组合计数

by smallling

2015 年 11 月 25 日

广告

- 组合恒等式内容大多来自于《从自主招生到竞赛》

组合恒等式

- $C_n^k = C_n^{n-k}$

组合恒等式

- $C_n^k = C_n^{n-k}$
- $C_{n+1}^k = C_n^{k-1} + C_n^k$

组合恒等式

- $C_n^k = C_n^{n-k}$
- $C_{n+1}^k = C_n^{k-1} + C_n^k$
- $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$

组合恒等式

- $C_n^k = C_n^{n-k}$
- $C_{n+1}^k = C_n^{k-1} + C_n^k$
- $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$
- $C_n^k C_k^m = C_n^m C_{n-m}^{k-m} = C_n^{k-m} C_{n-k+m}^m (m \leq k \leq n)$

组合恒等式

- $C_n^k = C_n^{n-k}$
- $C_{n+1}^k = C_n^{k-1} + C_n^k$
- $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$
- $C_n^k C_k^m = C_n^m C_{n-m}^{k-m} = C_n^{k-m} C_{n-k+m}^m (m \le k \le n)$
- $\sum_{i=0}^{n} C_n^i = 2^n$

组合恒等式

- $C_n^k = C_n^{n-k}$
- $C_{n+1}^k = C_n^{k-1} + C_n^k$
- $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$
- $C_n^k C_k^m = C_n^m C_{n-m}^{k-m} = C_n^{k-m} C_{n-k+m}^m (m \leq k \leq n)$
- $\sum_{i=0}^{n} C_n^i = 2^n$
- $\sum_{i=0}^{n} (-1)^i C_n^i = 0, (n \geq 1)$

组合恒等式

- $C_n^k = C_n^{n-k}$
- $C_{n+1}^k = C_n^{k-1} + C_n^k$
- $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$
- $C_n^k C_k^m = C_n^m C_{n-m}^{k-m} = C_n^{k-m} C_{n-k+m}^m (m \le k \le n)$
- $\sum_{i=0}^{n} C_n^i = 2^n$
- $\sum_{i=0}^{n} (-1)^i C_n^i = 0, (n \ge 1)$
- $\sum_{i=m}^{n} C_i^m = C_{n+1}^{m+1}$

组合恒等式

- $\sum_{i=n}^{n+m} C_i^k = C_{n+m+1}^{k+1} - C_n^{k+1}$

组合恒等式

- $\sum_{i=n}^{n+m} C_i^k = C_{n+m+1}^{k+1} - C_n^{k+1}$
- $\sum_{i=0}^{p} C_n^i C_m^{p-i} = C_{n+m}^p$

组合恒等式

- $\sum_{i=n}^{n+m} C_i^k = C_{n+m+1}^{k+1} - C_n^{k+1}$
- $\sum_{i=0}^{p} C_n^i C_m^{p-i} = C_{n+m}^p$
- . . . .

应用

- 在推导、化简式子以及改变式子形式中非常有用

例1

- 证明：$\sum_{k=1}^{n} kC_n^k = n * 2^{n-1}$

例1

- 证明：$\sum_{k=1}^{n} kC_n^k = n * 2^{n-1}$
- $$\sum_{k=1}^{n} kC_n^k = \sum_{k=1}^{n} nC_{n-1}^{k-1}$$
  $$= n\sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k = n * 2^{n-1}$$

例2

- 证明：$\sum_{k=1}^{n} 2^k C_n^k C_{n-k}^{\left\lfloor \frac{n-k}{2} \right\rfloor} = C_{2n+1}^{n}$

例2

- 证明：$\sum_{k=1}^{n} 2^k C_n^k C_{n-k}^{\lfloor \frac{n-k}{2} \rfloor} = C_{2n+1}^{n}$
- 右边可以理解为有n对夫妻，一个单身汉共$2n+1$个人中有n个人去参加晚会的方案数。

