目　　次

1 图

顾名思义，图论就是图的理论，它的基本研究对象就是图．这里所说的图，既不是几何里的几何图形，也不是美术课里的图，而是一个数学概念．那么什么是图？平面上给定 n 个点 v_1，v_2，…，v_n，其中某些对点之间用边相连，得到的就是一个图，记作 G，v_1，v_2，…，v_n 叫做图 G 的顶点，其集合记作 $V(G)$．图 G所含的顶点个数 n 叫做图 G 的阶．如果图 G 中顶点 v 和 u 之间连边，则所连的边记作 vu，并说顶点 v 和 u 相邻．图 G 中所有的边构成的集合记作 $E(G)$．例如，图 1(a)，(b)，(c)，(d)，(e)所给的都是图（其中图的顶点用小圆圈表示），它们的顶点数分别是 21，32，5，4，8，因而分别是 21，32，5,4,8 阶的图．注意，定义一个图 G

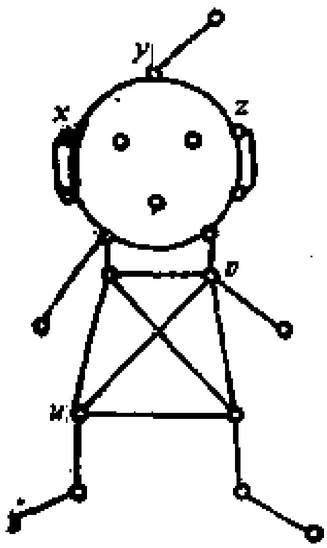


图 1(a)

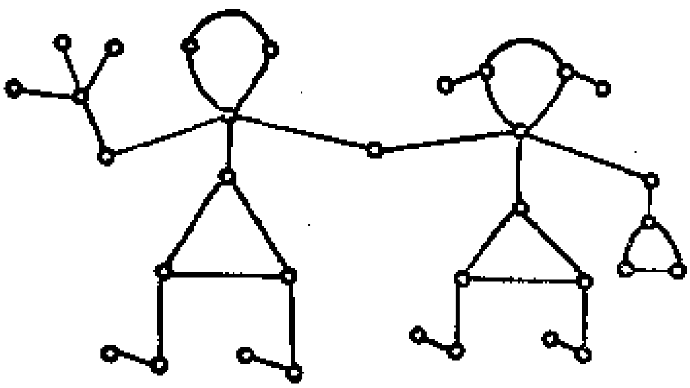


图 1(b)

有两个基本要素，一是图 G 有哪些顶点；二是图 G的顶点之间是如何连边的，即如何相邻的．因此，如果两个顶点相邻，则连接这两个顶点的边可以是直线段，或者是曲线段．例如图1(a)中的边xy和 yz 为曲线边，而 uv 则是直线边．在有的图里，连接两个顶点的边不只一条，例如图 1(d) 中连接顶点 v_1 和 v_3 的边共有三条：e_1，e_2 和 e_3．这样的边叫做**重边**．含有重边的图叫做**重图**．图 1(a) 和图 1(d) 即是重图．在有的图里，有的边的两个端点相重合，这样的边叫做**环**．例如图 1(d) 中的边 e_4 即是一个环．无环、无重边的图叫做**简单图**．例如图 1(b)，(c)，(e)都是简单图，而图1(a)和(d) 则不是．在一个图里，不连边的顶点叫做**孤立点**，图 1 (d)中的顶点 v_4 即是一个孤立点．

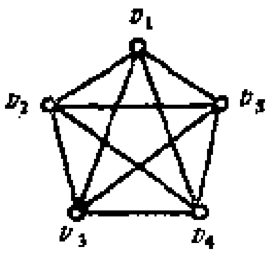


图 1(c)

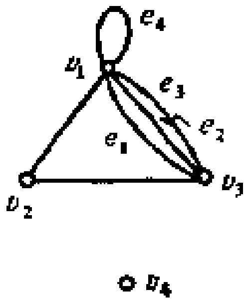


图 1(d)

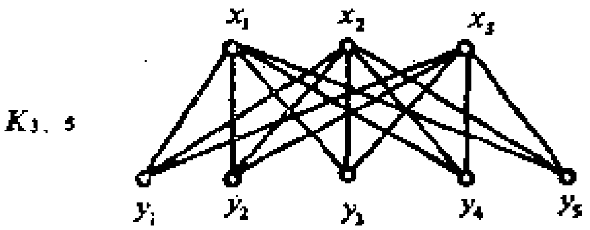


图 1 (e)

设 G 是一个图，v 是图 G 的一个顶点．图 G 中所有和 v 相邻的顶点集合记作 $N(v)$，它叫做**顶点 v 的邻域**．所有以 v 为一端点的边数叫做顶点 v 的**度**，记作$d(v)$．例如，图1(a)的顶点 x，y 和 z 的度分别是 3，3 和 3，图 1(d)的顶点 v_1 的度为 6．注意，环 e_4 的两个端点都是 v_1，所以计入 v_1 的度两次．很明显，对简单图 G 中任意顶点 v，恒有$0 \leqslant d(v) \leqslant n-1$．

设 G 是 n 阶简单图，如果 G 的任意两个顶点都相邻，则 G 叫做 n **阶完全图**，记作 K_n. 例如，图 1(c)即是 5 阶完全图 K_5. 很明显，K_n 的每个顶点的度都是 $n-1$. 顶点的度都是 k 的图叫做 k **正则图**，简称为正则图. 0 正则图中不含边，它也叫做**零图**.

对简单图 G，它的顶点集合 $V(G)$ 可以分划为两个子集 X 和 Y，使得 X 的顶点之间以及 Y 的顶点之间都不相邻，而每条边的端点，一个在 X 中，另一个在 Y 中，则图 G 叫做**二部分图**，或者偶图. 例如，图1(e)即是一个二部分图.

设 G 是二部分图，其顶点集合 $V(G)$ 分划为 X 和 Y，使得 X 中每个顶点和 Y 的所有顶点都相邻，而 X 的顶点之间以及 Y 的顶点之间都不相邻，则 G 叫做**完全二部分图**. 如果 X 与 Y 所含顶点个数分别是 $|X|=n$，$|Y|=m$，则记完全二部分图 G 为 $K_{n,m}$. 例如，图1(e)即是完全二部分图 $K_{3,5}$.

图的概念是从客观世界中抽象出来的. 它提供了一种数学模型. 在现实生活中可以找到许多图的例子. 例如，在一个舞会上，参加舞会的任意两个人，要么相互认识，要么互不认识. 要描述参加舞会的人们之间的相互认识关系就可以用图的概念. 把参加舞会的人视为顶点，其集合记为 V. 对于 u，$v\in V$，如果 u 和 v 所代表的两个人相互认识，则在顶点 u 和 v 之间连一条边，如果 u 和 v 所代表的两个人互不认识，则 u 和 v 之间不连边. 这样便得到一个图. 这个图可以叫做友谊图.

在集合论里，对于给定一个集合 V，一般并不关心集合 V 中元素之间是否有什么联系. 但是在客观世界里，集合 V 中的元素之间总是存在某种关系. 如果集合 V 中的元素之间存在一种关系 φ，使得集合 V 中任意两个元素之间要么具有

关系 φ，要么不具有关系 φ，二者必居其一，且只居其一，则关系 φ 叫做集合 V 的一个**二元关系**．例如，上面所说的舞会上士男倩女们之间的相互认识关系即是一种二元关系．

集合 V 的二元关系 φ 可以用图来表示．把 V 的元素视为顶点，对于 u，$v\in V$，如果 u 和 v 之间具有关系 φ，则让 u 和 v 相邻，否则 u 和 v 不相邻．这样便得到一个图 G．图 G 叫做**集合 V 的二元关系 φ 的实现**．当然，让 u 和 v 相邻，可以在 u 和 v 之间连直线边，也可以连曲线边，得到的图仍然是二元关系的一个实现．所以，集合 V 的二元关系 φ 可以具有不同的实现．尽管如此，由二元关系 φ 得到的图都是关系 φ 的描述．因此，我们说，在定义一个图时有两个基本要素，一是图的顶点，另一是顶点之间是否相邻．图的顶点以及顶点之间的相邻关系确定了，一个图也就确定了．

熟悉了图的概念之后，就可利用它来解数学竞赛中的试题．

例 1 n 人聚会，$n>3$，其中至少有一人没有和其他所有的人握手．聚会中可能和每个人都握手的人数之最大值是多少？

解 先把问题翻译成图论的语言．把参加聚会的人视为顶点，其集合记做 V．对于 u，$v\in V$，如果 u 和 v 所表示的两个人握了手，则令 u 和 v 相邻，否则 u 和 v 不相邻，得到的 n 阶简单图记作 G．已知条件是，参加聚会的人中至少有一人，他至少和一个参加聚会的人不握手．翻译为图论语言即为，图 G 中至少有一个顶点 u，使得 $0\leqslant d(u)\leqslant n-2$．这表明，图 G 不是完全图．要求的是，聚会中和其他所有的人都握手的人数的最大值．用图论的话说即是，求图 G 中度为 $n-1$ 的顶点个数之最大值．于是问题的图论形式是：求所有

n 阶非完全的简单图 G 中度为 $n-1$ 的顶点个数之最大值 m.

由于图 G 是非完全的，所以至少有两个顶点 u 和 v 是不相邻的. 因此 $d(u)\leqslant n-2$，$d(v)\leqslant n-2$. 这表明，$m\leqslant n-2$.

取一个 $n-2$ 阶完全图 K_{n-2}，另取两个顶点 u 和 v. 令 K_{n-2} 中每个顶点都和 u 与 v 相邻，而 u 与 v 不相邻，得到的图记作 $K_{n-2}+u+v$. 很明显，图 $K_{n-2}+u+v$ 不是完全图，而且 $d(u)=d(v)=n-2$，并且对除 u，v 外任意的顶点 x 均有 $d(x)=n-1$. 这表明，$m=n-2$.

再回到原问题上便得到，聚会中和每个人都握手的人数之最大值是 $n-2$.

例 2 有一个团体，由 1982 个人组成，其中任意四个人中都至少有一个人认识其他三个人. 问该团体中认识其他所有的人的成员最少有多少?

解 先把问题翻译为图论语言. 把该团体的成员视为顶点，其集合记作 V. 对于 u，$v\in V$，如果 u 和 v 所表示的两名成员彼此认识，则令 u 和 v 相邻，否则令 u 和 v 不相邻. 得到的是一个 1982 阶简单图 G. 已知条件是，该团体的任意四个人中都至少有一个人认识其他三个人. 用图论的话说就是，图 G 的任意四个顶点中都至少有一个顶点和其他三个顶点相邻. 要求的是，该团体中认识其他所有的人的成员的最小个数，用图论的话说即是，求图 G 中度为 1981 的顶点个数之最小值 m. 于是，原问题的图论形式即是，如果1982阶简单图 G 的任意四个顶点中必有一个顶点和其他三个顶点都相邻，则 G 中至少有多少个度为 1981 的顶点? 下面来解这个问题.

当图 G 为完全图时，图 G 的每个顶点的度都是1981. 所以有1982个度为1981的顶点.

当图 G 是非完全图时，图 G 中必有两个不相邻的顶点 u 和 v，显然有 $d(u)\leqslant 1980$，$d(v)\leqslant 1980$. 因此图 G 中度为1981的顶点之个数 $l\leqslant 1980$. 如果图 G 中除 u 和 v 外另有两个顶点 x 和 y 不相邻，则 u，v，x 和 y 中不存在和其他三个顶点都相邻的顶点，与图 G 所具有的性质矛盾. 因此图 G 中除 u 和 v 外任意两个顶点都相邻. 这说明，对 G 中 u 和 v 之外的任意顶点 x，均有 $d(x)\geqslant 1979$. 如果 G 中除 v 与 u 外的任意顶点 x 都和 u 与 v 相邻，则 $d(x)=1981$. 此时 G 中度为1981的顶点个数为1980. 设 G 中除 u 和 v 外有个顶点 x 和 u 与 v 不都相邻，则由题意，G 中除 u，v 和 x 之外的任意顶点 y 和 u，v 与 x 都相邻. 因此 $d(u)\leqslant 1980$，$d(v)\leqslant 1980$，$d(x)\leqslant 1980$，且 $d(y)=1981$. 所以 G 中度为1981的顶点个数为1979. 这表明，如果1982阶简单图 G 中任意四个顶点中必有一个顶点和其他三个顶点都相邻，则 G 中至少有1979个度为1981的顶点.

再回到原问题，即得：该团体中认识其他所有的人的成员个数最少是1979.

注 如果例2中团体的成员人数改为 n，其他条件不变，则结论为，该团体中至少有 $n-3$ 个人认识其他所有的人.

应当指出，应用图的概念来解数学竞赛试题，其关键在于将原来的问题正确翻译为图论形式. 要正确地完成这一步，必须熟练地掌握上面所介绍的图论术语. 这和在中译英、英译中时必须熟练掌握大量英语词汇相似.

例 3 在某个团体的所有成员中，任意两个相互认识的人都没有公共的熟人，而任意两个互不认识的人都恰有两个公共熟人. 证明，该团体中每个人所认识的人数都相同.

证 和上面一样，先把所要证明的命题翻译成图论语言.

将该团体的成员视为顶点，其集合记作 V. 对于 u, $v\in V$, 当且仅当 u 和 v 所表示的两名成员相互认识时令 u 和 v 相邻. 这样便得到一个简单图 G. 已知条件"任意两个相互认识的人都没有公共熟人，而任意两个互不认识的人都恰有两个公共熟人"的图论形式是：图 G 中任意两个相邻的顶点都没有公共邻点(即和这两个顶点都相邻的顶点)，而任意两个不相邻的顶点都恰有两个公共邻点. 所要证明的结论"该团体中每个人所认识的人数都相同"的图论形式是，图 G 的所有顶点的度都相等，换句话说，要证的是，图 G 是正则图. 于是,原命题的图论形式就是：证明,如果简单图 G 的任意两个相邻顶点都没有公共邻点，而任意两个不相邻顶点都恰有两个公共邻点，则图 G 是正则的. 现在来证明这个结论.

设 u 和 v 相邻，且设 $x\in N(u)\setminus\{v\}$. 由已知条件，相邻的顶点 u 和 v 没有公共邻点，所以 x 和 v 不相邻. 由已知条件，x 和 v 有两个公共邻点，其中 u 是它们的一个公共邻点，另一个记作 y (图 2). 很明显，$y\in N(v)\setminus\{u\}$. 令 x 和 y 相对应,便得到集合 $N(u)\setminus\{v\}$ 到集合 $N(v)\setminus\{u\}$ 的一个映射 φ. 对于 $N(u)\setminus\{v\}$ 中不同的顶点 x 和 z，如果

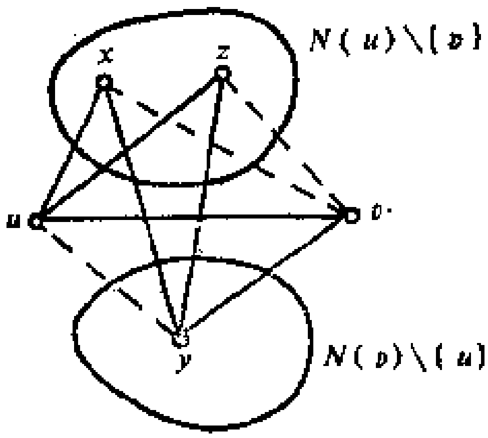


图 2

$\varphi(x)=\varphi(z)=y$，则由已知条件可知，u 和 y 不相邻. 而 u 和 y 具有三个公共邻点 x, z 和 v，和已知条件矛盾. 因此，对 $N(u)\setminus\{v\}$ 中不同的顶点，它们在映射 φ 下的象也不同. 所以映射 φ 是单射. 另一方面，对于任意 $y\in N(v)\setminus\{u\}$，由已知

条件可知，y 和 u 不相邻．于是 y 和 u 恰有两个公共邻点，其中之一为 v，另一个设为 x．很明显，$x\in N(u)\setminus\{v\}$，并且在上述映射 φ 下，x 和 y 相对应．这就证明，映射 φ 是满射．由于 φ 既是单射，又是满射，所以 φ 是双射．换句话说，集合 $N(u)\setminus\{v\}$ 和 $N(v)\setminus\{u\}$ 之间存在一个一一对应．因此它们所含顶点个数相同，从而集合 $N(u)$ 和 $N(v)$ 所含的顶点个数相同．也就是说，相邻的顶点 u 和 v 的度相同．现在设 u 和 v 不相邻，则由已知条件，u 和 v 具有公共邻点 w．由上述证明，u 和 w 的度相同，而 w 和 v 的度相同，从而 u 和 v 的度相同．这就证明，G 图是正则的．

注 1 例 3 所说的命题的图论形式也可以用下面的方法证明．仍如图 2，设 G 的顶点 u 和 v 相邻．考虑连接集合 $N(u)\setminus\{v\}$ 的顶点和 $N(v)\setminus\{u\}$ 的顶点之间的边数．对每个 $x\in N)u)\setminus\{v\}$，由于 x 和 v 不相邻，所以由已知条件，x 恰和 $N(v)\setminus\{u\}$ 中一个顶点相邻，即由 x 到 $N(v)\setminus\{u\}$ 的顶点恰连有一条边．因此，集合 $N(u)\setminus\{v\}$ 的顶点和 $N(v)\setminus\{u\}$ 的顶点之间所连的边数应为 $|N(u)\setminus\{v\}|$，这里 $|X|$ 表示集合 X 的元素个数．同理，集合 $N(v)\setminus\{u\}$ 的顶点和 $N(u)\setminus\{v\}$ 的顶点之间所连的边数为 $|N(v)\setminus\{v\}|$．由此得到，$|N(u)\setminus\{v\}|=|N(v)\setminus\{u\}|$．这表明，$d(u)=|N(u)|=|N(v)|=d(v)$．所以 G 中相邻的顶点具有相同的度．对不相邻的顶点，证明和例 3 给出的相同．

注 2 例 3 和**强正则图**有关．设简单图 G 是 k 正则的，并且 G 中任意两个相邻的顶点都恰有 λ 个公共邻点，任意两个不相邻的顶点都恰有 μ 个公共邻点，则图 G 叫做 (k,λ,μ)-**强正则的**，简称为强正则的．n 阶强正则图 G 的参数 k，λ，μ 满足许多恒等式，例如有

$$k(k-\lambda-1)=(n-1-k)\mu, \qquad (1)$$

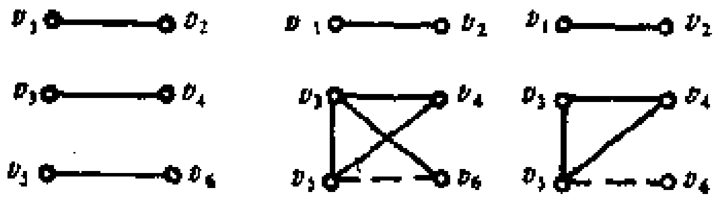
强正则图是一类具有重要意义的图，它是图论研究中的一个重要对象，其中有许多问题迄今尚未解决．例如，对于什么样的参数 k，λ，μ，(k, λ, μ)-强正则图一定存在，即是令人注目的尚待研究的问题．最简单情形是 $\lambda=0$，$\mu=1$．对此已经证明，如果$(k, 0, 1)$-强正则图 G 存在，则 k 只能是 2，3，7，或 57．当 k 为2，3，或 7 时，$(k, 0, 1)$-强正则图存在而且唯一．当 $k=57$ 时，由式(1)可以求得 $n=3250$．但是，3250 级 $(57, 0, 1)$-强正则图是否存在，至今仍是一个未加解决的问题．我国著名统计学家张里千教授对强正则图曾经做出重要贡献，他在50 年代末期到60 年代初期发表的几篇关于区组设计的论文至今仍被专家们广泛引用，显示了这些文章的强大生命力．对强正则图这一课题有兴趣的读者可以参考著名图论学家拜内克(L. W. Beineke)与威尔逊(R. J. Wilson) 合编的《图论课题选》(Selected Topics in Graph Theory)一书中由英国著名代数组合学家卡默隆 (P. J. Cameron)撰写的“强正则图”这一章．

例 4　有一工厂，用六种颜色的纱生产双色布．在生产过程中，每种颜色的纱至少和三种其他颜色的纱搭配．证明，在生产的双色布中，一定可以找出三种不同的双色布，它们含有所有六种颜色．

证　先把所要证明的命题翻译成图论语言．用六个顶点表示六种颜色的纱，其集合记作 V．对于 u，$v\in V$，当且仅当 u 和 v 所表示的两种颜色的纱在生产过程中搭配生产出一种双色布时，令 u 和 v 相邻，得到的是 6 阶简单图 G．已知条件是，每种颜色的纱至少和三种其他颜色的纱搭配．也就是说，图 G 中每个顶点都至少和其他三个顶点相邻．换句话说，对每个 $u\in V$，均有 $d(u)\geqslant 3$．要证明的是，图G 中含有三条

边(即三种不同的双色布)，其中任意两条边都没有公共端点(即任意两种不同的双色布都没有相同颜色的纱，也就是说，这三种不同的双色布包含所有六种颜色的纱)．于是，所要证明的命题的图论形式是，如果 6 阶图 G 中每个顶点的度至少为3，则 G 含有三条两两无公共端点的边．现在证明这个命题．

因为图 G 中每个顶点的度至少为 3，所以图 G 不是零图，即图 G 含有边．设图 G 中顶点 v_1 和 v_2 相邻．再取顶点 $v_3\in V$，$v_3\neq v_1$，v_2．因为 $d(v_3)\geqslant 3$，所以 v_3 和 G 中 v_1，v_2 外的某个顶点 v_4 相邻．图 G 中尚余下两个顶点 v_5 和 v_6．如果 v_5 和 v_6 相邻，则 v_1v_2，v_3v_4 和 v_5v_6 即是所需要的三条边(图



(a)　　(b)　　(c)

图　3

3(a))．下面设 v_5 和 v_6 不相邻（图3(b)，其中虚线表示不相邻)．由于 $d(v_5)\geqslant 3$，$d(v_6)\geqslant 3$，所以图 G 中集合 $\{v_5, v_6\}$ 的顶点与 $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ 的顶点之间至少有六条边．这六条边至少有三条边，其中每条边的一个端点在集合 $\{v_1, v_2\}$ 或 $\{v_3, v_4\}$ 中．不妨设这三条边中每条边都有一个端点在集合 $\{v_3, v_4\}$ 中．而这三条边都是以 v_5 或 v_6 为一端点的．不妨设其中有两条边是以 v_5 为一端点的．于是，另一条边必以 v_6 为一端点．如果这条边为 v_3v_6 (图 3(c))，则 v_1v_2，v_3v_6 和 v_4v_5 即是所需要的三条边；如果为 v_4v_6，则 v_1v_2，v_3v_5 和 v_4v_6 即为所求三条边．

注 从例 3 和例 4 可以看出，当我们把具体问题翻译成图论问题之后，我们便可以将图在平面上画出来．然后利用所画的图帮助我们进行分析和推理．这正是应用图论来解数学竞赛题的长处，很有点平面几何的味道．前面提到的著名代数组合学家卡默隆曾经说过，从某种意义上讲，图论实际上是一种几何学．这话不无道理．

例 5 有一个参观团，其中任意四个成员中总有一名成员，原先见过其他三名成员．证明，在任意四名成员中，总有一名成员，原先见过参观团的所有成员．

证 参观团的成员用顶点表示，其集合记作 V．对于 u，$v\in V$，当且仅当 u 和 v 所表示的两名成员原先见过面时令 u 和 v 相邻，得到的图记作 G．已知条件是，图 G 的任意四个顶点中至少有一个顶点和其他三个顶点都相邻．欲证的是，图 G 的任意四个顶点中至少有一个顶点和 G 的其他所有顶点都相邻．现在证明这个图论命题．

用反证法．设命题不成立，则图 G 中具有四个顶点 x，y，z，w，它们和图 G 的其他所有顶点不都相邻．于是存在四个顶点 x'，y'，z'，w'，它们依次与 x，y，z，w 不相邻．由已知条件，顶点 x，y，z，w 中必有一个顶点和其他三个顶点都相邻．不妨设这个顶点为 x（图 4）．因此 x' 不是 y，z，w 中的一个，且 y' 与 x 是不同的两个顶点．如果 y' 与 x' 不同，则 x，y，x'，y' 中没有一个顶点和其他三个顶点都相邻，和已知条件矛盾．所以 x' 和 y' 重合．同理可证，x' 和 z' 重合．于是 x' 和 y，z，w 都不相邻，和已知条件矛盾．这就证

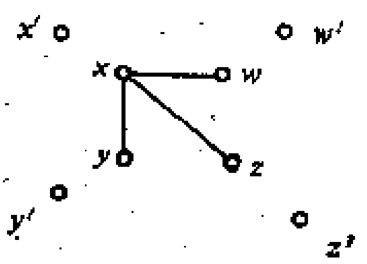


图 4

明，图 G 的任意四个顶点中至少有一个顶点和 G 的其他所有顶点都相邻.

注 细心的读者也许会发现，例 5 所证明的图论命题和例 2 的图论问题有着密切联系. 例 2 的图论结果是：如果 n 阶简单图 G 的任意四个顶点中至少有一个顶点和其他三个顶点都相邻，则图 G 中至少有 $n-3$ 个顶点，它们和图 G 的其他所有顶点都相邻. 事实上，例 5 和这一结论是等价的. 请读者自行证明.

例 6 24个国家参加国际数学竞赛的命题审议会. 每个国家代表团由两个人组成，一名团长，一名团员. 会上，某些与会者相互握手. 同一个国家的两名代表不握手. 会下，A 国团长问其他所有与会者，他们与人握手的次数，得到的答案都不相同. 问 A 国团员和多少人握过手？

解 用顶点表示代表团成员，其集合记作 V. 对于 u，$v\in V$，当且仅当 u 和 v 所表示的两名成员在会上握手时令 u 和 v 相邻，得到的是一个68阶简单图 G. 由于同一个国家的两名代表不握手，所以对任意 $u\in V$，$0\leqslant d(u)\leqslant 66$. 设A国团长用顶点 x 表示. 图 G 中除 x 外尚有67个顶点，它们的度各不相同. 因此必有一个顶点 v，其度为 0，即 v 和 G 中其他所有顶点都不相邻. 所以，如果顶点 w 表示的代表和顶点 v 所表示的代表来自同一个国家，则 $d(w)=66$. 从图 G 中去掉 v 和 w，得到的66阶图记作 G_1. 则 x 是 G_1 的一个顶点，并且 G_1 中除 x 外，其他顶点的度也都不相同. 因此和上述证明相同，G_1 中含有度分别为 0 和64的顶点 p 和 q. 它们在原来的图 G 中的度分别为 1 和65. 如此继续，即可证明，对于 $0\leqslant j\leqslant 33$，图 G 中含有顶点 x_j 和 y_j，它们的度分别为 j 和 $66-j$，而且所表示的代表属于同一个国家，其中 $x_{33}=x$. 所

以 $d(y_{33})=33$. 因此，A国团员的握手次数为33.

注 设 G 是 n 阶简单图. 可以将 G 的 n 阶顶点编号为 $v_1,v_2,\cdots,v_n$，使得 $d_i=d(v_i)$，$i=1,2,\cdots,n$ 满足 $d_1\leqslant d_2\leqslant\cdots\leqslant d_n$，则非降的非负整数序列 $(d_1,d_2,\cdots,d_n)$ 称为图 G 的**度序列**. 根据图的度序列来研究图的性质，是图论研究的一个重要课题. 例 6 即是根据图的度序列来解问题. 这是应用图论解数学竞赛题的一种典型方法，必须引起重视.

习 题 一

1. 证明，在任意一群人中，至少有两个人，他们的朋友数目相同.
2. 一次足球邀请赛有 16 个城市参加，每个城市派出甲、乙两个球队. 按照比赛规则，每两个球队至多比赛一场，而且同一个城市的两个球队不进行比赛. 比赛若干天后进行统计，发现除 A 市甲队外，其他各队已赛过的场数各不相同. 问 A 市乙队已赛过多少场?请证明你的结论.
3. 有 $2n$ 个人，$n\geqslant 2$，每个人都至少认识其中 n 个人. 证明，其中必有四个人，他们围着圆桌入坐时，每个人旁边坐的都是熟人.
4. 一次高难度的数学竞赛由初试和复试两部份题目组成，两试共有28道题，每名参赛者都恰好解出 7 道题，这 28 道题中每对题目都恰好有两人解出. 证明，一定有一名参赛者，他要么至少解出初试中的 4 道题，要么初试题一个也没有解出.
5. 某次会议有 n 名教授 $P_1,P_2,\cdots,P_n$参加. 证明，可以将这 n 位教授分成两个组，使得每个教授 P_i 在同一组中所认识的人数 d_i^* 不超过他在另一组中所认识的人数，$i=1,2,\cdots,n$.
6. 毕业舞会有男女学生各 n 人参加，$n>2$. 每个男生都和一些但非全部的女生跳过舞，每个女生也都和一些但非全部的男生跳过舞. 证明，总有两名男生 B_1，B_2 和两名女生 G_1，G_2，使得 B_1 和 G_1，B_2 和 G_2 跳过舞，但 B_1 和 G_2，B_2 和 G_1 都未跳过舞.
7. 某个俱乐部，共有 99 名成员，每个成员都声称他只愿意和自己认

识的人一起打桥牌．已知每个成员都至少认识67名成员．证明，一定有4名成员，他们可以在一起打桥牌．数字67能否减少？

8. 18支球队进行比赛．在每轮比赛中每个球队都和另一个球队比赛一场，而且凡在以前曾经作为对手一起赛过的两个球队不再比赛．比赛进行了8轮．证明，必有三个球队，彼此之间尚未比赛过．

9. 有三所中学，每所中学都有n名学生．每个学生都认识其他两所中学的$n+1$个学生．证明，一定可以在三所中学中各选出一个学生，使得所选出来的三个学生彼此认识．

10. 设A_1，A_2，…，A_{2n+1}是集合B的子集，它们满足

(1)每个子集A_i都恰有$2n$个元素；

(2)$A_i\cap A_j$恰含一个元素，$1\leqslant i<j\leqslant 2n+1$；

(3)集合B的每个元素至少属于两个子集A_i．

问：对怎样的正整数n，可以将集合B的每个元素标上0或1，使得每个子集A_i中都恰含有n个标上0的元素？

11. 平面上有n个点，其中任意三点不共线．对其中任意一个点，这n个点中至少有k个点到它的距离相等．证明，$k\geqslant\frac{1}{2}+\sqrt{2n}$.

2 度和边数

设 G 是 n 阶图，它的顶点集合为 $V=\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$，顶点 v_i 的度为 d_i，$i=1, 2, \cdots, n$，其中 $d_1 \leqslant d_2 \leqslant \cdots \leqslant d_n$. 图 G 中所有边的条数记作 $q(G)$. 在一个图的顶点的度和边数之间存在密切的联系，即有下面的定理.

定理 1 n 阶图 G 中所有顶点的度之和是它的边数的二倍，即有

$$\sum_{v \in V} d(v) = d_1 + d_2 + \cdots + d_n = 2q(G).$$

证 根据顶点的度的定义，d_1 表示以 v_1 为一个端点的边数，d_2 表示以 v_2 为一个端点的边数，$\cdots$，d_n 表示以 v_n 为一个端点的边数. 因此 $\sum\limits_{v \in V} d(v) = d_1 + d_2 + \cdots + d_n$ 表示以 v_1, v_2, $\cdots$, v_n 中每个顶点为一个端点的边数的和. 由于每条边有两个端点（以 v 为顶点的环的两个端点都是 v），因此图 G 的每条边在和 $\sum\limits_{v \in V} d(v) = d_1 + d_2 + \cdots + d_n$ 中被计入两次. 所以，所有顶点的度之和为边数 $q(G)$ 的二倍. 定理 1 证毕.

定理 1 是图论中最早出现的一个基本定理. 它最早出现在著名数学家欧拉（L. Euler）为解决哥尼斯堡七桥问题而撰写并于1736年发表的论文里，是解决哥尼斯堡七桥问题的主要依据. 这个定理有许多重要的应用，它是解决数学竞赛中有关问题的一个有力工具.

例 1 证明，在任意一群人中，认识这群人中奇数个人的人数为偶数.

证 用顶点表示这群人中的人，其集合记作 V. 对于 $u, v\in V$，当且仅当 u 和 v 所表示的两个人相互认识时令 u 和 v 相邻，得到的图记作 G. 图 G 中度为奇数的顶点叫做奇顶点. 很明显，当且仅当顶点 u 所代表的人认识这群人中奇数个人时顶点 u 为奇顶点. 于是，所要证明的图论命题是，任意一个图中奇顶点的个数应为偶数. 现在证明这个图论命题.

图 G 中所有奇顶点的集合与所有偶顶点(即度为偶数)的集合分别记作 U 和 W. 很明显，U, W 是 G 的顶点集合 V 的一个分划. 于是，由定理 1，

$$2q(G)=\sum_{v\in V}d(v)=\sum_{u\in U}d(u)+\sum_{w\in W}d(w),$$

即

$$\sum_{u\in U}d(u)=2q(G)-\sum_{w\in W}d(w).$$

由于对每个顶点 $w\in W$，度 $d(w)$ 为偶数，所以其和 $\sum\limits_{w\in W}d(w)$ 也是偶数. 因此上式右端是偶数. 由于对每个顶点 $w\in W$，度 $d(w)$ 是奇数，所以上式左端 $\sum\limits_{u\in U}d(u)$ 是奇数之和. 如果 U 所含顶点个数为奇数，则因奇数个奇数之和应为奇数，故和 $\sum\limits_{u\in U}d(u)$ 为奇数，与右端为偶数相矛盾. 因此集合 U 所含的顶点个数必是偶数，即是说，图 G 中奇顶点的个数为偶数.

注 上例中用到这样一个简单而重要的事实，即奇数个奇数之和必是奇数，而不是偶数. 这一事实人们称之为“奇偶性原理”. 奇偶性原理在解题中经常被引用.

例 2 证明，不存在具有奇数个面而且每个面具有奇数条边的多面体.

证 用反证法. 设这样的多面体存在. 用顶点表示这个多面体的面，其集合记作 V. 对于 $u, u\in V$，当且仅当顶点 u 和 v 所表示的两个面具有公共的边时令顶点 u 和 v 相邻，得

到的图记作G. 由于多面体具有奇数个面，所以V含有奇数个顶点. 由于每个面具有奇数条边，而每条边又都为两个面所共有，因此，对每个顶点$v\in V$，它的度$d(v)$为奇数. 由定理1，

$$\sum_{v\in V}d(v)=2q(G).$$

上式左端是奇数个奇数之和，所以是奇数. 上式右端为偶数，矛盾. 这就证明，不存在具有奇数个面而且每个面都具有奇数条边的多面体.

例 3 平面上给定n个点v_1，v_2，…，v_n，其中任意两点的距离至少是1. 证明，至多有$3n$对点，每对点的距离恰好是1.

证 将n个点v_1，v_2，…，v_n视为n个顶点，其集合记作V. 对于u，$v\in V$，当且仅当点u和v之间的距离恰好为1时令顶点u和v相邻，得到的图记作G. 设$x\in V$. 很明显，图G中和顶点x相邻的顶点都落在以点x为圆心而半径为1的圆周L上. 由于图G的任意两个顶点的距离至少是1，因此圆周L上至多含有图G的6个顶点. 这表明，顶点x的度$d(x)$一定不大于6. 于是，由定理1，有

$$2q(G)=\sum_{x\in V}d(x)\leqslant 6n.$$

由此得到，$q(G)\leqslant 3n$. 这就证明，图G至多含有$3n$条边. 也就是说，平面上给定的n个点v_1，v_2，…，v_n中，至多有$3n$对点，每对点的距离恰好是1.

例 4 证明，在凸n边形中，不能选取出多于n条对角线，使得其中任意两条对角线都有公共端点.

证 设S是凸n边形A的对角线集合，其中任意两条对角线都有公共端点，并设S所含对角线的条数为k. 用凸n

边形 A 的顶点作为图 G 的顶点，其集合记作 V. 对于图G的顶点 u，$v\in V$，当且仅当 u 和 v 所确定的对角线属于 S 时令 u 和 v 相邻. 这样得到的图便是图 G. 对任意顶点 $x\in V$，凸多边形 A 中以 x 为端点的对角线有 $n-3$ 条，因此，顶点 x 的度 $d(x)$ 满足 $0\leqslant d(x)\leqslant n-3$. 记图 G 中度为 i 的顶点集合为 V_i，$i=0, 1, \cdots, n-3$，则 V_0，V_1，$\cdots$，V_{n-3} 是图 G 的顶点集合 V 的一个分划. 设集合 V_i 所含顶点的个数为 a_i，$i=0, 1, \cdots, n-3$，则有

$$a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{n-3}=n. \tag{1}$$

由于集合 S 所含对角线共有 k 条，所以图 G 所含的边的条数为 $q(G)=k$. 于是由定理 1 得到，

$$a_1+2a_2+\cdots+(n-3)a_{n-3}=2k. \tag{2}$$

最后，考虑图 G 中 1 度顶点的个数 a_1. 设 x 是图 G 的i 度顶点. 当 $i=1$ 时，顶点 x 不能和图 G 中其他的 1 度顶点相邻. 否则设 x 和1度顶点 y 相邻，则以 x 和 y 为端点的对角线 l 属于 S. 由于 x 和 y 都是 1 度顶点，所以对角线 l 将和集合 S 中其他对角线都没有公共端点，矛盾. 当 $i\geqslant 3$时，集合 S 中含有 i 条以顶点 x 为一个端点的对角线. 这 i 条对角线中有两条所谓最外面的对角线 xv_1 和 xv_i（图 5）. 设 xy 是里面的一条对角线. 如果顶点 y 和其他顶点 z 相邻，则不论顶点 z 位于"内部"或者"外部"，对角线 yz 一定与 xv_1 或 xv_i 没有公共端点，和集合 S 的意义相矛盾. 因此，顶点 y 是 1 度顶点. 所以对一个i 度顶点 x，至少相应有 $i-2$个 1 度顶点 y. 于是得到下面的不等式：

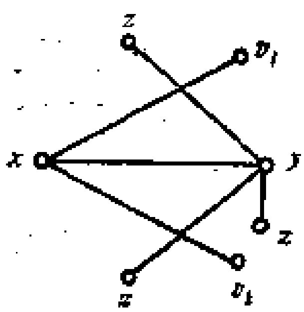


图 5

$$a_1\geqslant a_3+2a_4+\cdots+(n-5)a_{n-3}. \tag{3}$$

由式(2)得到,

$$
\begin{aligned}
2k &= a_1+2a_2+3a_3+\cdots+(n-3)a_{n-3} \\
&= (a_1+2a_2+2a_3+\cdots+2a_{n-3}) \\
&\quad +(a_3+2a_4+\cdots+(n-5)a_{n-3}).
\end{aligned}
$$

由式(3)得到,

$$
\begin{aligned}
2k &\leqslant (a_1+2a_2+2a_3+\cdots+2a_{n-3})+a_1 \\
&= 2(a_1+a_2+\cdots+a_n),
\end{aligned}
$$

由式(1)得到, $2k\leqslant 2n$, 即有 $k\leqslant n$. 这就证明，如果凸n边形 A 的对角线集合 S 中任意两条对角线都有公共端点，则集合 S 中所含对角线至多有 n 条. 换句话说,在凸 n 边形A中，不能选取出多于 n 条的对角线，使得其中任意两条对角线都有公共端点.

注 例4表明，尽管关于度和边数的定理1是解决问题的一个有力武器. 但是，有些数学竞赛试题比较复杂，光靠一个定理未必能够解决问题. 对问题进行多方面分析，尽可能多地寻求出关于度的关系，然后才可能使问题得到顺利解决. 这就要求我们不但能够熟练掌握有关图的知识，而且也要把其他所学知识灵活应用到解题上来. 下面再举一例.

例 5 由 n 个元素 a_1, a_2, …, a_n 组成 n 个元素对 P_1, P_2…, P_n, 当且仅当元素 a_i 和 a_j 组成其中一个元素对时，元素对 P_i 和 P_j 含有公共元素. 证明，每对元素恰好属于两个元素对.

