

Ecole Supérieure Privée d'Ingénierie et de Technologie

Département de Mathématiques	EXAMEN	Date: 03/06/2013
Classe : 4 INFO B	ANALYSE NUMÉRIQUE	Durée 1 h 30

La précision et la clarté de la rédaction seront prises en compte dans l'évaluation de la copie.

Le barème, donné à titre indicatif, est susceptible de modification.

Les calculatrices non programmables sont autorisées.

Documents non autorisés

EXERCICE 1

(8 POINTS)

- 1) Soient les points d'interpolation suivants : (-1 ; -1); (0 ; 1); (1 ; 0) et (2 ; 0). Trouvez le polynôme d'interpolation de degré 3 passant par ces points :
 - a) à l'aide des polynômes de Lagrange.
 - b) Les différences divisées.
- 2) Soient les fonctions définies par $f: x \to \sqrt{x-1}$ et $g: x \to \sin\left(\frac{\pi}{2}(x-1)\right)$, et trois points $x_0 = 1, x_1 = 3$ et $x_2 = 2$.
 - a. Montrer, sans le calculer, que f et g ont le même polynôme d'interpolation sur le support $\{x_0, x_1, x_2\}$.
 - b. Calculer le polynôme de Lagrange qui interpole f et g sur le support donné.
 - c. Trouver la valeur approchée de g au point x = 1,75 et donner une majoration de l'erreur d'interpolation (à partir de la valeur exacte de g).

EXERCICE 2

(6 POINTS)

On considère l'équation matricielle AX = b

Où
$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$
 $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ et $b = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$

- 1. Donner la décomposition LU de la matrice A
- 2. Résoudre le système linéaire AX = b.
- 3. Donner la matrice de Jacobi associée à la matrice A

EXERCICE 3

(6 POINTS)

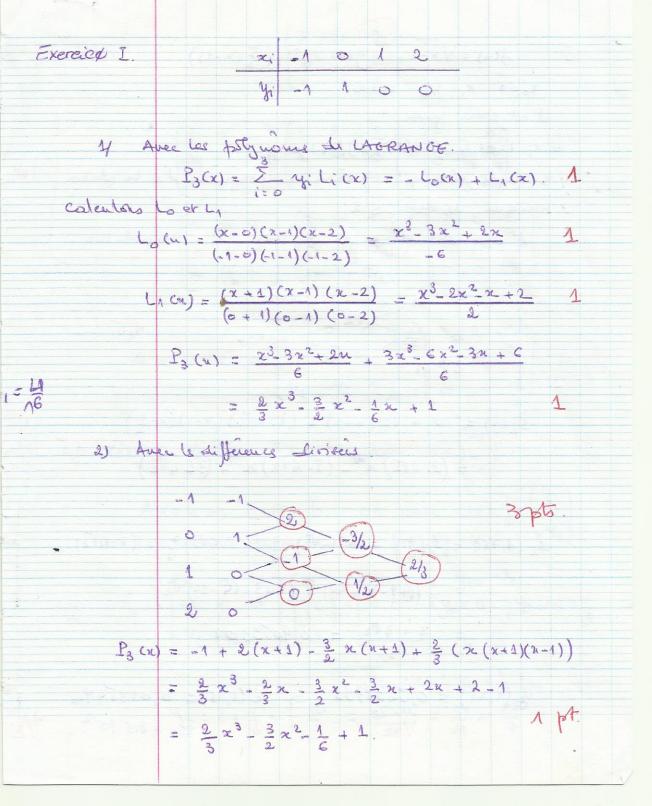
Soit $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = x^3 - 2$. On veut approcher le zéro α de f par la méthode de point fixe suivante :

(I)
$$\begin{cases} x_0 \ donn\acute{e}e, \\ x_{k+1} = g_{\omega}(x_k) \ pour \ tout \ k \ge 0 \end{cases}$$

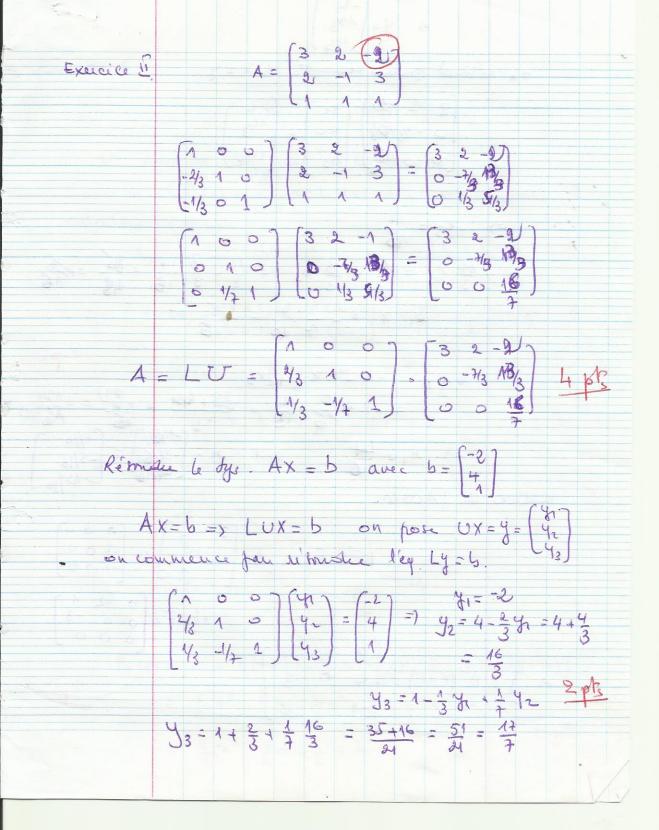
Avec $g_{\omega} \colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ la fonction définie par :