例2

- 证明：$\sum_{k=1}^{n} 2^k C_n^k C_{n-k}^{\lfloor \frac{n-k}{2} \rfloor} = C_{2n+1}^n$
- 右边可以理解为有n对夫妻，一个单身汉共$2n+1$个人中有n个人去参加晚会的方案数。
- 可以换一个角度去考虑方案数

例2

- 证明：$\sum_{k=1}^{n} 2^k C_n^k C_{n-k}^{\left\lfloor \frac{n-k}{2} \right\rfloor} = C_{2n+1}^{n}$
- 右边可以理解为有n对夫妻，一个单身汉共$2n+1$个人中有n个人去参加晚会的方案数。
- 可以换一个角度去考虑方案数
- 枚举有k对夫妻只去了一个人，其他$n-k$对夫妻中有$\left\lfloor \frac{n-k}{2} \right\rfloor$对夫妻两个人去了。当$n-k$为奇数时，表示单身汉也去了，为偶数时表示单身汉没去，枚举k的同时就确定单身汉是否去了。

例2

- 证明：$\sum_{k=1}^{n} 2^k C_n^k C_{n-k}^{\lfloor \frac{n-k}{2} \rfloor} = C_{2n+1}^{n}$
- 右边可以理解为有n对夫妻，一个单身汉共$2n+1$个人中有n个人去参加晚会的方案数。
- 可以换一个角度去考虑方案数
- 枚举有k对夫妻只去了一个人，其他$n-k$对夫妻中有$\lfloor \frac{n-k}{2} \rfloor$对夫妻两个人去了。当$n-k$为奇数时，表示单身汉也去了，为偶数时表示单身汉没去，枚举k的同时就确定单身汉是否去了。
- 这样的方案数为$\sum_{k=1}^{n} 2^k C_n^k C_{n-k}^{\lfloor \frac{n-k}{2} \rfloor}$，故等式成立。

SPOJ SELTEAM

- 从n个人中选出不超过k个人，再在选出的人中选出一些人成为队员，再在队员中选一名队长，求不同的方案数。

SPOJ SELTEAM

- 从n个人中选出不超过k个人，再在选出的人中选出一些人成为队员，再在队员中选一名队长，求不同的方案数。
- 答案 $\bmod 2^{23}$。

SPOJ SELTEAM

- 从n个人中选出不超过k个人，再在选出的人中选出一些人成为队员，再在队员中选一名队长，求不同的方案数。
- 答案 $\bmod 2^{23}$。
- T组询问。

SPOJ SELTEAM

- 从n个人中选出不超过k个人，再在选出的人中选出一些人成为队员，再在队员中选一名队长，求不同的方案数。
- 答案 $\bmod 2^{23}$。
- T组询问。
- $T \le 10^4, k \le n \le 10^5$。

SPOJ SELTEAM

- 问题等价于求$\sum_{i=1}^{k} C_n^i * \sum_{j=1}^{i} jC_i^j$

SPOJ SELTEAM

- 问题等价于求$\sum_{i=1}^{k} C_n^i * \sum_{j=1}^{i} jC_i^j$
- 利用之前例1的式子将式子化简为$\sum_{i=1}^{k} C_n^i i2^{i-1}$

SPOJ SELTEAM

- 问题等价于求$\sum_{i=1}^{k} C_n^i * \sum_{j=1}^{i} jC_i^j$
- 利用之前例1的式子将式子化简为$\sum_{i=1}^{k} C_n^i i2^{i-1}$
- 也可以理解为从选出的i个人中确定一个队长，其他$i-1$个人是否为队员任意确定。

SPOJ SELTEAM

- 问题等价于求$\sum_{i=1}^{k} C_n^i * \sum_{j=1}^{i} jC_i^j$
- 利用之前例1的式子将式子化简为$\sum_{i=1}^{k} C_n^i i2^{i-1}$
- 也可以理解为从选出的i个人中确定一个队长，其他$i-1$个人是否为队员任意确定。
- 根据模数，只需计算$i \leq 23$的答案。