证 把元素视为顶点，其集合记作 V. 对于顶点 a_i 和 a_j, 当且仅当元素 a_i 和 a_j 组成 P_1, P_2, …, P_n 中一个元素对时，令顶点 a_i 和 a_j 相邻，得到的 n 阶简单图记作 G. 很明显，图 G 的边数 $q(G)$ 等于 n. 设顶点 a_i 的度为 d_i, $i=1$, 2, …, n. 由定理1, 有

$$d_1+d_2+\cdots+d_n=2n. \tag{1}$$

另一方面，顶点 a_i 连有 d_i 条边，其中任意两条边 P_k和 P_l具有公共元素 a_i. 由已知条件可知，元素对 P_k 和 P_l 组成的对子(P_k, P_l)唯一确定 P_1, P_2, …, P_n 中由元素 a_k 和 a_l 所决定的元素对，也即唯一确定图 G 中连结顶点 a_k 和 a_l 的边. 以 a_i 为公共元素的元素对 P_k 和 P_l 所组成的对子 (P_k, P_l) 共有 $C_{d_i}^2$ 个，它们相应确定了图 G 中 $C_{d_i}^2$ 条不同的边. 由于不同的元素对 P_k 和 P_l 至多有一个公共元素，因此由元素对 P_1, P_2, …, P_n 中某两个具有公共元素的元素对所组成的对子 (P_k, P_l) 总有 $C_{d_1}^2+C_{d_2}^2+\cdots+C_{d_n}^2$ 个. 反之，由已知条件可知，图 G 中每条边也唯一确定由一对具有公共元素的元素对P_k和 P_l 所组成的对子(P_k, P_l). 因此有

$$C_{d_1}^2+C_{d_2}^2+\cdots+C_{d_n}^2=n. \tag{2}$$

即有

$$d_1^2+d_2^2+\cdots+d_n^2=2n+(d_1+d_2+\cdots+d_n),$$

由式(1)得到，

$$d_1^2+d_2^2+\cdots+d_n^2=4n.$$

于是，由哥西不等式得到，

$$\frac{1}{n}(d_1+d_2+\cdots+d_n)^2\leqslant d_1^2+d_2^2+\cdots+d_n^2=4n.$$

再由式(1)得到，

$$4n=\frac{1}{n}(d_1+d_2+\cdots+d_n)^2\leqslant d_1^2+d_2^2+\cdots+d_n^2=4n.$$

因此，

$$\frac{1}{n}(d_1+d_2+\cdots+d_n)^2=d_1^2+d_2^2+\cdots+d_n^2,$$

所以 $d_1=d_2=\cdots=d_n$. 由式 (1)，$d_1=d_2=\cdots=d_n=2$. 这就

证明，图G是2正则的，换句话说，每个元素恰好属于两个元素对．

习 题 二

1．n名选手进行对抗赛，每名选手至多赛一场，每场两名选手参加，已赛完$n+1$场．证明，至少有一名选手赛过三次．

2．证明，3正则图的阶数必是偶数．

3．设U是图G的顶点集合V的子集，图G中所有恰有一个端点属于集合U的边共有k条．证明，k和集合U中奇顶点（即度为奇数的顶点）的个数具有相同的奇偶性．

4．在象棋比赛中，每名选手和其他所有选手各赛一局，每局赢者得2分，输者得0分，如果平局，则两名选手各得1分．今有四个同学统计了比赛中所有选手的得分总数，分别是1979，1980，1984，1985．经核实，确有一个同学统计无误．这次比赛共有多少名选手参加？

5．一群象棋选手，共n名，$n\geqslant 3$．把他们分成三组进行比赛，同一组的选手都不比赛，不同组的任意两名选手都要比赛一盘．证明，要想使比赛的总盘数最多，应按任意两组的选手至多相差一名的办法分组．

6．7个男孩和7个女孩在一起开舞会，舞会结束后，每人都记下和自己跳过舞的人数如下：3，3，3，3，3，5，6，6，6，6，6，6，6，6．证明，一定有人弄错了．

7．平面上有n个点，$n\geqslant 3$，任意两点的距离之最大值为d，而且连接其中两点的长为d的线段叫做这n个点的直径．证明，这n个点至多有n条直径．

3 欧拉回路

在上节已经提到，被公认为是图论历史上第一篇论文的是著名数学家欧拉为解决所谓哥尼斯堡七桥问题而写的文章.古城哥尼斯堡位于普瑞格尔河的两岸及河中的两个岛上，城市的各个部分由七座桥连接(图 6). 十八世纪，哥尼斯堡

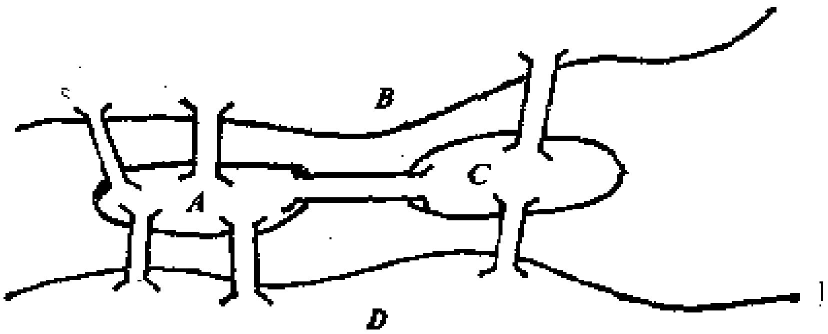


图 6

属于东普鲁士(现为苏联的加里宁格勒). 那时候，哥尼斯堡市民生活富足. 每到星期天，市民们喜欢四处散步. 于是便产生这样的问题：是否可以设计一种方案，使得人们从自己家里出发，经过每座桥恰好一次，最后回到家里. 尽管许多人试图解决这个问题，但是谁也没有给出答案. 哥尼斯堡七桥问题引起了欧拉的兴趣. 他从人们的失败中敏锐地悟到，也许那样的方案根本就不存在.1736年,年方二十九岁的欧拉终于解决了这个问题,并在彼得堡科学院报告了自己的结果.欧拉的文章不仅仅是解决了一个难题，而且标志着一个新的数学分支——图论的创立. 这一节将介绍欧拉的工作.为此，先介绍一些基本的术语.

设 G 是一个图，x_0，x_1，…，x_k 是图 G 的某些顶点．如果图 G 含有边 $e_1=x_0x_1$，$e_2=x_1x_2$，…，$e_k=x_{k-1}x_k$，则由 x_0，x_1，…，x_k 和 e_1，e_2，…，e_k 组成的点边交错序列 $(x_0,\ e_1,\ x_1,\ e_2,\ x_2,\ \cdots,\ x_{k-1},\ e_k,\ x_k)$ 叫做图 G 的一条长为 k 的**通路**，记作 $x_0x_1x_2\cdots x_k$．如果一条通路中所有的边都不同，则称它是一条**迹**．如果通路中所有的顶点都不同，则称它是一条**道路**．始点和终点相重合的通路叫做**闭通路**，如果一条闭通路除始点和终点相重合外其他顶点都不相同，则称它为**圈**．长为 n 的道路和圈分别记作 P_n 和 C_n．边各不同的闭通路叫做**回路**．例如，在图 7 中，$x_1x_2x_1x_6x_8x_{10}x_7x_2x_3$ 是一条通路；$x_1x_2x_7x_9x_4x_5x_2$ 是一条迹；$x_1x_2x_7x_{10}x_5x_4x_3$ 是一条道路；$x_1x_2x_7x_{10}x_5x_1$ 则是一个长为 5 的圈，而 $x_1x_6x_9x_7x_8x_1$ 则是一条回路．

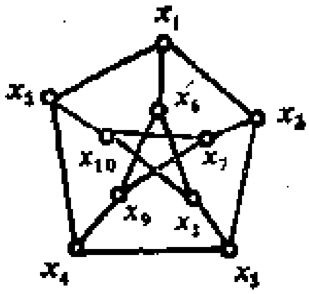


图 7

设 G 是一个图．如果图 G 是一阶图，或者图 G 的阶大于 1，并且对图 G 中任意两个顶点 u 和 v，总有一条以 u 为始点且以 v 为终点的通路，则图 G 叫做**连通图**，否则图 G 叫做不连通的．图 7 所给的图即是连通的．

可以想见，对给定的图 G，它的顶点的度越大，它的边数也就越大，任意两个顶点之间有通路相连接的可能性越大，因此图 G 越有可能是连通的．当然，这仅仅是一种直观的想象．事实上，图的连通性和它的顶点的度之间确实存在密切联系．

定理 1 设 G 是 n 阶简单图．如果图 G 中顶点的最小度 $\delta(G)$ 满足 $\delta(G)\geqslant\frac{n-1}{2}$，则图 G 是连通的．

证 用反证法．设图 G 是不连通的，则图 G 的顶点集合 V 可以分划为二个子集 U 和 W，使得集合 U 中的顶点与 W 中的顶点之间不存在通路，特别 U 中的顶点与 W 中的顶点互不相邻．集合 U 和 W 中至少有一个，不妨设为 U，它所含顶点个数不超过$\frac{n}{2}$．因此，U 中顶点的度至多为$\frac{n-2}{2}$，和假设 $\delta(G)\geqslant\frac{n-1}{2}$相矛盾．

在数学竞赛中经常会遇到和图的连通性有关的试题．下面是一些例子．

例 1 有 $2n$ 部电话交换台，每部电话交换台都至少和n部电话交换台有直通线路连接．证明，其中任意两部电话交换台都可以进行一次通话（允许通过别的交换台）．

证 用顶点表示交换台，其集合记作 V．对于 $u,v\in V$，当且仅当 u 和 v 表示的两部交换台有直通线路连接时令 u 和 v 相邻，得到的是 $2n$ 阶简单图．由于每部交换台都至少和n部交换台连接直通线路，所以图 G 中每个顶点的度至少是 n，即图G的顶点的最小度$\delta(G)\geqslant\frac{2n-1}{2}$．由定理 1，图 G 是连通的．于是由定义，对图 G 中任意两个顶点 u 和 v，总有一条以 u 为起点且以 v 为终点的通路 $x_0x_1x_2\cdots x_k$，其中$x_0=u$，$v=x_k$．由于连接顶点 x_{i-1} 和 x_i $(i=1, 2, \cdots, k)$ 的边即是连接交换台 x_{i-1} 和 x_i 的直通线路，所以只要接线生按照直通线路 x_0x_1，x_1x_2，$\cdots$，$x_{k-1}x_k$ 的顺序接线，则交换台 u 和 v 就可以实现一次通话．

例 2 平面上有 n 个点，其中某些对点用线段连接．已知任意两点都有道路相连接（即可从其中一点开始，沿着已经连接的线段，到达另一点），而且连接的道路是唯一的．证明，

所连接的线段共有 $n-1$ 条.

证 用 n 个顶点表示平面上给定的 n 个点. 对于顶点 u 和 v，当且仅当 u 和 v 表示的两个点用线段连接时令 u 和 v 相邻，得到的是 n 阶简单图 G. 由于图 G 中任意两个顶点都有通路相连接(即 n 个点中任两点都有道路相连)，所以图 G 是连通的. 下面证明,图 G 至少含有 $n-1$ 条边. 事实上，因为图 G 是连通的，所以图 G 中每个顶点 x 的度 $d(x)\geqslant 1$. 如果图 G 中所有顶点的度都至少是 2，则由上节定理 1，

$$2q(G)=\sum_{x\in V}d(x)\geqslant 2n,$$

其中 $q(G)$ 是图 G 的边数，于是有 $q(G)\geqslant n$. 现在设图 G 含有 1 度顶点 x. 从图 G 中去掉顶点 x 连同以 x 为端点的边，得到的图记作 G^*. 图 G^* 是 $n-1$ 阶的，而且是连通的. 如果结论对图 G^* 成立，即设 $n-1$ 阶连通图至少有 $n-2$ 条边，则图 G 至少具有 $n-1$ 条边. 只要把上面的话用归纳法形式改写一下，可知结论成立.

现在证明，图 G 恰有 $n-1$ 条边. 首先证明，图 G 必含有 1 度顶点. 为此,设 $x_0x_1\cdots x_k$ 是图 G 中最长的道路. 由于 x_0x_1 和 $x_{k-1}x_k$ 是图 G 的边，因此 $d(x_0)\geqslant 1$，$d(x_k)\geqslant 1$. 如果 $d(x_0)\geqslant 2$，则 x_0 必和某个顶点 u 相邻，$u\neq x_1$. 如果 x_0 和某个 x_i 相邻，$2\leqslant i\leqslant k$,则 x_0 和 x_i 之间有两条不同的通路相邻，和图 G 所满足的已知条件相矛盾. 因此 $ux_0x_1\cdots x_k$ 是图 G 中长为 $k+1$ 的道路，和 $x_0x_1\cdots x_k$ 是图 G 的最长道路相矛盾. 因此 x_0 是 1 度顶点. 同理 x_k 也是 1 度顶点. 其次用归纳法证明,图 G 恰有 $n-1$ 条边. 当 $n=2$ 时，图 G 为二阶图，两个顶点都是 1 度顶点，因此图 G 恰有 1 条边. 即结论对 $n=2$ 成立. 假设结论对 $n-1$ 阶的图成立，往证结论对 n 阶图 G 成立. 由上面的证明，图 G 具有 1 度顶点 x. 将图 G 中 1

度顶点 x 连同以 x 为端点的边去掉，得到的是 $n-1$ 阶图 G^*，显然 G^* 满足图 G 所具有的已知条件．因此由归纳假设，G^* 恰有 $n-2$ 条边．从而图 G 恰有 $n-1$ 条边．

注 1 例 2 实际上包含了图论里的 3 个基本结论．这里用定理的形式加以叙述．

定理 2 设图 G 是 n 阶连通简单图，则图 G 至少含有 $n-1$ 条边．

很明显，任意两个顶点都仅有一条道路相连接的连通图等价于无圈的连通图．在图论里，无圈的连通图叫做树．例 2 所包含的另外二个结论是．

定理 3 n 阶的树至少具有两个 1 度顶点．

定理 4 n 阶的树恰有 $n-1$ 条边．

定理 4 的逆命题是成立的，即有

定理 5 恰有 $n-1$ 条边的 n 阶连通图一定是树．

上述定理的证明请读者自己完成．

注 2 例 2 的证明中多次用到这样的方法，即从 n 阶图 G 去掉一个顶点 x 连同以 x 为端点的边，得到一个 $n-1$ 阶图 G^*．这是图论中论证时经常采用的一种典型技巧，应用这种方法可以顺利地完成归纳法证明．读者应以足够的重视．

例 3 圆周上有 13 个点，能否用自然数 1，2，3，…13 给这些点编号，使得任意两个相邻的点的号码之差的绝对值至少是 3，最多是 5？(1986年匈牙利数学竞赛试题)．

解 在西方人的眼里，13是个不祥的数字，回答应该是："不能．" 现在用反证法证明之．假设存在一种编号方法，使得任意两个相邻的点的号码之差的绝对值至少是 3，最多是 5．把圆周上 13 个点视为 13 个顶点，其集合记作 V．对于顶点 u 和 v，当且仅当 u 和 v 所表示的两个点相邻时令顶点

u 和 v 相邻，得到的是一个长为 13 的圈 C_{13}. 很明显，C_{13} 是连通的. 用顶点所表示的点的编号表示顶点. 将顶点集合 V 分划为两个子集 $X=\{1, 2, 3, 11, 12, 13\}$ 和 $Y=\{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. 由于 C_{13} 是一个圈，所以每个顶点的度都是 2. 又集合 X 中任意两个顶点都不相邻，所以 X 的顶点和 Y 的顶点之间恰连有12条边. 而 C_{13} 恰有 13 条边. 因此 Y 的顶点之间必有一条边. Y 中的顶点 4 在 X 中只和顶点 1 相邻，由于顶点 4 的度为 2，所以顶点 4 必和 Y 中另一个顶点相邻. 同理，Y 中顶点10必和 Y 中另一个顶点相邻. 但是顶点 4 和 10不相邻. 这表明，Y 中顶点之间至少连有两条边，矛盾. 因此不存在合乎条件的编号方式.

在熟悉图的连通概念之后，现在可以来谈谈欧拉关于哥尼斯堡七桥问题的工作了. 首先，把哥尼斯堡管辖之下的四个城区 A, B, C, D 视为四个顶点，连接城区的每座桥都视为边，得到的是 4 阶图 G（图 8）. 于是问题化为：从图 G 中每个顶点出发，是否存在一条通路，经过每条边恰好一次，然后回到原先的顶点. 换句话说，图 G 中是否存在含有图 G 所有的边的回路.

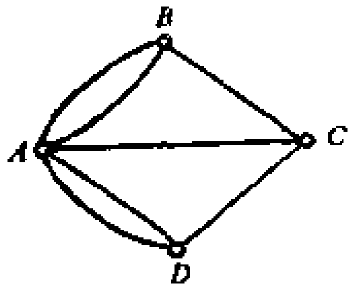


图 8

一般地说，n 阶图 G 中含有所有的边的回路叫做**欧拉回路**. 具有欧拉回路的图 G 叫做**欧拉图**. 于是，问题又进一步化为：图 3 中的四阶图是否是欧拉图.

欧拉图和所谓一笔画问题有着密切的联系. 所谓一笔画问题是指，纸面上给定一个图 G，能否从图 G 的一个顶点出发，笔不离开纸，而且连续地沿着每条边恰好一次，然后回到原来的顶点，从而画出整个图 G？很明显，如果图 G 是欧

拉图，则可以一笔画出整个图 G，否则就不能.

在刚才提到的欧拉的那篇开创性著名论文中，欧拉给出了一个图是否是欧拉图的判别方法，即下面的定理.

定理 6 设 G 是连通图，则 G 为欧拉图的必要且充分条件是，图 G 中每个顶点的度都是偶数.

证 先证必要性. 设图 G 是欧拉图，即图 G 含有欧拉回路. 从图 G 中某一顶点出发，沿欧拉回路上的边前进. 对图 G 中的顶点 u，只要沿着欧拉回路有一条进入顶点 u 的边，就有一条由顶点 u 引出的边. 而图 G 上每条边都在欧拉回路上出现，所以图 G 的每个顶点都是偶顶点.

再证充分性. 设图 G 的每个顶点都是偶顶点. 在 G 中任取一个顶点 x. 考虑图 G 中所有以 x 为一个端点的迹，其中最长的迹记作 C，它的另一个端点记作 y. 如果顶点 y 和 x 不重合，则顶点 y 是迹 C 上奇数条边的端点. 由于图 G 中每个顶点都是偶顶点，因此必有一条边 yz，它不出现在迹 C 上. 将边 yz 连接到迹 C 上，得到的迹比原来的迹还要长，矛盾. 因此顶点 y 和 x 相重合，即 C 是一个回路. 如果图 G 中所有的边都在 C 上出现，则 C 即是图 G 的欧拉回路，从而图 G 是欧拉图. 现在设图 G 中有一条边 uv 在 C 上不出现. 由于图 G 是连通的，所以图 G 含有连接顶点 x 和 u 的通路. 由此可以证明，图 G 必有某条边 e，它在 C 上不出现，并且有一个端点 w 在 C 上. 从图 G 中去掉所有出现在 C 上的边，得到的图记作 G^*. 图 G^* 中每个顶点都是偶顶点. 当然图 G^* 可能是不连通的. 将图 G 中的顶点分类，凡有通路相连的顶点归在同一个子集，将没有通路相连的顶点归在不同的子集. 设共有 m 个子集 V_1，V_2，…，V_m. 顶点子集 V_i 连同图 G^* 中连接 V_i 中顶点之间的边一起组成的图记作 G_i，很明显，图 G_i 是

连通的，而且每个顶点都是偶顶点，$i=1, 2, \cdots, m$. 不妨设图 G_1，G_2，…，G_m 中含边 e 的图为 G_1. 和上面证明相仿，图 G_1 中含有一条过顶点 w 的回路 C_1. 于是图 G 中含有两个过顶点 w 的回路 C 和 C_1. 将这两个回路连接起来，便得到图 G 的一个回路，其长大于回路 C 的长，矛盾. 因此图 G 的每条边都出现在回路 C 上. 这就证明，C 是图 G 的一条欧拉回路，从而 G 是欧拉图(图 9).

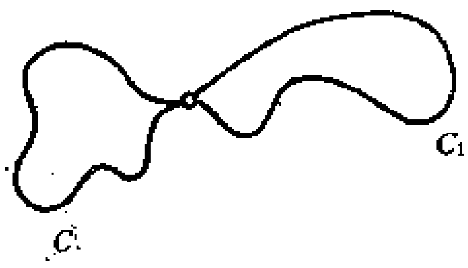


图 9

有了这个定理，哥尼斯堡七桥问题的答案就是显而易见的. 从图 8 可以看出，其中的图 G 是连通的，而且图 G 中每个顶点都不是偶顶点，因此，由定理 6，图 G 不是欧拉图. 也就是说，哥尼斯堡七桥问题的答案是：不可能.

既然哥尼斯堡七桥问题得不到肯定的答案，那末是否可以退而求其次？即考虑如下的问题：能否从哥尼斯堡某个城区出发，经每座桥恰好一次，然后到达另一个城区？

聪明的读者也许会发现，这一问题相当于给定一个图 G，对其中某个顶点 u，是否存在以 u 为端点的一条迹，使得图 G 中每条边恰好在其中出现一次. 如果这样的迹存在，则称它为图 G 的一条**欧拉迹**. 欧拉迹和欧拉回路的差别在于，欧拉回路是一条闭通路.

关于欧拉迹，有一个和定理 6 相平行的结论.

定理 7 设 u 和 v 是连通图 G 的两个不同顶点. 则图 G 具有一条连接顶点 u 和 v 的欧拉迹的必要充分条件是，u 和 v 是奇顶点，其他所有顶点都是偶顶点.

证 只要在图 G 中添加一条连接顶点 u 和 v 的新边，即可由定理 6 得到定理 7.

由定理 7 可以看出，所谓退而求其次形式的哥尼斯堡问题的答案也是否定的，因为图 8 中的图 G 不含有偶顶点.

例 4 指出图10，图11和图12中哪一个图，可以从图中某个点出发，用铅笔不离开纸面，一笔画出整个图？

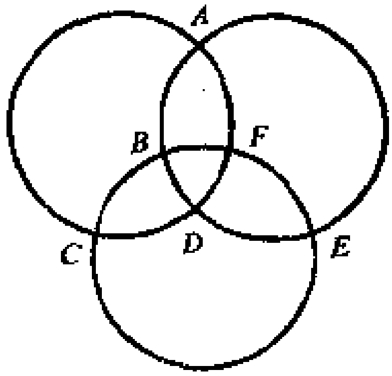


图 10

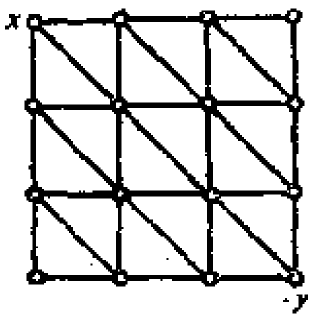


图 11

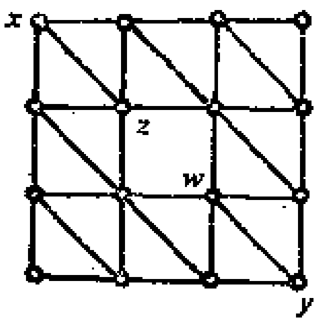


图 12

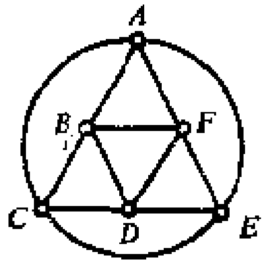


图 13

解 把图 10 中圆周的交点视为顶点，其集合记作 V.对于顶点 u, $v\in V$，当且仅当交点 u 和 v 有圆弧相连接时令顶点 u 和 v 相邻，得到的是 6 阶图 G_1(图13). 图 G_1 中每个顶点的度都是 4 . 由定理 6，图 G_1 具有欧拉回路. 因此，可以从图 10 中的某个交点出发，按照这条欧拉回路上顶点的顺序，沿着圆弧，一笔画出整个图，最后回到原来的交点上.

把图 11 中的交点视为顶点．当且仅当交点间有线段连接时，令相应的顶点相邻，得到的图记作 G_2．图 G_2 中恰有两个 3 度顶点 x 和 y，其他顶点都是偶顶点．由定理 7，图 G_2 含有一条以 x 和 y 为端点的欧拉迹．于是，从点 x 出发，按照这条欧拉迹中顶点的顺序，一笔画出整个图，最后到达点 y.

和图 11 相仿，图 12 中含有四个奇顶点 x, y, z 和 w. 因此不能一笔画出图 12.

例 5 圆周上有 n 个点，$n>2$，其中任意两点都用线段连接．能否一笔画出所有这些线段，使得第一条线段的终点和第二条线段的始点相重合，第二条线段的终点和第三条线段的始点相重合，等等，而且最后的一条线段的终点和最初的一条线段的起点相重合？

解 把圆周上给定的 n 个点视为 n 个顶点，任意两个顶点都相邻，得到的是一个 n 阶完全图 K_n．K_n 中每个顶点的度都是 $n-1$．当 n 为奇数时，K_n 中每个顶点都是偶顶点．因此，由定理 6，完全图 K_n 含有欧拉回路．此时，从 K_n 中某个顶点出发，按照这条欧拉回路上顶点的顺序，即可一笔画出整个图 K_n，最后回到原来的顶点上．当 n 为偶数时，K_n 中每个顶点都是奇顶点，由定理 6 和定理 7，完全图 K_n 不含欧拉回路和欧拉迹．因此，偶数阶完全图 K_n 不能用一笔画出所有线段．

习 题 三

1．证明，至少有 $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+1$ 条边的 n 阶简单图一定是连通的，对于至多有 $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ 条边的 n 阶简单图，结论不再成立．

2. 证明，简单图 G 为树的必要且充分条件是，图 G 连通，而且从图 G 中去掉任意一条边，得到的图不连通。

3. 有 n 部电话交换台，其中任意两台总可以（允许通过其他交换台）通话．证明，至少有 $n-1$ 对电话交换台，每对交换台之间都连接直通线路．

4. 平面上有 n 条线段，$n\geqslant 3$，其中任意三条都有公共端点．证明，这 n 条线段必有一个公共端点．

5. 下列图中哪一个含有欧拉回路？如果有，画出一个欧拉回路．

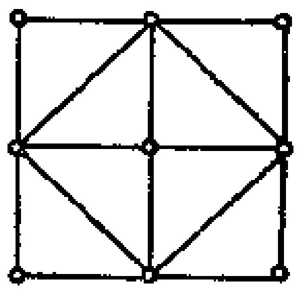


图 14

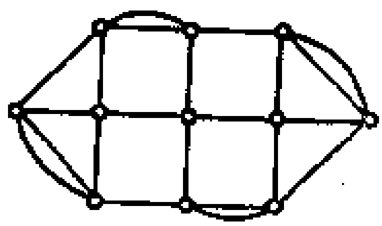


图 15

6. 油画展览馆的平面图如图16 所示，每扇门上都挂着一幅名画，问能否从前门 P 进入展览馆，经每扇门恰好一次，然后从后门 Q 出来？

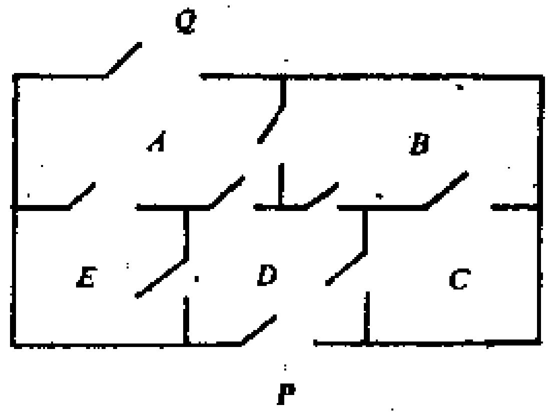


图 16

4 哈密尔顿圈

哈密尔顿(W. R. Hamilton)是十九世纪英国著名数学家．1859年，他发明了一种游戏．这种游戏使用一个实心的正十二面体，在它的二十个顶点上标注着世界上二十个著名城市的名字：阿姆斯特丹，安亚伯，柏林，布达佩斯，都柏林，爱丁堡，耶路撒冷，伦敦，墨尔本，莫斯科，新西伯利亚，纽约，巴黎，北京，布拉格，里约热内卢，罗马，旧金山，东京和华沙，要求游戏者寻找一条环路，使得从某个城市出发，能够沿着正十二面体的棱前进，经过每座城市恰好一次，然后回到原来的城市．哈密尔顿把他的设计叫做周游世界，并且买给了玩具商，赚了25个金币．当然，玩具商是大大赔钱了，因为要找出这么一条环路并不容易，因此这种玩具时髦了一阵，很快就冷落下来了．

哈密尔顿的周游世界游戏可以抽象为图论的问题．把正十二面体的顶点视为图G的顶点，把正十二面体的棱视为图G的边，得到一个图G(图17)．于是，周游世界游戏相当于，在图G中寻找一条道路，使得从图G中某个顶点出发，沿着图G的边，经过图G的每个顶点恰好一次，然后回到原来的顶点，也就是要寻求一个经过

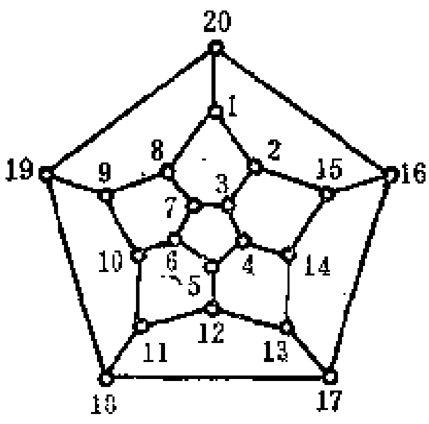


图 17

每个顶点恰好一次的圈．这样的圈叫做图 G 的哈密尔顿圈．

一般地说，设 G 是一个图．如果图 G 中的一条通路 P 经图 G 的每个顶点恰好一次，则通路 P 叫做图 G 的一条**哈密尔顿道路**．如果图 G 中的圈 C 经图 G 的每个顶点恰好一次，则圈 C 叫做图 G 的一条**哈密尔顿圈**．

在图 17 所给的图 G 中，由顶点序列 1，2，…，20，1 构成的圈 C 即是图 G 中一条哈密尔顿圈，而由顶点序列 1，2，…，20 构成的道路 P 即是图 G 中一条哈密尔顿道路．于是只要游戏者从图 17 所给的图 G 中某个顶点出发，按照圈 C 上顶点的顺序，沿着图 G 的边前进，即可经图 G 的每个顶点恰好一次，最后回到原来的顶点．图 17 所给的图 G 中的那条哈密尔顿圈 C 是哈密尔顿自己提出的．他还证明，其中的哈密尔顿圈恰有两条．

当然，并不是所有的图都具有哈密尔顿圈，或者哈密尔顿道路，例如，图 18 所给的图 G 中既没有哈密尔顿圈，也没有哈密尔顿道路．具有哈密尔顿圈的图 G 叫做**哈密尔顿图**．哈密尔顿的功绩在于，他提出了图论研究的一个重要课题，即如何判断一个图是否是哈密尔顿图．表面上看，哈密尔顿圈和一笔画很相似，其实质却迥然不同．对于图 G 的哈密尔顿圈 C，只要求图 G 的每个顶点都在圈 C 上出现，而且只出现一次．至于图 G 的边，则不作任何要求，既允许在圈 C 上出现，也可以在圈 C 上不出现．对于图 G 的欧拉回路 C^*，则正相反，它要求图 G 的每条边都要在回路 C^* 上出现一次，而且只出现一次，而对图 G 的顶点，则不计其出现与否．因此，正如上节所说，判断一个图是否是欧拉图问题已经彻底、干净地解决

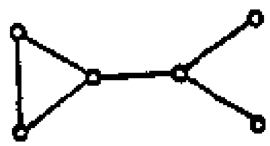


图 18

了. 但判断一个图是否是哈密尔顿图问题,至今仍未解决.它是图论的一个难题,是世界各国许多图论专家所关注的研究课题之一.我国年轻的图论学者范更华在这个课题上得到的结论处于世界领先地位,他的结论被称为范氏定理.许多图论学者正在范氏定理的基础上继续工作.在这本小册子里,我们不可能介绍范更华的工作.这里介绍一个比较简单、比较实用的定理,它是著名数学家奥尔(O. Ore)和狄拉克(G. A. Dirac)在1960年得到的,定理的证明则是匈牙利图论专家波沙(L. Pósa)给出的,他想出证明的时候还是一个中学生.

定理 1 设 G 是 n 阶简单图.如果对图 G 中任意两个不相邻顶点 u 和 v,均有

$$d(u)+d(v)\geqslant n, \tag{1}$$

则图 G 是哈密尔顿图.

证 用反证法.设图 G 满足条件(1),而且图 G 不是哈密尔顿图,即图 G 不具有哈密尔顿圈.由于 n 阶完全图 K_n 一定具有哈密尔顿圈,因此图 G 不是完全图,换句话说,图 G 一定含有两个不相邻的顶点 u 和 v.在图 G 中令顶点 u 和 v 相邻,即把顶点 u 和 v 连接起来,得到的图记作 G_1.容易看到,n 阶简单图 G_1 满足条件(1).如果图 G_1 具有哈密尔顿圈,则对图 G_1 不再连接.如果图 G_1 不具有哈密尔顿圈,则图 G_1 一定不是完全图,因此图 G_1 含有两个不相邻的顶点 x 和 y.在图 G_1 中令顶点 u 和 v 相邻,即把顶点 x 和 y 连接起来,得到的图记作 G_2.图 G_2 仍是一个 n 阶简单图,而且条件(1)仍然满足.如果图 G_2 具有哈密尔顿圈,则在图 G_2 中不再连边.如果图 G_2 不具有哈密尔顿圈,则重复上述过程.因为 n 阶完全图 K_n 具有哈密尔顿圈,所以上述过程必然

经过有限步后停止下来．于是得到一系列的 n 阶简单图 G，G_1，…，G_l，其中图 G，G_1，…，G_l 都满足条件（1），而且图 G_1，G_2，…，G_{l-1} 都不具有哈密尔顿圈，图 G_l 具有哈密尔顿圈．设顶点 z 和 w 在图 G_{l-1} 中不相邻，但在图 G_l 中相邻．于是图 G_l 中的哈密尔顿圈 C 必然含连接顶点 z 和 w 的边，从而在图G_{l-1} 中含有以顶点 z 和 w 为两端的哈密尔顿道路P．设 P 上的顶点依次为 $v_1=z, v_2, \cdots, v_n=w$，且设顶点 z 和 w 的度分别为 $d(z)=k$，$d(w)=m$．如果顶点 z 和 v_t 相邻，而 w 和 v_{t-1} 相邻（图19），则图 G_{l-1} 中含有哈密尔顿圈 $v_1v_t v_{t+1}\cdots v_nv_{t-1}v_{t-2}\cdots v_2v_1$，矛盾．因此，如果顶点 z 和v_{i_1}，v_{i_2}，…，v_{i_k} 相邻，则顶点 w 和 v_{i_1-1}，v_{i_2-1}，…，v_{i_k-1}都不相邻，

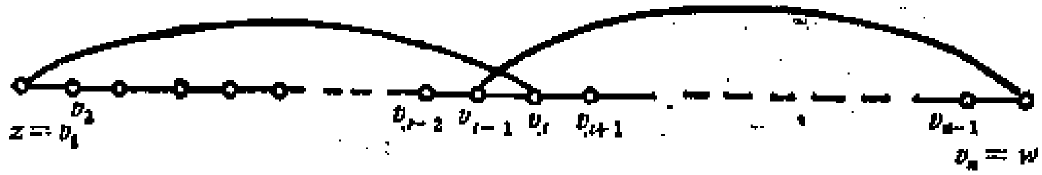


图 19

因此顶点 w 的度$d(w)=m\leqslant n-1-k$，即 $d(z)+d(w)=k+m\leqslant n-1$，矛盾．这就证明，图 G 具有哈密尔顿圈，从而是哈密尔顿图，定理 1 证毕．

由定理 1 立即得到下面的推论．

推论 设图 G 是 n 阶简单图，$n\geqslant 3$．如果图 G 中每个顶点的度都至少是$\frac{n}{2}$，则图 G 是哈密尔顿图，即具有哈密尔顿圈．

波沙给出的证明是很巧妙的．事实上，他给出的是处理有关哈密尔顿圈问题的一种行之有效的思想．应用这种思想，波沙成功地把定理 1 进行了推广，得到了下面的定理．

定理 2 设 G 是 n 阶简单图，$n\geqslant 3$. 如果对每个 k, $1\leqslant k<\frac{n-1}{2}$，图 G 中度不超过 n 的顶点个数小于 n，而且当 n 为奇数时，图 G 中度至多为 $\frac{n-1}{2}$ 的顶点个数不超于 $\frac{n-1}{2}$，则图 G 是哈密尔顿图.

这个定理的证明和定理 1 完全相仿. 读者可以自行给出证明.

例 1 应用本节的知识，给出第一节例 4 的一个新证明.

证 正如第一节例 4 所说，相应的图是一个 6 阶简单图 G，其中每个顶点 x 的度 $d(x)\geqslant 3$. 由定理 1 的推论可知，图 G 是一个哈密尔顿图，即图 G 具有哈密尔顿圈 $v_1v_2v_3v_4v_5v_6v_1$. 于是图 G 具有三条边 v_1v_2，v_3v_4，v_5v_6，其中任意两条边都没有公共顶点. 这就证明了例 4.

例 2 证明，图 20 中的图 G 具有哈密尔顿圈，并给出图 G 的一个哈密尔顿圈.

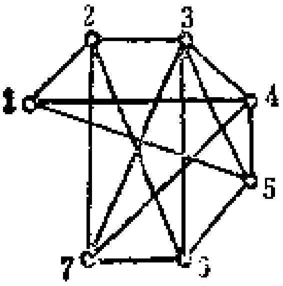


图 20

证 图 20 所给的 7 阶简单图 G 中除顶点 1 的度为 3 外，其他所有顶点的度都至少是 $4>\frac{7}{2}$，其中任意两个不相邻的顶点的度之和显然大于 7. 因此只需验证，和顶点 1 不相邻的顶点 x 与顶点 1 的度之和不小于 7. 和顶点 1 不相邻的顶点为 3，6 和 7，它们的度都至少是 4，而顶点 1 的度为 3，因此，和顶点 1 不相邻的顶点的度与顶点 1 的度之和至少是 7. 这说明，图 G 满足定理 1 的条件(1)，所以由定理 1，图 G 具有哈密尔顿圈. 其中圈 1，2，3，4，7，6，5，1 即是图 G 的一条哈密尔顿圈.

例 3 传说在英国有一位国王，即亚瑟王，在王宫里召见他的 $2n$ 名骑士，其中某些骑士之间互有仇怨. 已知每名骑士的仇人不超过 $n-1$ 个. 证明，亚瑟王的谋士摩尔林一定有办法让这 $2n$ 名骑士围着圆桌入座，使得每名骑士都不和他的仇人坐在一起.

证 用顶点表示骑士，当且仅当骑士 x 和 y 互不成仇时顶点 x 和 y 相邻. 得到的 $2n$ 阶简单图记作 G. 由于每名骑士的仇人不超过 $n-1$ 个，所以图 G 中每个顶点的度都至少是 n. 由定理 1 的推论，图 G 是哈密尔顿图，即图 G 具有哈密尔顿圈. 于是只要让这 $2n$ 名骑士按照这条哈密尔顿圈中的顶点顺序就座，每名骑士两旁就座的就不是他的仇人.

例 4 有 n 个人，围圆桌入座，$n\geqslant 6$. 证明，可以调整这 n 个人的座位，使得每个人的两旁就坐的是原先不坐在一起的人.

