad f(x_i) = g(x_i) = y_i$

les couples (x_i, y_i) génèrent un polynôme d'interpolation unique de degré ≤ 2.

f et g ont donc le même poly. d'interpolation. 1pt

1	0		
		$\sqrt{2}$	
$3/2$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$2-2\sqrt{2}$.
		$2-\sqrt{2}$	
2	1		

1,5

$$P_2(x) = 0 + \sqrt{2}(x-1) + (2-2\sqrt{2})(x-1)(x-\tfrac{3}{2}).$$

$$= (2-2\sqrt{2})x^2 - (5-6\sqrt{2})x + (3-4\sqrt{2})$$

1,5

$$P_2(1{,}75) = P_2\left(\tfrac{7}{4}\right) = 2(1-\sqrt{2})\tfrac{49}{16} - (5-6\sqrt{2})\tfrac{7}{4} + (3-4\sqrt{2})$$

$$= \tfrac{1}{8}\left((49-70+24) + (-49+84-32)\sqrt{2}\right)$$

$$= \frac{3+3\sqrt{2}}{8} = 0{,}9053301$$

1

$g(1{,}75) = 0{,}9238795 \Rightarrow \varepsilon(1{,}75) = 0{,}0185494$

1/2 $\qquad \simeq 1{,}855 \; 10^{-2}$. 1/2

Exercice II

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2/3 & 1 & 0 \\ -1/3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 0 & -7/3 & 13/3 \\ 0 & 1/3 & 5/3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/7 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & -7/3 & 13/3 \\ 0 & 1/3 & 5/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 0 & -7/3 & 13/3 \\ 0 & 0 & \frac{16}{7} \end{bmatrix}$$

$$A = LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2/3 & 1 & 0 \\ 1/3 & -1/7 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 0 & -7/3 & 13/3 \\ 0 & 0 & \frac{16}{7} \end{bmatrix}$$ 4 pts

Résoudre le sys. $Ax = b$ avec $b = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$

$Ax = b \Rightarrow LUx = b$ on pose $Ux = y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$

on commence par résoudre l'éq. $Ly = b$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2/3 & 1 & 0 \\ 1/3 & -1/7 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} y_1 = -2 \\ y_2 = 4 - \frac{2}{3} y_1 = 4 + \frac{4}{3} \\ \quad = \frac{16}{3} \end{array}$$

$$y_3 = 1 - \frac{1}{3} y_1 + \frac{1}{7} y_2$$ 2 pts

$$y_3 = 1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{7}\,\frac{16}{3} = \frac{35+16}{21} = \frac{51}{21} = \frac{17}{7}$$

$$\Rightarrow \quad y = \begin{bmatrix} -2 \\ 16/3 \\ 17/7 \end{bmatrix}$$

on résoud maintenant $Ux = y$.

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 0 & -7/3 & 13/3 \\ 0 & 0 & 16/7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 16/3 \\ 17/7 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad x_3 = \frac{17}{16}$$

$$-\frac{7}{3} x_2 = \frac{16}{3} - \frac{13}{3} x_3 = \frac{16}{3} - \frac{13}{3} \cdot \frac{17}{16} = \frac{35}{48} = \frac{5}{16}$$

$$\Rightarrow x_2 = -\frac{3}{7} \cdot \frac{35}{48} = -\frac{5}{16}$$

2 pts

$$3x_1 = -2 - 2x_2 + 2x_3$$

$$= -2 + \frac{10}{16} + \frac{34}{16} = \frac{-32 + 44}{13} = \frac{+12}{16} = +\frac{12}{16} \Rightarrow x$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{4}{16} \qquad \text{soit } x = \begin{bmatrix} -1/16 \\ -\cancel{1/16} \\ 14/16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/16 \\ -5/16 \\ 17/16 \end{bmatrix}$$

matrice de JACOBI

$$J = D^{-1}(E + F) \qquad D = \begin{bmatrix} 3 & & 0 \\ & -1 & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{et } F = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow J = D^{-1}(E+F) = \begin{bmatrix} 0 & -2/3 & 1/3 \\ 2 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

2 pts

Exercice 3. $f(x) = x^3 - 2$

tableau de variation de f.

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x) = 3x^2$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$

1

f est strict. croissante sur $\mathbb{R}$, TVI $\exists \alpha \in \mathbb{R}$ tq $f(\alpha) = 0$, α est l'unique zéro de f

$$\begin{cases} x_0 \text{ donné.} \\ x_{k+1} = g_w(x_k) \quad k \geq 0 \end{cases}$$

$f(\alpha) = \alpha^3 - 2 = 0 \Rightarrow \alpha^3 = 2$

$$g_w(x) = (1-w)x^2 + \left(1 - \frac{w}{3}\right)x + 2(w-1) + \frac{2w}{3x^2} \quad w \in \mathbb{R}$$

1) $g_w(\alpha) = (1-w)\alpha^3 + \left(1 - \frac{w}{3}\right)\alpha + 2(w-1) + \frac{2w}{3\alpha^2}$

$= 2(1-w) + 2(w-1) + \alpha - \frac{\alpha w}{3} + \frac{w\alpha}{3}$

2pts

$= \alpha. \Rightarrow g_w(\alpha) = \alpha \quad \forall w \in \mathbb{R}$

2) $g'_w(x) = 3(1-w)x^2 + \left(1 - \frac{w}{3}\right) - \frac{4w}{3x^3}$

$g'_w(\alpha) = 3(1-w)\alpha^2 + \left(1 - \frac{w}{3}\right) - \frac{2w}{3}$

2pts

$= 3(1-w)\alpha^2 + (1-w) = (1-w)(1 + 3\alpha^2) = 0$

$\Rightarrow w = 1 \Rightarrow g'_1(\alpha) = 0 \Rightarrow$ La méthode est d'ordre 2. pour $w = 1$

3) $g_1''(x) =$

$$g_1(x) = \frac{2}{3}x + \frac{2}{3x^2}$$

$$g_1'(x) = \frac{2}{3} - \frac{4}{3x^3}$$

1pts $$g_1''(x) = \frac{4}{x^4}$$

$$g_1''(\alpha) = \frac{4}{\alpha^3 . \alpha} = \frac{2}{\alpha} \neq 0$$

La méthode ne peut être d'ordre 3. $\forall$ la valeur de w.