二项式定理

- $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$

二项式定理

- $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$
- 常用式子$(x+1)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k$

应用

- 简单证明一些组合恒等式
- 应用于母函数

组合数取模

- 给出N, M, P，求$C_N^M \bmod P$，T组数据。

组合数取模

- 给出N, M, P，求$C_N^M \mod P$，T组数据。
- 针对不同的数据范围使用不同的方法。

Subtask1

- $M \leq N \leq 10^3, P \leq 10^9$

Subtask1

- $M \leq N \leq 10^3, P \leq 10^9$
- $C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^m$

Subtask1

- $M \leq N \leq 10^3, P \leq 10^9$
- $C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^m$
- 时间：$O(N^2 + T)$，空间：$O(N^2)$。

Subtask2

- $M \leq N \leq 10^5, P \leq 10^9$，$P$是质数

Subtask2

- $M \le N \le 10^5, P \le 10^9$，$P$是质数
- $C_n^m = \frac{n!}{(n-m)!m!}$

Subtask2

- $M \le N \le 10^5, P \le 10^9$，$P$是质数
- $C_n^m = \frac{n!}{(n-m)!m!}$
- 预处理出$1 - n$每个数的阶乘和阶乘的逆元，直接算即可。

Subtask2

- $M \leq N \leq 10^5, P \leq 10^9$，$P$是质数
- $C_n^m = \frac{n!}{(n-m)!m!}$
- 预处理出$1-n$每个数的阶乘和阶乘的逆元，直接算即可。
- 时间：$O(N+T)$，空间：$O(N)$。

Subtask3

- $M \le N \le 10^9, P \le 10^5$，$P$是质数

Subtask3

- $M \leq N \leq 10^9, P \leq 10^5$，$P$是质数
- Lacus定理:$C_n^m \equiv C_{\frac{n}{P}}^{\frac{m}{P}} C_{n \bmod P}^{m \bmod P} \pmod P$

Subtask3

- $M \le N \le 10^9, P \le 10^5$，$P$是质数
- Lacus定理:$C_n^m \equiv C_{\frac{n}{P}}^{\frac{m}{P}} C_{n \bmod P}^{m \bmod P} \pmod P$
- 使用Lacus定理后套用Subtask2 的方法即可。

Subtask3

- $M \leq N \leq 10^9, P \leq 10^5$，$P$是质数
- Lacus定理:$C_n^m \equiv C_{\frac{n}{P}}^{\frac{m}{P}} C_{n \bmod P}^{m \bmod P} \pmod P$
- 使用Lacus定理后套用Subtask2 的方法即可。
- 时间：$O(P + T * \log_P N)$，空间：$O(P)$。

Subtask4

- $M \le N \le 10^9, P = p^c \le 10^5$，$p$是质数

Subtask4

- $M \leq N \leq 10^9, P = p^c \leq 10^5$，$p$是质数
- 将$n!, m!, (n-m)!$分开求解。

Subtask4

- $M \leq N \leq 10^9, P = p^c \leq 10^5$，$p$是质数
- 将$n!, m!, (n-m)!$分开求解。
- 考虑计算$n!$，显然是可以以P为一个循环节计算的。$m!$和$(n-m)!$需要计算逆元但是逆元不一定存在。

Subtask4

- $M \leq N \leq 10^9, P = p^c \leq 10^5$，$p$是质数
- 将$n!, m!, (n-m)!$分开求解。
- 考虑计算$n!$，显然是可以以P为一个循环节计算的。$m!$和$(n-m)!$需要计算逆元但是逆元不一定存在。
- 对于没有逆元的情况，显然是存在数A使得$\gcd(A, p) \neq 1$。