证 假设围着圆桌入座的 n 个人按反时针方向的顺序是 v_1，v_2，$\cdots$，v_n，(图21). 把 n 个人 v_1，v_2，$\cdots$，v_n 视为 n 个顶点，对于顶点 u，$v\in V$，当且仅当 u 和 v 不坐在一起时令

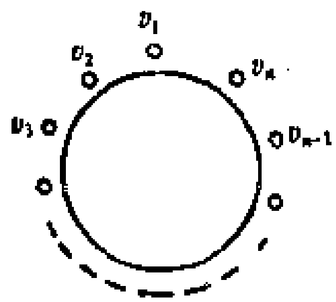


图 21

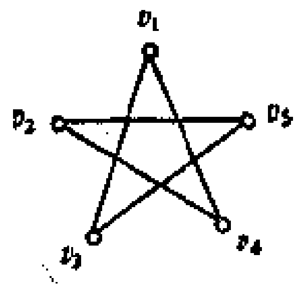


图 22

u 和 v 相邻，得到的是 n 阶简单图 G. 很明显，图 G 中每个顶点的度都是 $n-3$. 当 $n\geqslant 6$ 时，$n-3\geqslant n-\frac{n}{2}=\frac{n}{2}$. 因此由

定理 1 的推论，图G具有哈密尔顿圈．于是，只要让这 n 个人按照这条哈密尔顿圈上的顶点顺序就坐即可．当 $n=5$ 时，图 G 如图 22．很明显，图 G 具有哈密尔顿圈 $v_1v_3v_5v_4v_2v_1$，此时只要让这 5 个人按照顶点顺序 v_1，v_3，v_5，v_4，v_2 入座即可．

注 在例 4 中，当 $n=5$ 时，图 G 的每个顶点的度都是 2，即对图 G 中每个顶点 x，均有 $d(x)\leqslant\frac{n}{2}$，即图G既不满足定理 1 的推论中的条件，也不满足定理 1 的条件，甚至也不满足波沙定理的条件．因此不能用这些结论来判定图G是否是哈密尔顿图，必须另行处置．好在例 4 中$n=5$的情形非常简单，直接验证即可．当 n 很大时，问题就不那么简单了．

例 5 有一块 3×3×3 立方体的乳酪，它是用27 块 1×1×1立方体的小乳酪摞成的．狄斯尼乐园里的米老鼠和唐老鸭打赌，说它可以从大乳酪的一个角开始吃起，吃完一块小乳酪，接着打洞钻到另一块还没被吃掉的小乳酪，把这块小乳酪吃光，再打洞钻到另一块，如此等等，最后吃完所有小乳酪时米老鼠恰好在大立方体的中心．米老鼠能赌赢吗？

解 把每块1×1×1立方体的小乳酪看成顶点，当且仅当两块小乳酪有公共面时，令相应的顶点相邻，得到一个27阶简单图（图 23）．记图 23 所示的图G中所有白色顶点和所有黑色顶点的集合分别记作 X和 Y，则集合X的顶点之间不相邻，同样，集合Y的顶点之间也不相邻．因此图G是一个二部分图，集合 X，Y是图G的顶点集合

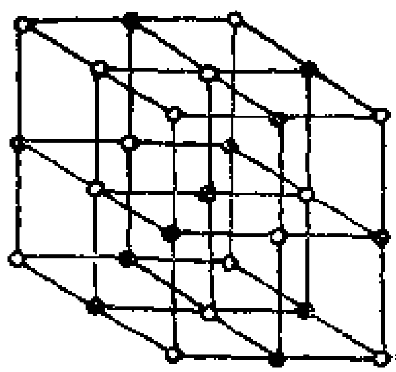


图 23

的一个分划．如果米老鼠赌赢，则图 G 具有一条哈密尔顿道路 P：$v_1v_2\cdots v_{27}$，它的两个端点记作 u 和 v，其中 u 和 v 分别是相应于 $3\times3\times3$ 立方体的大乳酪的一角和中央那块小乳酪的顶点．很明显，$u\in X$，$v\in Y$．另一方面，$v_{2i-1}v_{2i}$ 是边，$i=1,2,\cdots,13$，所以 $u=v_1$，v_3，$\cdots$，v_{25}，$v_{27}=v$ 都是白色顶点．这表明，$v\in X$，矛盾．因此米老鼠必输无疑．

注 应用二部分图的顶点集合的分划，来论证图的性质，是图论的一种典型技巧．它和奇偶性分析有密切的联系．在例 4 的图 G 中，可以用自然数 1，2，…，27给图 G 中的27个顶点编号，相邻的顶点一个编为奇数，另一个编为偶数，所有奇数号的顶点和所有偶数号的顶点集合分别记作 X 和 Y．然后就可以对图 G 进行奇偶性分析．

例 6 广义象棋比赛在一个12×12棋盘上进行．广义马每一步从 3 × 4 矩形的一角跳到对角．问广义马能否从棋盘上某个方格出发，经棋盘上每个方格恰好一次，然后回到原来的方格．

解：不可能．把棋盘上的方格视为顶点，其集合记作 V．对于顶点 u，$v\in V$，当且仅当广义马可以从 u 和 v 所表示的一个方格跳到另一个方格时令 u 和 v 相邻，得到的是 144 阶简单图 G．图 G 中所有表示白色方格和黑色方格的顶点集合分别记作 X 和 Y．如果广义马可以从棋盘上某个方格出发，经棋盘上每个方格恰好一次，然后回到原来的方格，则图 G 具有一条哈密尔顿圈 $u_1u_2\cdots u_{144}u_1$，其中边 u_1u_2，u_3u_4，$\cdots$，$u_{143}u_{144}$ 中任意两条边都没有公共端点，因此集合 $\{u_1,u_3,\cdots,u_{143}\}$ 和 $\{u_2,u_4,\cdots,u_{144}\}$ 即是集合 X 和 Y．这说明，集合 X 和 Y 的顶点可以按照这条哈密尔顿圈来配对．另一方面，棋盘的第 1，2，6，7，11，12行上的方格所相应的顶点集

合记作 A，其他所有顶点的集合记作 B. 则广义马每一步只能从 A 跳到 B，或者从 B 跳到 A. 因此，集合 $\{u_1, u_3, \cdots, u_{143}\}$ 和 $\{u_2, u_4, \cdots, u_{144}\}$ 即是 A 和 B. 但是，集合 A 中顶点所表示的方格并不都是同色的，矛盾. 这就证明，广义马不可能从棋盘上某个方格出发，经每个方格恰好一次，然后回到原来的方格.

例 7 证明，可以将一个有限集的所有子集都排成一列，使得任意两个相邻子集都相差一个元素.

证 设 $S=\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ 是一个 n 元集合，A 是集合 S 的子集. 考虑 n 维向量 $\alpha=(b_1, b_2, \cdots, b_n)$，其中当 $a_i \in A$ 时令 $b_i=1$，否则令 $b_i=0$，$i=1, 2, \cdots, n$. 向量 α 叫做子集 A 的伴随向量. 注意，子集 A 的伴随向量 α 的每个坐标分量只能取 0 或 1. 这样的向量叫做 (0, 1) 向量. 对于集合 S 的两个不同的子集 A 和 B，它们的伴随向量 α 和 β 一定是不同的. 而且对任意一个 n 维 (0, 1) 向量 α，一定有集合 S 的子集 A，使得它的伴随向量即是 α. 这表明，集合 S 的所有子集和所有 n 维 (0, 1) 向量之间存在一个一一对应. 因此可以把 n 维 (0, 1) 向量看成是集合 S 的子集. 例如，对于 3 元集 $S=\{a_1, a_2, a_3\}$，3 维 (0,1) 向量 (0, 1, 0) 和 (1, 1, 0) 表示的是子集 $\{a_2\}$ 和 $\{a_1, a_2\}$.

把 n 维 (0, 1) 向量看成顶点，其集合记作 V. 对于顶点 u 和 v，当且仅当 u 和 v 所表示的两个 n 维 (0, 1) 向量恰有一对相应的坐标分量不同时令 u 和 v 相邻，得到的图记作 G. 例如，3 维 (0, 1) 向量 (0, 1, 0) 和 (1, 1, 0) 的第一对坐标分量不同，第二对、第三对坐标分量相同，所以 (0, 1, 0) 和 (1, 1, 0) 所表示的顶点相邻，而 (0, 1, 0) 和 (1, 0, 1) 不相邻. 当 $n=2$ 时，图 G 是平面上的单位正方形 (图24)；当

$n=3$ 时，图 G 是空间中的单位立方体（图25）．对于一般的

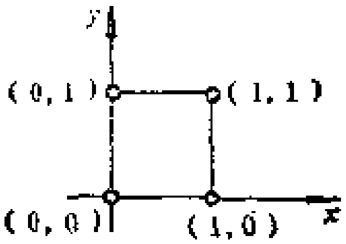


图 24

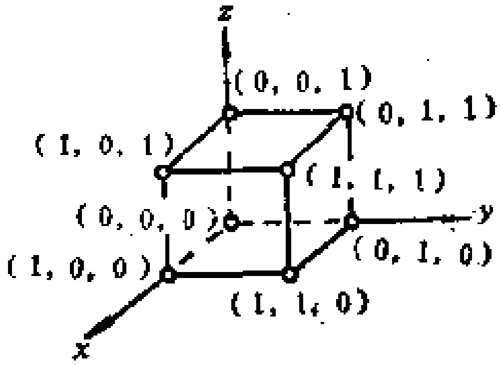


图 25

n，图 G 叫做 n 维立方体，记作 C^n．容易看出，当 $n=2$时，2 维立方体 C^2 即是圈 C_2，它自身即是一条哈密尔圈．假设 $n-1$ 维立方体 C^{n-1} 具有哈密尔顿圈 $u_1u_2\cdots u_mu_1$，其中记 $u_i=(b_1^{(i)}, b_2^{(i)}, \cdots, b_{n-1}^{(i)})$，$i=1,2,\cdots, m$．取 $v_i=(b_1^{(i)},b_2^{(i)}, \cdots, b_{n-1}^{(i)}, 0)$，$v_{m+i}=(b_1^{(m-i+1)}, b_2^{(m-i+1)},\cdots, b_{n-1}^{(m-i+1)}, 1)$，$i=1,2, \cdots, m$，则 $v_1v_2\cdots v_mv_{m+1}v_{m+2}\cdots v_{2m}v_1$ 是n 维立方体 C^n 的一条哈密尔顿圈．于是，只要按照伴随向量在哈密尔顿圈 $v_1v_2\cdots v_mv_{m+1}v_{m+2}\cdots v_{2m}v_1$ 的顺序，将集合 S 的相应子集排成一列，则相邻两个子集都相差一个元素．

习 题 四

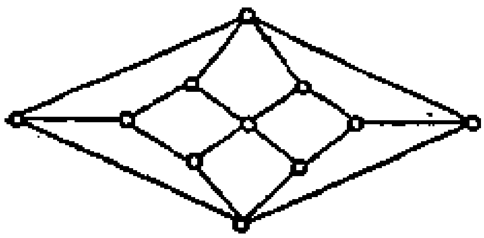


图 26

1．证明，图26所示的图G 不具有哈密尔顿图．给出一条哈密尔顿道路．

2．国际象棋中的马按照“马跳日”的规则行走，即只能从2×3矩形的一角跳到对角．马能否从8×8 国际象棋盘上某个方格出发，经每个方格恰好一次，然后回到原来的方格？

3. $4\times n$ 广义象棋盘上的方格染成白色或黑色，相邻方格颜色不同．广义象棋中马的跳法和国际象棋相同．问广义象棋中的马能否从某个方格出发，经每个方格恰好一次，然后回到原来的方格？

4. 有一个展览馆，共有 $6\times 6=36$ 个展室，相邻的展室都有门可通(图27)．试问参观者能否从入口处进入展览馆，经过每个展室恰好一次，然后从出口处出来？为什么？

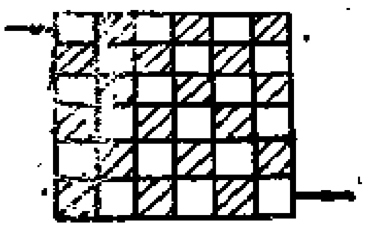


图 27

5. 把自然数1，2，…，n 的排列看成顶点，$n\geqslant 3$，其集合记作 V．对于顶点 u，$v\in V$，当且仅当 u 和 v 所表示的两个排列可以从其中一个经过对调两个数字变成另一个时，令 u 和 v 相邻，得到 $n!$ 阶简单图 G_n．证明，图 G_n 具有哈密尔顿圈．

6. 圆周上有 n 个点．证明，可以用自然数1，2，…，n 给它们编号，使得任意两个相邻数字之差不超过 2，而且这种编号方式是唯一的．

7. 安排7天考7门课的考试，每天考一门课，每位教师所担任的课不排在连续的两天里．证明，如果每位教师至多担任三门课，则可以做出符合要求的考试安排．

8. 某公司有 5 个人，任意 3 个人中总有 2 个人相互认识，也总有 2 个人互不认识．证明，公司里的人可以围坐在一起，使得邻座的人相互认识．

5 匹　配

第一节中例4是一个很有意义的例子，它可以说明图论中许多重要的概念，既可以用它来说明图论中最基本的概念，即图的概念，也可以用来阐明图论中最重要的理论之一的哈密尔顿图理论．它还可以用来解释图论的一个重要组成部分，即匹配理论．

例4是说，有个工厂，用六种颜色的纱生产双色布，每种颜色至少和其他三种颜色搭配．要求证明，一定可以找出三种不同的双色布，它们包含全部六种颜色．也就是说，按照所找出的三种不同双色布，每种颜色可以和另一种颜色配对，使得配成的对子不含相同颜色．这样就使每种颜色和跟它配成对子的颜色相匹配．用图论语言来说，例4所要证明的命题是，如果6阶简单图G中每个顶点的度至少是3，则图G含有三条边，其中任意两条边都没有公共端点．设图G的这三条边是e_1，e_2，e_3，边e_i的端点分别是u_{2i-1}，u_{2i}，$i=1$，2，3．则图G的6个顶点u_1，u_2，…，u_6便按照边e_1，e_2，e_3配成对子：(u_1, u_2)，(u_3, u_4)，(u_5, u_6)．于是顶点u_{2i-1}和u_{2i}是匹配的，$i=1$，2，3．

一般地说，设G是n阶简单图，M是图G的某些边组成的集合．如果集合M中任意两条边都没有公共端点，则集合M叫做图G的一个**边无关集**．设u和v是图G的顶点．如果u和v是边无关集M的某条边的两个端点，则说顶点u和v在边无关集M下是**匹配**的．如果图G的顶点w是边无关

集 M 的某条边的端点，则顶点 w 叫做 M 饱和的．很明显，对于给定的边无关集 M，图 G 中所有 M 饱和的顶点可以分成一些顶点对，使得每对顶点在边无关集 M 下是匹配的．因此，边无关集 M 叫做图 G 的一个匹配．例如，在图 28 所示的图 G 中，$M=\{e_1, e_2\}$ 即是图 G 的一个边无关集，或者说是一个匹配．在这个匹配下，图 G 中顶点 v_1 和 v_2 匹配，v_3 和 v_6 匹配．顶点 v_1，v_2，v_3 和 v_6 是 M 饱和的，而顶点 v_4 和 v_5 则不是．

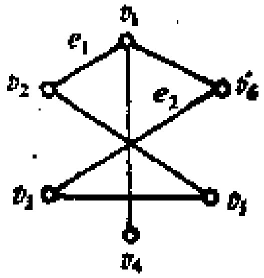


图 28

设 M 是图 G 的一个匹配．如果不能再添加图 G 的边 e，使得 $M\cup\{e\}$ 是图 G 的匹配，则 M 叫做图 G 的**极大匹配**．例如，在刚才所说的图 28 所示的图 G 中，$M=\{e_1, e_2\}$ 即是图 G 的极大匹配．而 $M^*=\{v_1v_4, v_2v_5, v_3v_6\}$ 也是图 G 的极大匹配．容易看到，对于每个图 G，极大匹配总是存在的，而且不一定是唯一的．

对于图 G 的一个匹配 M，如果图 G 的每个顶点都是 M 饱和的，也就是说，每个顶点都在 M 下和另一个顶点匹配，则 M 叫做图 G 的**完全匹配**．当然，完全匹配一定是极大匹配，反之并不尽然．例如，在上面所说的图 G（图28）中，$M=\{e_1, e_2\}$ 是极大匹配，但不是完美匹配，而 $M^*=\{v_1v_4, v_2v_5, v_3v_6\}$ 既是极大匹配，也是完美匹配．在第一节的例 4 中，所要证明的是，如果 6 阶简单图 G 中每个顶点的度至少是 3，则图 G 具有完美匹配．

很明显，对任意一个图 G，极大匹配总是存在的，但完全匹配则不然．例如，奇阶简单图一定不具有完全匹配．如何判定一个简单图是否具有完美匹配，乃是匹配理论的中心问题之一．在匹配理论中，主要关心的是二部分图．具体

地说，设图 G 是二部分图，X 和 Y 是图 G 的顶点集合 V 的一个分划，其中 X 中顶点之间以及 Y 中顶点之间都不连边．如果图 G 具有匹配 M，使得 X 中每个顶点都是 M 饱和的，也就是说，X 中每个顶点在 M 下都和 Y 中顶点匹配，则说 X 可以匹配到 Y 中．对给定的二部分图 G，如何判定集合 X 是否可以匹配到集合 Y 中？匈牙利著名数学家柯尼希（D. König）和英国著名群论学家霍尔（P. Hall）解决了这个问题，得到了匹配理论的奠基性结论如下．

定理 1 设 G 是二部分图，X，Y 是图 G 的顶点集合 V 的分划．对于 $A\subseteq X$，用 $N(A)$ 表示图 G 中所有与集合 A 的顶点相邻的顶点集合，即

$$N(A)=\bigcup_{v\in A}N(v).$$

则集合 X 可以匹配到集合 Y 中的必要且充分条件是，对每个 $A\subseteq X$，均有

$$|A|\leqslant|N(A)|,\qquad(1)$$

这里 $|A|$ 表示集合 A 中顶点的个数．

柯尼希和霍尔的这个定理的证明比较难．只关心如何用匹配理论来解数学竞赛试题的读者完全可以跳过下面给出的证明．但是，务必弄清定理的含义．为了完整起见，这里还是给出定理的证明，以备有志于图论学习的读者查阅．

证 先证必要性．设在图 G 中，集合 X 可以匹配到集合 Y 中，则图 G 具有匹配 M，使得集合 X 中每个顶点都是 M 饱和，换句话说，集合 X 中每个顶点都可以通过边无关集 M 中一条边和 Y 中顶点相匹配，或者说相对应．集合 X 中不同顶点和 Y 中不同的顶点相对应．这表明，对任意 $A\subseteq X$，集合 A 中每个顶点和 $N(A)$ 中的顶点相匹配，因此，$|A|\leqslant|N(A)|$．

再证明充分性．为此，对集合 X 中顶点个数 $n=|X|$ 用归纳法．当 $n=|X|=1$，即 $X=\{x\}$ 时，条件表明，$1=|X|\leqslant|N(X)|$．因此，集合 Y 中至少有一个顶点 $y\in N(x)$ 和 x 相邻．则边子集 $M=\{xy\}$ 即是图 G 的一个匹配，在 M 下，集合 X 中所有顶点都是 M 饱和的，即 X 可以匹配到 Y 中．所以结论对 $|X|=1$ 成立．现在设结论对 $|X|\leqslant n-1$ 的二部分图成立，即如果二部分图 G 满足 $|X|\leqslant n-1$，且条件（1）成立，则 X 可以匹配到 Y 中．下面证明结论对 $|X|=n$ 的二部分图成立．设图 G 是二部分图，$|X|=n$，且条件（1）成立．分以下两种情形．

情形 1：对集合 X 的每个非空真子集 A，均有 $|A|<|N(A)|$．在这种情形下，任取顶点 $x_0\in X$，且令 $A=\{x_0\}$．由于 $1=|A|<|N(A)|$，所以集合 Y 中至少有两个顶点 y_0，z_0 和 x_0 相邻．从图 G 中去掉顶点 x_0 和 y_0，同时去掉所有以 x_0 或 y_0 为端点的边，得到的图记作 G^*．G^* 仍是二部分图，而且 $X^*=X\setminus\{x_0\}$ 和 $Y^*=Y\setminus\{y_0\}$ 是二部分图 G^* 的顶点集合的分划．在图 G^* 中，用 $N_{G^*}(A^*)$ 表示所有和集合 A^* 的顶点相邻的顶点集合，这里 $A^*\subseteq X^*$．如果在图 G 中顶点 y_0 和集合 A^* 的顶点都不相邻，则 $N_{G^*}(A^*)=N(A^*)$；如果在图 G 中顶点 y_0 和集合 A^* 的某个顶点相邻，则 $N_{G^*}(A^*)=N(A^*)\setminus\{y_0\}$．因此，$|A^*|\leqslant|N_{G^*}(A^*)|$．这说明，图 G^* 满足条件（1），且 $|X^*|=n-1$．由归纳假设，在图 G^* 中 X^* 可以匹配到 Y^* 中，即存在图 G^* 的匹配 M^*，使得 X^* 中每个顶点都是 M^* 饱和的．把边 x_0y_0 添加到边子集 M^*，得到图 G 的匹配 $M=M^*\cup\{x_0y_0\}$．于是，X 可以匹配到 Y 中．

情形 2：集合 X 含有非空真子集 A_0，使得 $|A_0|=|N(A_0)|$．在这种情形下，在图 G 中取顶点子集 A_0，$N(A_0)$，以及所有

连接 A_0 的顶点与 $N(A_0)$ 的顶点的边，所构成的图记作 G^*. 图 G^* 是二部分图，子集 A_0 和 $N(A_0)$ 是图 G^* 的顶点集合的分划，而且 $|A_0|<|X|=n$，同时条件(1)对图 G^* 成立. 因此，由归纳假设，在图 G^* 中集合 A_0 可以匹配到集合 $N(A_0)$ 中，也就是说，图 G^* 具有匹配 M^*，使得 A_0 中每个顶点都是 M^* 饱和的. 另一方面，从图 G 中去掉顶点子集 A_0，$N(A_0)$，以及所有以 A_0 或 $N(A_0)$ 的顶点为端点的边，得到的图记作 G^{**}. 图 G^{**} 也是二部分图，子集 $X^{**}=X\setminus A_0$ 和 $Y^{**}=Y\setminus N(A_0)$ 是图 G^{**} 的顶点子集的分划，而且 $|X^{**}|<|X|=n$. 如果图 G^{**} 中存在 X^{**} 的子集 A_1，使得 $|N_G^{**}(A_1)|<|A_1|$，则在图 G 中有，$N(A_0\cup A)=N(A_0)\cup N_G^{**}(A_1)$，并且 $N(A_0)\cap N_G^{**}(A_1)=\phi$. 因此，

$$|N(A_0\cup A_1)|=|N(A_0)|+|N_E^{**}(A_1)|$$
$$<|A_0|+|A_1|=|A_0\cup A_1|,$$

和图 G 满足条件(1)的假设相矛盾. 因此图 G^{**} 也满足条件(1). 于是，由归纳假设，在图 G^{**} 中 X^{**} 可以匹配到 Y^{**} 中. 将图 G^* 和 G^{**} 的匹配合并，便得到图 G 的匹配 M，使得集合 X 中每个顶点都是 M 饱和的，所以，X 可以匹配到 Y 中. 定理 1 证毕.

定理 1 是匹配理论中最为重要的一个定理. 利用定理 1，可以推导出许多重要结论.

定理 2 二部分图 G 具有完美匹配的必要且充分条件是，$|X|=|Y|$，并且对每个子集 $A\subseteq X$，均有 $|A|\leqslant|N(A)|$.

证 这是定理 1 的直接结果.

对 k 正则二部分图，有

定理 3 任意一个 k 正则二部分图 G 都具有完美匹配.

证 设 $A\subseteq X$. 图 G 中所有连接子集 A 的顶点和 $N(A)$

的顶点的边集合记作 $A\times N(A)$. 很明显，有 $|A\times N(A)|=\sum_{x\in A}d(x)=\sum_{y\in N(A)}d(y)$. 因为图 G 是 k 正则的，所以由上式得到，$k|A|=k|N(A)|$，即有 $|A|=|N(A)|$. 这说明，对 k 正则二部分图 G，定理 1 中条件(1)成立. 另外，取 $A=X$，则有 $|X|=|N(X)|$. 但是，$N(X)\subseteq Y$，所以 $|X|=|N(X)|\leqslant|Y|$. 同理，对任意子集 $B\subseteq Y$，有 $|B|\leqslant|N(B)|$. 由此得到，$|Y|\leqslant|X|$. 于是有，$|X|=|Y|$. 根据定理 2，k 正则二部分图 G 具有完美匹配. 定理 3 证毕.

匹配理论有着广泛应用. 在数学竞赛里经常会遇到它.

例 1 有一个谍报小组，共有 5 名成员，他们的名字分别是：*ace*，*bc*，*dab*，*df* 和 *fe*. 现在要问，能否从每个人的名字里各取出一个字母，作为彼此联络的代号？

解 把 5 个名字看成 5 个顶点，其集合记作 X. 把 5 个名字中所有的字母也都看成顶点，其集合记作 Y. 对集合 X 中的顶点 x 和集合 y 中的顶点 y，当且仅当字母 y 出现在名字 x 时，令顶点 x 和 y 相邻，同一个集合的顶点之间不相邻，得到二部分图记作 G(图29). 图 G 中边 e_1，e_2，e_3，e_4 和 e_5(图29中的粗线边)组成图 G 的一个匹配 M. 在 M 下，名字 *ace*，*bc*，*dab*，*df* 和 *fe* 依次与字母 a，b，d，e 和 f 相匹配. 因此可以用字母 a，b，d，e 和 f 分别作为名字 *ace*，*bc*，*dab*，*df* 和 *fe* 的代号.

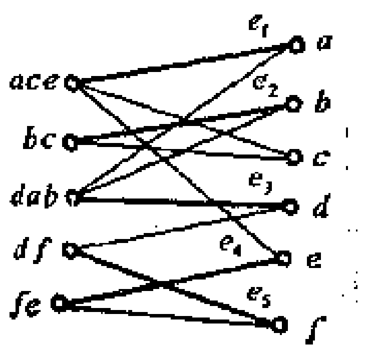


图 29

例 2 某个网球俱乐部有20名成员，安排了14场比赛，每场比赛两名成员参加，每名成员至少安排一场比赛. 证明，其中必有 6 场比赛，参赛者是12名不同的成员.

证 把俱乐部的成员看成顶点，其集合记作 V. 对于顶点 u, $v\in V$, 当且仅当成员 u 和 v 比赛过时，令顶点 u 和 v 相邻，得到20阶简单图 G. 由于一共进行了14场比赛，所以图 G 恰含有14条边. 而每名成员至少安排一场比赛，所以图 G 中每个顶点都连有边，即度至少是1. 要证明的是，图 G 至少含有6条边(6场比赛)，其中任意两条边都没有公共端点. 换句话说，图 G 具有匹配(或边无关集) M, 它至少含有6条边.

设 M 是图 G 的任意一个极大匹配，它含有 k 条边. 前面已经说过，图 G 的极大匹配总是存在的. 由于匹配 M 中任意两条边都没有公共端点，因此，被 M 饱和的顶点有 $2k$ 个. 图 G 含有20个顶点，所以余下有 $20-2k$ 个顶点. 这些点中任意两个都不相邻，否则将相邻的边 e 添加到 M, 得到边子集 M^*. M^* 是图 G 的匹配，和 M 是图 G 的极大匹配相矛盾. 因此余下的 $20-2k$ 个顶点中任意两个都不相邻. 由已知条件，这些顶点中每一个都至少连有一条边，所以至少有 $20-2k$ 条边不属于 M. 于是图 G 至少含有 $(20-2k)+k$ 条边. 因此有

$$(20-2k)+k\leqslant 14.$$

解得 $k\geqslant 6$. 这就证明，图 G 中任意一个极大匹配至少含有6条边.

注 1 例2可以推广为 n 名成员和 m 场比赛的情形，其中 $n>m$. 结论则为，必有 $n-m$ 场比赛，参赛者是 $2(n-m)$ 名不同成员.

注 2 例2中数字6是下界，它不能再提高. 图30给出的是达到下界6的例子，其中任何一个极大匹配都恰含6条边.

例 3 有100个实数，它们的和是零. 证明，从这100个实数中，至少可以取99对实数，使得每一对实数之和是非负的.

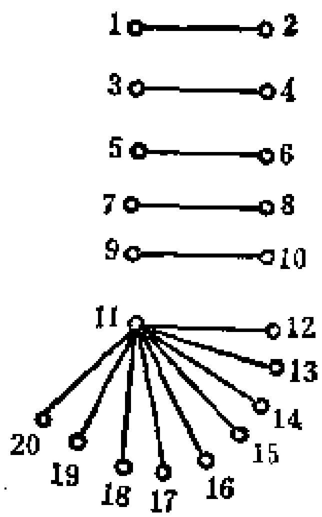


图 30

证 把这100个实数看成100个顶点，令其中任意两个顶点都相邻，得到100阶完全图K_{100}，它所含的边数$q(K_{100})$为$q(K_{100})=50\cdot 99$. 可以把完全图K_{100}的$50\cdot 99$条边，分成99个边子集，使得每个边子集都是图K_{100}的一个完全匹配，即含有50条边，而且任意两条边都没有公共端点.将每条边的两个端点所表示的实数组成一对，则50条边相应50对实数，它们之和恰好是这100个实数之和，即等于0. 所以必有一对实数之和是非负的. 由于完全图K_{100}的$50\cdot 99$条边已分成99个完美匹配，所以至少有99对实数，每一对实数之和是非负的.

注 例3可以推广到n个和为零的实数情形.

下面的例子是第一节例4的推广.

例 4 设G是$2n$阶简单图，它的每个顶点的度至少是n. 证明，图G含有n条边，其中任意两条边都没有公共端点.

证 设M是图G的所有极大匹配中边数最大的一个，且设M含有k条边. M中所有边的端点集合记作A，它含有$2k$个顶点. 很明显，$2k\leqslant 2n$，即$k\leqslant n$. 设$k<n$. 图G中所有不属于A的顶点集合记作B，它含有$2n-2k\geqslant 2$个顶点. 由于M是极大匹配，所以集合B中任意两个顶点都不相邻. 取x，$y\in B$. 由已知条件，$d(x)\geqslant n$，$d(y)\geqslant n$. 图G中以x

或y为端点的边至少有$2n$条，这$2n$条边的另一端点都在A中．由于M中含有$k<n$条边，所以这$2n$条边中必有三条边，它的另一端点是M中某条边uv的端点．即有图31(*a*)，(*b*)所示的情形．于是$(M\setminus\{uv\})\cup\{xu, vy\}$和$(M\setminus\{uv\})\cup\{xv, yu\}$中必有一个是图$G$的匹配，其所含边数为$k+1$，和$M$的最大性相矛盾．这就证明，$k=n$．即图$G$中具有完美匹配．证毕．

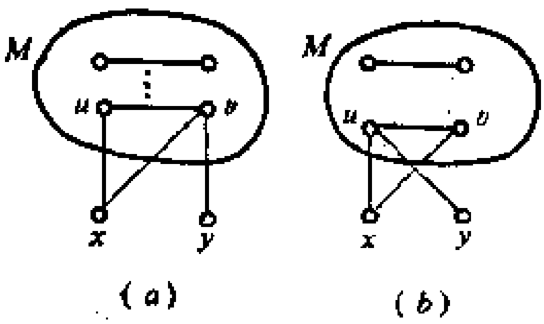


图 31

例 5 在舞会上，每个男子都有k位女朋友，每个女士也都有k位男朋友．问所有参加舞会的人能否同时和他们的一个异性朋友结伴一起跳舞？

解 出席舞会的人用顶点表示，所有表示男人的顶点集合记作X，所有表示女士的顶点集合记作Y．对于$x\in X$，$y\in Y$，当且仅当男子x和女士y为朋友时，令x和y相邻，而且同一个集合X或Y中的顶点不相邻，得到二部分图G．由于每个人都有k位异性朋友，因此图G中每个顶点的度都是k，即图G是k正则二部分图．由定理3，图G具有完美匹配M．这表明，X中顶点可以通过完美匹配M和Y中顶点建立一一对应，于是所有舞会参加者都可以同时和他们的一位异性朋友一块跳舞．

例 6 有个人给六个人写信，每人一封信，并预备了六个写有收信人地址的信封. 把信装进信封里，使得信和信封上收信人都不相符. 问有多少种装法？

解 设给第 i 个人写的信为 x_i，写上第 i 个人地址的信封记作 y_i，$i=1, 2, \cdots, 6$. 记 $X=\{x_1, x_2, \cdots, x_6\}$，$Y=\{y_1, y_2, \cdots, y_6\}$. 把 x_i 和 y_i 视为顶点，$i=1,2,\cdots, 6$. 对顶点 $x_i\in X$，$y_j\in Y$，当且仅当 $i\neq j$ 时令 x_i 和 y_j 相邻，得到二部分图 G. 由于 x_i 只和 y_i 不相邻，所以每个 x_i 的度是 5，同样每个 y_i 的度也是 5. 即图 G 是 5 正则二部分图. 由定理 3，图 G 具有完美匹配 $M=\{e_1, e_2, \cdots, e_6\}$，设边 $e_i=x_iy_{l_i}$，$i=1, 2, \cdots, 6$. 则把信 x_i 装进信封 y_{l_i}，$i=1,2,\cdots, 6$，便得到一种信和信封都装错的装法. 对于图 G 的不同完美匹配，由上面确定的错装信封的装法也不同. 反之，对于把信和信封都装错的一种装法，也可以确定图 G 的一个完美匹配. 因此，问题化为求图 G 的完美匹配之个数 D_6.

设 $M=\{e_1, e_2, \cdots, e_6\}$ 是图 G 的完美匹配，其中 $e_i=x_iy_{l_i}$，$i=1, 2, \cdots, 6$. 由于 $e_1=x_1y_{l_1}$，$l_1\neq 1$，因此边 e_1 有 5 种可能的取法. 取定 $e_1=x_1y_l$，$l\neq 1$. 当 $e_l=x_ly_1$ 时，$M^*=M\setminus\{e_1, e_l\}$ 是去掉图 G 的顶点 x_1，x_l，y_1，y_l，同时去掉图 G 中所有以 x_1，x_l，y_1，y_l 中某个顶点为端点的边后得到的图 G^* 的一个完美匹配. 而图 G^* 相当于四封信装进四个信封的图. 因此图 G^* 中完美匹配的个数为 D_4. 所以图 G 中具有 $e_1=x_1y_l$，$e_l=x_ly_1$ 的完美匹配 $M=\{e_1, e_2, \cdots, e_6\}$ 的个数是 D_4. 当 $e_l\neq x_ly_1$ 时，$M^{**}=M\setminus\{e_1\}$ 是去掉图 G 的顶点 x_1 和 y_l，同时去掉图 G 中所有以 x_1 或 y_l 为端点的边后得到的图 G^{**} 中的完美匹配. 而图 G^{**} 中完美匹配的个数为 D_5. 于是得到，$D_6=5(D_5+D_4)$. 一般地说，n 封信错装进 n 个信

封的装法种数 D_n 具有如下递推关系：

$$D_n=(n-1)(D_{n-1}+D_{n-2}),$$

初始条件为 $D_1=0$，$D_2=1$. 由此解得 $D_6=265$.

最后给出一个著名例子. 这种类型的题目在数学竞赛中经常遇到.

例 7 有一个缺角的8×8国际象棋棋盘，左上角和右下角各缺掉一个方格(图32). 一个多米诺骨牌恰好能覆盖住棋盘上两个相邻的方格. 问能否用多米诺骨牌完全覆盖缺角的棋盘？

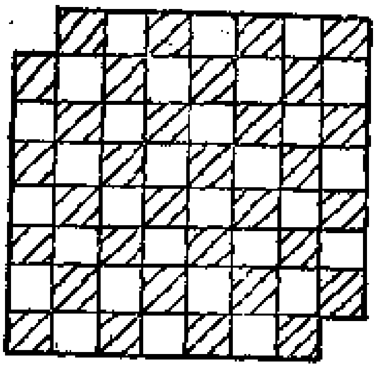


图 32

先明确完全覆盖的含义. 一个多米诺骨牌恰好覆盖两个完整而相邻方格，每个方格都被多米诺骨牌覆盖，并且任意两个骨牌都不相互重叠，这样的覆盖就叫做完全覆盖. 现在来解例 7.

解 按照惯例，国际象棋棋盘上的方格都染成白色或者黑色，相邻方格不同色. 棋盘上的方格用顶点表示. 所有表示白色方格和所有表示黑色方格的顶点集合分别记作X和 Y. 对于顶点 $x\in X$，$y\in Y$，当且仅当 x 和 y 表示的方格有公共边时，令顶点 x 和 y 相邻，得到二部分图 G. 如果可以用多米诺骨牌完全覆盖缺角的棋盘，则图 G 具有完美匹配，反之亦然. 于是，问题化为，二部分图 G 是否具有完美匹配？由定理 2，如果图 G 具有完美匹配，则 $|X|=|Y|$. 但是，由于缺角棋盘上缺掉的两个方格颜色相同，所以黑色方格数 $|Y|$ 和白色方格数 $|X|$ 相差是 2，矛盾. 因此图 G 不具有完美匹配. 这说明，缺角棋盘不能用多米诺骨牌完全覆盖.

用多米诺骨牌覆盖棋盘的问题很吸引人. 有人给出了下

面的定理，用它来判定是否能用多米诺骨牌覆盖棋盘.

定理 4 $m\times n$ 超级象棋棋盘上的方格染成白色或者黑色，相邻方格不同色. 剪掉棋盘上若干个方格，得到的残缺棋盘上所有白色方格和所有黑色方格的集合分别记作 X 和 Y. 则可以用多米诺骨牌完全覆盖残缺棋盘的必要且充分条件是，$|X|=|Y|$，并且对任意子集 $A\subseteq X$，均有，

$$|A|\leqslant|N(A)|,$$

其中 $N(A)$ 是所有至少和 A 的一个白色方格相邻的黑色方格集合，换句话说，对于任意 k 个白色方格，至少有 k 个黑色方格和它们中的方格相邻，$k=1,\ 2,\ \cdots,\ |X|$.

证 由定理 2 即得.

解决覆盖棋盘的问题，方法自然是多种多样的. 图论是其中的一种工具. 但是，任何一种方法都难免有它的局限性. 图论方法也不例外，绝不可能是法力无边的. 运用哪种方法好，就要具体问题具体分析了.

例 8 证明，当 n 不被 3 整除时，剪掉任意一个方格的 $2n\times 2n$ 超级国际象棋盘可以用特里米诺骨牌完全覆盖. 所谓特里米诺骨牌是把 2×2 正方形剪掉一个方格后得到的骨牌.

解 当 $n=1$ 时，剪掉一个方格的 2×2 棋盘恰好和特里米诺骨牌形状相同. 因此结论对 $n=1$ 成立. 当 $n=2$ 时，把 4×4 棋盘分成四个 2×2 正方形. 剪掉的方格应在其中某一个 2×2 正方形(图33). 余下三个 2×2 正方形可以用 4 个特里米诺骨牌覆盖. 即结论对 $n=2$ 成立. 当 $n=4$ 时，把 8×8 棋盘分成四个 4×4 正方形，剪掉的应落在其中某一个 4×4 正方形，由 $n=2$ 时的结论，它可以用 5 个特里米诺骨牌覆盖，余下的三个 4×4 正方形可以用16个特里米诺骨牌覆盖(图34)，因此结论对 $n=4$ 成立. 当 $n=5$ 时，可以将 10×10 棋盘分成

2个3×10长方形和1个4×10长方形，使得剪掉的方格落在

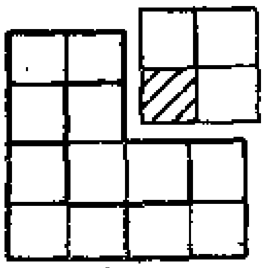


图 33

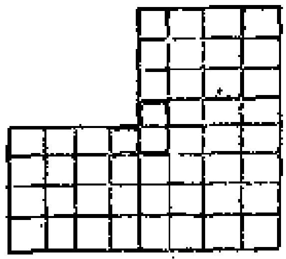


图 34

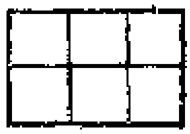


图35

4×10长方形里．再把4×10长方形分成2个3×4长方形和1个4×4正方形，使得剪掉的方格落在4×4正方形．上面已证明，剪掉一个方格的4×4正方形可以用特里米诺骨牌覆盖，而2×3长方形可用2个特里米诺骨牌覆盖(图35)，因此结论对$n=5$成立．现在设$n\geqslant7$．把$2n\times2n$棋盘分成$6\times2n$和$2(n-3)\times2n$的长方形，使得剪掉的方格落在$2(n-3)\times2n$长方形．再把$2(n-3)\times2n$长方形分成$2(n-3)\times2(n-3)$正方形和$2(n-3)\times6$长方形，使得剪掉的方格落在$2(n-3)\times2(n-3)$正方形里．而$6\times2n$和$2(n-3)\times6$的长方形可以分成若干个2×3长方形，因此可以用特里米诺骨牌覆盖．再对剪掉一个方格的$2(n-3)\times2(n-3)$棋盘重复上述过程，最后化为$n=4$和$n=5$的情形．因此当$n\geqslant7$时结论成立．

注 例8使用的方法是构造性证明方法和归纳法．在棋盘可以覆盖情形下，构造性方法是一种有效的方法．

习 题 五

1．用黑白二色去染$m\times n$超级象棋棋盘，每个方格一种颜色，相邻方格不同色．设m和n都是奇数，则$m\times n$超级象棋棋盘上不同色的方格数相差为1，不妨设白色方格比黑色方格多一个．从棋盘上剪掉一个白格．证明，剪过的棋盘可以用多米诺骨牌完全

覆盖.

2. 8×8 国际象棋棋盘上剪掉左上角一个方格. 证明，剪过的棋盘可以用特里米诺骨牌完全覆盖，但不能用3×1长方形完全覆盖.

3. 数学通讯杂志发表了8个征解的题目. 从读者寄来的解答中挑选出每道题的两个解答，发现这16个选好的解答是8个读者提出的，而且每个人恰好提出两个解答. 证明，可以这样发表每道题的一个解答，使得这8个读者中每个人都有一个解答.

4. 某个公司有7个职位 P_1, P_2, …, P_7待聘. 每个职位需要聘请一名合格者任职. 应聘者有10个人，他们是 a_1, a_2, …, a_{10}, 他们所能胜任的职位集合依次是$\{P_1, P_5, P_6\}$, $\{P_2, P_6, P_7\}$, $\{P_3, P_4\}$, $\{P_1, P_5\}$, $\{P_6, P_7\}$, $\{P_3\}$, $\{P_2, P_3\}$, $\{P_1, P_3\}$, $\{P_1\}$, $\{P_5\}$, 而且每个人只能担任一个职位. 试求应聘者被录用的最大数目.

