一、置换分解

例题：将置换 $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9\\3&6&9&5&7&8&4&2&1\end{pmatrix}$ 表示成对换的乘积

相关定义：置换，轮换，对换

用上述格式表示的置换，表示 1 换为 3、2 换为 6……9 换为 1

第一步：依次找出各个轮换

- 任意一个置换都可以表示为一些不相交轮换的乘积
- 1 换为 3，3 换为 9，9 换为 1——是一个轮换
- 其余类推

解答：$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9\\3&6&9&5&7&8&4&2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3&9\\3&9&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&6&8\\6&8&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&5&7\\5&7&4\end{pmatrix}$

第二步：轮换简写格式

- 对于轮换，只需写出括号内的第一行

解答：$\begin{pmatrix}1&3&9\\3&9&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&6&8\\6&8&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&5&7\\5&7&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3&9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&6&8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&5&7\end{pmatrix}$

第三步：轮换分解为对换

- 公式：$(i_1,i_2,i_3,\cdots,i_k)=(i_1,i_k)(i_1,i_{k-1})\cdots(i_1,i_2)$

解答：$\begin{pmatrix}1&3&9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&6&8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&5&7\end{pmatrix}=(1,9)(1,3)(2,8)(2,6)(4,7)(4,5)$