Subtask4

- $M \leq N \leq 10^9, P = p^c \leq 10^5$，$p$是质数
- 将$n!, m!, (n-m)!$分开求解。
- 考虑计算$n!$，显然是可以以P为一个循环节计算的。$m!$和$(n-m)!$需要计算逆元但是逆元不一定存在。
- 对于没有逆元的情况，显然是存在数A使得$\gcd(A, p) \neq 1$。
- 将数表示成$k * p^x$的形式，因为k存在逆元所以直接乘起来，然后记录p的因子个数。该过程可以把数变成原来的$\frac{1}{p}$递归子问题。

Subtask4

- $M \le N \le 10^9, P = p^c \le 10^5$，$p$是质数
- 将$n!, m!, (n-m)!$分开求解。
- 考虑计算$n!$，显然是可以以P为一个循环节计算的。$m!$和$(n-m)!$需要计算逆元但是逆元不一定存在。
- 对于没有逆元的情况，显然是存在数A使得$\gcd(A, p) \ne 1$。
- 将数表示成$k * p^x$的形式，因为k存在逆元所以直接乘起来，然后记录p的因子个数。该过程可以把数变成原来的$\frac{1}{p}$递归子问题。
- 时间：$O(P + T * P * \log_p N)$，空间：$O(P)$。

Subtask4

- $M \le N \le 10^9, P = \prod p_i^{c_i} \le 10^9$， $p_i^{c_i} \le 10^5$ 且p_i是质数

Subtask4

- $M \le N \le 10^9, P = \prod p_i^{c_i} \le 10^9$，$p_i^{c_i} \le 10^5$ 且p_i是质数
- 对P质因子分解后，每个$p_i^{c_i}$使用Subtask4，然后用中国剩余定理合并答案即可。

Subtask4

- $M \le N \le 10^9, P = \prod p_i^{c_i} \le 10^9$，$p_i^{c_i} \le 10^5$ 且p_i是质数
- 对P质因子分解后，每个$p_i^{c_i}$使用Subtask4，然后用中国剩余定理合并答案即可。
- 时间：$O(P + T * p^c * \log_p N)$，空间：$O(P)$。

BZOJ2142: 礼物

- 你有n件礼物，送给m个人，送给第i个人礼物数量为w_i。 求送礼物的方案数（两个方案被认为是不同的，当且仅当存在某个人在这两种方案中收到的礼物不同），答案对P取模。

BZOJ2142: 礼物

- 你有n件礼物，送给m个人，送给第i个人礼物数量为w_i。求送礼物的方案数（两个方案被认为是不同的，当且仅当存在某个人在这两种方案中收到的礼物不同），答案对P取模。
- 设$P = \prod_i p_i^{c_i}$。

BZOJ2142: 礼物

- 你有n件礼物，送给m个人，送给第i个人礼物数量为w_i。 求送礼物的方案数（两个方案被认为是不同的，当且仅当存在某个人在这两种方案中收到的礼物不同），答案对P取模。
- 设$P = \sum_i p_i^{c_i}$。
- $1 \le n \le 10^9, 1 \le m \le 5, P \le 10^9, p_i^{c_i} \le 10^5$。

BZOJ2142: 礼物

- 这题就是一个模板题，显然$ans = \prod_{i=1}^{m} C_{n-\sum_{j}^{i-1} w_j}^{w_i} \mod P$。

BZOJ2142: 礼物

- 这题就是一个模板题，显然$ans = \prod_{i=1}^{m} C_{n-\sum_{j}^{i-1} w_j}^{w_i} \mod P$。
- 直接套用组合数取模的Subtask6 即可。

容斥原理

- 设S为有限集，有n个集合A_i，A_i为S的子集，$|A_i|$为集合A_i的大小，$\overline{A_i}$ 为A_i在S中的补集。

容斥原理

- 设S为有限集，有n个集合A_i，A_i为S的子集，$|A_i|$为集合A_i的大小，$\overline{A_i}$ 为A_i在S中的补集。
- $$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1} \sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}|$$