5. 有两个人，在一个 n 阶简单图上进行博奕. 两个人轮流选择不同的顶点 v_0, v_1, …, v_k, …. 如果在第 i 步时所选取的顶点为v_i, 则第 $i+1$ 步应选顶点 v_{i+1}, 使得 v_{i+1} 和 v_i 相邻，而且和 v_0, v_1, …, v_{i-1} 都不相同，直到不能选到顶点为止. 最后选到顶点者为胜. 证明，先选顶点的人有一个必胜策略的必要且充分条件是，图 G 不具有完美匹配.

6. 有一个 r 个行、n 个列的正整数表 A, 其中任意一行和任意一列交叉位置的数字是正整数 1, 2, …, n 中的某一个，而且每一行和每一列上的数字都不相同. 这样的正整数 A 叫做一个 $r\times n$拉丁长方. 例如，

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \\ 4 & 1 & 5 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

是一个3×5拉丁长方. 当 $r=n$ 时，$n\times n$ 拉丁长方也叫作 $n\times n$ 拉丁方. 证明，当 $r<n$ 时，每个 $r\times n$ 拉丁长方都可以添加$n-r$个行，使它成为一个 $n\times n$ 拉丁方.

7. 在一个6×6微形国际象棋盘上，摆上了一些多米诺骨牌，每个多

米诺骨牌都覆盖了两个相邻的方格．证明，如果还有14个方格没有被覆盖，则可以再放进一个多米诺骨牌，而无需移动其他摆 好的骨牌。

6 朗 塞 数

1947年，出版世界上头一本图论教科书的国家——匈牙利在数学竞赛中出了这样一道试题："证明，任意六个人中，总有三个人，要么相互认识，要么互不认识．" 这道试题引起了国际数学界的广泛注意．1953年，在美国的著名图论专家哈拉里（F. Harary）的建议下，这道试题被选为普特南（William Lowell Putnam）大学生数学竞赛试题．1958年，美国著名数学杂志《数学月刊》第5，6期把它收入，编为征解问题E 1321．之后，各国数学竞赛乃至国际性数学竞赛，都经常出现类似的试题．直到40年后的1988年，仍然余波未了．这一年，加拿大数学竞赛又出了这样的试题："有六人聚会，任意两人要么相互认识，要么互不认识．证明，必有两个组，每组三个人，同组的三个人要么彼此认识，要么互不认识．"区区一道试题，竟然如此轰动，而且经久不衰，实在罕见．个中缘由确有探究的必要．

为了解开其中的奥妙，我们还是从这道试题的解法谈起．要解这道试题，最好是把它转化为图论语言．把6个人看成6个顶点，任意两个顶点都相邻，得到6阶完全图K_5．用红、黄两种颜色去染完全图K_6的边．连接相互认识的两个人所相应的顶点的边染成黄色，否则染成红色．这样，完全图K_6的边都染成黄色或红色，每边只染一种颜色．这种完全图K_6叫做**二色完全图**．当然，对于不同的六个人，由于彼此之间认识关系不尽相同，得到的二色完全图也不同．如果在

六个人中，有三个人彼此认识，那么相应的三个顶点连的都是黄边，即有一个黄色三角形．如果有三个人互不认识，则相应的三个顶点连的都是红边，得到的是红边三角形．三边同色的三角形叫做**单色三角形**．于是这道试题的图论形式就是下面的例1．

例 1 任意一个二色完全图 K_6 都含有单色三角形．

证 任取二色完全图 K_6 的一个顶点 v，它连有5条边，两种颜色．其中必有三条边 vu_1，vu_2，vu_3 同色，不妨设都是红边．如果$\triangle u_1u_2u_3$ 含有红边 u_iu_j，$1\leqslant i<j\leqslant 3$，则$\triangle vu_iu_j$ 是红边三角形；如果 $\triangle u_1u_2u_3$ 不含红边，则它本身是黄边三角形．因此，二色完全图 K_6 一定含有单色三角形．

例1的证明方法是很典型的，主要是分析二色完全图K_6 中顶点 v 所连的同色边数．这种方法就是所谓的**同色边数分析法**，它是论证有关边染色的图论问题的一种基本而有力的方法．

二色完全图 K_6 的概念自然可以推广到 n 阶完全图 K_n．用红、黄两色去染完全图 K_n 的边，每边染且只染一种颜色，得到的图叫做 **n 阶二色完全图**，仍记作 K_n．由于边的染色方式不同，得到的 n 阶二色完全图也不同．尽管这样，例1说明，当 $n\geqslant 6$ 时，任意一个 n 阶二色完全图 K_n 总含有单色三角形．这正如著名数学家莫慈金（T. S. Motzkin）所说那样：“完全无序是不可能的(Complete disorder is impossible)．”对于 n 阶完全图 K_n，随意地二染色（无规则，无序），不管怎样染，也不管是谁来染，总会呈现某些规律性的东西，也就是有这样的结论，即当 $n\geqslant 6$ 时，二色完全图 K_n 总含有单色三角形．我们的目的是从任意对一个图进行边染色中寻找出规律性的东西来．

对 5 阶二色完全图 K_5，是否总含有单色三角形？图26(*a*)中的 5 阶二色完全图K_5 含有红边三角形 $\triangle v_1v_2v_3$ 和黄边三角形 $\triangle v_1v_4v_5$（图中实线和虚线分别表示红边和黄边），而图36(*b*)中的 5 阶二色完全图 K_5 则不含单色三角形。这说明，

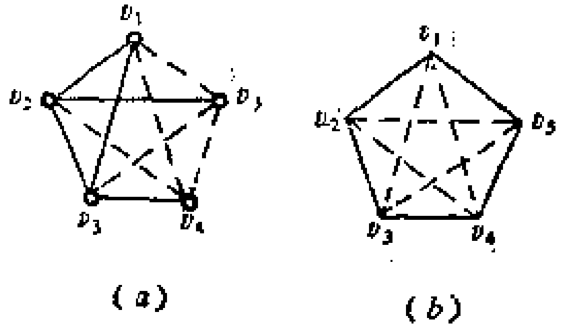


图 36

数 6 是使得任意一个 n 阶二色完全图K_n都含有单色三角形的最小阶数. 由于这一结论的重要性，我们把它写成定理形式如下.

定理 1 使得每一个二色完全图 K_n 都含有单色三角形的阶数 n 之最小值是 6 .

为了推广定理 1，需要引进子图的概念. 给定一个图 G. 由图 G 的部分顶点和部分边组成的图叫做图 G 的**子图**. 例如，图37中(*b*)，(*c*)，(*d*)的图 G_1，G_2，G_3 都是 (*a*) 中图G 的子图.

现在用 $r(p, q)$表示这样的正整数，即当 $n \geqslant r(p, q)$时，任意一个二色完全图 K_n 要么含有 p 阶红色完全子图K_p（也就是每边都是红色的子图K_p），要么含有q 阶黄色完全子图 K_q，而当 $n < r(p, q)$时，必有某个 n 阶二色完全图 K_n，它既不含 p 阶红色完全子图 K_p，也不含 q 阶黄色完全子图K_q. 数 $r(p, q)$叫做**朗塞数**，是英国逻辑学家朗塞(F. P. Ramsey) 在 28

岁时首次提出的．当然，数 $r(p,\ q)$ 是朗塞所提出的被人们称为朗塞数的最为简单情形．很明显，$r(1,\ q)=1$，$r(2,\ q)=q$．定理 1 表明，$r(3,\ 3)=6$．而且如果 $r(p,\ q)$ 存在，则 $r(p,\ q)=r(q,\ p)$．

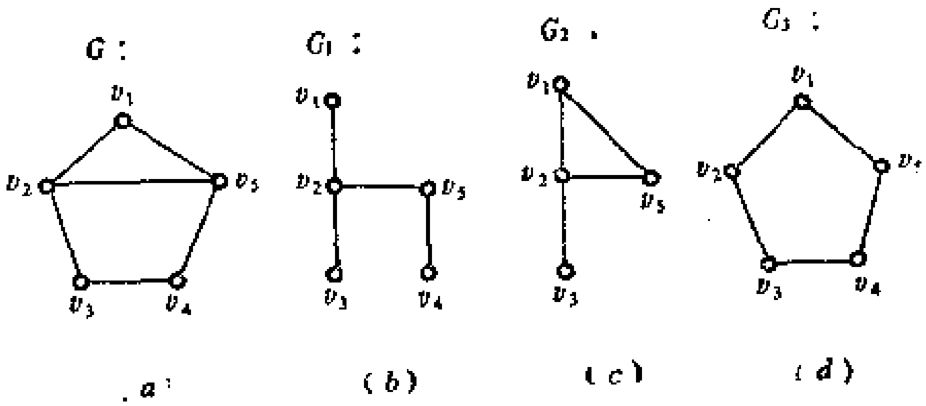


图 37

确定朗塞数 $r(p,\ q)$ 是一个难的问题．目前所求得的朗塞数 $r(p,\ q)$ 只有寥寥几个，它们是

$$r(3,\ 3)=6,\qquad r(3,\ 6)=18,$$
$$r(3,\ 4)=9,\qquad r(3,\ 7)=23,$$
$$r(3,\ 5)=14,\qquad r(3,\ 9)=36,$$
$$r(4,\ 4)=18.$$

人们只好转而确定朗塞数 $r(p,\ q)$ 的上下界．这方面最好的结论是曾经得到国际数学大奖——沃尔夫奖的数学大师匈牙利人厄尔多斯(P. Erdös)和泽克勒斯 (G. Szekeres)在 1935 年得到的，即下面的定理 2．

定理 2 对任意正整数 p 和 q，朗塞数 $r(p,\ q)$ 存在，而且

$$r(p,\ q)\leqslant\binom{p+q-2}{p-1}, \tag{1}$$

这里$\binom{n}{k}$表示从n个不同的元素取k个的组合数.

证 对正整数$k=p+q$用归纳法. 当$p=1, 2$而q任意, 以及$q=1, 2$而p任意时,容易验证式(1)成立. 因此当$k\leqslant 5$时式(1)成立. 现在归纳假设, 式(1)对满足$p'+q'<k$的正整数p'和q'成立, 其中$p\geqslant 3$, $q\geqslant 3$.

由归纳假设, 朗塞数$r(p-1, q)$和$r(p, q-1)$存在. 记$n=r(p-1, q)+r(p, q-1)$. 设K_n是任意一个n阶二色完全图, v是它的一个顶点, 它连有$n-1=r(p-1, q)+r(p, q-1)-1$条边, 两种颜色, 因此其中要么至少含有$r(p-1, q)=r$条红边, 要么至少含有$r(p, q-1)=s$条黄边.

如果v连有r条红边vu_1, vu_2, $\cdots$, vu_r, 则以u_1, u_2, $\cdots$, u_r为顶点的r阶完全子图K_r仍是二色的. 根据朗赛数$r(p-1, q)=r$的意义, K_r要么含有$p-1$阶红色完全子图K_{p-1}, 要么含有q阶黄色完全子图K_q. 如果是前者, 则可设红色完全子图K_{p-1}的顶点为w_1, w_2, $\cdots$, w_{p-1}, 于是K_n含有以v, w_1, w_2, $\cdots$, w_{p-1}为顶点的p阶红色完全子图K_p; 如果是后者, 则K_n含有q阶黄色完全子图K_q.

如果v连有s条黄边vz_1, vz_2, $\cdots$, vz_s, 则以z_1, z_2, $\cdots$, z_s为顶点的s阶完全子图K_s仍是二色的. 根据朗塞数$r(p, q-1)=s$的意义, s阶二色完全图K_s要么含有p阶红色完全子图K_p, 要么含有$q-1$阶黄色完全子图K_{q-1}. 如果是前者, 则K_n含有p阶红色完全子图K_p; 如果是后者, 则可设K_{q-1}的顶点为x_1, x_2, $\cdots$, x_{q-1}. 于是K_n含有以v, x_1, x_2, $\cdots$, x_{q-1}为顶点的q阶黄色完全子图K_q.

这就证明, 任意一个n阶二色完全图K_n要么含有p阶红色完全子图K_p, 要么含有q阶黄色完全子图K_q.

所有使得任意一个二色完全图K_n要么含有p阶红色完全子图K_p，要么含有q阶黄色完全子图K_q的阶数n的集合记作S，上面的证明表明，$n=r(p-1,\ q)+r(p,\ q-1)\in S$，即正整数集合$S$是非空的．根据最小数原理（即每一个非空的正整数集合中必有一个最小的正整数，见黄国勋和李炯生著《计数》，上海教育出版社 1983 年版），集合S含有最小正整数，它就是朗塞数$r(p,\ q)$．因此朗塞数$r(p,\ q)$存在，并且有

$$r(p,\ q)\leqslant r(p-1,\ q)+r(p,\ q-1).$$

由归纳假设，

$$r(p-1,\ q)\leqslant\binom{p+q-3}{p-2},$$

$$r(p,\ q)\leqslant\binom{p+q-3}{p-1}.$$

于是得到，

$$r(p,\ q)\leqslant\binom{p+q-3}{p-2}+\binom{p+q-3}{p-1}=\binom{p+q-2}{p-1}.$$

定理 2 证毕.

这个定理的证明成功地应用了同色边数分析法，务请读者留意．由定理 2，可以直接得到下面的推论.

推论 对任意正整数q，$r(3,\ q)\leqslant\dfrac{q^2+q}{2}$.

其中的上界不是最佳的，可以改进为

定理 3 对任意正整数$q\geqslant 3$，$r(3,\ q)\leqslant\dfrac{q^2+3}{2}$.

证明可用归纳法，留给读者作习题.

例 2 房子里有 10 个人，任意 3 个人中总有 2 个人相

互认识，证明，其中总有 4 个人彼此认识.

证 把 10 个人看成 10 个顶点，相互认识的 2 个人所相应的两个顶点连黄边，否则连红边，得到 10 阶二色完全图 K_{10}. 由于任意 3 个人中总有 2 个人相互认识，即 K_{10}的任意三角形中总有黄边，因此 K_{10} 不含红边三角形. 于是所要证明的是，不含红边三角形的 10 阶二色完全图 K_{10}一定含有 4 阶黄色完全子图 K_4，也就是，$r(3, 4)\leqslant 10$. 事实上，由定理 2，有

$$r(3,\ 4)\leqslant\binom{3+4-2}{3-1}=\binom{5}{2}=10.$$

例 2 得证.

如果不引用定理 2，例 2 也可以用同色边数分析法加以证明，这里从略. 和上面的表中给出的确切值 $r(3, 4)=9$ 相比，例 2 给出的上界 $r(3, 4)\leqslant 10$ 还有距离. 再看例 3.

例 3 圆周上有 9 个点，任意两点都连一条红边或黄边，使得任意三点所确定的三角形都含有红边. 证明，其中必有 4 点，任意两点连的都是红边.

证 把圆周上的 9 个点看成图的 9 个顶点，两点间连的边看成图的边，并且颜色不变，得到 9 阶二色完全图 K_9. 由于任意三点所确定的三角形都含有红边，因此 K_9 不含黄边三角形，于是所要证明的是，不含黄边三角形的 9 阶二色完全图 K_9 一定含有 4 阶红色完全子图 K_4，即 $r(3,4)\leqslant 9$. 事实上，由定理 3，有

$$r(3,\ 4)\leqslant\frac{4^2+3}{2}=9.5.$$

由于朗塞数 $r(3, 4)$ 是整数，因此 $r(3, 4)\leqslant 9$.

因为定理 3 这里没有给出证明，所以下面用同色边数分

析法再证明之.

设 K_9 是 9 阶二色完全图，它不含黄边三角形，且 v 是 K_9 的一个顶点. v 连有 8 条边，两种颜色. 如果 v 连有 4 条黄边 vu_1，vu_2，vu_3，vu_4，则以 u_1，u_2，u_3，u_4 为顶点的 4 阶完全子图 K_4 不含黄边，即 K_4 是红色完全子图；如果 v 连有 6 条红边 vw_1，vw_2，…，vw_6，则以 w_1，w_2，…，w_6 为顶点的 6 阶完全子图 K_6 是二色的. 由于 K_9 不含黄边三角形，所以由例 1，K_6 含有红边三角形 $\triangle w_iw_jw_k$，$1\leqslant i<j<k\leqslant 6$，因此以 v，w_i，w_j，w_k 为顶点的 4 阶完全子图 K_4 是红色的；如果 K_9 的每个顶点都连有 5 条红边，则 K_9 含有 $\frac{9\times 5}{2}$ 条红边，不可能. 例 3 证毕.

图 38 给出了既不含 3 阶黄色完全子图 K_3，也不含 4 阶红色完全子图 K_4 的 8 阶二色完全图 K_8，从而 $r(3, 4)\geqslant 8$. 再由例 3 即得，$r(3, 4)=9$.

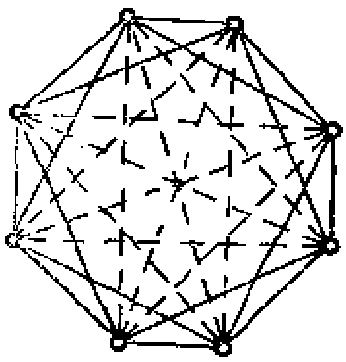


图 38

例 4 证明，任意十八个人中，总有四个人彼此认识，或者互不认识.

证 所要证明的图论结论是，任意一个 18 阶二色完全图 K_{18} 要么含有 4 阶红色完全子图，要么含有 4 阶黄色完全子图，即 $r(4, 4)\leqslant 18$.

利用定理 2，有 $r(4, 4)\leqslant\binom{4+4-2}{4-1}=\binom{6}{3}=20$，这和所要证的结论相去甚远. 下面用同色边数分析法证明. 设 v 是二色完全图 K_{18} 的一个顶点，它连有 17 条边，两种颜色，

因此总有 9 条边 vu_1，vu_2，…，vu_9 同色，不妨设同为红色．K_{18} 中以 u_1，u_2，…，u_9 为顶点的 9 阶完全子图 K_9 仍是二色的．由例 3，K_9 要么含有红边三角形$\triangle u_iu_ju_k$，$1\leqslant i<j<k\leqslant 9$，要么含有 4 阶黄色完全子图 K_4．如果是前者，则二色完全图 K_{18} 含有以 v，u_i，u_j，u_k 为顶点的 4 阶红色完全子图；如果是后者，则 K_{18} 含有 4 阶黄色完全子图 K_4．例 4 证毕．

图 39 给出了不含 4 阶红色完全子图和 4 阶黄色完全子

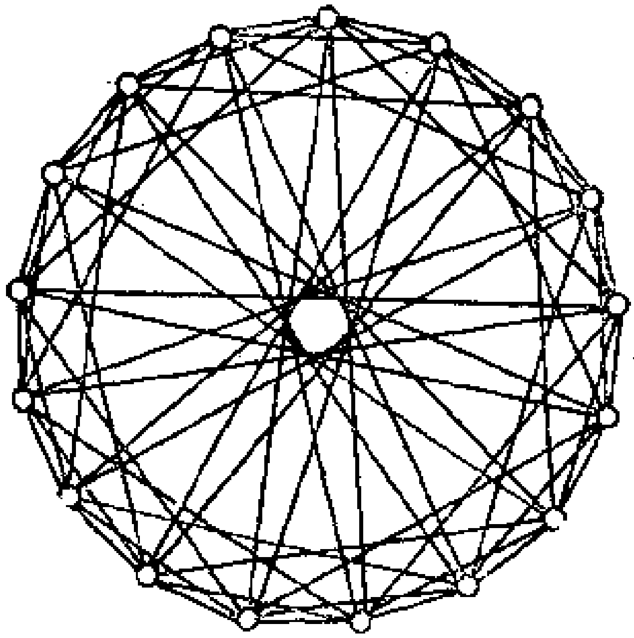


图 39

图的 17 阶二色完全图 K_{17} (其中实线表示红边，未连接的是黄边)．从而有 $r(4, 4)>17$．于是得到，$r(4, 4)=18$．

现在考虑本节开始提到的 1988 年加拿大数学竞赛试题．用图论语言叙述即是

例 5 证明，任意一个 6 阶二色完全图 K_6 至少含有二个单色三角形．

证 设二色完全图 K_6 的所有顶点是 u_1，u_2，…，u_6．以

顶点 u_i 为端点的红边边数记作 x_i．显然，$0\leqslant x_i\leqslant 5$．则以 u_i 为端点的黄边边数为 $5-x_i$．容易看出，三角形 $\triangle u_iu_ju_k$ 是非单色的必要且充分条件是，三角形 $\triangle u_iu_ju_k$ 恰有 2 个顶点，由每个顶点引出的两条边不同色，因此二色完全图 K_6 中非单色三角形的个数 g 适合

$$\sum_{i=0}^{5}x_i(5-x_i)=2g.$$

从而二色完全图 K_6 中单色三角形的个数 f 为

$$f=\binom{6}{3}-\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{5}x_i(5-x_i).$$

由于每个 x_i 都是非负整数，因此，当 $x_i=2$ 或 3 时，$x_i(5-x_i)$ 取到最大值 6，而且当每个 $x_i(5-x_i)$ 取到最大值时，f 取到最小值．于是 $f\geqslant\binom{6}{3}-6\times\frac{6}{2}=2$．这就证明，二色完全图 K_6 至少含有 2 个单色三角形．

例 5 给出的任意一个 6 阶二色完全图 K_6 中单色三角形的个数 f 之下界 2 是不能改进的．图 40 中的二色完全图 K_6 恰有 2 个单色三角形．

例 5 是一般问题的特殊情形．1959 年，古特曼（A. W. Goodman）在美国《数学月刊》第 11 期上发表了一篇文章，提出并解决了这样的问题：n 阶二色完全图 K_n 至少含有多少个单色三角形？古特曼的结论如下．

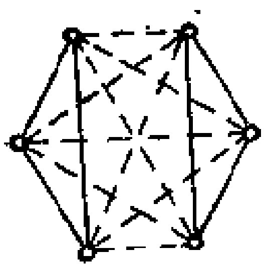


图 40

定理 4　任意一个 n 阶二色完全图 K_n 中单色三角形的个数 f_n 满足下面的不等式：

$$f_n \geqslant \begin{cases} \dfrac{1}{3}m(m-1)(m-2), & 当n=2m时, \\ \dfrac{2}{3}m(m-1)(4m+1), & 当n=4m+1时, \\ \dfrac{2}{3}m(m+1)(4m-1), & 当n=4m+3时, \end{cases}$$

而且下界是可以达到的.

由定理 4 可以得到，$f_5 \geqslant 0$，且存在不含单色三角形的5阶二色完全图；$f_6 \geqslant 2$，且存在恰含二个单色三角形的 6 阶二色完全图；$f_7 \geqslant 4$，且存在恰含 4 个单色三角形的 7 阶二色完全图，等等. 定理 4 的证明大体和例 5 相同. 这里不拟给出，有兴趣的读者无妨试一试.

有二色完全图的概念，自然就有 k 色完全图的概念. 设有 k 种颜色 $c_1, c_2, \cdots, c_k$，用它们去染 n 阶完全图K_n的边，每条边染且只染一种颜色，得到的图叫做 **k 色完全图**，仍记作K_n. 由于边的染色方法不同，得到的 k 色完全图也不同. 和二色完全图一样，关心的问题是，求这样的最小正整数n_0，使得当 $n \geqslant n_0$ 时，任意一个 n 阶 k 色完全图 K_n 要么含有 n_1 阶 c_1 色完全子图 K_{n_1}，要么含有 n_2 阶 c_2 色完全子图 K_{n_2}，…，要么含有 n_k 阶 c_k 色完全子图 K_{n_k}. 容易想象，这样的最小正整数 n_0 应当是存在的，因为当阶数 n 增加时，完全图 K_n 的边数增加得很快，所以总能保证 n 阶 k 色完全图 K_n 含有一个 n_i 阶 c_i 色完全子图 K_{n_i}，$1 \leqslant i \leqslant k$. 数 n_0 记作$r(n_1, n_2, \cdots, n_k)$，它叫做**朗塞数**. 特别，当$n_1=n_2=\cdots=n_k=3$时，记 $r(n_1, n_2, \cdots, n_k)=r(3, 3, \cdots, 3)=r_k$，并叫做经典朗塞数. 显然 $r_1=3$，由定理 1，$r_2=r(3, 3)=6$. 1955 年，格林伍德 (R. E. Greenwood)和格里逊 (A. M. Gleason) 证明，r_3

$=r(3, 3, 3)=17$. 另外还知道，$51\leqslant r_4\leqslant 65$. 前面已经说过，确定朗塞数是一个难的问题. 直到今天，所确定的朗塞数还是很少很少的. 于是人们自然就转而去求朗塞数 r_k 的上下界. 下面是格林伍德和格里逊的结论.

定理 5 对于正整数 k，有

（1）$r_{k+1}\leqslant(k+1)(r_k-1)+2$；

（2）$r_k\leqslant s_k$，其中 $s_k=1+\sum_{i=0}^{k}\frac{k!}{i!}$；

（3）$r_k\leqslant[k!e]+1$，其中 e 是自然对数的底，而 $[x]$ 是实数 x 的整数部分.

证 （1）记 $n=(k+1)(r_k-1)+2$. 任取一个 n 阶 $k+1$ 色完全图 K_n，设 v 是它的一个顶点，v 连有 $n-1=(k+1)(r_k-1)+1$ 条边，$k+1$ 种颜色，因此至少有 r_k 条边同色. 不妨设边 vu_1，vu_2，…，vu_{r_k} 是红色的. 如果以 u_1，u_2，…，u_{r_k} 为顶点的 r_k 阶完全子图 K_{r_k} 含有红边 u_iu_j，$1\leqslant i<j\leqslant r_k$，则 K_n 含有红边三角形 $\triangle vu_iu_j$；如果 r_k 阶完全子图 K_{r_k} 不含红边，则 K_{r_k} 是 k 色完全子图，由朗塞数 r_k 的意义，k 色完全图 K_{r_k} 含有单色三角形，这就证明，任意一个 n 阶 $k+1$ 色完全图 K_n 都含有单色三角形，从而结论（1）成立.

（2）对 k 用归纳法. 当 $k=1$ 时，$r_1=3$，$s_1=3$，因此（2）成立，设（2）对 k 成立，则由结论（1），

$$r_{k+1}\leqslant(k+1)(r_k-1)+2\leqslant(k+1)\left(1+\sum_{i=0}^{k}\frac{k!}{i!}-1\right)+2$$
$$=1+\sum_{i=0}^{k+1}\frac{(k+1)!}{i!}=s_{k+1}.$$

即结论（2）成立.

（3）仍对 k 用归纳法. 由于 $e=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=2.718$

$28\cdots$. 所以 $r_1=3\leqslant[e]+1$. 因此当 $n=1$ 时结论(3)成立. 设(3)对 k 成立, 则由结论(1),

$$
\begin{aligned}
r_{k+1}&\leqslant(k+1)(r_k-1)+2\\
&\leqslant(k+1)[k!\ e]+2\\
&=(k+1)\left[k!\left(\sum_{i=0}^{k}\frac{1}{i!}+\frac{e^{\theta}}{(k+1)!}\right)\right]+2\\
&=(k+1)!\ \sum_{i=0}^{k}\frac{1}{i!}+2,
\end{aligned}
$$

其中 $0<\theta<1$. 另一方面,

$$
\begin{aligned}
[(k+1)!\ e]+1&=\left[(k+1)!\left(\sum_{i=0}^{k+1}\frac{1}{i!}+\frac{e^{\theta_1}}{(k+2)!}\right)\right]+1\\
&=(k+1)!\sum_{i=0}^{k}\frac{1}{i!}+2,
\end{aligned}
$$

其中 $0<\theta_1<1$. 因此, $r_{k+1}\leqslant[(k+1)!e]+1$, 即结论(3)成立.

应当指出, 定理5的证明用的仍是同色边数分析法. 对此方法应予足够的重视.

例 6 有17名科学家, 每名科学家都和其他所有科学家通信, 他们在通信时只讨论三个题目, 而且任意两名科学家在通信时只讨论一个题目. 证明, 其中至少有三名科学家, 在相互通信时讨论的是同一个题目.

证 把17名科学家看成17个顶点, 把三个题目看成三种颜色 c_1, c_2, c_3. 如果两名科学家在通信时讨论的题目是 c_i, 则相应顶点连一条 c_i 色边, 得到17阶3色完全图 K_{17}. 要证明的是, 任意一个17阶3色完全图 K_{17} 一定含有单色三角形, 即 $r_3\leqslant17$. 事实上, 由定理5, $r_3\leqslant(2+1)(r_2-1)+2=3r_2-1$. 由定理1, $r_2=6$. 所以 $r_3\leqslant17$. 例6证毕.

图41是不含单色三角形的16阶3色完全图 K_{16}(其中实

线表示红边，虚线表示黄边，未画出的边表示蓝边）．因此，$r_3 \geqslant 17$．和例 6 一起，便得到 $r_3 = 17$．

例 6 也可以用同色边数分析法加予证明．

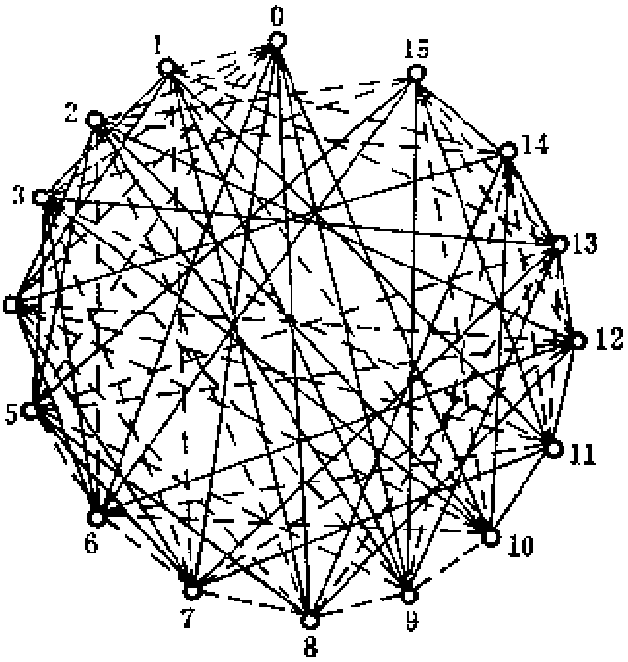


图 41

例 7 空间中有 $2n$ 个点 A_1，A_2，…，A_{2n}，$n>1$，任意三点不共线．设 M 是联结其中某些对点的线段集合．证明，当 M 所含线段数目至少为 n^2+1 时，总有以 A_i，A_j，A_k 为顶点的三角形，$1 \leqslant i < j < k \leqslant 2n$，而当 M 所含线段数目至多为 n^2 时，则可能不具有这样的三角形．

证 用空间中 $2n$ 个点 A_1，A_2，…，A_{2n} 作为 $2n$ 阶完全图 K_{2n} 的顶点，当联结点 A_i 和 A_j 的线段属于集合 M 时，把图 K_{2n} 中边 A_iA_j 染成红色，否则染黄色，得到二色完全图 K_{2n}，要证明的是，（1）如果二色完全图 K_{2n} 至少含有 n^2+1 条红边，则 K_{2n} 含有红边三角形；（2）如果二色完全图 K_{2n} 中至多含有 n^2 条红边时，则 K_{2n} 可能不含有红边三角形．

先用归纳法证明(1). 当 $n=2$ 时, 4 阶二色完全图 K_4 至少含有 5 条红边, 即至多含有一条黄边, 于是 K_4 中不含这条黄边的三角形是红边三角形, 因此当 $n=2$ 时结论(1)成立. 假设结论(1)对 n 成立, 现在证明结论(1)对 $n+1$ 成立. 设顶点为 A_1, A_2, $\cdots$, A_{2n+2} 的二色完全图 K_{2n+2} 至少含有 $(n+1)^2+1=n^2+2n+2$ 条红边, 且设 $A_{2n+1}A_{2n+2}$ 是 K_{2n+2} 的一条红边. 去掉顶点 A_{2n+1}, A_{2n+2}, 以及至少以它们中一个顶点为端点的边, 得到一个 $2n$ 阶二色完全图. 如果完全图 K_{2n} 至少含有 n^2+1 条边, 则由归纳假设, 它含有红边三角形, 从而二色完全图 K_{2n+2} 也含有红边三角形. 设二色完全图 K_{2n} 至多有 n^2 条红边, 且不含红边三角形. 如果 K_{2n} 中某个顶点 A_i 与 A_{2n+1}, A_{2n+2} 都连红边, 则二色完全图 K_{2n+2} 含有红边三角形. 如果 K_{2n} 中每个顶点 A_i 都至多只和 A_{2n+1}, A_{2n+2} 中一个顶点连红边, 则 K_{2n+2} 中红边边数至多为 n^2+2n+1, 和假设矛盾. 这就证明了结论(1)成立.

取 $X=\{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$, $Y=\{A_{n+1}, \cdots, A_{2n}\}$. 令 X 中每个顶点都和 Y 中每个顶点连红边, 而 X 中的顶点之间以及 Y 中顶点之间都连黄边, 得到的 $2n$ 阶二色完全图 K_{2n} 恰有 n^2 条红边, 而且不含红边三角形.

习 题 六

1. 某个州管辖若干个市, 任意两个市之间都恰好拥有汽车、火车、飞机中一种交通工具进行联络已知整个州三种交通工具都有, 但没有一个市三种交通工具全有, 而且不存在三个市, 其中两两联络的方式全相同. 问该州至多有几个市?
2. 某个俱乐部有个约定: 只有当 4 个人围坐一起, 每人与其两旁的人都曾搭档或者都不曾搭档过时, 这 4 个人才能在一起打桥牌. 证明, 只要俱乐部里有 6 个人, 就一定能凑齐 4 个人一起打桥牌. 如

果恰有 5 个人，结论还成立吗？

3. 试证明定理3.

4. 证明，任意一个 17 阶三色完全图 K_{17} 至少含有 3 个单色三角形

5. 9 名数学家参加一次国际会议，其中任意三名数学家至少有二人能讲同一种语言，每名数学家至多能讲 3 种语言. 证明，总有 3 名数学家能讲同一种语言.

6. 证明，在任意 12 个人中，总有这样两个人，使得在其他 10 人中，至少有 5 个人，其中每个人要么都认识这两个人，要么都不认识这两个人.

7. 有 9 个人，其中有 1 个人认识另外两个人，有 2 个人每人都认识另外4 个人，有 4 个人每人都认识另外 5 个人，余下 2 个人每人都认识另外 6 个人. 证明，其中总有 3 个人，他们彼此都互认识.

8. 某个俱乐部有个约定，只有当 4 个人中任意两个人都没有搭档过才能一起打桥牌. 俱乐部有一次聚会，来了 14 个成员，其中每个人都已经和其他 5 个人搭档过，玩了三局之后，按俱乐部约定只好停止. 正当他们扫兴要离开时，突然来了一个他们谁也不认识的新成员. 证明，现在至少还可以打一局桥牌.

9. 从自然数 1 到 $3n$ 中任意挑出 $n+2$ 个数，$n>1$. 证明，在挑出的数中总有两个数，它们的差大于 n 而小于 $2n$.

7 舒尔数和范德瓦登数

研究朗塞数的理论即是朗塞理论，它是图论乃至整个组合数学的一个最富成果、最为困难的课题. 上节谈到的朗塞数只是朗塞理论中最具体、最易理解的一部分. 为了使读者能对朗塞理论中朗塞本人的工作有个粗略的了解，这里简略地介绍朗塞理论的一个核心定理，即朗塞定理.

设有 n 个元素 u_1，u_2，…，u_n，从中取出 k 个元素 u_{i_1}，u_{i_2}，…，u_{i_k}，$k\leqslant n$. 由它们组成 k 元子集 $\{u_{i_1}, u_{i_2}, \cdots, u_{i_k}\}$. 把 n 个元素 u_1，u_2，…，u_n 看成 n 个顶点，把 k 元子集 $\{u_{i_1}, u_{i_2}, \cdots, u_{i_k}\}$ 看成连接顶点 u_{i_1}，u_{i_2}，…，u_{i_k} 的边，它叫做 k 级边，n 个顶点和所有 k 级边便组成一个图，叫做 k 级完全超图，记作 K_n^k. 很明显，2 级完全超图 K_n^2 就是 n 阶完全图 K_n. 现在用 t 种颜色 c_1，c_2，…，c_t，去染 k 级完全超图 K_n^k 的边，每条 k 级边染一种颜色，而且只染一种颜色，得到的图叫做 t 色 k 级完全超图，仍记作 K_n^k. 当然，由于 k 级边的染色方式不同，得到的 t 色 k 级完全超图也不同. 如果 k 级完全超图 K_n^k 的每条 k 级边都是 c 色的，则 K_n^k 叫做 c 色 k 级完全超图，如果不计较其颜色，只考虑 k 级边是否同色，则 K_n^k 也叫做单色 k 级完全超图.

定理 1（朗塞定理） 设 n_1，n_2，…，n_t 和 k 是给定的正整数，$n_1\geqslant k$，$n_2\geqslant k$，…，$n_t\geqslant k$，c_1，c_2，…，c_t 是给定的 t 种颜色，则存在一个正整数 m，使得当 $n\geqslant m$ 时，任意一个 t 色 k 级完全超图 K_n^k 总含有某个 c_i 色 k 级完全超图 $K_{n_i}^k$，其

中 i 是 1，2，…，t 中某个整数，而当 $n<m$ 时，一定有某个 t 色 k 级完全超图 K_n^k，它不含有 c_1 色 k 级完全超图$K_{n_1}^k$，c_2 色 k 级完全超图 $K_{n_2}^k$，…，c_t 色 k 级完全超图 $K_{n_t}^k$ 中任何一个.

数 m 只和 n_1，n_2，…，n_t 及 k 有关，记作 $r(n_1, n_2, \cdots, n_t; k)$，并叫做**朗塞数**. 当 $k=2$，$n_1=n_2=\cdots=n_t=3$ 时，$r(n_1, n_2, \cdots; n_t; 2)=r(3, 3, \cdots, 3; 2)=r_t$，当 $k=2$，$t=2$，且 $n_1=p$，$n_2=q$ 时，$r(n_1, n_2; 2)=r(p, q)$. 朗塞定理保证了朗塞数 $r(n_1, n_2, \cdots, n_t; k)$ 的存在性，因此求朗塞数才有意义.

朗塞定理是图论乃至组合数学中一个重要定理，它的证明在通常图论教科书中都可以找到. 有兴趣的读者可以阅读著名组合论专家赖瑟（H. J. Ryser）的名著《组合数学》(Combinatorial Mathematics. 李乔译，上海科学技术出版社 1983 年版).

朗塞定理的意义在于，给定一个系统(比如一个集合S)，它的子系统具有这样或那样的性质(比如对集合 S 的 k 元子集进行分类，同属一类的 k 元子集染同一种颜色，属不同类的 k 元子集染不同颜色)，不管具有这样或那样的性质的子系统有多少(比如不管对集合 S 的 k 元子集如何分类，或不管如何染色)，只要这个系统足够大(集合 S 的元素足够多)，则总有某个子系统具有某种特性(存在单色完全超图). 这仅仅是一种笼统说法.

基于这种理解，朗塞理论具有广泛的应用就不足为奇了.

例 1 把集合 {1，2，3，4，5} 任意分成两个集合. 证明，其中总有一个集合，它含有两个数与它们的差.

证 设集合$S=\{1, 2, 3, 4, 5\}$分成两个集合A_1和A_2. 把整数0, 1, 2, …, 5看成顶点, 对于$0\leqslant i<j\leqslant 5$, 当$j-i\in A_1$时,顶点$i$和$j$连红边; 当$j-i\in A_2$时,则连黄边. 得到6阶二色完全图$K_6$. 由于$r_2=6$, 所以二色完全图$K_6$含有单色三角形$\triangle ijk$, $0\leqslant i<j<k\leqslant 5$. 设三角形$\triangle ijk$是红边三角形, 则$j-i$, $k-j$, $k-i\in A_1$, 而$k-j=(k-i)-(j-i)$. 因此集合A_1含有$j-i$, $k-i$以及它们的差$k-j$; 同理可证, 如果三角形$\triangle ijk$是黄边三角形, 则集合A_2含有$j-i$, $k-i$以及它们的差$k-j$.

例1是舒尔 (I. Schur) 在1916年得到的重要定理的特例.

定理 2(舒尔定理) 把自然数集合$N=\{1, 2, \cdots, n\}$分成k个两两不交的集合A_1, A_2, …, A_k. 则当n适当大时, 总有某个集合A_i, $1\leqslant i\leqslant k$, 它含有两个数以及它们的和.

证 用$n+1$个顶点表示$n+1$个整数0, 1, 2, …, n, 以0, 1, 2, …, n为顶点的$n+1$阶完全图记作K_{n+1}. 用k种颜色c_1, c_2, …, c_k去染完全图K_{n+1}的边: 设整数i和j满足$0\leqslant i<j\leqslant n$, 当$j-i\in A_t$时连接顶$i$, j的边染c_t色, $1\leqslant t\leqslant k$. 得到$n+1$阶k色完全图, 仍记作K_{n+1}. 根据朗塞数r_k的意义可知, 当$n+1\geqslant r_k$, 即$n\geqslant r_k-1$时, k色完全图K_{n+1}含有单色三角形$\triangle ijl$, $0\leqslant i<j<l\leqslant n$. 设$\triangle ijl$是$c_t$色边三角形, 则$a=j-i$, $b=k-j$和$c=k-i$都属于集合A_t. 显然, $c=a+b$. 这就证明, 当$n\geqslant r_k-1$时, 把自然数集合N分成k个两两不交的集合A_1, A_2, …, A_k时, 总有某个集合A_t, $1\leqslant t\leqslant k$, 它含有正整数a,b以及它们的和. 定理2证毕.