$$g_{\omega}(x) = (1 - \omega)x^3 + \left(1 - \frac{\omega}{3}\right)x + 2(\omega - 1) + \frac{2\omega}{3x^2} \qquad \omega \in \mathbb{R}$$

- 1. Pour quelles valeurs du paramètre ω la méthode de point fixe (I) est-elle consistante ? (i.e. α est un point fixe de g_{ω})
- 2. Pour quelles valeurs du paramètre ω la méthode de point fixe (I) est-elle d'ordre 2 ?
- 3. Existe-t-il des valeurs du paramètre ω pour lesquelles la méthode de point fixe (I) serait d'ordre 3 ?



 $\overline{U} = \sqrt{x-1} \quad g(u) = \sin\left(\frac{T}{2}(u-1)\right)$ x=1 x,= 3/2 x2=2. il est chair gar + x; 1=01,2 +(xi) = 9(xi) = 4; is confile (xi, yi) gent a un pocyulome d'interpolation union. Le depil & 2. of et g out donc le m tody. I'm terpolation. $\frac{3}{2}$ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ $2 \cdot \sqrt{2}$ $2 \cdot 2\sqrt{2}$ 1,5 $P_2(x) = 0 + \sqrt{2}(n-1) + (2-2\sqrt{2})(n-1)(x-\frac{3}{2})$ 1,5 = (2-21/2) x2 - (5-6/2) x + (3(4/2) $- \frac{1}{2}(1,75) = \frac{1}{2}(\frac{7}{4}) = 2(1-\sqrt{2})\frac{49}{16} - (5-6\sqrt{2})\frac{7}{4} + (3-4\sqrt{2})$ = 1 ((49-70+24) + (-49-64-32) 12) = 3+3√2 = 0,9053301 9 (1,75) = 0,9238795 => E(1,25) = 0,0185494 × 1,815 10-2. 42 1/2



$$y = \begin{bmatrix} 1/4 \\ 1/4 \\ 1/4 \end{bmatrix}$$
on without Omeria terrement UX = y.

$$\begin{cases} 3 & 2 - 2 \\ 0 & -3/3 & 0/3 \\ 0 & 0 & 1/6 \end{cases} \begin{cases} x_1 \\ x_2 \\ 0 & 0 & 1/6 \end{cases} \begin{cases} x_1 \\ x_3 \\ 0 & 0 & 1/6 \end{cases} \begin{cases} x_1 \\ x_4 \\ 0 & 0 & 1/6 \end{cases} \begin{cases} x_1 \\ x_4 \\ 0 & 0 & 1/6 \end{cases} \begin{cases} x_1 \\ x_4 \\ 0 & 0 & 1/6 \end{cases} \begin{cases} x_1 \\ x_4 \\ 0 & 0 & 1/6 \end{cases} \begin{cases} x_1 \\ x_4 \\ 0 & 0 & 1/6 \end{cases} \begin{cases} x_1 \\ x_4 \\ 0 & 0 & 1/6 \end{cases} \begin{cases} x_1 \\ x_4 \\ 0 & 0 & 1/6 \end{cases} \begin{cases} x_1 \\ x_4 \\ 0 & 0 & 1/6 \end{cases} \begin{cases} x_1 \\ x_4 \\ 0 & 0 & 1/6 \end{cases} \begin{cases} x_1 \\ x_4 \\ 0 & 0 & 1/6 \end{cases} \begin{cases} x_1 \\ x_4 \\ 0 & 0 & 1/6 \end{cases} \begin{cases} x_1 \\ x_4 \\ 0 & 0 & 1/6 \end{cases} \begin{cases} x_1 \\ x_4 \\ 0 & 0 & 1/6 \end{cases} \begin{cases} x_1 \\ x_4 \\ 0 & 0 & 1/6 \end{cases} \begin{cases} x_1 \\ x_4 \\ 0 & 0 & 1/6 \end{cases} \begin{cases} x_1 \\ x_4 \\ x_4 \\ 0 & 0 & 1/6 \end{cases} \begin{cases} x_1 \\ x_4 \\ x_$$