容斥原理

- 设S为有限集，有n个集合A_i，A_i为S的子集，$|A_i|$为集合A_i的大小，$\overline{A_i}$ 为A_i在S中的补集。
- $$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1} \sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}|$$
- $$\left|\bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}\right| = |S| - \left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right|$$

欧拉函数

- 倒霉的欧拉函数又被讲课人拎了出来，定义就不做介绍了。

欧拉函数

- 倒霉的欧拉函数又被讲课人拎了出来，定义就不做介绍了。
- 设$n = \sum_{i=1}^{cnt} p_i^{q_i}$

欧拉函数

- 倒霉的欧拉函数又被讲课人拎了出来，定义就不做介绍了。
- 设$n = \sum_{i=1}^{cnt} p_i^{q_i}$
- 根据容斥原理易得

$$\varphi(n) = n*(1-\sum_{k=1}^{cnt}(-1)^{k+1}\sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le cnt}\frac{1}{p_{i_1}}*\frac{1}{p_{i_2}}*\cdots*\frac{1}{p_{i_k}})$$

欧拉函数

- 倒霉的欧拉函数又被讲课人拎了出来，定义就不做介绍了。
- 设$n = \sum_{i=1}^{cnt} p_i^{q_i}$
- 根据容斥原理易得

$$\varphi(n) = n*(1-\sum_{k=1}^{cnt}(-1)^{k+1}\sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le cnt}\frac{1}{p_{i_1}}*\frac{1}{p_{i_2}}*\cdots*\frac{1}{p_{i_k}})$$

- 由乘法分配律易得$\varphi(n) = n*\prod_{i=1}^{cnt}(1-\frac{1}{p_i})$

解决历史遗留问题

- 欧拉定理：若n, a为正整数，且n, a互质，则

$$a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod n$$

解决历史遗留问题

- 欧拉定理：若n, a为正整数，且n, a互质，则

$$a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$$

- 证明：设$x_1, x_2, \ldots, x_{\varphi(n)}$为$\varphi(n)$个与n互质且小于n的正整数。

解决历史遗留问题

- 欧拉定理：若n, a为正整数，且n, a互质，则

$$a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$$

- 证明：设$x_1, x_2, \ldots, x_{\varphi(n)}$为$\varphi(n)$个与n互质且小于n的正整数。
- 设$m_i = a * x_i, (1 \le i \le \varphi(n))$

解决历史遗留问题

- 欧拉定理：若n, a为正整数，且n, a互质，则

$$a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$$

- 证明：设$x_1, x_2, \ldots, x_{\varphi(n)}$为$\varphi(n)$个与n互质且小于n的正整数。
- 设$m_i = a * x_i, (1 \le i \le \varphi(n))$
- 推论1：对于任意$i, j (i \ne j), m_i \not\equiv m_j \pmod{n}$

解决历史遗留问题

- 欧拉定理：若n, a为正整数，且n, a互质，则

$$a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod n$$

- 证明：设$x_1, x_2, \ldots, x_{\varphi(n)}$为$\varphi(n)$个与n互质且小于n的正整数。
- 设$m_i = a * x_i, (1 \leq i \leq \varphi(n))$
- 推论1：对于任意$i, j (i \neq j), m_i \not\equiv m_j \pmod n$
- 推论2：对于任意$i (1 \leq i \leq \varphi(n))$，$m_i \mod n$与$n$互质

解决历史遗留问题

- 欧拉定理：若n, a为正整数，且n, a互质，则

$$a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$$

- 证明：设$x_1, x_2, \ldots, x_{\varphi(n)}$为$\varphi(n)$个与n互质且小于n的正整数。
- 设$m_i = a * x_i, (1 \leq i \leq \varphi(n))$
- 推论1：对于任意$i, j (i \neq j), m_i \not\equiv m_j \pmod{n}$
- 推论2：对于任意$i (1 \leq i \leq \varphi(n))$，$m_i \mod n$与$n$互质
- 由推论1、2可得$\prod_{i=1}^{\varphi(n)} m_i \equiv \prod_{i=1}^{\varphi(n)} x_i \pmod{n}$