从舒尔定理的证明可以看出，舒尔定理和朗塞理论有着密切联系．我们可以从另一个角度来叙述舒尔定理，这样就能够更清晰地看到它和朗塞理论的关系．

用 k 种颜色 c_1，c_2，…，c_k 去染自然数集合 $N=\{1, 2, \cdots, n\}$ 的元素，每个元素染一种颜色，而且只染一种颜色，得到的集合叫做 k 色集合，仍记作 N．当然，集合 N 中元素的染色方式不同，得到 k 色集合也不同．值得关心的问题是，不管怎样染色，任意一个 k 色集合 N 是否含有某些具备某种特性 P 的同色元素？例如，在舒尔定理中，集合 N 是否具有三个同色的正整数 x，y 和 z，它们是方程 $x+y=z$ 的解（即 x，y，z 所具备的特性 P）．又例如，集合 N 中是否含有 m 个同色的正整数，它们构成算术级数（即 m 个正整数具备的特性 P）．等等．如果把自然数集合 N 的元素看成点，则给集合 N 染色即是给集合 N 中的点染色，这和朗塞理论中图的边染色形式上是不同的．上面的舒尔定理是关于集合的点染色的第一个结论，下面是它的点染色形式．

定理 3 对于适当大的 n，任意一个 k 色集合 $N=\{1, 2, \cdots, n\}$ 总含有三个同色的数 x，y 和 $x+y$．

和朗塞数一样，由定理 3，可以定义舒尔数如下．存在不含同色的正整数 x，y 和 $x+y$ 的 n 元 k 色集合 $N=\{1, 2, \cdots, n\}$ 的元素个数 n 之最大值叫做**舒尔数**，记作 $f(k)$．由定理 2 的证明得到

定理 4 $f(k)\leqslant r_k-2$．

现在给出舒尔数 $f(k)$ 的下界．

定理 5 当 $k\geqslant 2$ 时，有 $f(k)\geqslant\dfrac{3^k-1}{2}$．

证 对 k 用归纳法．当 $k=2$ 时，$\dfrac{3^k-1}{2}=\dfrac{3^2-1}{2}=4$．

取二色自然数集合 $N=\{1, 2, 3, 4\}$，其中 $A_1=\{1, 4\}$ 红色数集合，$A_2=\{2, 3\}$ 为黄色数集合，A_1 和 A_2 都不含三个同色的数 x，y 和 $x+y$. 因此 $f(2)\geqslant 4=\dfrac{3^2-1}{2}$. 即结论对 $k=2$ 成立. 假设结论对 $k-1$ 成立. 下面证明对 k 成立.

取 $N=\left\{1, 2, \cdots, \dfrac{3^{k-1}-1}{2}, \dfrac{3^{k-1}+1}{2}, \cdots, \dfrac{3^k-1}{2}\right\}$.

记 $l=\dfrac{3^{k-1}-1}{2}$. 由归纳假设，$f(k-1)\geqslant\dfrac{3^{k-1}-1}{2}=l$. 因此必有 $k-1$ 色自然数集合 $N_0=\{1,2,\cdots,l\}$，它不含同色的三个正整数 x，y 和 $x+y$. 记 N_0 中所有 c_i 色的数之集合为 A_i，$i=1, 2, \cdots, k-1$. 并设

$$A_i^*=\{x+(2l-1): x\in A_i\},\ 1\leqslant i\leqslant k-1,$$

且记 $A_i'=A_i\cup A_i^*$，$i=1, 2, \cdots, k-1$，$A_k'=\{l+1, l+2, \cdots, 2l+1\}$. 把集合 A_i^* 中每个数都染成 c_i 色，$i=1, 2, \cdots, k-1$，并把集合 A_k' 中每个数都染成 c_k 色. 容易看出，A_1'，A_2'，$\cdots$，A_k' 是自然数集合 N 的一个分划，因此自然数集合 N 是 k 色的. 下面证明，集合 N 中不含同色的三个数 x，y 和 $x+y$.

设 k 色集合 N 含有同色的三个数 x, y 和 $x+y$. 如果 x，y，$x+y\in A_i'$，$1\leqslant i\leqslant k-1$，则由归纳假设，$x$，$y$ 和 $x+y$ 不能同属于 A_i，从而也不能同属于 A_i^*. 设 $x\leqslant y$，则 $x\in A_i$，$x+y\in A_i^*$，且 $x+y\geqslant 2l+2$. 如果 $y\in A_i$，则 $x+y\leqslant 2l$，与 $x+y\geqslant 2l+2$ 矛盾；如果 $y\in A_i^*$，则 $y=2l+1+i$，$j\in A_i'$. 于是，$x+y=x+j+(2l+1)$，$x+j\in A_i'$. 因此 x，j，$x+j$ 是 $k-1$ 色集合 N_0 中三个同色的数，矛盾；如果 x，y，$x+y\in A_k'$，则 $x=l+s$，$y=l+t$，所以 $x+y=2l+s+t\geqslant 2l+2$，

即 $x+y\in A_k'$，矛盾．定理 5 证毕．

应当指出，定理 5 的证明是构造性的．例如，当 $k=2$ 时，$\frac{3^2-1}{2}=4$，取 $N=\{1, 2, 3, 4\}$，$A_1=\{1,4\}$，$A_2=\{2, 3\}$，A_1 中的数同为红色，而 A_2 中的数同为黄色．过渡到 $k=3$，$\frac{3^3-1}{2}=13$，取 $N=\{1, 2, \cdots, 13\}$，且

$$A_1'=\{1, 4, 10, 13\},$$
$$A_2'=\{2, 3, 11, 12\},$$
$$A_3'=\{5, 6, 7, 8, 9\},$$

A_1'，A_2'，A_3' 中的数分别是红、黄、蓝色．

确定舒尔数 $f(k)$ 是一个难的未解决问题．由定理 4 和定理 5 可知，$4=\frac{3^2-1}{2}\leqslant f(2)\leqslant r_2-2=4$，即 $f(2)=4$，$13=\frac{3^3-1}{2}\leqslant f(3)\leqslant r_3-2=15$．已确定 $f(3)=13$，$f(4)=44$．后者是靠计算机算出来的．至于 $f(5)$ 的确切值至今仍未求得．

如果用舒尔数表示，那末例 1 中匈牙利数学竞赛试题就是要证明，$f(2)=4$．数学竞赛中有关舒尔数的试题还不少．

例 2 某个国际社团，有 1978 名成员，来自 6 个国家．用自然数 1，2，…，1978 给成员们编号．证明，其中总有一个成员，他的编号是他的某个同胞的编号之二倍，或者是他的两个同胞的编号之和．

证 记编号集合为 $N=\{1, 2, \cdots, 1978\}$．用 6 种颜色 c_1，c_2，…，c_k 去染集合 N 中的数，当数 x 来自第 i 个国家时 x 染成 c_i 色，$1\leqslant i\leqslant 6$．于是 N 是1978 元 6 色集合．要证明的是，任意 6 色 1978 元集合 N 总含有同色的三个数 x，y 和 $x+y$（当 $x=y$ 时，$x+y$ 即是 x 的二倍），即 $f(6)\leqslant 1977$．

由定理 4，$f(6)\leqslant r_6-2$. 所以只要能证明 $r_6\leqslant 1979$，则结论即得证. 由上节定理 5，$r_6\leqslant[6!e]+1=[720e]+1=1958$. 因此 $f(6)\leqslant r_6-2\leqslant 1956<1977$. 这就证明了例 2.

从上面的证明可以看出，数字 1978 可以减小到 1957.

例 3 设有 n 元集合 $S=\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$，它的所有子集的集合记作 $\mathscr{P}(S)$. 用 k 种颜色 $c_1, c_2, \cdots, c_k$ 去染集合 $\mathscr{P}(S)$ 中的元素（即集合 S 的子集），每种元素染一种颜色，而且只染一种颜色. 证明，当 n 适当大时，集合 S 必有三个子集 $X, Y, X\cup Y$ 同色.

证 把 n 个元素 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 看成 n 个顶点，以它们为顶点的 n 阶完全图记作 K_n. 当 $1\leqslant i<j\leqslant n$ 时，如果集合 $X=\{a_{i+1}, a_{i+2}, \cdots, a_j\}$ 是 c_l 色的，则将 K_n 中边 a_ia_j 染成 c_l 色，得到 n 阶 k 色完全图，仍记作 K_n. 根据朗塞数 r_k 的意义，当 $n\geqslant r_k$ 时，k 色完全图 K_n 含有单色三角形 $\triangle a_ia_ja_l$，其中 $1\leqslant i<j<l\leqslant n$. 即边 a_ia_j, a_ja_l 和 a_ia_l 同色. 由染色方式可知，集合 $X=\{a_{i+1}, a_{i+2}, \cdots, a_j\}$, $Y=\{a_{j+1}, a_{j+2}, \cdots, a_l\}$ 以及 $X\cup Y=\{a_{i+1}, a_{i+2}, \cdots, a_j, a_{j+1}, \cdots, a_l\}$ 同色. 例 3 证毕.

例 4 设 k 是正整数. 求最小正整数 $h(k)$，使得将自然数集合 $N=\{1, 2, \cdots, h(k)\}$ 任意分成 r 个两两不交的子集，总有非负整数 a, x, y, $a\geqslant 0$, $1\leqslant x\leqslant y$, 使 $a+x$, $a+y$, $a+x+y$ 同在其中的一个子集.

证 我们证明，$h(k)=2k$. 事实上，任意把自然数集合 $N=\{1, 2, \cdots, 2k\}$ 分为 k 个两两不交的子集 $A_1, A_2, \cdots, A_k$. 由抽屉原理，$k+1$ 个正整数 $k, k+1, \cdots, 2k$ 中总有两个数在同一个子集. 设 $k+i, k+j\in A_l$, $0\leqslant i<j\leqslant k$, $1\leqslant l\leqslant k$. 取 $a=2(k+i)-(k+j)=(k-j)+2i$，则 $a\geqslant 0$. 设 $x=y$

$=(k+j)-(k+i)=j-i$，则 $y\geqslant x\geqslant 1$．而且 $a+x=a+y=k+i \in A_l$，$a+x+y=k+j\in A_l$．因此，$h(k)\leqslant 2k$．

现在把自然数集合$N=\{1, 2, \cdots, 2k-1\}$分为 k个两两不交的子集 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 如下：当$1\leqslant i\leqslant k-1$ 时，$A_i=\{i, k+i\}$且$A_k=\{k\}$．下面证明，其中每个子集 A_l 都不含有题中所说的三个正整数 $a+x$，$a+y$ 和 $a+x+y$．用反证法．设存在$a+x$，$a+y$ 和 $a+x+y$，它们都属于子集 A_l，$1\leqslant l\leqslant k$．很明显，$a+x\leqslant a+y\leqslant a+x+y$．如果$a+y=a+x+y$，则 $x=0$，不可能．因此 $a+x\leqslant a+y<a+x+y$．如果 $a+x=a+y$，则子集 A_l 含有两个不同元素 $a+x$ 和$a+2x$，因此 $1\leqslant l\leqslant k-1$，且 $a+x=l<k$，$a+2x=k+l$．于是 $x=k$．和 $a+x<k$ 矛盾．由于子集 A_l 至多有两个元素，因此不可能有 $a+x<a+y<a+x+y$．这就证明，每个子集 A_l 都不含题中所说的数 $a+x$，$a+y$ 和 $a+x+y$，即 $h(k)>2k-1$．于是有，$h(k)=2k$．

下面的例子很明显是受了舒尔定理的影响．

例 5 求这样的最小正整数 n，使得将自然数集合 $N=\{1, 2, \cdots, n\}$任意分成两个不交的子集时，总有一个子集，它含有 3 个不同的数，其中两个数之积等于第 3 个数．

解 所求的最小正整数为 96．证明如下．将 $N=\{1, 2, \cdots, 96\}$分成两个子集 A 和 B．我们证明 A 和 B 至少有一个含有 3 个不同的数 x，y，z，$x<y$，$z=xy$．用反证法．不妨设 $2\in A$．则有如下几种情形：(1) $3, 4\in A$；(2) $3, 4\in B$；(3) $3\in A$，$4\in B$；(4) $3\in B$，$4\in A$．

情形 1：$3, 4\in A$．由于 $2, 3\in A$，所以 $6\in B$．又由于 $2, 4\in A$，所以$8\in B$，再由于$3, 4\in A$，所以$12\in B$．于是由 $6, 8\in B$，可知 $48\in A$．又 $2\in A$，因此 $96\in A$．另一方面，

由8，$12\in B$得到，$96\in A$. 矛盾.

情形 2：$3,4\in B$. 此时$12\in A$. 而$2\in A$，所以6，$24\in B$. 再由 4，$6\in B$，可得$24\in A$，矛盾.

情形 3：$3\in A$，$4\in B$. 此时由 2，$3\in A$ 得到 $6\in B$. 由 4，$6\in B$ 得到 $24\in A$. 由 2，$24\in A$ 得到 $48\in B$. 另一方面，由2，$24\in A$ 得到 $12\in B$. 再由4，$12\in B$ 得到$48\in A$，矛盾.

情形 4：$3\in B$，$4\in A$. 此时由 2，$4\in A$ 得到 $8\in B$. 由 3，$8\in B$ 得到 $24\in A$. 于是由 2，$24\in A$得到$48\in B$. 另一方面，由 4，$24\in A$ 得到 $6\in B$. 再由 6，$8\in B$ 得到 $48\in A$，矛盾.

这就证明，子集 A 和 B 中至少有一个含有符合题目要求的三个不同的数.

现在证明，当 $N=\{1, 2, \cdots, 95\}$时，可以把集合N 分为两个子集 A，B，使得它们都不含有题目要求的三个不同的数x，y，z，$x<y$，$z=xy$. 由于 $z=xy$，且 $y\neq z$，所以$x\geqslant 2$. 这说明，把数1归到哪个子集都无关紧要. 因此设$A=\{1, 2, 4, \cdots\}$，于是可设 $B=\{8, 16, 32, 64, \cdots\}$. 再考虑素数 3. 设 $A=\{1, 2, 4, 3, 9, \cdots\}$，$B=\{8, 16, 32, 64, 6, 12, 18, 36, 27, 81, \cdots\}$，接着考虑素数 5. 可设

$$A=\{1, 2, 4, 3, 9, 5, 25, \cdots\}$$

$$B=\{8, 16, 32, 64, 6, 12, 18, 36, 27, 81, 10, 20, 15, 45, 50, 25, 75, \cdots\}.$$

然后考虑素数 7. 可设

$$A=\{1, 2, 4, 3, 9, 5, 25, 7, 49, \cdots\}$$

$$B=\{8, 16, 32, 64, 6, 12, 18, 36, 27, 81, 10, 25, 15, 45, 50, 75, 14, 28, 21, 63, \cdots\}$$

如此继续. 最后得到，

$A=\{1, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 11, 13, 17, 19, 23, 25, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 48, 49, 53, 59, 60, 61, 67, 71, 72, 73, 79, 80, 83, 84, 89, 90\}$.

$B=N/A$.

把自然数集合$N=\{1, 2, \cdots, 95\}$分为两个子集A和B，使得每个子集都不含所说的三个数，其分法并不唯一．上面给出的只是其中一种．

解例5并不容易，原因是很难确定那个最小正整数96．估计问题是这样入手的：构造集合$N=\{1, 2, \cdots, n\}$的分划(A, B)，使得A和B都不含数x，y，和xy．如果子集A含有素数p，q，r，…，其中$p=2$，则可设子集$A=\{p, p^2, p^2qr, q, q^2, r, r^2, \cdots\}$，而子集$B$则应为$B=\{p^3, p^4, p^5, p^6, pq, p^2q, pqr, p^3q, p^2q^2, \cdots\}$，由此确定最大的正整数$n=95$．于是所求的数$\geqslant n+1=96$．然后再证明所求的数$\leqslant n+1=96$．

现在转到另一种朗塞类型的数——范德瓦登数．先看几个例子．

例6　证明，把自然数集合$N=\{1, 2, \cdots, 9\}$任意分成两个子集，总有一个子集含有三个数，其中两个数之和是第三个数的二倍．

题目分析　把集合$N=\{1, 2, \cdots, 9\}$分成两个子集A和B，即是用红、黄两色来染集合N中的数，属于子集A的数染成红色，否则染成黄色．设三个数x，y，z属于同一个子集，其中$2z=x+y$，则这三个数同色．而$y-z=z-x$，即数x，z，y构成三个项的算术级数，每个项都同色的算术级数叫做**单色的算术级数**．于是原题化为：

例6′　证明，任意二染色的自然数集合$N=\{1, 2, \cdots,$

9}总含有三个项的单色算术级数．

证 用反证法．设集合 N 的红数与黄数中都不含三个项的单色算术级数．不妨设 5 是红数．如果 3 是红数，则由 3，5为红数可知，1，4，7 为黄数，与假设矛盾．因此可设 3 是黄数．如果 7 是红数，则由5，7 为红数可知，3，6，9 为黄数，矛盾．因此可设 7 是黄数．由于 5 是红数，所以4，6中有一个是黄数．为确定起见，设 4 是黄数．于是由 3，4 是黄数可知，2 是红数，由2，5是红数可知，8 是黄数．再由4,8是黄数可知，6 是红数，由 7，8 是黄数可知，9 是红数．但是由5，9为红数可知，1是黄数，由 4，7 是黄数可知，1是红数，矛盾．证毕．

注意，上例中如果把数 9 改成 8，结论就不再成立．例如，在二色自然数集合 $N=\{1, 2, \cdots, 8\}$中，红数集合 $A=\{1, 4, 5, 8\}$，黄数集合$B=\{2, 3,6,7\}$，集合 N 就不含有三个项的算术级数．因此，使得任意一个二色自然数集合 $N=\{1, 2, \cdots, n\}$ 总含有三个项的单色算术级数的最小正整数为 9．

例 6 是所谓范德瓦登数的最简单情形．舒尔在考虑并证明上面所说的舒尔定理之后，就猜想到这样的结论：存在最小正整数 $w=w(m, k)$，使得当$n\geqslant w$时，任意一个 k 色自然数集合$N=\{1, 2, \cdots, n\}$ 总含有一个 m 个项的单色算术级数．舒尔未能证明这个结论．1927年，德国著名数学家范德瓦登 (B. L. van der Waerden) 从当时哥廷根大学学生鲍德特 (Baudet) 那里听到这个猜想．范德瓦登很快就证明这个所谓鲍德特猜想，即有

定理 6（范德瓦登定理） 当 n 适当大时，任意一个 k 色自然数集合 $N=\{1, 2, \cdots, n\}$ 总含有 m 个项的单色算术

级数.

范德瓦登定理的证明很难，这里不拟给出．只想指出，范德瓦登定理保证了最小正整数$w(m, k)$的存在性．于是数$w(m, k)$叫做**范德瓦登数**．容易证明，$w(2, k)=k+1$．例6表明，$w(3, 2)=9$．已经求得的范德瓦登数有，$w(4, 2)=35$，$w(5, 2)=178$，$w(3, 3)=27$，$w(3, 4)=76$．当然，和朗塞数、舒尔数一样，求范德瓦登数$w(m, k)$是一个未解决的难问题．甚至，求范德瓦登数$w(m, k)$的上下界也非易事．记$w(m)=w(m, 2)$．厄尔多斯和另一位著名组合学家拉多(R.Rado)在1950年用概率方法求得$w(m)$的下界：$w(m)>2^{n-c(n\log n)^{1/3}}$．1968年，贝勒坎普（Belrekamp）改进为，$w(m)>2^n$．1980年，格林(R. L. Graham)等人在他们的名著《朗塞理论》（*Ramsey Theory*）中用代数方法证明了下面的结论.

定理 7　当p是素数时，$w(p+1)\geqslant p2^p$.

下面的定理给出了当$k\geqslant 4$时范德瓦登数$w(m, k)$的下界.

定理 8　设$k\geqslant 4$，$m\geqslant 3$，且$n=k(m-1)^2$．则存在k色自然数集合$N=\{1, 2, \cdots, n\}$，它不含m个项的单色算术级数.

证　我们分k为偶数和奇数两种情形来证明.

设$k=2t$，把自然数集合N按自然顺序分成$2t(m-1)^2$个区组，每个区组含有$m-1$个数，使得第一个区组是$\{1, 2, \cdots, m-1\}$，第二个区组是$\{m, m+1, \cdots, 2(m-1)\}$，$\cdots$．然后把$2t(m-1)^2$个区组按自然顺序分成$m-1$个行，每个行有$2t(m-1)$个区组．再把每一行上$2t(m-1)$个区组分成$2(m-1)$个组，每一组有$t$个区组(图42)．现在用$2t$种

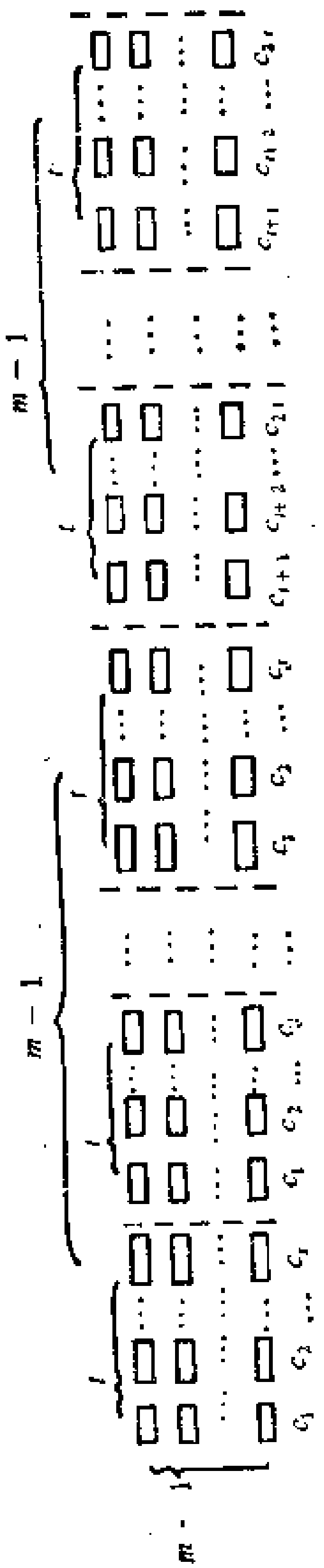


图 42

颜色 c_1, c_2, $\cdots$, c_{2t} 来染集合 N 如下：在前 $t(m-1)$ 个列里，把第 $qt+r$ 列上的数都染 c_r 色，在后 $t(m-1)$ 个列里，把第 $qt+r$ 列上的数都染 c_{t+r} 色，$0\leqslant q\leqslant m-2, 1\leqslant r\leqslant m-1$. 下面证明，这样染色的 k 色集合 N 不含 m 个项的单色算术级数.

用反证法. 设 k 色集合 N 含有 m 个项的单色算术级数 A，其公差为 d. 首先，由于集合 N 排成 $m-1$ 个行，而级数 A 有 m 个项，所以由抽屉原理，级数 A 必有两个项在同一行上，由染色方法可知，在每一行上同一颜色的第一个数和最后一个数相差为 $((t+1)+(m-3))(m-1)+1$. 因此，

$$d\leqslant (t+m-2)(m-1)+1. \tag{1}$$

其次，如果级数 A 有两项在不同行上，则上一行同一颜色的最后一个数与下一行上第一个数相差为 $(t(m-1)+(t-1))\cdot(m-1)+1$. 即有

$$d\geqslant (tm-1)(m-1)+1.$$

与(1)矛盾. 所以级数 A 的 m 个项在同一行上. 由染色方式，可设这 m 个项在前 $t(m-1)$ 个列上，由于前 $t(m-1)$ 个列分为 $m-1$ 个组，所以必有两个项在同一组. 由于这两个项同色，因此属于同一个区组. 于是 $d\leqslant m-2$. 由于级数 A 有 m 个项，每个区组只有 $m-1$ 个数，所以必有两个项在不同区组. 在不同区组中同一颜色的两个数之差至少是 $(t-2)(m-1)+1$. 即 $d\geqslant (t-2)(m-1)+1>m-2\geqslant d$. 矛盾. 这就证明，$k$ 色集合 N 不含 m 个项的单色算术级数.

对于 k 为奇数情形，证明大体相同. 这里从略.

定理 8 的证明反复应用抽屉原理，这在估计范德瓦登数的上下界时是经常使用的. 也正因为这样，得到的上下界不可能是精确的，和确切值相去甚远.

例 7 证明.存在四色自然数集合 $N=\{1,2,\cdots,1987\}$，其中不含 10 个项的单色算术级数.

证 此时 $k=4$，$m=10$，$n=k(m-1)^3=2916$. 由定理 8，存在不含 10 个项的单色算术级数的 4 色自然数集合 $N^*=\{1,2,\cdots,2916\}$，把集合 N^* 中正整数1988，1989，…，2916全部去掉，得到的 4 色自然数集合 $N=\{1,2,\cdots,1987\}$ 中仍然不含10个项的单色算术级数.

习 题 七

1. 证明，从 n 元集合中任意取出 $n+1$ 个不同的3元子集，$n\geqslant5$，其中总有两个 3 元子集，它们的交集恰含有一个元素.
2. 证明，任意一个 7 色自然数集合 $N=\{1,2,\cdots,100\}$ 总含有同为 c 色的 4 个不同的数 a，b，c，d，使得 $a+b=c+d$，或者含有同为 c 色的 3 个不同的数 e，f，g，使得 $e+f=2g$.
3. 证明，当 n 适当大时，方程 $x+2y=z$ 在任意 k 色自然数集合 $N=\{1,2,\cdots,n\}$上具有单色解(x,y,z).
4. 证明，任意 k 色自然数集合 $N=\{1,2,\cdots,n\}$总含有同色的 t 个数 a_1，a_2，…，a_t，使得其中 $t-1$ 个数之和即是第 t 个数.
5. 证明，当 n 适当大时，任意一个 k 色自然数集合 $N=\{1,2,\cdots,n\}$总含有 $m+1$ 个自然数 $a,a_1,a_2,\cdots,a_m,a+a_1+a_2+\cdots+a_m\leqslant n$，使得对每组下标 i_1，i_2，…，i_l，$1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_l\leqslant m$，$0\leqslant l\leqslant m$，和 $a+a_{i_1}+a_{i_2}+\cdots+a_{i_l}$ 都同色.
6. 证明，可以二染色自然数集合 $N=\{1,2,\cdots,1986\}$，使它不含18个项的单色算术级数.

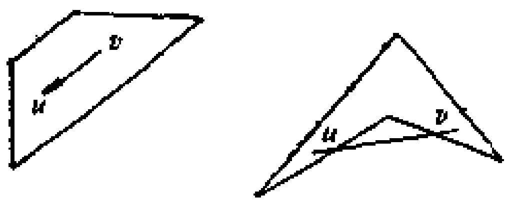
8　朗塞型问题

朗塞理论已经渗透到其他许多数学分支．它渗透到数论，就成了组合数论的重要组成部分，上节所说的舒尔数和范德瓦登数即是组合数论研究的内容之一．朗塞理论渗透到几何，就成了组合几何的一个重要内容．这里将介绍几个和朗塞理论有关的组合几何问题．

1．厄尔多斯-泽克勒斯定理

大家知道，如果一个几何图形中任意两点之间的联线整个落在图形内，则这个图形叫做凸的．例如，三角形是凸的，四边形则不然，图43(a)所示的四边形是凸的，但图43(b)则不是．

凸图形概念是凸集的特殊情形．对于平面点集 S，如果其中任意两点间的联线上每个点都属于点集 S，那么点集 S 叫做一个**凸集**．凸多边形，圆，椭圆和带形都是凸图形，当然也都是凸集．



(a)　　(b)

图 43

对点集 S，平面上所有包含点集 S 的凸集之交叫做点集 S 的凸包 S^*．注意，点集 S 的凸包 S^* 是包含点集 S 的最小凸集．例如点集 S 由 4 个点 A，B，C，D组成，它的凸包 S^* 必属下面三种情形之一：由 4 点 A，B，C，D 决定的

凸四边形；由其中 3 个点决定的三角形；联结其中两点的线段(图 44)．一般地说，n 个点 A_1，A_2，…，A_n 的凸包是凸 k 边形(或线段)，它的 k 个顶点(或线段的端点)都是 A_1，A_2，…，A_n 中的点．

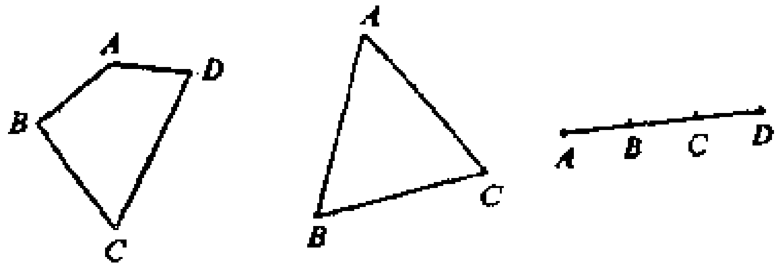


图 44

1932年，匈牙利数学家泽克勒斯的夫人柯莱茵 (E.Klein) 曾经提出这样的问题：求最小正整数 $H(k)$，使得平面上任意三点不共线的 $H(k)$ 个点总含有一个凸 k 边形的所有顶点．很明显，$H(3)=3$．柯莱茵本人求出了 $H(4)$，即有

定理 1 $H(4)=5$．

证 首先证明，平面上任意给定 5 个点，A_1，A_2，…，A_5，任意三点不共线，其中总有 4 个点，它们是某个凸四边形的顶点．考虑这 5 个点的凸包 S^*．如果 S^* 是凸五边形，或者凸四边形(图45)，则结论自然成立；如果 S^* 是三角形 $\triangle A_1A_2A_3$，另两点 A_4，A_5 在三角形 $\triangle A_1A_2A_3$ 的内部，则联结点 A_4 和 A_5 的直线必和三角形 $\triangle A_1A_2A_3$ 的两条边相交，和第三条边不交，设这第三条边是 A_1A_3，则四边形 $A_1A_3A_5A_4$ 是一个凸四边形．这表明，$H(4)\leqslant 5$．图43表明，$H(4)>4$．因此 $H(4)=5$．

1935年，厄尔多斯和泽克勒斯应用朗塞理论证明了数 $H(k)$ 的存在性．为了讲述厄尔多斯和泽克勒斯的结论，先证

明一个引理.

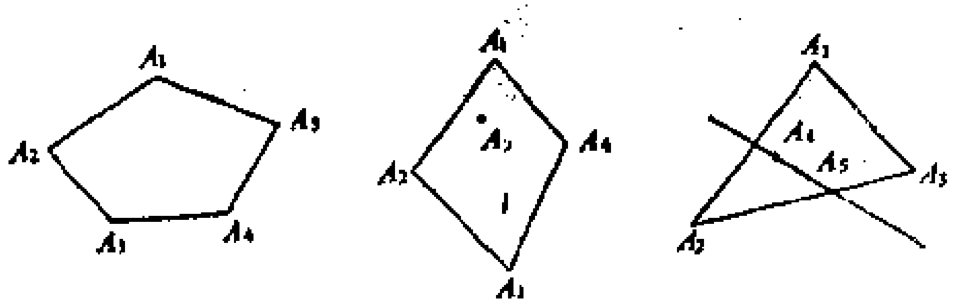


图 45

定理 2 平面上有 k 个点，$k\geqslant 4$，任意三点不共线，任意四点决定的四边形都是凸的，则这 k 个点组成凸 k 边形的顶点.

证 对 k 用归纳法. 当 $k=4$ 时结论是自明的. 设 $k\geqslant 5$，并假设点数不超过 $k-1$ 时定理成立. 下面证明定理对 k 成立. 设 A_1，A_2，…，A_k 是满足定理条件的 k 个点. 则 $k-1$ 个点 A_1，A_2，…，A_{k-1} 决定一个凸 $k-1$ 边形 C_{k-1}. 不妨设凸 $k-1$ 边形 C_{k-1} 的边为 A_1A_2，A_2A_3，…，$A_{k-2}A_{k-1}$，$A_{k-1}A_1$. 如果点 A_k 在凸 $k-1$ 边形 C_{k-1} 的内部，则联结点 A_1 和凸 $k-1$ 边形 C_{k-1} 的每个顶点，得到三角形 $\triangle A_1A_2A_3$，$\triangle A_1A_3A_4$，…，$\triangle A_1A_iA_{i+1}$，…，$\triangle A_1A_{k-2}A_{k-1}$. 由于点 A_1，A_2，…，A_k 中任意三点不共线，所以点 A_k 落在某个三角形 $\triangle A_1A_iA_{i+1}$ 的内部(图 46(a)). 于是点 A_1，A_i，A_{i+1}，A_k 决定的四边形不是凸的，与定理假设矛盾. 因此点 A_k 落在凸 $k-1$ 边形 C_{k-1} 的外部.

现在联结点 A_k 和凸 $k-1$ 边形 C_{k-1} 的每个顶点，则必有两条线段 A_kA_i 和 A_kA_j，使得凸 $k-1$ 边形 C_{k-1} 落在这两边的夹角 $\angle A_iA_kA_j$ 内. 如果 A_i 和 A_j 不是相继的两个点(即 $|j-i|\geqslant 2$)，则至少还有一个点 A_m 在它们之间（图 46(b)），

因此 A_i，A_m，A_j，A_k 组成一个凹四边形的顶点，与假设矛盾．这表明，A_i 和 A_j 是相继的两个点．设 $j=i+1$，则 $A_1A_2\cdots A_iA_kA_{i+1}\cdots A_n$是凸 k 边形．定理 2 证毕．

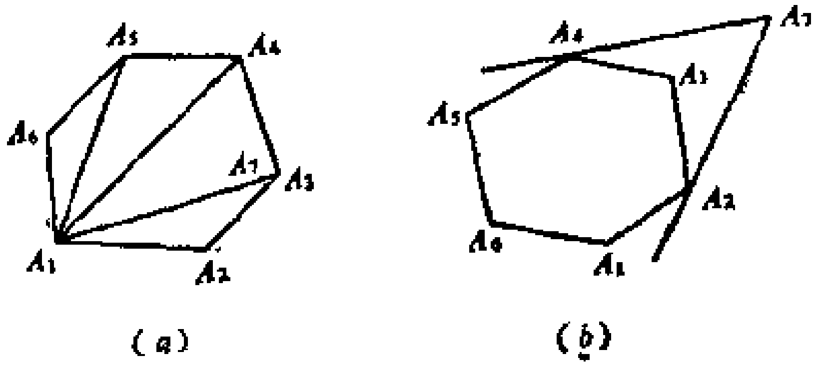


图 46

下面就是厄尔多斯－泽克勒斯定理．

定理 3 当 n 适当大时，平面上任意三点不共线的 n 个点中总有 k 个点，它们组成某个凸 k 边形的顶点，其中$k\geqslant 3$.

证 取 $n=r(k,\ 5;\ 4)$，其中 $r(k,\ 5;\ 4)$ 的意义和上节定理 1 相同．把平面上给定的 n 个点看成一个超图 G的 n 个顶点，其集合记作 S．把点集 S 的 4 元子集看成超图 G的 4 级边．当点集 S 的 4 元子集中 4 个顶点确定一个凸 4 边形时，将相应的 4 级边染成红色，否则染成黄色．由上节朗塞定理，二色 4 级超图 G 要么含有 k 阶 4 级红色完全超图$K_k^{(4)}$，要么含有 5 阶 4 级黄色完全超图 $K_5^{(4)}$．如果 G 含有 k 阶 4 级红色完全超图 $K_k^{(4)}$，则点集 S 含有 k 个点，其中任意四点都确定一个凸四边形．由定理 2，这 k 个点是一个凸 k 边形的顶点，从而定理成立；如果 G 含有 5 阶 4 级黄色完全超图 $K_5^{(4)}$，则点集 S 含有 5 个点，其中任意四点都确定一个凹四边形，和定理 1 矛盾．这就证明了定理 3．

定理3既证明了数$H(k)$的存在性，也给出了它的上界，即有$H(k)\leqslant r(k, 5; 4)$．确定朗塞数既然是著名的难问题，和朗塞数挂上钩的数$H(k)$也不例外．著名数学家杜朗（P. Turán)和马凯（Makai）证明，$H(5)=9$．1960年，厄尔多斯和泽克勒斯还给出了便于计算的上下界：$2^{k-2}+1\leqslant H(k)\leqslant\binom{2k-4}{k-2}$．他们并猜想，$H(k)=2^{k-2}+1$，因而$H(6)=17$．但是直到现在，他们的猜想并未被证明或者否定．

2．棋盘染色问题

国际象棋的棋盘有8×8个方格，用黑、白两种颜色来染棋盘上的方格，每个方格染一种颜色，而且只染一种颜色，相邻的两个方格染不同的颜色．这样染出来的两种颜色的8×8棋盘就是国际象棋盘．如果用k种颜色随意地染8×8棋盘，那么会有什么结果？

一般地说，有一个$m\times n$超级棋盘，用k种颜色来染棋盘上的方格，每个方格染一种颜色，而且只染一种颜色，这样的棋盘叫做k色的．当然，由于方格的染色方式不同，得到的k色棋盘也不同．对于一个k色棋盘，如果它含有一个$m_1\times n_1$矩形，它的四个角上的方格颜色相同，则这个矩形叫做单色的．并不是每一个k色$m\times n$棋盘都含有单色矩形．自然产生的问题是，对哪些$m\times n$，任意一个k色$m\times n$棋盘都含有单色矩形？这类问题在数学竞赛中常常遇到．先看一个例子．

例 1 证明，任意一个二色4×7棋盘总含有单色矩形，并且存在二色4×6棋盘，它不含单色矩形．

证 图47给出了不含单色矩形的二色4×6棋盘．下面用

三种方法证明头一个结论.

证法 1 4×7 棋盘上每行有 7 个方格，两种颜色，因此至少有 4 个方格同色. 如果 4 个方格都是红色的，则该行叫做红色的. 于是4×7棋盘有 4 个行，两种颜色，至少有两行同色. 不妨设第 1， 2 行都是红色的(注意，之所以可以“不妨设”，其原因是对调4×7棋盘上的某两行，棋盘上的单色矩形仍变为单色矩形，非单色矩形仍变为非单色矩形，即是说，经两行对调，不破坏棋盘上是否含有单色矩形的性质). 而且第 1 行上 4 个红色方格在第 1，2，3，4 列上. 如果第 2 行上第 1，2，3，4 列的方格中有两个红色方格，则棋盘含有红色矩形. 因此可设第 2 行上 4 个红色方格在第 4，5，6，7 列上. 于是在第 3 行的第 1，2，3 列上的 3 个方格，两种颜色，所以总有两个方格同色. 这两个同色方格和第 1 行或第 2 行上的两个方格便组成单色矩形.

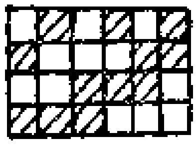


图47


图48

证法 2 4×7棋盘含有 28 个方格，两种颜色，其中总有14个方格同色，设为红色. 它们分布在棋盘的 7 个列上. 设有一列含有 4 个红色方格. 如果其他各列只有一个红色方格，则棋盘只含有10个红色方格，矛盾. 因此另有一列至少含有两个红色方格，从而棋盘上有单色矩形；设有一列恰含 3 个红色方格. 此时不妨设它们在4×7棋盘的第 1 列前三行上(图49). 如果前 3 行另有一列含 2 个红色方格，则结论成立. 因此可设前 3 行的其他各列上至多有 1 个红色方格，即至少有 2 个黄色方格. 把每列上的两个黄色方格看成一条“线段”，把它们投影到第 1 列上. 前三行第 1 列上由两个方

格组成的"线段"共有$\binom{3}{2}=3$条．其他各列投影的线段共有6条．因此至少有两条和第1列上的线段相重合．于是这两条投影重合的线段相应的是一个单色矩形的四个角上的4个方格；最后设棋盘上每列至多有两个红色方格．由于棋盘上至少有14个红色方格，因此，每列恰有2个红色方格．把每列的两个红色方格看成一条"线段"，共有7条线段，把它们投影到第1列上．

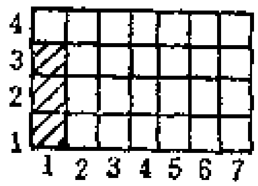


图 49

第1列上由两个方格组成的线段共有$\binom{4}{2}=6$条，因此各列的线段在第1列上的投影至少有两条是重合的．这两条投影重合的线段相应的是一个单色矩形的四个角上的4个方格．这就证明了结论．

证法 3 4×7棋盘含有28个方格，两种颜色，其中至少有14个方格同色，设为红色．取其中14个红色方格，它们分布在7个列上．设第i列上有k_i个红色方格，$i=1, 2, \cdots, 7$．显然，

$$k_1+k_2+\cdots+k_7=14. \tag{1}$$

把第i列上两个红色方格看成一条"线段"，则第i列上有$\binom{k_i}{2}$条线段，$i=1, 2, \cdots, 7$．把各列的线段都投影到第1列．第1列上由两个方格构成的"线段"有$\binom{4}{2}=6$条．如果$\binom{k_1}{2}+\binom{k_2}{2}+\cdots+\binom{k_7}{2}-\binom{4}{2}>0$，则各列上必有两条线段在第1列的投影相重合，这两条投影重合的线段便确定一个单色矩形，从而结论成立．所以只需证明，

$$\binom{k_1}{2}+\binom{k_2}{2}+\cdots+\binom{k_7}{2}-\binom{4}{2}>0. \qquad (2)$$

上式左端为

$$\Delta=\binom{k^1}{2}+\binom{k_2}{2}+\cdots+\binom{k_7}{2}-\binom{4}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{(k_1{}^2+k_2{}^2+\cdots+k_7{}^2)-(k_1+k_2+\cdots+k_7)\right\}-6.$$

由哥西不等式，有

$$\triangle\geqslant\frac{1}{2}\left\{\frac{(k_1+k_2+\cdots+k_7)^2}{7}-(k_1+k_2+\cdots+k_7)\right\}-6.$$

由式(1)，有

$$\Delta\geqslant\frac{1}{2}\left\{\frac{14^2}{7}-7\right\}-6>0.$$

由此式(2)成立，证毕.

上面给出的三种证法各具特色. 证法1主要是逐行逐列分析占多数的同色方格，组合味道较浓，便于处理极端情形. 例如由证法1可以看到，如果将例1中的4×7改写3×7，结论仍成立. 这就是1986年匈牙利数学竞赛试题. 证法2从整体上考虑各种颜色的同色方格数，抓住其中占多数的颜色，然后再逐行逐列进行分析. 证法3是在证法2的基础上演变形成的. 一方面抓住总体上占优势的颜色，另一方面又考虑了同色方格的投影，然后引用哥西不等式. 所以证法3是一种值得重视的一般性方法.

例 2 证明，任意一个3色12×12棋盘总含有单色矩形.

证 12×12棋盘D含有144个方格， 3种颜色，其中至少有48个方格同色. 不妨设棋盘D含有48个红色方格. 棋盘D的第i行上红色方格数记作 k_i，$i=1$，2，…， 12.

则

$$k_1+k_2+\cdots+k_{12}=48. \qquad (1)$$

把第 i 行上每两个红色方格都看“线段”，共有$\binom{k_i}{2}$条，$i=1$，2，…，12. 把它们都投影到第1行上. 第1行上每两个方格都看成“线段”，共有$\binom{12}{2}$条. 记

$$\Delta=\binom{k_1}{2}+\binom{k_2}{2}+\cdots+\binom{k_{12}}{2}-\binom{12}{2}.$$

则

$$\Delta=\frac{1}{2}\left\{(k_1^2+k_2^2+\cdots+k_{12}^2)-(k_1+k_2+\cdots+k_{12})\right\}-66.$$

由哥西不等式，

$$\Delta\geqslant\frac{1}{2}\left\{\frac{(k_1+k_2+\cdots+k_{12})^2}{12}-(k_1+k_2+\cdots+k_{12})\right\}-66.$$

由式(1)，

$$\Delta\geqslant\frac{1}{2}\left\{\frac{48^2}{12}-48\right\}-66=6>0.$$

这表明，各列的线段在第1行上的投影至少有两条相重合，这两条投影重合的线段相应于一个单色矩形的四个角上的4个同色方格，即棋盘D含有单色矩形，证毕.

3. 几何染色问题

用 k 种颜色去染 n 维欧几里得空间 $\mathbf{R}^n$ 中的几何体 K，每个点染一种颜色，而且只染一种颜色，这样便给几何体 K 染了 k 种颜色. 染了 k 种颜色的几何体 K 叫做 k 色的. 当然，由于几何体 K 的点的染色方式不同，得到的 k 色几何体也不同. 如果一个几何体 B，它的顶点在 k 色几何体 K 上，而且

都同色，则 B 叫做**单色几何体**. 在有关几何体 K 的染色问题中，关心的是，任意一个 k 色几何体 K 是否含有某个单色几何体 B? 这是组合几何中人们普遍关心的问题之一. 处理这类问题，尚未形成统一的方法，产生统一的理论. 因此也就更加引人注目. 下面举几个例子来说明处理这类问题的特点.

例 3 设 S 是等边三角形△ABC 的三条边 AB, BC 和 CA 上所有点(包括顶点 A, B 和 C) 的集合，把点集 S 任意分成两个不相重叠的子集，是否总有一个子集，它含有某个直角三角形的三个顶点? 证明你的答案.

在着手解决这道试题之前，先对题目作些分析. 假设集合 S 已分成两个子集 S_1 和 S_2. 现在用红、黄两种颜色来染点集 S 中的点，把子集 S_1 中的点都染成红色，子集 S_2 中的点都染成黄色. 由于子集 S_1 和 S_2 不相重叠，因此点集 S 中每个点染且只染一种颜色. 这样等边三角形 △ABC 的周界，即点集 S 便是二色的. 当然，由于点集 S 分成子集 S_1 和 S_2 的分法不同，二色点集 S 也不同. 反之，对于二色的等边三角形的周界，把周界上的所有红点和所有黄点的集合分别记作 S_1 和 S_2, 则子集 S_1 和 S_2 是点集 S 的两个不相重叠的子集. 这说明，把等边三角形△ABC 的周界 S 分成两个不相重叠的子集，实际上就是把周界 S 二染色. 于是问题就转化为证明下面的结论.

任意一个二色的等边三角形 △ABC 的周界 S 总含有单色直角三角形.

证 在等边三角形△ABC 的三条边 AB, BC 和 CA 上分别取三个点 D, E 和 F, ，使得

$$\frac{AD}{AB}=\frac{BE}{BC}=\frac{CF}{CA}=\frac{1}{3}$$

连接DE，EF和FD. 显然$\triangle ADF$，$\triangle BED$和$\triangle CFE$都是直角三角形(图50). G，F，E三个点，两种颜色，其中总有两点同色. 不妨设点D和E是红色. 如果边AB上除点D外还有一个点G是红色，则直角三角形$\triangle DFG$是红色的. 因此可设边AB上除点D外所有的点都是黄色. 如果点E是黄色，则直角三角形$\triangle EHB$是黄色的，其中点H是点E在边AB上的垂足. 因此可设点E是红色. 于是当点C为红色时，直角三角形$\triangle CEF$是红色的，当点C为黄色时，直角三角形$\triangle BCK$是黄色的，其中点K是点C在边AB上的垂足. 证毕.

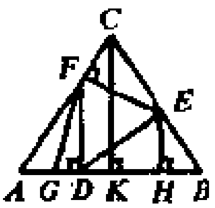


图 50

上例涉及的是二维欧几里得空间R^2中的几何体S.下面给出一个涉及二色的二维欧几里得空间R^2本身的例子.

例 4 用红、黄两种颜色染平面上的点，每个点只染一种颜色. 已知任意一个边长为1的等边三角形中都含有两种颜色的顶点. (1)证明，存在边长为$\sqrt{3}$的顶点都同色的等边三角形；(2)举出合乎题目要求的染色平面的例子.

证 (1)所要证明的是，任意一个不含边长为1的单色等边三角形的二色平面总含有边长为$\sqrt{3}$的单色等边三角形. 现在证如下 在二色平面中任取距离为$\sqrt{3}$且不同色的两个点A和B(如果这样的两点不存在，则结论已成立). 设点C到点A和B的距离都是2. 点C和点A或B不同色. 不妨设点A和C不同色. 线段AC的中点D和点A或C同色，不妨设点D和点A同色. 以AD为底边，作两个等边三角形$\triangle ADE$和$\triangle ADF$，(图51)，则由题目条件，边

长为$\sqrt{3}$的等边三角形 $\triangle CEF$ 的三个顶点 C，E，F 同色.

(2)把平面分成相互平行的宽为$\frac{\sqrt{3}}{2}$的带形区域，每个带形区域都包含它的下边界，但不包含它的上边界，然后红、黄相间地染带形区域. 则这样的二色平面不含边长为 1 的等边三角形.

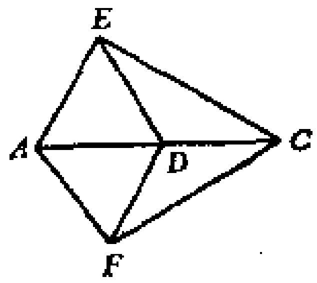


图 51

习 题 八

1. 平面上有5个点，任意三点不共线. 证明，总可以找到以它们为顶点的三个非锐角的三角形.
2. 平面上有 n 个点，$n>4$，任意三点不共线. 证明，总可以找到以它们为顶点$\binom{n-3}{2}$个的凸四边形.
3. 平面上有 100 个点，任意三点不共线. 证明，在所有以它们为顶点的三角形中，至多有70%的锐角三角形.
4. 用红、黄两种颜色染5×5微形棋盘上的方格，每个方格染一种颜色，而且只染一种颜色. 这样便得到二色5×5棋盘. 证明，任意一个二色 5×5 棋盘总含有单色矩形. 对于4×4 棋盘，结论还成立吗?
5. 证明，任意一个三色11×11棋盘总含有单色矩形.
6. 用 n 种颜色染格点集合 $S=\{(x, y): x=0, 1, \cdots, k_{n-1}, y=0, 1, \cdots, l_{n-1}\}$中的点，每个点只染一种颜色. 如果一个边平行于坐标轴的矩形的四个顶点颜色相同，则这个矩形叫做单色矩形. 如果在一种染色方式 f 下，n 色格点集合 S 不含单色矩形，而且每种颜色在每一行出现 k 次，在每一列出现 l 次，则染色方式 f 叫做允许的. 证明，如果格点集合 S 具有允许的染色方式 f，则 $kl\leqslant n(n+1)$.

7. 证明，任意二染色直角三角形周界上的点，其中总含有单色直角三角形. 把条件中的“直角”改成“锐角”或“钝角”，结论仍成立吗？

8. 证明，任意一个三色平面总含有两个距离为1的同色点.

9. 设二色平面含有边长为1的单色等边三角形. 证明，对于每一对实数a，b，其中$b>a>0$，$b-a<1<a+b$，平面上总含有边长分别为1，a和b的单色三角形.

10. 证明，任意一个二色平面总含有边长分别为$\sqrt{2}$，$\sqrt{6}$和π的单色三角形.

9 竞 赛 图

设 K_n 是一个 n 阶完全图．对完全图 K_n 的每条边 uv，都赋予一个方向，也就是说，把边 uv 看成有向线段，看成由顶点 u 指向 v 的边，或者由顶点 v 指向 u 的边，得到的图叫做 **n 阶竞赛图**，记作 T_n．为了看清竞赛图 T_n 中边 uv 的方向，通常由箭头表示．如果边 uv 是由顶点 u 指向 v 的，则记 $u \to v$，并在完全图 K_n 中在边 uv 上画上一个由顶点 u 指向 v 的箭头．图52中给出了几个低阶的竞赛图．当然，对一个 n 阶完全图 K_n，由于边的赋向方式不同，得到的竞赛图也不同，它们都记作 T_n．例如，图 1(a)和图 1(b)是两个不同的 3 阶竞赛图 T_n．n 阶竞赛图 T_n 的顶点集合记作 $V(T_n)$．

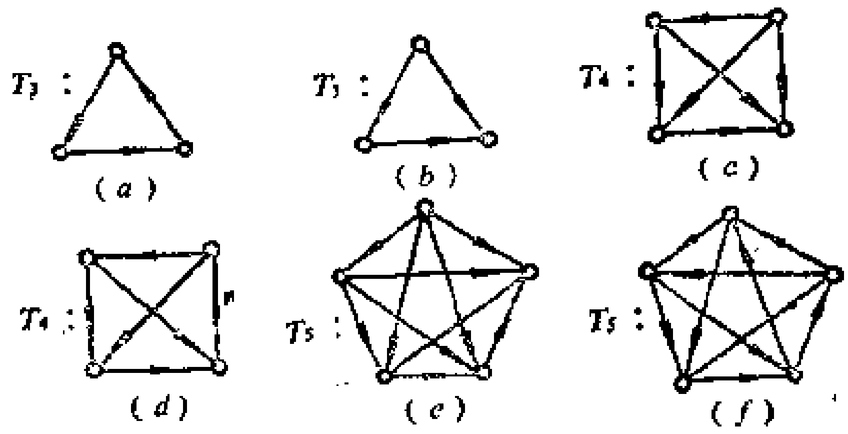


图 52

在 n 阶竞赛图 T_n 中，如果连接顶点 u 和 v 的边是由 u 指向 v 的，即 $u \to v$，则说顶点 u 占优 v，或者 v 被 u 占优．T_n 中所有被顶点 u 所占优的顶点集合，也即 $N^+(u)=\{v\in V(T_n)$

$u \to v\}$，叫做顶点u的**外邻域**．而所有占优顶点u的顶点集合，也即$N^-(u)=\{w\in V(T_n)\,|\,w\to u\}$，叫做顶点$v$的**内邻域**．顶点$u$的外邻域$N^+(u)$所含的顶点个数叫做$u$的**得分**，记作$s(u)$，它也叫做$u$的**出度**．顶点$u$的内邻域$N^-(u)$所含顶点的个数叫做$u$的**入度**，记作$r(u)$．例如，在图53的6阶竞赛图$T_6$中，顶点$v_1$的外邻域为$N^+(v_1)=\{v_2, v_3, v_4, v_5\}$，内邻域为$N^-(v_1)=\{v_6\}$，得分为$s(v_1)=4$．而顶点$v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$的得分分别是4,2,2,1,2．

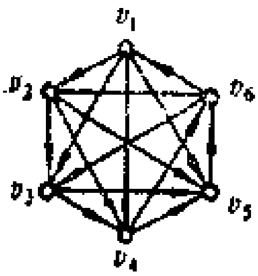


图 53

对于n阶竞赛图T_n，容易看出有如下的结论．

定理 1 设T_n是n阶竞赛图，$V(T_n)$是它的顶点集合．则有

1．对任意顶点$u\in V(T_n)$，有$s(u)+r(u)=n-1$；

2．T_n中所有顶点的得分之和为$\binom{n}{2}$；

3．$\sum\limits_{u\in V(T_n)} s(u)^2=\sum\limits_{v\in V(T_n)} r(v)^2$.

证 由竞赛图的意义，对任意顶点$v\in V(T_n)$，如果$v\neq u$，则要么$u\to v$，要么$v\to u$．这表明，$\{u\}$，$N^+(u)$，$N^-(u)$是竞赛图T_n的顶点集合$V(T_n)$的一个分划．因此$1+s(u)+r(u)=n$．这就是结论1．

由于n阶竞赛图T_n是由n阶完全图K_n的每条边都赋予一个方向而得到的，因此T_n中所有（有向）边的边数是$\binom{n}{2}$．另一方面，对任意顶点$u\in V(T_n)$，$s(u)$是T_n中所有由顶点u引出的（有向）边的边数．因此，$\sum\limits_{u\in V(T_n)} s(u)$即是竞赛图$T_n$的所有边的边数．即有

$$\sum_{u\in V(T_n)} s(u)=\binom{n}{2}.$$

这就证明了结论2.

由结论1，有

$$\begin{aligned}\sum_{u\in V(T_n)} s(u)^2-\sum_{u\in V(T_n)} r(u)^2 &=\sum_{u\in V(T_n)}(s(u)+r(u))(s(u)-r(u))\\ &=(n-1)\sum_{u\in V(T_n)}(s(u)-r(u))\\ &=(n-1)\left(\sum_{u\in V(T_n)} s(u)-\sum_{u\in V(T_n)} r(u)\right).\end{aligned}$$

由结论 2 $\left(\text{注意，}T_n\text{中的所有顶点的入度之和也等于}\binom{n}{2}\right)$，有

$$\sum_{u\in V(T_n)} s(u)^2-\sum_{u\in V(T_n)} r(u)^2=(n-1)\left(\binom{n}{2}-\binom{u}{2}\right)=0.$$

这就证明了结论3.

竞赛图是处理体育比赛(即竞赛，两词含义相同)的一种数学模型. 用它来解数学竞赛中有关体育比赛的试题自然是得心应手.

例 1 有 10 名选手，参加乒乓球循环赛，每对选手各赛一场，比赛无平局. 赛后选手 i 胜了 x_i 场，负了 y_i 场，$i=1$, 2, …, 10. 证明，

$$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{10}^2=y_1^2+y_2^2+\cdots+y_{10}^2.$$

证 把10名选手看成10个顶点，如果在比赛中选手 u 胜选手 v，则由一条由顶点 u 指向顶点 v 的边，得到一个 10 阶竞赛图 T_{10}. 对顶点 u，它的外邻域 $N^+(u)$ 即是所有被选手 u 打败的选手所相应的顶点集合，因此，它的得分 $s(u)$ 即是选手 u 胜的场数，同样，它的入度 $r(u)$ 即是选手 u 负的场数. 所以要证明的是

$$\sum_{u\in V(T'_{10})} s(u)^2 = \sum_{u\in V(T'_{10})} r(u)^2.$$

很明显，这是定理 1 中结论 3 的特例.

1987年，美国数学竞赛的一道试题把例 1 中的数字10改成 n. 这和定理 1 中结论 3 完全相同.

设 T_n 是一个 n 阶竞赛图，它的 $k+1$ 个不同顶点 u_0，u_1，…，u_k 连同由 u_{i-1} 指向 u_i 的有向边 $e_i(i=1, 2, \cdots, k)$ 组成的点边序列 u_0, e_1，u_1，e_2，u_2，…，u_{k-1}，e_k，u_k 叫做一条由顶点 u_0 指向 u_k 的**有向道路**，简记作 $u_0u_1u_2\cdots u_k$，它所含的边数 k 叫做这条有向道路的长. 长为 $n-1$ 的有向道路叫做**哈密尔顿道路**，或者生成道路. 例如，在图53中的 6 阶竞赛图 T_6 含有由顶点 v_2，v_4，v_5，v_6 组成的有向道路 $v_2v_4v_5v_6$，以及哈密尔顿道路 $v_1v_2v_3v_4v_5v_6$. 是否每个 n 阶竞赛图 T_n 都含有哈密尔顿道路？下面的定理回答了这个问题.

定理 2 任意一个 n 阶竞赛图 T_n 都含有哈密尔顿道路，其中 $n\geqslant 2$.

证 对阶数 n 用归纳法. 当 $n=2$ 时，2 阶竞赛图 T_2 含有两个顶点 u 和 v，以及一条由 u 指向 v 的边 $u\to v$. 因此 T_2 含有哈密尔顿道路 uv. 即结论对 $n=2$ 成立. 假设结论对 $n-1$ 阶竞赛图成立. 下面证明结论对 n 阶竞赛图 T_n 成立.

设 u 是竞赛图 T_n 的一个顶点. 从 T_n 中去掉顶点 u，以及由 u 引出或进入 u 的边，得到的是 $n-1$ 阶竞赛图 T_{n-1}. 由归纳假设，T_{n-1} 含有哈密尔顿道路 $u_1u_2\cdots u_{n-1}$. 如果在 T_n 中 $u\to u_1$，则 T_n 含有哈密尔顿道路 $uu_1u_2\cdots u_{n-1}$，因此可设 $u_1\to u$. 如果在 T_n 中 $u_{n-1}\to u$，则 T_n 含有哈密尔顿道路 $u_1u_2\cdots u_{n-1}u$，因此可设 $u\to u_{n-1}$（图54）. 所以必有某个 k，使得 $u_k\to u, u\to u_{k+1}$. 于是 $u_1u_2\cdots u_kuu_{k+1}\cdots u_{n-1}$ 即是竞赛图 T_n 的一条哈密尔顿道路. 定理 2 证毕.

在数学竞赛里也出现了一些有关竞赛图的哈密尔顿道路的试题.

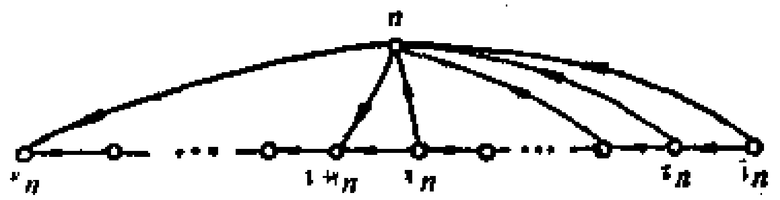


图 54

例 2 给定 n 个顶点的完全有向图，即给定 n 个点1，2，…，n，其中任意两点 i 和 j，$i\neq j$，都赋予一个方向"$\longrightarrow$"：要么 $i\to j$，要么 $j\to i$. 证明，可以将点1，2，…，n 重新排成 i_1，i_2，…，i_n，使得 $i_1\to i_2\to\cdots\to i_n$.

注 无论从题目的叙述，还是所要证明的结论上看，这道试题都很图论化. 用竞赛图的语言来说，就是要证明，每个 n 阶竞赛图都含有哈密尔顿道路，即定理 2．这里不再给出证明.

例 3 在国际象棋比赛中，每对选手各赛一场. 证明，可以给所有参赛选手编号，使得每位选手都不输给编号紧接在他后面的选手.

证 设有 n 名参赛选手. 把选手看成顶点，当选手 u 不输给 v 时，连一条由顶点 u 指向 v 的边，得到 n 阶竞赛图 T_n. 由定理 2，T_n 含有一条哈密尔顿道路 $u_1u_2\cdots u_n$. 用正整数 i 给选手 u_i 编号，$i=1$，2，…，n. 由于 $u_i\to u_{i+1}$，所以第 i 号选手 u_i 不输给第 $i+1$ 号选手 u_{i+1}，$i=1$，2，…，$n-1$. 证毕.

在 n 阶竞赛图 T_n 中，始点和终点相重合的有向道路 $u_1u_2\cdots u_ku_1$ 叫做圈，圈上所含的边数叫做这个圈的长，长为 k 的

圈叫做 k 圈．特别，3 圈也叫做有向三角形．并不是每个竞赛图都含有 3 圈．

定理 3 n 阶竞赛图 T_n 含有3圈的必要且充分条件是，T_n含有得分相同的顶点．

证 只需证明等价的命题：n阶竞赛图 T_n 不含 3 圈的必要且充分条件是，T_n 中顶点的得分各不相同．证如下．

设 T_n 不含 3 圈，u 和 v 是 T_n 中两个顶点，并且 $u\to v$．对任意顶点 $w\in N^-(u)$，有 $w\to u$，$u\to v$．如果 $v\to w$，则T_n 含 3 圈 $uvwu$，矛盾．因此 $w\to v$．这表明，$N^+(v)\subseteq N^+(u)\backslash\{v\}$．所以，$s(v)<s(u)-1$，即 T_n 中任意两个顶点的得分都不同．

反之，设 T_n 中顶点的得分各不相同，由于 T_n 中顶点的得分只能在0和 $n-1$ 之间，所以可设 T_n 中 n 个顶点为 v_1，v_2，…，v_n，它们的得分为 0，1，…，$n-1$．而且对任意下标 i，j，$1\leqslant i<j\leqslant n$，均有 $v_j\to v_i$．因此 T_n 中不含 3 圈．定理 3 证毕．

例 4 n 名选手参加循环赛，每对选手各赛一场，无平局．比赛后无全胜者．证明，其中必有三名选手A，B，C，使得 A 胜 B，B 胜 C，而 C 胜 A．

证 把 n 名选手看成 n 个顶点，当选手 u 胜 v 时，令顶点 u 占优 v，得到 n 阶竞赛图 T_n．由于比赛无全胜者，所以 T_n 中每个顶点的得分至多为 $n-2$．n 个顶点，有 n 个得分，它们都在 0 和 $n-2$ 之间，所以必有二个顶点得分相同．由定理 3，T_n 含有 3 圈 $uvwu$．于是选手 u 胜 v，v 胜 w，而 w胜u．

在体育比赛里，如果出现全胜者，那么冠军必是全胜者，这大概无人会有疑义．如果没有全胜者，那么由谁当冠军有时就会成为问题．比如，在挑选新选手的选拔赛上，让一群少年选手和一些成名选手比赛，有的选手可能得分很多，但

被打败的可能是一些实力不是最强的选手，有的选手可能只胜一两场，但被打败的可能是实力最强的硬手．究竟应该挑什么样的选手？这就需要认真考虑．

设 u 和 v 是 n 阶竞赛图 T_n 的两个顶点，如果 u 占优 v，或者存在某个顶点 x，使得 u 占优 x，而 x 点占优 v，则说顶点 u 优于 v．如果顶点 u 优于竞赛图 T_n 中其他所有顶点，则 u 叫做**优顶点**．

注意，如果顶点 u 是竞赛图 T_n 的优顶点，则 u 到其他任意一个的顶点 v 有一条长为1或2的有向道路．反之，如果顶点 u 到竞赛图 T_n 中任意一个顶点 v 都有一条长为1或2的有向道路，则 u 是 T_n 的一个优顶点．

定理 4 任意一个 n 阶竞赛图 T_n 都有优顶点．

证 很明显，竞赛图 T_n 总有得分最大的顶点 u．对任意顶点 $v\in N^+(u)$，有 $u\to v$；对任意顶点 $w\in N^-(u)$，如果对每个 $v\in N^+(u)$，均有 $w\to v$，则 $s(w)\geqslant s(u)+1$，与 u 得分最大矛盾．因此必有 $x\in N^+(u)$，使 $x\to w$．于是 $u\to x, x\to w$．所以 u 是 T_n 的一个优顶点．证毕．

由定理4的证明可以看出，竞赛图 T_n 中得分最大的顶点一定是优顶点．这是数学家朗道（H. G. Landau）1953年证明的一个结论．但反过来，优顶点不一定是得分最大的顶点．在图55的5阶竞赛图 T_5 中，得分最大的顶点是 y，它当然是优顶点．而顶点 x 也是优顶点，它的得分为2，所以不是得分最大的顶点．

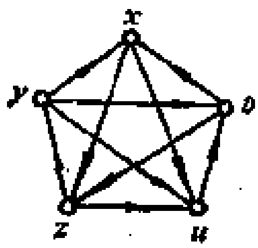


图 55

定理 5 竞赛图 T_n 中优顶点唯一的必要且充分条件是，T_n 中含有得分为 $n-1$ 的顶点．

证 设 u 是 T_n 中唯一的优顶点，且 $s(u)\leqslant n-2$. 则 $N^-(u)\neq\phi$. 去掉 T_n 中所有不属于 $N^-(u)$ 的顶点，以及由它们引出，或者指向它们的边，得到以 $N^-(u)$ 为顶点集合的竞赛图，记作 $T[N^-(u)]$. 由定理 5，它含有优顶点 v. v 也是 T_n 的优顶点，和优顶点的唯一性矛盾.

反之，设 u 是 T_n 中得分为 $n-1$ 的顶点. 由定理 5，u 是 T_n 中的优顶点. 如果 T_n 含有另一个优顶点 v，则要么 $v\to u$，要么存在 T_n 的顶点 x，使得 $v\to x$，$x\to u$. 即存在顶点 y，使 $y\to u$. 和 u 的得分为 $n-1$ 相矛盾. 证毕.

例 5 n 个球队参加排球赛，每两个球队各赛一场，比赛无平局. 如果 A 队胜 B 队，或者 A 队胜某个 C 队，而 C 队胜 B 队，则说 A 队优于 B 队. 比赛结束后，优于其他所有球队的球队即授予冠军队称号. 试问能否恰有两个冠军队？

证 把参赛球队看成顶点，如果球队 u 胜 v，则说顶点 u 占优 v，得到 n 阶竞赛图 T_n. 对于球队 u 和 v，如果球队 u 优于 v，则顶点 u 占优 v，或者存在顶点 w，使得 u 占优 w，而 w 占优 v，即顶点 u 优于 v. 于是，授予冠军队的球队即是 T_n 中的优顶点. 因此问题化为：一个 n 阶竞赛图 T_n 是否可以恰含有两个优顶点？答案是，不存在恰含有两个优顶点的竞赛图. 证明如下.

反证法 设竞赛图 T_n 恰含有两个优顶点 u 和 v. 不妨设 $u\to v$. 如果 $N^-(u)\cap N^-(v)=X\neq\phi$，则在 T_n 中去掉 X 之外的顶点，以及由它们引出的和指向它们的边，得到的竞赛图记作 $T[X]$. 由定理 4，竞赛图 $T[X]$ 含有优顶点 w. 如图 56，容易验证，顶点 w 到 T_n 中其他所有的顶点都有长为 1 或 2 的有向道路，因此 w 是 T_n 的第三个优顶点，矛盾. 所以 $X=\phi$. 同理，如果 $Y=N^+(u)\cap N^-(v)\neq\phi$，则 T_n 将含有

第三个优顶点 x，也不可能．这就证明，$Y=\phi$，从而 $N^{-}(u)=X\cup Y=\phi$．即顶点 u 的得分是 $n-1$．由定理 5，T_n 只含有一个优顶点，矛盾．所以 T_n 不能恰含有两个优顶点．

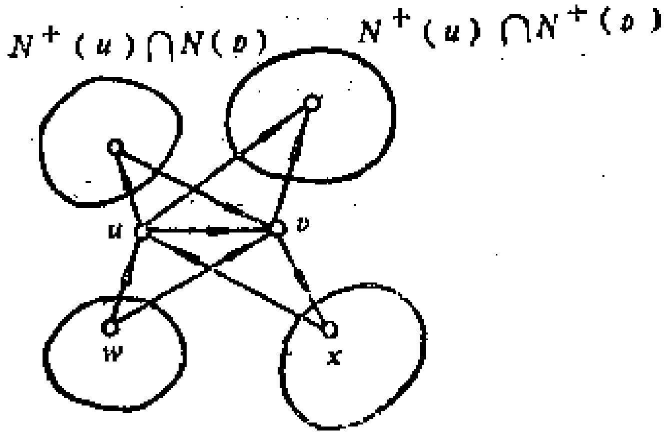


图 56

注　例 5 的结论是数学家毛勒 (S. B. Maurer) 1980 年所证明的一个定理的特殊情形．毛勒的定理如下．

定理 5　除 $k=2$，n 任意以及 $n=k=4$ 外，总存在 n 阶竞赛图 T_n，使得 T_n 恰含有 k 个优顶点．

许多人对这个定理产生了兴趣．有的把它编成数学竞赛题，有的给出它的各种证明．1982 年数学家瑞德 (K. B. Reid) 给出一个归纳证明．

习 题 九

1．在集合 S 中引进二元关系"$\rightarrow$"，它满足下面的性质：(1)对于任意元素 a，$b\in S$，要么 $a\rightarrow b$，要么 $b\rightarrow a$；(2)对于任意元素 a，b，$c\in S$，如果 $a\rightarrow b$，且 $b\rightarrow c$，则 $c\rightarrow a$．试问集合 S 所具有的元素个数之最大值是多少？

2．n 名选手参加循环赛，每对选手各赛一场，比赛无平局．证明，其中必有一名选手，当他列举他所战胜的对手以及他的手下败将所

战胜的人时，他也就数出了所有其他参赛选手.

3. 有100只不同种类的昆虫，每两只昆虫中总有一只能吃掉另一只. 证明，可以将这100只昆虫排成一列，使得每只昆虫都能吃掉排在紧挨着它后面的昆虫.

4. 某次体育比赛，有 n 名选手参加，每对选手各赛一场，无平局. 如果选手 A 满足下面的条件，即对任意一名选手 B，要么 A 胜 B，要么 A 胜某个选手 C，而 C 胜 B，则 A 叫做这次比赛的优秀选手. 证明，如果比赛后所确定的优秀选手只有一名，那么这名选手一定胜其他所有选手.

习题解答

习 题 一

1. 设任意给定的一群人有n个人．用n个顶点表示这n个人．当且仅当顶点u和v表示的两个人是朋友时令顶点u和v相邻，得到的n阶简单图记作G．对G中任意顶点x，由于它至多和其他$n-1$个顶点相邻，所以顶点x的度$d(x)$满足$0\leqslant d(x)\leqslant n-1$，即是说，图$G$的顶点的度只能是$n-1$个非负整数$0$，$1$，$\cdots$，$n-1$中的一个．如果图$G$的顶点的度都不相同，则图$G$具有0度顶点$u$和$n-1$度顶点$v$．$n-1$度顶点$v$和$G$中其他$n-1$个顶点都相邻，特别和0度顶点$u$相邻．但0度顶点$u$和$G$中任何顶点都不相邻，矛盾．这就证明，图$G$中必有两个顶点，它们的度相同．也就是说，这群人中必有两个人，他们的朋友一样多．
2. 解法完全和例6相同．
3. 将$2n$个人看成$2n$个顶点，其集合记作V．对顶点$u, v\in V$，当且仅当顶点u和v表示的两个人认识时，令顶点u和v相邻，得到的是$2n$阶简单图G．已知条件是，图G中每个顶点的度都至少是n．欲证的是，图G中含有四个顶点，它们之间连有图57所示的边．这四个顶点连同它们之间如图57所示的边一起叫做图G中一个长为4的圈，记作$xyzwx$，也简记为C_4．于是可以简单地说，所要证的命题是，如果$2n$阶简单图G的所有顶点的度都至少是阶数的一半，则图G含有圈C_4．现在给出证明．任取图G的一个顶点u．因为$d(u)\geqslant n$，所以u和图G中顶点v，v_1，v_2，$\cdots$，v_{n-1}相邻．记$S=\{v_1, v_2, \cdots, v_{n-1}\}$，且$T=V\setminus(\{u, v\}\cup S)$．显然集合$T$含有$n-1$个顶点．下面分情形讨论．（1）$v$和集合$S$中两个顶点$x$和$y$相邻．此时图$G$显然含有圈$C_4$，$uxvyu$．（2）$v$恰和集合$S$中一个顶点$x$相邻．如果$S$中有某

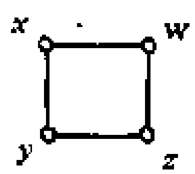


图 57

个顶点y和x相邻，则图G含有圈C_4：$uvxyu$，如果S中所有顶点都和x不相邻，则因$d(x)\geqslant n$，所以x和T中至少$n-2$个顶点相邻．如果v和这$n-2$个顶点中某个顶点z相邻，则图G含有圈C_4：$uvzxu$．因此可设v和这$n-2$个顶点都不相邻．由于$d(v)\geqslant n\geqslant 3$，所以$v$和$T$中余下的顶点$w$相邻．如果$w$和$T$中某个顶点$z$相邻，则图$G$含有圈$C_4$：$vwzxv$；如果$w$和$u$相邻，则图$G$含有圈$C_4$：$uxvwu$，如果$w$和$S$中某个顶点$y$相邻，则图$G$含有圈$C_4$：$uvwyu$．（3）$v$和集合$S$的所有顶点都不相邻．此时因为$d(v)\geqslant n$，所以$v$和$T$中所有顶点都相邻．任取集合$S$的顶点$x$．如果$x$ T中某个顶点y相邻，则图G含有圈C_4：$uxyvu$．如果x和T的所和有顶点都不相邻，则$d(x)\leqslant n-1$，矛盾．

4．所有题目的集合用顶点集合$X=\{x_1, x_2, \cdots, x_{28}\}$表示，所有参赛者的集合用顶点集合$Y=\{y_1, y_2, \cdots, y_k\}$表示．取图$G$的顶点集合$V=X\cup Y$．图$G$中只在集合$X$的顶点和集合$Y$的顶点之间连边，而且当且仅当参赛者$y_i$解出题目$x_j$时，令顶点$x_j$和$y_i$相邻，$1\leqslant j\leqslant 28$，$1\leqslant i\leqslant k$．已知的是，图$G$满足下面两个条件，即（1）对任意顶点$y\in Y$，$d(y)=7$；（2）对任意顶点$x$，$x'\in X$，$x$和$x'$恰有两个公共邻点．要证明的是，如果$X_1$表示所有初试题目的集合，则必有顶点$y\in Y$，使得要么$y$和$X_1$的顶点都不相邻，要么至少和$X_1$的四个顶点相邻．下面给出证明．设$x\in X$，且$d(x)=t$．由条件（2），顶点集合$X/\{x\}$的顶点和$N(x)$的顶点之间恰连有$2\times 27$条边．由条件（1），顶点集合$X/\{x\}$与$N(x)$之间恰有$6t$条边．由此得到$d(x)=t=9$．而$X$的顶点与$Y$的顶点之间共连有$28\times 9=7k$条边．于是得到，$k=36$，设$X_1$含有$m$个顶点，则集合$X_1$与$Y$之间共连有$9m$条边．设结论不成立，则集合$Y$中的顶点在$X_1$中相邻顶点个数只能是1，2，3．设集合$Y$中在$X_1$中相邻顶点的个数为1，2和3的顶点个数分别为$\alpha$，$\beta$，$\gamma$．显然，$\alpha+\beta+\gamma=36$，且$\alpha+2\beta+3\gamma=9m$．由条件（2），$\beta+3\gamma=m(m-1)$．由此解得$\beta=-m^2+29m-108<0$，矛盾．

5．用顶点表示教授，其集合记作V．对P，$Q\in V$，当且仅当顶点P

和 Q 所表示的两名教授相互认识时令顶点 P 和 Q 相邻，得到的是 n 阶简单图 G. 所要证明的是，存在顶点集合 V 的一个分划 (U, W)，使得每个子集中每个顶点在同一子集中的邻点个数不超过它在另一子集中的邻点个数. 现在来证明这个命题. 首先注意，把集合 V 分划为两个子集，其分划方法总是有限的. 因此必有一个分划 (U, W)，使得连接集合 U 的顶点与集合 W 的顶点之间的边数为最大. 下面证明这个分划 (U', W) 即满足所求. 用反证法. 设结论不成立. 如果 U 含有顶点 x，使得它在 U 中相邻顶点个数 d^* 大于它在 W 中相邻顶点个数 d^{**}，则从集合 U 去掉顶点 x，并添加到集合 W，得到的子集分别记作 U' 和 W'. 很明显，(U', W') 是集合 V 的一个分划，并且连接集合 U' 的顶点与 W' 的顶点之间的边数比连接集合 U 的顶点与 W 的顶点之间的边数增加 $d^*-d^{**}>0$，和分划 (U, W) 的选取相矛盾. 因此集合 U 中每个顶点在 U 中相邻顶点个数 d^* 不超过它在 W 中相邻顶点个数 d^{**}. 对集合 W 中的顶点，证明完全相仿.

6. 用顶点表示参加舞会的学生，所有表示男生的顶点集合记作 X，所有表示女生的顶点集合记作 Y. 对顶点 $x\in X$ 和 $y\in Y$，当且仅当顶点 x 和 y 所表示的男生和女生跳过舞时令顶点 x 和 y 相邻，X 的顶点之间以及 Y 的顶点之间都不相邻，得到的是二部分图 G. 已知的是，对任意顶点 $x\in X$ 和 $y\in Y$，都有 $0<d(x)<n$，$0<d(y)<n$. 要证明的是，图 G 含有两条没有公共端点的边. 现在给出证明. 设 x_1 是集合 X 中度最大的顶点. 任取 $y_2\in Y/N(x_1)$. 由于 y_2 和 x_1 不相邻，且 $d(y_2)>0$，所以 y_2 和 $X/\{x_1\}$ 中某个顶点 x_2 相邻. 如果顶点 x_2 和 $N(x_1)$ 中所有顶点都相邻，则 $d(x_2)\geqslant d(x_1)+1$，和 x_1 是 X 中最大度顶点相矛盾. 因此必有 $y_1\in N(x_1)$，使得 y_1 和 x_2 不相邻. 于是边 x_1y_1 和 x_2y_2 没有公共端点.

   注 本题的解法相当典型，抓住图 G 中最大度顶点来解决问题；当然，有时候也可以从图 G 的最小度顶点入手. 这两者在某种意义上讲是对偶的.

7. 用顶点表示俱乐部里的成员，其集合记作 V. 对于顶点 u，$v\in V$，

当且仅当顶点 u 和 v 所表示的两名成员相互认识时令它们相邻，得到的是99阶简单图 G. 已知条件是，对任意顶点 $u\in V$，它的度 $d(u)\geqslant 67$. 要证的是，图 G 含有四个顶点，其中任意两个顶点都相邻. 现在给出证明. 任取顶点 $x\in V$. 由于它的度 $d(x)\geqslant 67$，所以顶点 x 和某个顶点 y 相邻. 由于 $d(x)\geqslant 67$，所以图 G 中至多有31个顶点和 x 不相邻. 又 $d(y)\geqslant 67$，所以图 G 中至少有35个顶点和 x，y 都相邻（图58，图中虚线表示不相邻）. 设 z 和顶点 x，y 都相邻. 由于 $d(z)\geqslant 67$，所以 z 必和 x，y 的某个公共邻点 w 相邻. 于是 x，y，z，w 即是所需的四个顶点.