解决历史遗留问题

- 设$K=\prod_{i=1}^{\varphi(n)} x_i$

解决历史遗留问题

- 设$K = \prod_{i=1}^{\varphi(n)} x_i$
- $a^{\varphi(n)} * K \equiv K \pmod n$

解决历史遗留问题

- 设$K = \prod_{i=1}^{\varphi(n)} x_i$
- $a^{\varphi(n)} * K \equiv K \pmod{n}$
- $(a^{\varphi(n)} - 1) * K \equiv 0 \pmod{n}$

解决历史遗留问题

- 设$K=\prod_{i=1}^{\varphi(n)} x_i$
- $a^{\varphi(n)} * K \equiv K \pmod{n}$
- $(a^{\varphi(n)}-1) * K \equiv 0 \pmod{n}$
- 显然，K与n互质，所以$a^{\varphi(n)}-1 \equiv 0 \pmod{n}$

前置技能

- 单位函数$e(n)=\begin{cases}1 & n=1\\0 & n>1\end{cases}$

前置技能

- 单位函数$e(n) = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ 0 & n > 1 \end{cases}$
- $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k = e(n+1)$

一道经典题

- 有n个人，编号为1到n。

一道经典题

- 有n个人，编号为1到n。
- 这n个人站成一排，编号为i的人不能站在第i个。求方案数。

一道经典题

- 有n个人，编号为1到n。
- 这n个人站成一排，编号为i的人不能站在第i个。求方案数。
- $n \le 10^5$

一道经典题

- 设$f(n)$为n个人随便站的方案数。

一道经典题

- 设$f(n)$为n个人随便站的方案数。
- 设$g(n)$为恰好n个人站在能站的地方的方案数。

一道经典题

- 设$f(n)$为n个人随便站的方案数。
- 设$g(n)$为恰好n个人站在能站的地方的方案数。
- 显然$f(n)=\sum_{k=0}^{n}C_n^k g(k)$

一道经典题

- 设$f(n)$为n个人随便站的方案数。
- 设$g(n)$为恰好n个人站在能站的地方的方案数。
- 显然$f(n) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k g(k)$
- 但是我们知道$f(n)$要求$g(n)$。

一道经典题

- 显然$g(n)=\sum_{m=0}^{n}e(n-m+1)C_n^m g(m)$。

一道经典题

- 显然$g(n) = \sum_{m=0}^{n} e(n-m+1)C_n^m g(m)$。
- 将$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k$带入。

一道经典题

- 显然$g(n)=\sum\limits_{m=0}^{n}e(n-m+1)C_n^m g(m)$。
- 将$\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k$带入。
-

$$
\begin{aligned}
g(n) &= \sum_{m=0}^{n}\sum_{k=0}^{n-m}(-1)^k C_{n-m}^k C_n^m g(m) \\
&= \sum_{m=0}^{n}\sum_{k=0}^{n-m}(-1)^k C_n^k C_{n-k}^m g(m) \\
&= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k \sum_{m=0}^{n-k} C_{n-k}^m g(m)
\end{aligned}
$$

一道经典题

- 注意到右边的式子即为$f(n-k)$。

一道经典题

- 注意到右边的式子即为$f(n-k)$。
- $$\begin{aligned} g(n) &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k f(n-k) \\ &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k} C_n^k f(k) \end{aligned}$$

一道经典题

- 注意到右边的式子即为$f(n-k)$。
- $$g(n)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k f(n-k)$$
  $$=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k} C_n^k f(k)$$
- 弄个可以做的模数再套一个组合数取模的方法就可以做了。

二项式反演

- $f(n) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k g(k)$

二项式反演

- $f(n)=\sum_{k=0}^{n}C_n^k g(k)$
- $g(n)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}C_n^k f(k)$