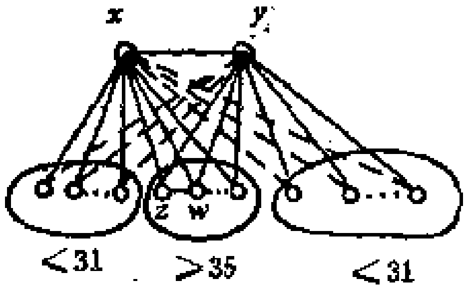


图 58

取三个两两不交的顶点集合 V_1, V_2, V_3，且 V_i 含有33个顶点. 记 $V=V_1\cup V_2\cup V_3$. 对顶点 u，$v\in V$，当且仅当顶点 u 和 v 在不同子集时令 u 和 v 相邻，得到的是99阶简单图 G. 由于图 G 的顶点集合 V 分划为三个子集 V_1，V_2，V_3，同一子集的任意两个顶点都不相邻，因此图 G 叫做**三部分图**. 又图 G 中不同子集的任意两个顶点都相邻，因此图 G 叫做**完全三部分图**. 很明显，图 G 中每个顶点的度都是66. 对于图 G 中任意四个顶点，必有两个顶点在同一个子集，因此必有两个顶点不相邻. 这就证明，在完全三部分图 G 中不存在两两都相邻的四个顶点. 换言之，题目的条件67不得减少.

8. 用顶点表示球队，其集合记作 V. 对顶点 u，$v\in V$，当且仅当 u 和 v 所表示的两个球队进行过比赛时令 u 和 v 相邻，得到的是18阶简单图 G. 很明显，对 G 的每个顶点 u，均有 $d(u)=8$，即图 G 是8正则的. 要证明的是，图 G 含有三个顶点，它们彼此都不相邻.

现在证明如下．任取图 G 的顶点 u．由于$d(u)=8$，所以它的邻域 $N(u)$含有 8 个顶点．设 $N(u)$中顶点 x 所表示的球队是和 u 所表示的球队在第一轮中比赛的对手．则 $N(u)$中尚有 7 个顶点，其中必有一个顶点 v，它所表示的球队是和 $S=V/(N(u)\cup\{u\})$ 中的顶点 w 所表示的球队在第一轮比赛过，即 v 和 w 相邻（图 59，其中虚线表示不相邻）．由于 $d(w)=8$，集合 S 含有 9 个顶点，所以集合 S 含有一个顶点 z，它和 w 不相邻．于是，顶点 u，w，z 两两不相邻．

9. 把学生看成顶点．三所中学 A，B 和 C 的学生所相应的顶点集合分别记作 X，Y 和 Z．记 $V=X\cup Y\cup Z$．对顶点 u，$v\in V$，当且仅当 u 和 v 表示的是两所不同中学的相互认识学生相邻时令 u 和 v 相邻，得到的是一个三部分简单图 G．对于顶点 $x\in X$，Y和 Z中和 x 相邻的顶点个数分别记作 k 和 l．由已知条件可知，$k+l=n+1$．k 和 l 中较大者记作 $m(x)$．让顶点遍历集合X，$m(x)$的最大者记作 m_X．同样可定义 m_Y，m_Z．记m_X，m_Y，m_Z 中最大者为 m．不妨设 $m=m_X$．并且对于顶点 $x_0\in X$，它在集合 Y 中相邻的顶点集合 Y_1 所含顶点的个数为 m（图60，其中虚线表示不相邻）．于是，顶点 x_0 在 Z 中相邻的顶点集合 Z_1 所含顶点的个数为 $n+1-m$．如果集合 Y_1 中某个顶点 y_0 与集合 Z_1 中某个顶点 z_0 相邻，则 x_0，y_0，z_0 即是所需的三个顶点．因此可设集合 Y_1 中的顶点和集合 Z_1 中的顶点都不相邻．因此集合 Z_1 中顶点 z_0 和Y_1中至多n

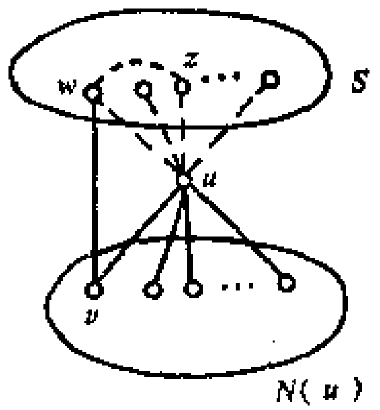


图 59

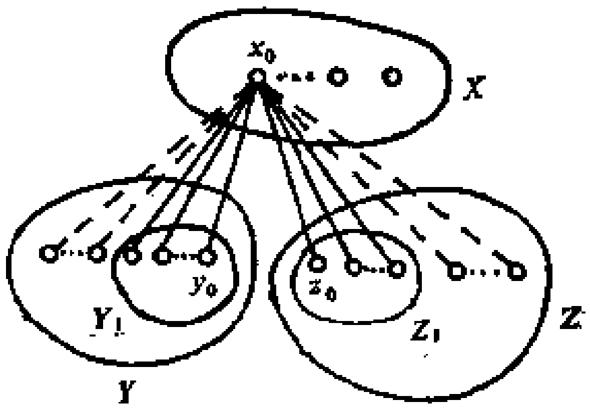


图 60

$-m$ 个顶点相邻. 于是，顶点 z_0 和 X 中至少 $n+1-(n-m)=m+1$ 个顶点相邻，和 m 的最大性相矛盾.

10. 把集合 B 的 $2n+1$ 个子集 $A_1, A_2, \cdots, A_{2n+1}$ 看成 $2n+1$ 个顶点，其集合记作 V. 对于顶点 $A_i, A_j \in V$，当且仅当子集 A_i 和 A_j 含有公共元素时，令顶点 A_i 和 A_j 相邻，得到的图记作 G. 很明显，由(2)，图 G 是 $2n+1$ 阶完全图 K_{2n+1}，其边集合记作 E. 现在建立图 G 的边集合 E 到集合 B 上的映射 φ 如下：设 (A_i, A_j) 是图 G 的边，由(2)，$A_i \cap A_j=\{a_{ij}\}$，$a_{ij} \in B$，令 $\varphi(A_i, A_j)=a_{ij}$，即边 (A_i, A_j) 在映射 φ 下的象 $\varphi(A_i, A_j)$ 定义为 a_{ij}. 由(3)可知，对每个 $a \in B$，必有子集 A_i 和 A_j，使得 $A_i \cap A_j=\{a\}$，因此顶点 A_i 和 A_j 连边 (A_i, A_j) 一条，于是 $\varphi(A_i, A_j)=a$. 这表明，映射 φ 是满射，或者说是到上的. 对于不同的边 (A_i, A_j)，(A_k, A_l)，如果 $\varphi(A_i, A_j)=\varphi(A_k, A_l)=a_{ij}$，则 $A_i \cap A_j=A_k \cap A_l=\{a_{ij}\}$.

当 $k=i$ 时，显然有

$$A_i \supseteq (A_i \cap A_1) \cup (A_i \cap A_2) \cup \cdots \cup (A_i \cap A_{i-1}) \cup (A_i \cap A_{i+1}) \cup \cdots \cup (A_i \cap A_{2n+1}).$$

由(3)，有

$$A_i \supseteq (A_i \cap A_1) \cup (A_i \cap A_2) \cup \cdots \cup (A_i \cap A_{i-1}) \cup (A_i \cap A_{i+1}) \cup \cdots \cup (A_i \cap A_{2n+1}).$$

于是得到，

$$A_i = (A_i \cap A_1) \cup (A_i \cap A_2) \cup \cdots \cup (A_i \cap A_{i-1}) \cup (A_i \cap A_{i+1}) \cup \cdots \cup (A_i \cap A_{2n+1}).$$

由(2)，对任意 t，$t \neq i$，$1 \leqslant t \leqslant 2n+1$，$A_i \cap A_t$ 恰有一个元素，因此，A_i 至多含有 $2n-1$ 个元素. 和(1)相矛盾. 当 $k \neq i, j$，$l \neq i, j$ 时，则有 $A_i \cap A_j=A_i \cap A_k=A_i \cap A_l=\{a\}$，也不可能. 这表明，映射 φ 是单射，或者说是一一的. 因此，集合 B 和边集合 E 之间存在一个一一到上的映射. 于是可以用边 (A_i, A_j) 来表示集合 B 的元素. 由于图 G 是 $2n+1$ 阶完全图，因此含有 $(2n+1)n$ 条边，即集合 B 含有 $(2n+1)n$ 个元素.

如果可以按照题目要求给集合 B 的元素标上 0 或 1，则集合 B 应

有一半元素标上 0，即$\frac{(2n+1)n}{2}$应是整数．从而 n 应是偶数．

反之设 n 是偶数，且设图 G 的顶点 $A_1, A_2, \cdots, A_{2n+1}$ 在一个圆周的 $2n+1$ 个等分点上．如果顶点 A_i 和 A_j 之间较短的圆弧上有奇数个顶点，则在边(A_i, A_j)相应的元素标上数字1，否则标上数字 0．注意，由于图 G 是 $2n+1$ 阶完全图，对每个顶点 A_i，它和其他所有顶点都连边，这 $2n$ 条边所相应的元素即是子集 A_i，它们必然有 n 个标上 0，另有 n 个标上 1．

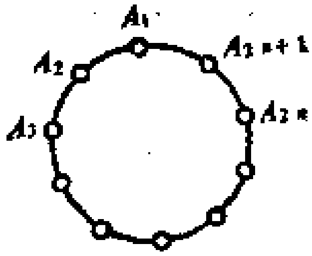


图 61

11．把 n 个点看成 n 个顶点，其集合记作 V．令其中任意两个顶点 u 和 v 都相邻，得到 n 阶完全图 K_n，它的边数 $q(K_n)$ 为 $q(K_n)=\frac{n(n-1)}{2}$．另一方面，对每个顶点 $u\in V$，这 n 个点中至少有 k 个点和点 u 的距离相同．这表明，顶点 u 的邻域 $N(u)$ 至少含有 k 个顶点．由于 K_n 是完全图，所以$N(u)$中至少含有$\frac{k(k-1)}{2}$条边．对任意两个不同的顶点 u 和 v，$N(u)\cap N(v)$ 中的顶点到点 u 和 v 的距离相同(等于点 u 和 v 的距离)，因此 $N(u)\cap N(v)$至多含有K_n中的一条边．所以，对 K_n 的 n 个顶点，它们的邻域总共至少含有

$n\frac{k(k-1)}{2}-\frac{n(n-1)}{2}$条边，于是有

$$n\frac{k(k-1)}{2}-\frac{n(n-1)}{2}\leqslant\frac{n(n-1)}{2}$$

解之即得 $k\leqslant\frac{1}{2}+\sqrt{2n}$．

习 题 二

1．把选手看成顶点，其集合记作 V．对于顶点 u，$v\in V$，当且仅当 u 和 v 表示的两名选手比赛过时令 u 和 v 相邻，得到的是 n 阶简单图 G．由于总共赛过 $n+1$ 场，所以图 G 的边数 $q(G)$ 为 $n+1$．于

是，由定理1，有

$$\sum_{v\in V} d(v)=2q(G)=2(n+1).$$

如果图 G 中所有顶点的度都不超过2，则由上式得到

$$2(n+1)=\sum_{v\in V}d(v)\leqslant 2n.$$

即 $2\leqslant 0$，不可能．因此图 G 中至少有一个顶点 x，它的度至少是3．于是，顶点 x 所表示的选手至少已赛过三次．

2. 设 G 是 n 阶3正则图，则对任意顶点 $v\in V$，均有 $d(v)=3$．由定理1，有

$$2q(G)=\sum_{v\in V}d(V)=3n.$$

因此 n 为偶数．

3. 当 $U=V$ 时，$k=0$．由例1图 G 中奇顶点的个数为偶数．因此，结论当 $U=V$ 时成立．现在设 $U\subsetneq V$．将图 G 中两个端点都不属于集合 U 的边去掉，再把图 G 中所有不属于集合 U 的顶点捏成一个新顶点 $*$，得到的图记作 G^*．显然，图 G^* 的顶点集合为 $V^*=U\cup\{*\}$，顶点 $*$ 在图 G^* 中的度 $d^*(*)$ 为 k，而且图 G^* 中属于集合 U 的顶点 x 在图 G^* 中的度 $d^*(x)$ 和在图 G 中的度 $d(x)$ 相同．对图 G^* 应用定理1，有

$$\sum_{v\in V^*} d^*(v)=k+\sum_{v\in U} d(v)=2q(G^*).$$

在图 G 中 U 的所有奇顶点以及所有偶顶点集合分别记作 U_1 和 U_2 则上式化为

$$k+\sum_{v\in U_1}d(v)=2q(G^*)-\sum_{u\in U_2}d(v).$$

上式右端为偶数．因此 k 和集合 U_1 所含顶点的个数(即集合 U 中奇顶点的个数)具有相同的奇偶性．

4. 设参赛选手的人数为 n．将选手看成顶点，其集合记作 V．对于顶点 u，$v\in V$，当 u 和 v 表示的两名选手比赛出现平局时令 u 和 v 相邻，当 u 和 v 表示的两名选手一胜一负时在表示胜者的顶点处画一个环，得到的 n 阶图记作 G．由于每名选手和其他所有选手各赛一场，每场总是记2分，所以在图 G 中有

$$\sum_{v\in V} d(v)=n(n-1).$$

由于 $n(n-1)$总是偶数，所以所有选手的得分总数不能是 1979 和 1985. 考察 $n(n-1)$ 的个位数. 设 $n=10a+b$，其中 $0\leqslant b\leqslant 9$. 则

$$n(n-1)=100a^2+10(2b-1)a+b(b-1).$$

令 b 遍历0,1,2,…9，可知乘积 $n(n-1)$的个位数为0,2或b. 因此所有选手的总得分不可能是1984. 因此，$n(n-1)=1980$. 由此解得 $n=45$.

5. 把 n 名选手看成 n 个顶点，其集合记作 V. 设(X, Y, Z)是集合 V的一个分划，其中子集 X, Y和 Z 分别含有 k, l和 m 个顶点. 对于顶点u, $v\in V$，当且仅当 u 和 v 属于不同子集时令 u 和 v 相邻，得到的是一个完全三部分图 G. 于是问题即为：证明，阶数 n 为常数的完全三部分图中，当 k, l 和 m 接近相等，即其中任意两个数至多相差为 1 时的完全三部分图 G^* 的边数 $q(G^*)$ 最大. 由于(X, Y, Z)是 V的一个分划，所以

$$k+l+m=n. \qquad (1)$$

其次，由于图 G 是完全三部分图，因此对每个顶点 $x\in X$，均有 $d(x)=l+m$. 同理，对每个$y\in Y$，$d(y)=k+m$，且对$z\in Z$，$d(z)=k+l$. 于是由定理1有

$$\begin{aligned}2q(G)&=\sum_{v\in V} d(V)=\sum_{x\in X} d(x)+\sum_{y\in Y} d(y)+\sum_{z\in Z} d(z)\\&=k(l+m)+l(k+m)+m(k+l)\\&=2(kl+lm+mk).\end{aligned}$$

即

$$q(G)=kl+lm+mk. \qquad (2)$$

于是问题又化为，在条件(1)下，证明当 k, l和 m 接近相等时，式(2)取到最大值. 不妨设 $k\leqslant l\leqslant m$. 下面分情形讨论.

当 $n=3m^*$ 时，取 $k=l=m=m^*$，则式(1)成立，并且 $q(G)=3m^{*2}=\frac{1}{3}n^2$. 如果 $l>m^*$，则令 $l=m^*+x$，$m=m^*+y$，$x>0$，$y>0$. 由式(1)，$k=m^*-x-y$. 此时

$$q(G)=(m^*-x-y)(m^*+x)+(m^*+x)(m^*+y)+(m^*+y)(m^*-x-y)$$
$$=3m^{*2}-(x+y)^2<3m^{*2}=\frac{1}{3}n^2.$$

如果 $l<m^*$，则令 $k=m^*-x$，$l=m^*-y$，$x>0, y>0$. 由式(1)，$m=m^*+x+y$. 此时，

$$q(G)=(m^*-x)(m^*-y)+(m^*-y)(m^*+x+y)+(m^*+x+y)(m^*-x)$$
$$=3m^{*2}-\{(x+y)^2-xy\}<3m^{*2}=\frac{1}{3}n^2.$$

因此当 $k=l=m=\frac{n}{3}$ 时，$q(G)$取到最大值.

当 $n=3m^*+1$ 时，令 $k=l=m^*$，$m=m^*+1$. 则式（1）成立，且$q(G)=3m^{*2}+2m^*$. 如果 $l>m^*$，则令$l=m^*+x, m=m^*+1+y$，其中 $x>0$. 由 $l\leqslant m$ 可知，$y\geqslant 0$. 由式(1)，$k=m^*-x-y$. 此时

$$q(G)=3m^{*2}+2m^*-x^2-y^2-y<3m^{*2}+2m^*.$$

如果 $l<m^*$，则令 $k=m^*-x$，$l=m^*-y$，$x>0$，$y>0$. 由式(1)，$m=m^*+1+x+y$. 此时，

$$q(G)=3m^{*2}+2m^*-\{x(1+x+y)+y(1+y)\}<3m^{*2}+2m^*.$$

因此当 $k=l=m^*$，$m=m^*+1$ 时 $q(G)$取到最大值.

当 $n=3m^*+2$ 时，取 $k=m^*, l=m=m^*+1$，则式(1)成立，且$q(G)=3m^{*2}+4m^*+1$. 如果 $l>m^*+1$，则令$l=m^*+1+x$，$m=m^*+1+y$，$x>0$，$y>0$. 由式(1)，$k=m^*-x-y$. 此时$q(G)=3m^{*2}+4m^*+1-x^2-(x+y)(1+y)<3m^{*2}+4m^*+1$. 如果 $l<m^*+1$，则令 $l=m^*+1-x$，$m=m^*+1-y$，$x>0, y>0$，则 $k=m^*+x+y$. 于是 $q(G)=3m^{*2}+4m^*+1-x(x+y-1)-y(y-1)<3m^{*2}+4m^*+1$.

因此，当 $k=m^*$，$l=m=m^*+1$ 时 $q(G)$取到最大值.

6. 用顶点表示小孩，所有表示男孩和所有表示女孩的顶点集合分别记作 X 和 Y，记 $V=X\cup Y$. 对于顶点 u，$v\in V$，当且仅当 u 和 v 表示的两个孩子在一起跳过舞时令 u 和 v 相邻，得到的是一个二部分图 G. 由于二部分图 G 的每条边的两个端点不能在同一个 X 或 Y 中，因此有

$$\sum_{x\in X}d(x)=q(G)=\sum_{y\in Y}d(y).$$

在本题中，度为5的顶点或在 X，或在 Y 中，而其他各点的度都是3的倍数．将各点的度代入上式，即得3应整除5，不可能．因此，度为5的顶点所表示的孩子一定是太兴奋，以致把和自己跳过舞的人数都记错了．

7．把平面上 n 个点视为 n 个顶点，其集合记作 V．对于顶点 $u,v\in V$，当且仅当平面上点 u 和 v 的距离为 d 时令顶点 u 和 v 相邻．得到的图记作 G．很明显，图 G 的边数 $q(G)$ 即是这 n 个点的直径个数．于是所要证的是，$q(G)\leqslant n$．为此对图 G 的阶数 n 用归纳法．当 $n=3$ 时，显然对顶点 $x\in V$，均有 $0\leqslant d(x)\leqslant n-1=2$．因此由定理1有

$$2q(G)=\sum_{x\in V}d(x)\leqslant 3\times 2.$$

所以 $q(G)\leqslant 3=n$．即结论对 $n=3$ 成立．现在设结论对 $n-1$ 阶图成立．往证结论对 n 阶图 G 成立．如果图 G 含有度为0的顶点（即孤立点）x，则去掉顶点 x，得到的 $n-1$ 阶图记作 G^*．由归纳假设，图 G^* 至多有 $n-1$ 条边．于是图 G 至多有 $n-1$ 条边，即结论成立；如果图 G 含有1度顶点 y，则去掉顶点 y 连同以 y 为端点的唯一一条边，得到的是 $n-1$ 阶图 G^*．由归纳假设，图 G^* 至多含有 $n-1$ 条边．于是图 G 至多含有 n 条边，即结论成立．余下的情形是，图 G 所有顶点的度都不小于2．如果图 G 含有顶点 u，使 $d(u)\geqslant 3$，则 u 至少和三个顶点 x，y，z 相邻（图62）．点 x，y 和 z 落在以点 u 为圆心且半径为 d 的圆周 L_1 上．而平面上给定的 n 个点都落在以 L_1 为边界的圆片中．同理，如果以点 y 为圆心且半径为 d 的圆周记作 L_2，则所给 n 个点落在以 L_2 为边界的圆片中．由于这 n 个点的直径为 d，点 x，z 在半径为 d 的圆周 L_1 上，所以

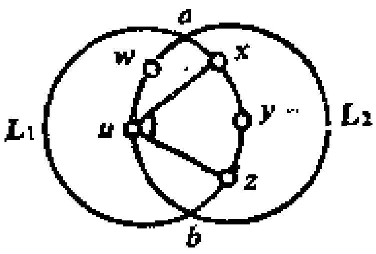


图 62

$\angle xuz \leqslant \frac{\pi}{3}$. 由于图 G 的每个顶点的度都不小于2，所以 y 和某个顶点 w 相邻，$w \neq u$. 点 w 应在圆周 L_2 的弧 $\widehat{aub}$ 上. 点 x 和 z 中必有一个落在以 w 为圆心且半径为 d 的圆周 L_3 内，而另一个在圆周 L_3 外，这和 d 是给定的 n 个点的直径相矛盾. 因此图 G 的所有顶点的度都是2. 于是由定理1，有

$$2q(G)=\sum_{x\in V}d(x)=2n,$$

即 $q(G)=n$. 这就证明结论对 n 阶图 G 成立.

习 题 三

1．设 n 阶简单图 G 至少有 $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+1$ 条边，但不连通. 则图 G 的顶点集合 V 可以分划为两个子集 X 和 Y，使得子集 X 的顶点和 Y 的顶点之间不连边. 设子集 X 和 Y 分别含有 k 和 $n-k$ 个顶点，$1\leqslant k\leqslant n-1$，则图 G 中的边数 $q(G)$ 满足

$$q(G)\leqslant\frac{1}{2}k(k-1)+\frac{1}{2}(n-k)(n-k-1).$$

由于

$$\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+1-\left\{\frac{1}{2}k(k-1)+\frac{1}{2}(n-k)(n-k-1)\right\}$$

$$=kn-k^2-n+2=(k-1)(n-k-1)+1>0,$$

所以 $q(G)\leqslant\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+1$，矛盾. 因此图 G 连通. 对于至多有 $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ 条边的 n 阶简单图，结论不再成立. 反例是，取 $n-1$ 阶完全图 K_{n-1}，另外再添加一个新顶点 x，它和 K_{n-1} 中任何顶点都不相邻，得到的 n 阶简单图 G 具有 $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ 由于顶点 x 是图 G 的孤立点，因此图 G 不连通.

2．如果简单图 G 是树，则图 G 显然是连通的. 设 u 和 v 是图 G 的顶

点，图 G 中去掉边 uv 后得到的图 G^* 是连通的．则图 G^* 含有连接 u 和 v 的道路 P：$x_0x_1x_2\cdots x_k$，其中 $x_0=u$，$x_k=v$．于是图 G 含有圈 $x_0x_1x_2\cdots x_kx_0$．这和树的定义相矛盾．因此图 G 中任意去掉一条边，得到的图不连通．反之设图 G 连通，而且从图 G 中去掉任意一条边，得到的图不连通．如果图 G 不是树，则图 G 含有圈．从图 G 中去掉圈上任意一条边，得到的图仍是连通的．和假设相矛盾．因此图 G 是树．

3．把电话交换台视为顶点．如果两部电话交换台有直通线路相连接，则令相应的两个顶点相邻，得到的图记作 G．由于任意两个交换台总可以通话，所以图 G 任意两个顶点都有通路相连接．换句话说，图 G 是连通的．由定理2，图 G 至少含有 $n-1$ 条边．即这 n 部电话交换台中，至少有 $n-1$ 对电话交换台，每对交换台之间都连接直通线路．

4．视 n 条线段的端点为顶点，其集合记作 V．对顶点 u，$v\in V$，当且仅当 u 和 v 表示的是这 n 条线段中同一条线段的两个端点时，令顶点 u 和 v 相邻，得到的是一个具有 n 条边的图．依题意，所要证明的是，如果图 G 中任意三条边都有公共顶点，则图 G 的 n 条边具有一个公共顶点，即图 G 是一个星(图63)，即一种特殊的树．为此对图 G 的边数 n 用归纳法．当 $n=3$ 时，图 G 中只有三条边，它们具有一个公共顶点．因此结论对 $n=3$ 成立．假设结论对具有 $n-1$ 条边的图成立．现在证明结论对具有 n 条边图 G 成立．去掉图 G 中任意一条边 e，得到的是具有 $n-1$ 条边的图 G^*，其中任意三条边都具有一个公共顶点．由归纳假设，图 G^* 是一个星，其中央的顶点为 v．现在考察边 e．如果边 e 不以顶点 v 为一个端点，则图 G 只能是如图64所示的图．于是 e，e_1 和 e_2 三条边没有公共顶点，矛盾．这就证明，边 e 以顶点 v 为顶点，因此图 G 也是一个星．

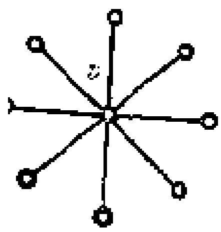


图 63

5．图14中具有四个5度顶点，因此既不具有欧拉回路，也不具有欧

拉迹. 图15中每个顶点的度都是偶数，因此它具有欧拉回路. 图65所给的即是图15中的一条欧拉回路.

6. 将展览馆的展厅以及前后门外部都视为顶点，其集合为 $V=\{A, B, C, D, E, P, Q\}$. 对于顶点 u, $v\in V$, 当且仅当 u 和 v 所表示的展厅或前、后门外部有门相通时令 u 和 v 相邻，得到的图记作 G（图66），其中 B, D, P 和 Q 是奇顶点. 根据定理7，图 G 不具有欧拉迹. 因此不能由前门进入展览馆，经过每扇门恰好一次，然后从后门出来.

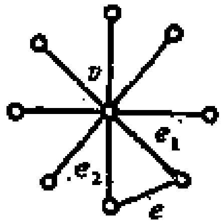


图 64

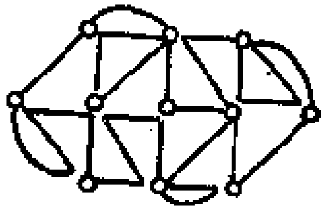


图 65

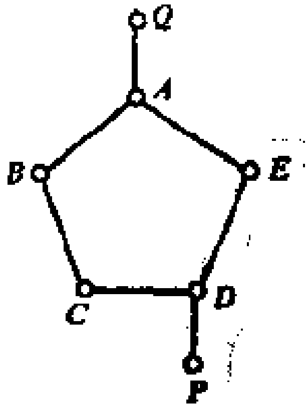


图 66

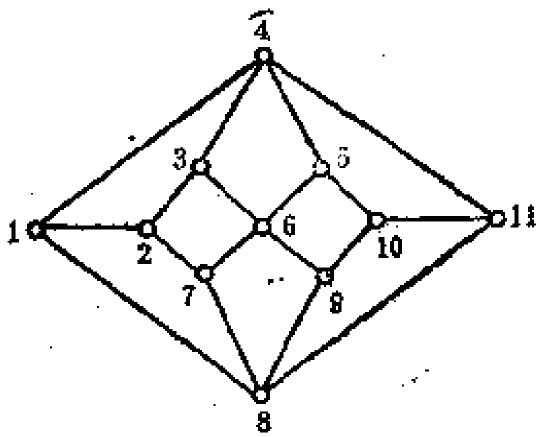
习 题 四

1. 将 G 图的顶点按图67的方法编号. 记 $X=\{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$, $Y=\{2, 4, 6, 8, 10\}$. 很明显，集合 X 中任意两个顶点都不相邻，同样，集合 Y 也是. 因此图 G 是一个二部分图. 如果图 G 具有哈密尔顿圈 $u_1u_2\cdots u_{11}u_1$，则 u_1, u_3, u_5, u_7, u_9, u_{11} 同属于 X 或 Y 中的一个集合. 但这条哈密尔顿圈上含有边 $u_{11}u_1$，这表明，u_1 和 u_{11} 应属于不同集合，矛盾. 因此图 G 不含有哈密尔顿圈. 图 G 中按顶点序列1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11所给出的道路即是哈密尔顿道路.

2. 能. 图68给出的就是马从某个方格出发，经每个方格恰好一次，然后回到原来的方格的一种方法.

注 这是一道难度很大的习题，也是民间广泛流传的趣题. 它难在于，既不能用本节的定理来证明它具有哈密尔顿圈，也不能象例6那样用反证法证明它不具有哈密尔顿圈. 只能是把它所具有的哈密尔顿圈找出来. 这就需要耐着性子寻找了. 请读者试试看，能否找出

一条和图68不同的哈密尔顿圈.



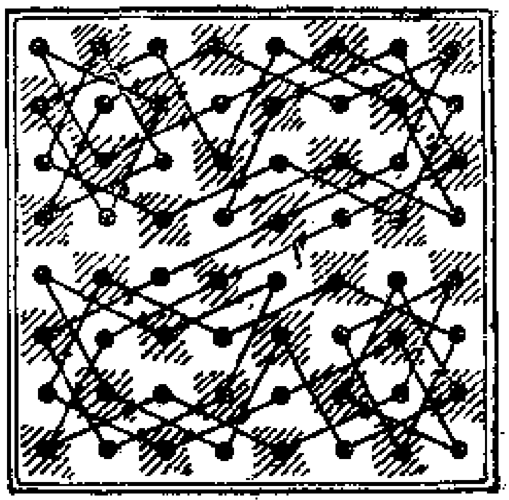


图 67　　　　　　　　图 68

3. 不能. 把方格看成顶点，其集合记作 V. 对于顶点 u, $v\in V$, 当且仅当 u 和 v 所表示的方格相邻时，令顶点 u 和 v 相邻，得到的图记作 G. 图 G 中所有白格和所有黑色方格所表示的顶点集合分别记作 X 和 Y. 由于同色方格不相邻，因此 X 中顶点之间以及 Y 中顶点之间都不相邻. 所以图 G 是一个二部分图，(X, Y) 是图 G 的顶点集合 V 的一个分划. 如果图 G 具有哈密尔顿圈 $u_1u_2\cdots u_{4n}u_1$，则边集合 $M=\{u_{2i-1}u_{2i}: 1\leqslant i\leqslant 2n\}$ 中任意两条边都没有公共端点. 顶点子集 $A=\{u_1, u_3, \cdots, u_{4n-1}\}$ 应是子集 X 或者 Y. 这说明，图 G 中的顶点可以利用边集合 M 使 X 中顶点和 Y 中顶点一一对应. 另一方面，棋盘上所有第一、四行上的方格和所有第二、三行上的方格所表示的顶点集合记作 S 和 T. 由于马的走法，图 G 中集合 S 中的顶点只能和集合 B 的顶点相邻. 所以对每个顶点 $u\in S$, 必有 $v\in B$, 使得边 $uv\in M$. 这表明，集合 A 即是 S 或者 T. 但是集合 S 和 T 都含有不同颜色方格所表示的顶点. 矛盾. 这就证明，图 G 中不含有哈密尔顿圈. 从而广义马不能从某个方格出发，经每个方格恰好一次，然后回到原来的方格.

4. 把每个展室都看成一个顶点. 所有白色展室以及所有黑色展室所表示的顶点集合分别记作 X 和 Y, 并记 $V=X\cup Y$. 对于顶点 u,

$v\in V$，当且仅当展室相邻时，令它们所相应的顶点 u 和 v 相邻，得到一个二部分图 G. 如果参观者能按照题目要求，从入口处进入，经每个展室恰好一次，然后从出口处出来，则图 G 具有哈密尔顿道路 $u_1u_2\cdots u_{35}$，其中 u_1，u_3，…，$u_{35}\in X$. 由于 u_1 和 u_{35} 所表示的是白色方格，因此 u_1，$u_{35}\in X$. 但图 G 是一个二部分图，所以 u_{35} 和 u_{34} 不相邻. 这和 $u_{35}u_{34}$ 是哈密尔顿道路 $u_1u_2\cdots u_{35}$ 上的一条边相矛盾. 因此图 G 不具有哈密尔顿道路. 也就是说，参观者不能从入口处进入展览馆，经每个展室恰好一次，然后从出口处出来.

5. 首先归纳证明，自然数 1，2，…，n 的排列可以由自然数 1，2，…，$n-1$ 的排列 $i_1i_2\cdots i_{n-1}$ 中插入正整数 n 得到. 当 $n=2$ 时，有

1 2

2 1

即结论对 $n=2$ 成立. 为看清如何从 1，2，…，$n-1$ 的排列中插入正整数 n，得到 1，2，…，n 的排列的过程，再考虑 $n=3$ 和 $n=4$ 的情形，当 $n=3$ 时，把上面得到的每个排列写三遍，并数将字 3 穿插写在每个排列的空档上：

□ 1 □ 2 $\boxed{3}$

□ 1 $\boxed{3}$ 2 □

$\boxed{3}$ 1 □ 2 □

$\boxed{3}$ 2 □ 1 □

□ 2 $\boxed{3}$ 1 □

□ 2 □ 1 $\boxed{3}$

这样便得到 1，2，3 的所有排列. 当 $n=4$ 时，把上面得到的 1，2，3 的每个排列写四遍，并将数字 4 穿插写在每个排列的空档上：

□ 1 □ 2 □ 3 $\boxed{4}$	□ 1 □ 3 $\boxed{4}$ 2 □
□ 1 □ 2 $\boxed{4}$ 3 □	□ 1 □ 3 □ 2 $\boxed{4}$
□ 1 $\boxed{4}$ 2 □ 3 □	□ 3 □ 1 □ 2 $\boxed{4}$
$\boxed{4}$ 1 □ 2 □ 3 □	□ 3 □ 1 $\boxed{4}$ 2 □
$\boxed{4}$ 1 □ 3 □ 2 □	□ 3 $\boxed{4}$ 1 □ 2 □
□ 1 $\boxed{4}$ 3 □ 2 □	$\boxed{4}$ 3 □ 1 □ 2 □

$$\boxed{4}\,3\,\square\,2\,\square\,1\,\square \qquad \square\,2\,\boxed{4}\,3\,\square\,1\,\square$$
$$\square\,3\,\boxed{4}\,2\,\square\,1\,\square \qquad \boxed{4}\,2\,\square\,3\,\square\,1\,\square$$
$$\square\,3\,\square\,2\,\boxed{4}\,1\,\square \qquad \boxed{4}\,2\,\square\,1\,\square\,3\,\square$$
$$\square\,3\,\square\,2\,\square\,1\,\boxed{4} \qquad \square\,2\,\boxed{4}\,1\,\square\,3\,\square$$
$$\square\,2\,\square\,3\,\square\,1\,\boxed{4} \qquad \square\,2\,\square\,1\,\boxed{4}\,3\,\square$$
$$\square\,2\,\square\,3\,\boxed{4}\,1\,\square \qquad \square\,2\,\square\,1\,\square\,3\,\boxed{4}$$

注意，从3到4时，得到的是所有1,2,3,4的排列，而且每一个排列都是上一个排列对调两个相邻的数字得到的，第一个排列1234是最后一个排列2134对调两个相邻的数字得到的．假设已经按照上面的方式得到自然数1，2，…，$n-1$的所有排列，则将1，2，…，$n-1$的每个排列写n遍，然后穿插地将数字n写在空档里，例如，设$i_1i_2\cdots i_{n-1}$是1，2，…，$n-1$的一个排列，则有n个行如下：

$$\square\, i_1\,\square\, i_2\,\square\cdots\square\, i_{n-1}\,\boxed{n}$$

于是有

$$\boxed{n}\, i_1\,\square\, i_2\,\square\cdots\square\, i_{n-1}\,\square$$
$$\square\, i_1\,\boxed{n}\, i_2\,\square\cdots\square\, i_{n-1}\,\square$$
$$\cdots\qquad\cdots$$
$$\square\, i_1\,\square\, i_2\,\square\cdots\square\, i_{n-1}\,\boxed{n}$$

或者

$$\square\, i_1\,\square\, i_2\,\square\cdots\square\, i_{n-1}\,\boxed{n}$$
$$\square\, i_1\,\square\, i_2\,\square\cdots\boxed{n}\, i_{n-1}\,\square$$
$$\cdots\qquad\cdots$$
$$\boxed{n}\, i_1\,\square\, i_2\,\square\cdots\square\, i_{n-1}\,\square.$$

视前一个排列中插入数字n的方式而定．因此，由上述方法可以得到自然数1，2，…，n的所有排列，而且每个排列都是对调上

一个排列的两个相邻数字得到的，第一个排列是最后一个排列对调两个相邻数字得到的.按照这种方式即可找到图 G_n 中一条哈密尔顿圈.

注 不难证明，$n!$ 阶简单图 G_n 是一个$\frac{n(n-1)}{2}$正则图，即每个顶点的度都是$\frac{n(n-1)}{2}$. 因此不满足定理 1 及其推论的条件. 所以不能引用它们来判定图G_n是否具有哈密尔顿圈. 这里之所以采取构造性证明，原因即在此.

6. 设圆周上的 n 个点为 v_1，v_2，…，v_n. 用自然数 1，2，…，n任意给 v_1，v_2，…，v_n 编号为 i_1，i_2，…，i_n，其中i_1，i_2，…，i_n是1，2，…，n 的一个排列.把 v_1，v_2，…，v_n 视为顶点，其集合记作V. 对于 v_k，$v_l\in V$，当且仅当 v_k 和 v_l 的编号 i_k 和 i_l 满足 $|i_k-i_l|\leqslant 2$ 时，令 v_k 和 v_l 相邻，得到的图记作 G. 当$n=2k+1$ 时，图 G 具有哈密尔顿圈 C，其顶点的编号依次为1，2，4，6，…，$2k$，$2k+1$，$2k-1$，…，5，3，1；当 $n=2k$ 时，图 G 具有哈密尔顿圈C^*，它的顶点编号依次为 1，2，4，6，…，$2k$，$2k-1$，$2k-3$，…，5，3，1. 于是只要按照哈密尔顿圈上编号的顺序给这 n 个点编号即可. 注意，图 G 中编号为 1 的顶点记作 u_1，它的度 $d(u_1)=2$. 这表明，在图 G 的哈密尔顿圈上编号为 1 的顶点 u_1 只能与编号为 2 和 3 的顶点 u_2 和 u_3 相邻，于是编号为 2 的顶点 u_2只能和编号为 4 的顶点 u_4 相邻，而编号为 3 的顶点 u_3 只能和编号为 5 的在点u_5相邻，如此继续，即可证明，图 G 中的哈密尔顿圈只能是上面所给的圈.

7. 把所要考试的 7 门课看成 7 个顶点，当且仅当顶点 u 和 v 所表示的两门课由不同的教师担任时，令 u 和 v 相邻，得到 7 阶图 G.由于每位任课教师至多担任 3 门课，即至少有 3 门课未担任，因此每个顶点至少和 4 个顶点相邻，即度至少是 4. 于是，图 G 中两个顶点的度之和至少是 $8>7$. 由定理 1，图 G 含有哈密尔顿圈 $u_1u_2u_3\cdots u_7u_1$. 因此，只要安排第 i 天考课程 u_i，$i=1$，2，…，7，即可符合题求.

8. 把公司的5个人看成5个顶点，当且仅当 u 和 v 相互认识时，令顶点 u 和 v 相邻，得到5阶图 G. 对于 G 中任意顶点 u，如果 u 和顶点 x，y，z 相邻，则 u 和 x，y，z 认识. 由题中条件，三人 x，y，z 中必有二人认识，设 x 和 y 认识. 于是 u，x，y 中两两认识，和题中条件矛盾. 同理可证，u 不可能和3个顶点不相邻，因此 $d(u)=2$. 于是图 G 只能是一个长为5的圈，即哈密尔顿圈 $u_1u_2u_3u_4u_5u_1$. 如果公司里的成员照按这条哈密尔顿圈上顶点的顺序入坐，则邻座的人相互认识.

习 题 五

1. 设 $m=2s+1$，$n=2t+1$. 如图69，把棋盘的行、列分别编号. 第 k 行第 l 列上的方格记作 (k,l). 容易看出，当且仅当 $k+l$ 为偶数时，方格 (k,l) 是白色的. 把方格看成顶点. 所有白色方格和所有黑色方格所表示的顶点集合分别记作 X 和 Y. 对于顶点 $x\in X$，$y\in Y$，当且仅当白色方格 x 和黑色方格 y 有公共边时，令顶点 x 和 y 相邻，表示同色方格的顶点不相邻，得到二部分图 G. 连接顶点 $(2k-1,l)$ 和 $(2k,l)$ 的边记作 $e_{k,l}$，$1\leqslant k\leqslant s$，$1\leqslant l\leqslant n$，连接顶点 $(k,2l-1)$ 和 $(k,2l)$ 的边记作 $q_{k,l}$，$1\leqslant k\leqslant m$，$1\leqslant l\leqslant t$. 如果剪掉的白色方格是 $(2s+1,2t+1)$，则图 G 具有完美匹配 $M=\{e_{k,l}, e_{2s+1,r}; 1\leqslant k\leqslant s, 1\leqslant l\leqslant n, 1\leqslant r\leqslant t\}$，如果剪掉的是白色方格 $(2p+1,2q+1)$，则图 G 具有完美匹配 $M=\{e_{k,l}, e_{2p+1,r}, \tilde{e}_{m,l}, \tilde{e}_{2p+1,g}; 1\leqslant k\leqslant p, 1\leqslant l\leqslant n, 1\leqslant r\leqslant q, p+1\leqslant m\leqslant s, q+1\leqslant g\leqslant t\}$，其中 $e_{m,l}$ 是连接顶点 $(2m,l)$ 和 $(2m+1,l)$ 的边，而 $\tilde{e}_{m,l}$ 是连接顶点 $(m,2l)$ 和 $(m,2l+1)$ 的边；如果剪掉的是白

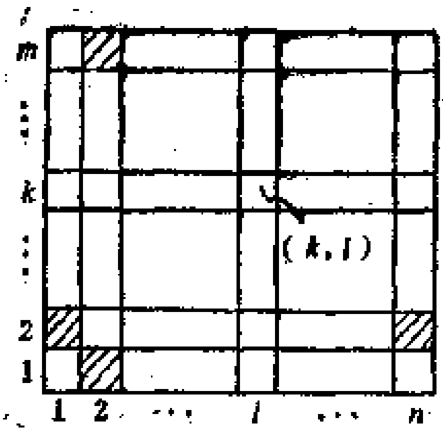


图 69

色方格$(2p, 2q)$，则图G具有完美匹配M如下：

$$M^{*}=e_{k,l},\ \tilde{e}_{i,l},\ e_{j,r},\ \tilde{e}_{j,m} \mid 1\leqslant k\leqslant p-1, 1\leqslant l\leqslant n, p+1\leqslant i\leqslant s,$$

$$2p-1\leqslant j\leqslant 2p+1,\ 1\leqslant r\leqslant q-1,\ q+1\leqslant m\leqslant t\},$$

$$M^{**}=\{e_{p,2q-1},\ \tilde{e}_{2p,q},\ \tilde{e}_{p,2q+1},\ \tilde{e}_{2p,q}\},$$

$$M=M^{*}\cup M^{**}.$$

总之，不论如何，图G具有完美匹配，也就是说，可以用多米诺骨牌完全覆盖剪掉一个白色方格的棋盘.

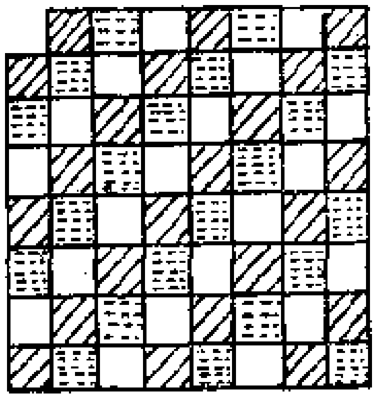


图 70

2. 剪掉一个方格的8×8棋盘可以用特里米诺骨牌覆盖的证明可见例8．把8×8国际象棋盘的方格重新用红、黄、蓝三色染色，染色方法如图70，其中带斜线，水平线和不带线的方格分别是红、黄和蓝色，剪掉的方格是黄色的．如果剪掉一个方格的棋盘可以用3×1长方形完全覆盖，则三种颜色的方格数应当相同．但棋盘上分别有22，21和20个红、黄和蓝色方格，矛盾．因此剪掉一角的8×8棋盘不能用3×1长方形完全覆盖.

3. 把读者和题目都看成顶点，其集合分别记作X和Y．当且仅当读者x解出题目y时，令顶点x和y相邻，得到二部分图G．由于每个读者恰好解出两道题，而每道题恰有两个读者给出解答，因此图G是2正则的．由定理3，图G具有完美匹配．所以，可以从8个读者中每人选出一个解答，它们恰好组成8道题的全部解答.

4. 把职位和应聘者都看成顶点，其集合分别记作X和Y．当且仅当应聘者y可以胜任职位x时，令顶点x和y相邻，得到二部分图G．图G具有匹配$M=\{p_1a_6,\ p_2a_7,\ p_3a_6,\ p_4a_2,\ p_5q_{10},\ p_6a_1,\ p_7a_2\}$，即每个职位都可以聘到合格的人选担任．因此应聘者被录用的人数最大是7.

5. 先证必要性．用反证法．设先选顶点的人有必胜策略，而且图G

具有完美匹配 M. 则图 G 中每个点都是 M 饱和的. 因此当先手选定 v_{i-1} 时，第二个人总可以在匹配 M 中找到一条以 v_{i-1} 为端点的边 e，于是第二个人可以选取边 e 的另一个端点 v_i. 因此，只要第二个人利用匹配 M 来选取顶点，则先手必输，矛盾. 因此图 G 不具有完美匹配.

再证充分性. 设图 G 不具有完美匹配. 则图 G 具有最大匹配 M_0，也就是对图 G 的任意一个匹配 M，它所含的边数不超过 M_0 所含的边数. 先手选定最大匹配 M_0，然后先选一个不被 M_0 饱和的顶点 v_0. 第二个人所选的顶点 v_1 一定是 M_0 饱和的，否则 $M=M_0\cup\{v_0v_1\}$ 是图 G 的匹配，和 M_0 为最大匹配相矛盾. 然后先手再按匹配 M_0 选取顶点 v_2，使得边 $v_1v_2\in M_0$. 如此连续，由于匹配 M_0 中边数是有限的，因此最后一个顶点一定是先手选取到它. 所以先手按此策略选取顶点必定取胜.

6. 把 $r\times n$ 拉丁长方 A 的 n 个列 x_1, x_2, …, x_n 看成顶点，其集合记作 X. 把自然数 1, 2, …, n 也看成顶点，其集合记作 Y. 当且仅当正整数 y 不出现在列 x 时，令顶点 x 和 y 相邻，得到二部分图 G. 容易证明，图 G 是 $n-r$ 正则的. 由定理 3，图 G 具有完美匹配 $M=\{e_j; j=1, 2, \cdots, n\}$，其中 e_j 是连接顶点 j 和 x_{i_j} 的边. 把正整数 j 添加到拉丁长方 A 的第 i_j 列的第 $r+1$ 行上，$j=1, 2, \cdots, n$. 得到一个 $(r+1)\times n$ 拉丁长方 A^*，如果 $r+1=n$，则结论已成立. 如果 $r+1<n$，则重复上述过程. 由于 $n-r$ 是有限的，所以可以添加 $n-r$ 个行到拉丁长方 A，使它成为一个拉丁方.

7. 把方格看成顶点，其集合记作 V. 对于顶点 $u, v\in V$，当且仅当方格 u 和 v 有公共边时，令顶点 u 和 v 相邻，得到 36 阶图 G. 所要证明的是，如果 M 是图 G 的极大匹配，则 M 至少含有12条边. 因为这相当说，如果匹配 M 至多含有11条边，则图 G 中不被 M 所饱和的顶点至少有14个，其中必有两个顶点相邻.

用反证法. 设图 G 的极大匹配 M 至多含有11条边. 则图 G 中不被 M 饱和的顶点至少有14个，其集合记作 W. 由于匹配 M 是极大的，因此集合 W 中任意两个顶点都不相邻. W 中所有相应于棋盘

上去掉自上而下的第一行后的顶点集合记作 A. 对于顶点 $v\in A$, 让 v 和位于方格 v 上方的骨牌(即 M 中的边)相对应. 由于M是极大匹配, 所以这种对应是一一的, 因此有 $|A|\leqslant|M|\leqslant 11$. 另一方面, 集合 W 中相应于棋盘同一行上的方格的顶点至多有 3个. 因此, $|A|\geqslant 14-3=11$. 这表明, 极大匹配M恰有11条边, 而且每条边的端点所相应的方格在棋盘上方 5 个行里. 换句话说, 集合W中至少有 5 个顶点, 它们相应于棋盘下方第六行的方格. 和M是极大匹配相矛盾.

习 题 六

1. 该州至多有 4 个市. 证明如下, 设该州至少有 5 个市. 把 5 个市看成 5 个顶点, 把汽车、火车、飞机看成 3 种颜色, 即红、黄、蓝色. 如果两个市用汽车(或火车, 或飞机)进行联络, 则相应两顶点连红边(或黄边、或蓝边), 得到 5 阶三色完全图 K_5. 已知条件是: (i)三色完全图K_5 中三种颜色的边全有, (ii)每个顶点所连的边中总缺少某种颜色的边, 而且(iii)三色完全图K_5 不含有单色三角形. 如果K_5 中顶点 v 所连的边中没有红边(或黄边, 或蓝边), 则 v 叫做无红(或黄、或蓝)顶点. 图 K_5 有 5 个顶点, 共有无红、无黄、无蓝三种状态, 因此至少有 2 个顶点处于同一状态, 不妨设 K_5 中无红顶点的个数 $r\geqslant 2$. 由已知条件(i), $r\leqslant 4$. 如果 K_5 中含有 3 个无红顶点 x,y,z, 则由 $r\leqslant 4$, 可设 K_5 中含有无黄顶点 w. 于是边 wx, wy, wz 是蓝边. 因为 x,y, z 为无红顶点, 因此$\triangle xyz$ 不含红边. 如果 $\triangle xyz$ 含有蓝边, 设为 xy, 则$\triangle wxy$ 为蓝边三角形, 与已知条件(iii)矛盾. 如果 $\triangle xyz$ 不含蓝边, 则 $\triangle xyz$ 为黄边三角形, 也和(iii)矛盾. 因此可设 K_5 含有两个无红顶点x, y, 两个无黄顶点 u, v 和无蓝顶点 w. 于是, 边 ux, vy为蓝色, 由已知条件(iii), 边 xy 为黄色. 而边 wx, wy 为黄色. 从而三角形$\triangle wxy$为黄边三角形, 与(iii)矛盾. 因此该州至多有 4 个市.

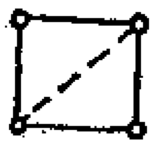
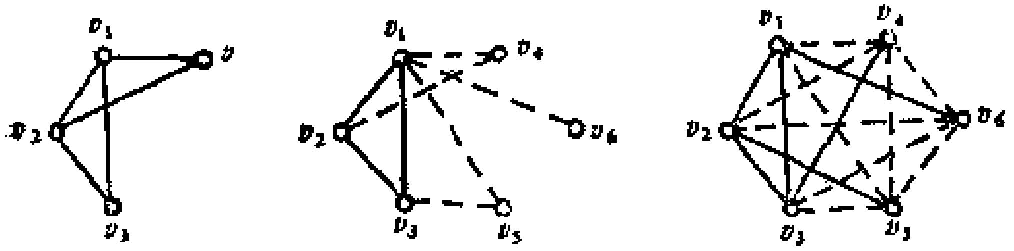


图 71

图71表明，上界4不能再减小(其中实线表示红边，虚线表示黄边，未连接的线段表示蓝边)．

2．把俱乐部里6名成员看成顶点，当两名成员搭档过时相应的两个顶点连红边，否则连黄边，得到6阶二色完全图 K_6．按照约定，4个人围坐一起时，每个人与其两旁的人都曾搭档过，或者都不曾搭档过，则相应的4个顶点所构成的圈 C_4 上每条边都是红边，或者都是黄边，即是单色的圈 C_4．于是所要证明的是，任意一个6阶二色完全图 K_6 总含有单色的圈 C_4，而且可以证明，存在不含单色圈 C_4 的5阶二色完全图 K_5．

由于 $r_3=6$，所以 K_6 含有红边三角形 $\triangle v_1v_2v_3$．如果三角形 $\triangle v_1v_2v_3$ 外有一顶点 v 和 v_i，v_j 连的是红边，$1\leqslant i<j\leqslant 3$，则 K_6 含有红色的圈 C_4：$vv_2v_3v_1v$(图72(a))．因此可设三角形 $\triangle v_1v_2v_3$ 外每个顶点



(a)　　(b)　　(c)

图 72

都至多和一个 v_i 连红边，即至少和两个 v_i 连黄边．不妨设 v_4 和 v_1，v_2 连黄边(图72(b))．如果 v_5 和 v_1，v_2 连黄边，则 K_6 含有黄色的圈 C_4：$v_1v_5v_2v_4v_1$．因此可设 v_5 和 v_1，v_3 连黄边．如果 v_6 和 v_1，v_2 连黄边，则 K_6 含有黄色的圈 C_4：$v_1v_6v_2v_4v_1$．因此可设 v_6 和 v_2，v_3 连黄边(图72(c))．如果 v_1 和 v_6 连黄边，则 K_6 含有黄色的圈 C_4：$v_1v_6v_2v_4v_1$．因此可设 v_1v_6 是红边，同理可设 v_2v_5，v_3v_4 为红边．如果 v_5v_6 是红边，则 K_6 含红色的圈 C_4：$v_1v_2v_5v_6v_1$．因此可设 v_5v_6 是黄边．同理可设 v_4v_5，v_4v_6 是黄边，于是 K_6 含有黄色的圈 C_4：$v_1v_4v_6v_5v_1$．这就证明，任意6阶二色完全图 K_6 总含有单色的圈 C_4．图73给出了不含单色圈

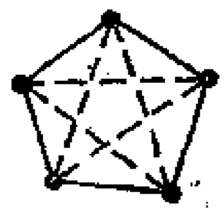


图73

C_4 的 5 阶二色完全图 K_5.

3. 对 q 用归纳法. 当 $q=3$ 时, $r(3, q)=r(3, 3)=6$, 而 $\frac{q^2+3}{2}=\frac{3^2+3}{2}=6$. 即 $r(3,q)\leqslant\frac{q^2+3}{2}$ 对 $q=3$ 成立. 假设结论对 $q-1$ 成立. 下面证明结论对 q 成立. 由定理 2 的证明, 有

$$r(3, q)\leqslant r(2, q)+r(3, q-1). \qquad (1)$$

由归纳假设, $r(3, q-1)\leqslant\frac{(q-1)^2+3}{2}$, 而 $r(2, q)=q$, 因此,

$$r(3, q)\leqslant q+\frac{(q-1)^2+3}{2}=\frac{q^2+4}{2}. \qquad (2)$$

当 q 为奇数时, q^2+4 是奇数. 因此 $\frac{q^2+4}{2}$ 是分数. 所以 $r(3, q)\leqslant\frac{q^2+3}{2}$. 当 q 为偶数时, $q-1$ 为奇数. 如果, $r(3 q-1)=\frac{(q-1)^2+3}{2}=\frac{q^2}{2}-q+2$, 则 $r(3, q-1)$ 是偶数. 可以证明, 当 $r(2, q)=q$ 和 $r(3, q-1)$ 都是偶数时, 不等式(1)是严格的. 因此有 $r(3, q)\leqslant\frac{q^2+3}{2}$. 如果 $r(3,q-1)<\frac{(q-1)^2+3}{2}$, 则不等式 (2) 是严格的.

这就明证了定理3,

4. 设三色完全图 K_{17} 的顶点为 u_0, u_1, $\cdots$, u_{16}. 由于 $r_3=17$, 因此 K_{17} 含有单色三角形, 设为 $\triangle u_0u_1u_2$. 以 u_3 为端点的16条边有三种颜色, 至少有6边同色, 不妨设 u_3v_1, u_3v_2, $\cdots$, u_3v_6 都是红边. 如果以 v_1, v_2, $\cdots$, v_6 为顶点的完全图 $K_6^{(u)}$ 中含有红边 v_iv_j, $1\leqslant i<j\leqslant 6$, 则 $\triangle u_3v_1v_2$ 是红边三角形. 如果 $K_6^{(u)}$ 不含红边, 则 $K_6^{(u)}$ 是二色的. 由例 5, $K_6^{(u)}$ 含有二个单色三角形. 因此 K_{17} 至少有 2 个单色三角形.

现在假设三色完全图 K_{17} 只有 2 个单色三角形 $\triangle u_{14}u_{15}u_{16}$ 和 $\triangle w_1w_2w_3$, 其中 $w_1, w_2, w_3\in\{u_{11}, u_{12}, u_{13}, u_{14}, u_{15}, u_{16}\}$, 而且 $\triangle u_{14}u_{15}u_{16}$ 是红边三角形. 以 u_0 为端点的16条边有6边 u_0v_1, u_0v_2, $\cdots$,

u_0v_1同色．由假设，以v_1，v_2，…，v_6为顶点的完全图$K_6^{(v)}$不含与边u_0v_1同色的边，因此$K_6^{(v)}$是二色的，从而含有两个单色三角形．由假设，它们只能是$\triangle w_1w_2w_3$和$\triangle u_{14}u_{15}u_{16}$．这表明，边$u_0u_{14}$，$u_0u_{15}$，$u_0u_{16}$，$u_0w_1$，$u_0w_2$，$u_0w_3$同色．但由假设，它们不能是红边，而只能是黄边或者蓝边．同理对任意i，$0\leqslant i\leqslant 10$，u_iu_{16}只能是黄边或者蓝边．因此u_0u_{16}，u_1u_{16}，…，$u_{10}u_{16}$中至少有6边同色，不妨设u_0u_{16}，u_1u_{16}，…，u_5u_{16}都是黄边．如果以u_0，u_1，…，u_5为顶点的完全图$K_6^{(u)}$中含有一条黄边，则又有一个黄边三角形，与假设矛盾．如果$K_6^{(u)}$无黄边，则二色$K_6^{(u)}$至少含有2个单色三角形，与假设又矛盾．这就证明，任意一个17阶三色完全图K_{17}至少含有3个单色三角形．

5．把9名数学家看成9个顶点，用颜色c_1，c_2，…表示这9名数学家所能讲的语言．如果两名数学家不能讲同一种语言，则相应的两个顶点连c_0色边．如果两名数学家能讲第i种语言，则相应的两个顶点在c_i色边，$i=1,2,\cdots$．注意，若这两名数学家还能讲第i，j种语言，$j\neq i$，则相应的两个顶点可以只连c_i色边．这样得到的边染色图即是染色的完全图K_9．已知条件是，(1) K_9不含c_0色边三角形；(2) 每个顶点至多连三种非c_0色的边；(3) 如果K_9中某个三角形含有两条非c_0色的同色边，则第三边也同色．所要证的是，K_9中含有非c_0色的单色三角形．由(3)，K_9中顶点v至少连有5条c_0色边vu_1，vu_2，…，vu_5．由(1)，以u_1，u_2，…，u_5为顶点的完全图K_5不含c_0色边．由(2)，至少连有两条c_i色边，某个$i\geqslant 1$．于是由(3)，K_9含有非c_0色的单色三角形．

6．把12个人看成12个顶点，当两个人相互认识时相应的两个顶点连红边，否则连黄边，得到12阶二色完全图K_{12}．设v，x，y是K_{12}的顶点．如果边vx和vy同色，则$\angle xvy$叫做单色角，否则$\angle xvy$叫做混色角．于是所要证明的是，任意12阶二色完全图K_{12}总有两个顶点x和y，使得在所有的10个角$\angle xvy$中，至少有5个是单色角，其中v是K_{12}中除x和y之外的顶点．

用反证法．设结论不成立，则对K_{12}中每对顶点x,y，在所有10

个角$\angle xvy$中至多有4个单色角，即至少有6个混色角．因此K_{12}中总共有$C_{12}^{2}=\frac{12\times11}{2}=66$对顶点，所以至少有$66\times6=396$个混色角．另一方面，设$K_{12}$中由顶点$v$引出的红边边数为$x_i$，则由$v$引出的黄边边数为$11-x_i$．因此，以$v$为顶点的混色角数为$x_i(11-x_i)\leqslant\left(\frac{11}{2}\right)^2=30.25$，即至多有30个．所以$K_{12}$中至多含有$30\times12=360$个混色角，矛盾．

7．把9个人看成9个顶点，当两个人相互认识时相应的两个顶点连红边，否则连黄边，得到9阶二色完全图K_9．已知条件是，二色完全图K_9中顶点所连的红边边数分别是2，4，4，5，5，5，5，6，6．要证的是，二色K_9含有红边三角形．此时二色完全图K_9的红边边数$r(K_9)=\frac{1}{2}(2+4+4+5+5+5+5+6+6)=21$．设$K_9$中顶点$v$所连的红边边数是2，去掉顶点$v$以及以$v$为端点的边，得到8阶二色完全图$K_8$，它含有19条红边．而$19\geqslant4^2+1=17$．因此由例7，二色完全图$K_8$含有红边三角形．从而$K_9$含有红边三角形．

8．把俱乐部里14名成员看成14个顶点，当两名成员搭档过时相应的两个顶点连红边，否则连黄边，得到14阶二色完全图K_{14}．由于每个人都和其他5个人搭档过，所以K_{14}中每个顶点都连有5条红边．后又打了三局，又添加6条红边．因此K_{14}中有$\frac{14\times5}{2}+6=41$条红边．而K_{14}中含有$\binom{14}{2}=91$条边，因此K_{14}含有$91-41=50$条黄边．而$50=7^2+1$．所以，由例7，K_{14}含有黄边三角形．现在又来一名新成员，也就是在K_{14}中添加一个顶点，它和原来的顶点都连黄边．于是得到的15阶二色完全图K_{15}含有4阶黄色完全子图K_4．它的4个顶点所相应的4个人中，任意两个人都没有搭档过．按约定，这4个人可以打一局桥牌．

9．把$3n$个自然数1，2，…，$3n$看成$3n$个顶点．对自然数a和b，

$1\leqslant a<b<3n$，当 $n<b-a<2n$ 时，顶点 a 和 b 连一条红边，否则连黄边，得到二色完全图 K_{3n}. 要证明的是，这个二色完全图 K_{3n} 中任意一个 $n+2$ 阶完全子图 K_{n+2} 都含有红边，即 K_{3n} 不含 $n+2$ 阶黄色完全子图 K_{n+2}. 现在证明如下.

设 a 是 $n+2$ 阶完全子图 K_{n+2} 中的一个顶点，且设 $a=3n$. 在二色完全图 K_{3n} 中，a 和顶点 $n+j$ 连红边，$i=1,2,\cdots,n-1$，而和顶点 1，2，…，n，$2n$，…，$3n-1$ 连的都是黄边. 如果完全子图 K_{n+2} 中含有顶点 $n+j$，$1\leqslant j\leqslant n-1$，则 K_{n+2} 含有红边 $(a,n+i)$. 因此可设 K_{n+2} 中不含顶点 $n+1$，$n+2$，…，$2n-1$. 于是 K_{n+2} 除顶点 a 外，还含有顶点 1，2，…，n，$2n$，…，$3n-1$ 中 $n+1$ 个顶点. 在数 1，2，…，n，$2n$，$2n+1$，…，$3n-1$ 中除以数 n 的余数只能是0，1，2，…，$n-1$. 因此 K_{n+2} 所含的其他 $n+1$ 个顶点，必有两个除以数 n 的余数相同，可设为 b 和 $b+n$，其中 $1\leqslant b\leqslant n$. 于是 K_{n+2} 含有红边 $(b,\ b+d)$. 如果 $a\neq 3n$，则将所有的数都加上一个适当的数 d，使 $a+d=3n$，然后再按上面的方法证明 详 情略. 证毕.

注 在这个二色完全图 K_{3n} 中不含有红色三角形. 事实上，如果 K_{3n} 含有红色三角形 $\triangle abc$，其中 $1\leqslant a<b<c\leqslant 3n$，则 $n<b-a$，$c-b$，$c-a<2n$，即 $b=a+n+i$，$c=b+n+j$，$c=a+n+l$，其中 $n<,j,l<2n$. 由前两式得到，$c=a+2n+i+j>2n+a$；而由后式得到 $c<a+2n$. 矛盾. 于是，习题 9 中的二色完全图 K_{3n} 既不含 3 阶红色完全子图 K_3，也不含 $n+2$ 阶黄色完全子图 K_{n+2}. 因此，从习题 9 得到的图论结论是，$r(3,\ n+2)>3n$.

习 题 七

1. 反证法. 设有 $n+1$ 个不同的 3 元子集 A_1，A_2，…，A_{n+1}，其中任意两个之交要么是空集，要么恰含两个元素. 把 A_1，A_2，…，A_{n+1} 看成顶点，当且仅当 $A_i\cap A_j$ 恰含两个元素时，令顶点 A_i 和 A_j 连边，得到 $n+1$ 阶图 G. 对图 G 的两个顶点 A_i 和 A_j，如果图 G 有一条通路连接顶点 A_i 和 A_j，则说 A_i 和 A_j 等价，记作 $A_i\sim A_j$，

容易验证，关系"～"是顶点之间的等价关系．在这种等价关系下，顶点集合分成一些等价类，使得任意两个等价类都是不交的．每个等价类中顶点的集合以及连接这些顶点的边组成图 G 的子图，它叫做图 G 的连通分支．简单说，图 G 分成为一些连通分支的併，图 G 的连通分支可以分成三类：①恰含一个顶点，②恰含两个顶点以及③含有3个以上的顶点．恰含一个顶点的连通分支由孤立点组成，它有一个三元子集，三个元素；而恰含两个顶点的连通分支，有两个三元子集，4个元素；对于含有3个以上的顶点的连通分支，设有 m 个顶点，则有 m 个三元子集 B_1，B_2，…，B_m．可设 B_1 和 B_2 连边，B_2 和 B_3 连边，于是，记 $B_1\cap B_2=\{a, b\}$，则 $B_1=\{a, b, c\}$，$B_2=\{a, b, d\}$，又 $B_2\cap B_3$ 与 $B_1\cap B_3$ 恰含两个元素，所以可设 $B_3=\{a, b, e\}$，如此继续，这表明，子集 B_1，B_2，…，B_m 的个数 m 比 B_1，B_2，…，B_m 所含元素个数少2．因此，子集 A_1，A_2，…，A_{n+1} 的个数要小于子集 A_1，A_2，…，A_{n+1} 所含的元素个数．矛盾．

2．集合 N 有100个数，7种颜色，必有15个数同色，否则每种颜色的数至多有14个，所有的数至多有 $7\times14=98$ 个，不可能．对每对正整数 (i, j)，$1\leqslant i<j\leqslant100$，有一个差 $j-i$，$1\leqslant j-i\leqslant99$，对15个同色的数，有 $C_{15}^2=15\times7=105$ 个正整数对，从而有105个差，因此，至少有两对数 $a>c$，和 $b>d$，使得 $a-c=b-d$，即 $a+b=c+d$．如果 $c=d$，则有 $a+b=2c$．结论证毕．

3．对颜色数目 k 用归纳法．当 $k=1$ 时，取单色自然数集合 $N=\{1,2,3\}$，则方程有单色解 $(1,1,3)$．因此结论对 $k=1$ 成立．假设对颜色数目为 $k-1$ 时结论成立，即存在正整数 n，使得方程在 $k-1$ 色自然数集合 $N=\{1, 2, \cdots, n\}$ 上有单色解 (x, y, z)．取范德瓦登数 $w=w(2n+1, k)$．则 k 色自然数集合 $N^*=\{1, 2, \cdots, w\}$ 具有 $2n+1$ 个项的单色算术级数 a，$a+d$，$a+2d$，…，$a+2nd$，设其颜色为红色．记 $x=a$，$y=td$，$z=a+2td$．如果有某个正整数 t，$1\leqslant t\leqslant n$，td 是红色，则 (x, y, z) 是方程的单色解．如果对每个 $t=1, 2, \cdots, n$，td 均非红色，则用 td 的颜色作为数 t 的颜色．

这样自然数集合 $N=\{1, 2, \cdots, n\}$ 是 $k-1$ 色的. 由归纳假设, 方程在 N 上有单色解 (x', y', z'), 由于 $z'=x'+2y'$, 所以 $z'd=x'd+2(y'd)$. 因此 $x^*=x'd$, $y^*=y'd$ 和 $z^*=z'd$ 同色, 且 (x^*, y^*, z^*) 是方程在 k 色 N^* 中的单色解.

4. 取 $n=r(n_1, n_2, \cdots, n_k)=r(\underbrace{t, t, \cdots, t}_{k})$. 且设自然数集合 $N=\{1, 2, \cdots, n\}$ 是 k 色的. 取顶点为 $v_1, v_2, \cdots, v_n$ 的 n 阶完全图 K_n. 对于 $i, j\in N$, $i<j$, 用数 $j-i$ 在自然数集合 N 中的颜色染边 v_iv_j. 这样 K_n 是 k 色完全图. 由朗塞数的意义, K_n 含有 t 阶单色完全子图 K_t, 其顶点设为 $v_{i_1}, v_{i_2}, \cdots, v_{i_t}$, 其中 $1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_t\leqslant n$. 于是 $a_1=i_2-i_1$, $a_2=i_3-i_2$, $\cdots$, $a_{t-1}=i_t-i_{t-1}$, $a_t=i_t-i_1$ 同色, 而且 $a_1+a_2+\cdots+a_{t-1}=(i_2-i_1)+(i_3-i_2)+\cdots+(i_t-i_{t-1})=i_t-i_1=a_t$.

5. 对 m 用归纳法. 当 $m=1$ 时, 命题显然成立. 这表明, 存在最小正整数 $n(k, 1)$, 使得当 $n\geqslant n(k, 1)$ 时, 命题成立. 假设结论对 $m-1$ 成立, 并且使命题对 $m-1$ 成立的最小正整数记作 $n(k, m-1)$. 现在证明结论对 m 成立. 取 $n(k, m)=k^{n(k,m-1)}+n(k, m-1)$. 设 $n\geqslant n(k, m)$, 且自然数集合 $N=\{1, 2, \cdots, n\}$ 是 k 色的. 对每个正整数 i, $1\leqslant i\leqslant k^{n(k,m-1)}+1$, 考虑数 $i, i+1, \cdots, i+n(k, m-1)-1$ 的颜色所组成的颜色序列. 由于序列 $i, i+1, \cdots, i+n(k, m-1)-1$ 有 $n(k, m-1)$ 个项, 每项有 k 种颜色, 因此. 这种颜色序列共有 $k^{n(k,m-1)}$ 个. 另一方面, $1\leqslant i\leqslant k^{n(k,m-1)}+1$, 所以序列 $i, +1, \cdots, i+n(k, m-1)-1$ 有 $k^{n(k,m-1)}+1$ 个, 因此由抽屉原理, 必有两个序列 $i, i+1, \cdots, i+n(k, m-1)-1$ 和 $j, j+1, j+n(k, m-1)-1$ 的颜色序列相同, $i<j$. 即对每个 l, $0\leqslant l\leqslant n(k, m-1)-1$, 数 $i+l$ 和 $j+l$ 同色. 由数 $n(k, m-1)$ 意义, 在 $i, i+1, \cdots, i+n(k, m-1)-1$ 中含有 m 个数 $a, a_1, a_2, \cdots, a_{m-1}$, 使得对每组下标 $i_1, i_2, \cdots, i_l$, $1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_l\leqslant m-1$, $0\leqslant l\leqslant m-1$, 和 $a+a_{i_1}+a_{i_2}+\cdots+a_{i_l}$ 都同色. 记 $j-i=a_m$. 则由 i 和 j 的选取可知, 所有的和 $a+a_{i_1}+a_{i_2}+\cdots+a_{i_l}$ 都同色, 其中 1

$\leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_l \leqslant m$, $0 \leqslant l \leqslant m$. 证毕.

6. 自然数集合 N 含有1986个数，每个数可以用两种颜色中的一种来染，因此二染色自然数集合 N 的染色方式总数是 2^{1986}. 设自然数集合 N 含有 A 个18 个项的算术级数. 要使自然数集合 N 二染色后只有一个18个项的单色算术级数，这种染色方式总数不多于 $A \cdot 2 \cdot 2^{1986-18}$，其原因是，18个项的算术级数是单色的，有 2 种染色方式，其他 1986—18 个数的染色方式有 $2^{1986-18}$ 种，当然其中有的染色方式不止计入一次. 另一方面，设 18个项的算术级数为 a, $a+d, \cdots$, $a+17d$，其中 $1 \leqslant a < a+d < \cdots < a+17d \leqslant 1986$. 则 $1 \leqslant a \leqslant 1986-17d \leqslant 1986-17=1969$，而且 $1 \leqslant d \leqslant \left[\frac{1986-a}{17}\right]$. 因此，

$$A = \sum_{i=1}^{1969}\left[\frac{1986-i}{17}\right] \leqslant \frac{1}{17}\sum_{i=1}^{1969}(1986-i)$$

$$= \frac{1}{17}\left(1986 \times 1969 - \frac{1970 \times 1969}{2}\right) < 2^{17}.$$

所以，使自然数集合 N 二染色后具有18个项的单色算术级数的染色方式数小于二染色自然数集合 N 的染色方式数. 于是必有一种染色方法，使得二色自然数集合 N 不含18个项的单色算术级数.

习 题 八

1. 考虑 5 个点 A, B, C, D, E 的凸包. 有三种情形. (1) 5 个点 A, B, C, D, E 的凸包是凸五边形 $ABCDE$，这个五边形至少有两个内角为钝角. 再注意凸四边形中至少有一个内角为非锐角的. 于是相应有三个非锐角的三角形；(2) 5 个点 A, B, C, D, E 中的 4 个点组成凸四边形 $ABCD$，另一点 E 在凸四边形 $ABCD$ 的内部，这时凸四边形 $ABCD$ 至少有一个非锐角的内角. 而连线 EA, EB, EC 和 ED 相互之间的夹角至少有两个钝角. 因此至少有三个非锐角的三角形；(3) 5 个点 A, B, C, D, E 中有 3 个点组成三角形 $\triangle ABC$，另两点 D, E 在三角形内部. 这时，$\angle ADB$, $\angle BDC$, $\angle CDA$ 中至少有两个钝角，$\angle AEB$, $\angle BEC$, $\angle CEA$ 中也至少有

两个钝角，于是相应至少有4个非锐角三角形.

2. 由柯莱茵的定理1，$H(4)=5$，即平面上任意5个点总含有一个凸四边形的顶点. 因此平面上n个点至少含有$\binom{n}{5}$个凸四边形的顶点，其中有的凸四边形在计数时是重复的. 对其中一个凸四边形的顶点，添加其他$n-4$个顶点中的一个顶点，便得到一个5点组，因此在计数时每个凸四边形重复$n-4$次. 所以凸四边形的个数至少是$\frac{\binom{n}{5}}{n-4}$. 容易证明，$\frac{1}{n-4}\binom{n}{5}\geqslant\binom{n-3}{2}$.

3. 平面上100个点可以组成$\binom{100}{5}$个5点组. 由第1题，每个5点但至少含有3个非锐角的三角形，因此100个点至少含有$3\binom{100}{5}$个非锐角的三角形. 当然有的非锐角三角形重复计算在内. 一个非锐角三角形的三个顶点和其他任意两个点都组成一个5点组，这样的5点组有$\binom{100-3}{2}$个$=\frac{1}{2}\left(\frac{13^2}{5}-13\right)-10>0$,因此每个非锐角的三角形至多重复计入$\binom{100-3}{2}$次. 于是100个点至少含有$3\binom{100}{5}\Big/\binom{100-3}{2}$个非锐角的三角形，而三角形的总数是$\binom{100}{3}$，因此至少占总数的$\frac{3\binom{100}{5}}{\binom{97}{2}\binom{100}{3}}=\frac{3}{10}$.所以锐角三角形至多占70%.

4. 二色棋盘含有25个方格，两种颜色，至少有13个方格同色. 不妨设棋盘上有13个红色方格. 设棋盘的第i行上有k_i个红色方格，$i=1, 2, \cdots, 5$, $k_1+k_2+\cdots+k_5=13$. 把第i行上两个红色方格看成一条"线段"，共有$\binom{k_i}{2}$条线段，把它们都投影到第1行上，线段的投影总数是$\binom{k_1}{2}+\binom{k_2}{2}+\cdots+\binom{k_5}{2}$.第1行上有5个方格，

两个方格看成一条线段，共有$\binom{5}{2}$条 线段. 由于

$$\binom{k_1}{2}+\binom{k_2}{2}+\cdots+\binom{k_5}{2}-\binom{5}{2}=\frac{1}{2}\{(k_1^2+\cdots+k_5^2)$$

$$-(k_1+\cdots+k_5)\}-10\geqslant\frac{1}{2}\left\{\frac{(k_1+k_5+\cdots+k_5)^2}{5}-(k_1+k_2+\cdots+k_5)\right.$$

$-10>0$. 所以必有两条线段的投影重合. 这两条投影重合的线段所相应的4个方格，即是一个单色矩形的4个角上的方格. 因此任意一个二色棋盘总会有单色矩形. 图74中给出了不含单色矩形的二色棋盘.

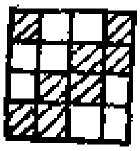


图 74

5. 11×11 棋盘有121个方格，三种颜色，至少有41个方格同色. 不妨设棋盘上有41个红色方格. 设棋盘第i行上有k_i个红色方格，$i=1, 2, \cdots, 11$，则$k_1+k_2+\cdots+k_{11}=41$. 把第i行上两个红色方格看成一条线段，共有$\binom{k_i}{2}$条线段. 把它们投影到第1行，共有$\sum_{i=1}^{11}\binom{k_i}{2}$条投影. 第1行有11个方格，把两个方格看成一条线段，共有$\binom{11}{2}$条线段. 由于

$$\binom{k_1}{2}+\binom{k_2}{2}+\cdots+\binom{k_{11}}{2}-\binom{11}{2}=\frac{1}{2}\{(k_1^2+k_2^2+\cdots+k_{11}^2)$$

$$-(k_1+k_2+\cdots+k_{11})\}-55\geqslant\frac{1}{2}\left\{\frac{(k_1+k_2+\cdots+k_{11})^2}{11}\right.$$

$$\left.-(k_1+k_2+\cdots+k_{11})\right\}-55=\frac{1}{2}\left\{\frac{41^2}{11}-41\right\}-55>0,$$

所以必有两条线段的投影重合. 这两条投影重合的线段相应于一个单色矩形的4个角上的4个方格.

6．把格点集合 S 中的格点(x, y)看成 $kn\times ln$ 棋盘的第 y 行第 x 列的方格，于是二色格点集合 S 相当于二色 $kn\times ln$ 棋盘．为确定起见，不妨设 $k\leqslant l$．由已知条件，棋盘第 i 行有 k 个红色方格，把其中每两个红色方格看成一条线段，共有$\binom{k}{2}$条线段，把各行上的线段都投影到第 1 行，共有 $ln\binom{k}{2}$ 条线段．而第 1 行上有 kn 个方格，把每两个方格看成一条线段，共有$\binom{kn}{2}$条线段．由已知条件，棋盘上不含单色矩形．因此，有

$$ln\binom{k}{2}\leqslant\binom{kn}{2}.$$

由此得到，$l(k-1)\leqslant kn-1$，即 $k\leqslant l\leqslant\frac{kn-1}{k-1}=n+\frac{n-1}{k-1}$．从而 $k\leqslant n$，并且 $kl\leqslant kn+\frac{k(n-1)}{k-1}$．记$g(k)=kn+\frac{k(n-1)}{k-1}$，则 $g(k+1)-g(k)=n-\frac{(n-1)}{k(k-1)}>0$．所以 $kl\leqslant kn+\frac{k(n-1)}{k-1}\leqslant n^2+\frac{(n-1)}{n-1}=n(n+1)$．

7．如果二色直角三角形$\triangle ABC$ 的三个顶点同色，则结论成立．因此顶点 A，B，C 三点，两种颜色，总有两点同色，设顶点 A, B, C 为红色，其中 $\angle B$ 为直角．如果边 BC 上除 B 点外有一点 P 为红色，则直角三角形 $\triangle ABP$ 为单色的．因此可设边 BC 上除点 B 外都是黄色．如果边 AC 上除点 A 外有一点 Q 是黄色，则点 C，Q 和 Q 在边 BC 上的垂足是单色直角三角形的三个顶点．因此可设边 AC 上除点 A 外都是红色．于是点 A，B 和 B 在边 AC 上的垂足组成单色直角三角形的顶点．

对二色锐角三角形 $\triangle ABC$，结论仍成立．证明的关键在于，边 AB，BC 和 CA 上分别有一点 D，E 和 F，使得 $FD\perp AB$，$DE\perp BC$，$EF\perp CA$，然后再用例 3 的方法证明即可．

图75给出的二色钝角三角形$\triangle ABC$ 中不含单色直角三角形，

其中实线表示红边，虚线表示黄边．

8．在三色平面中取如图76的几何图形，其实线边的长都是1．然后

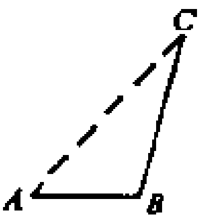


图 75

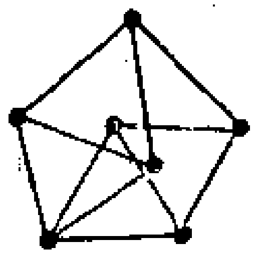


图 76

用反证法即可证明所需的结论．

9．在二色平面中取一个边长为1的单色等边三角形 $\triangle ABC$，其顶点 A，B，C 都是红色的．作 $\triangle ABD$，其中 $AD=b$，$BD=a$，如果点 D 是红色的，则 $\triangle ABD$ 即是所需的单色三角形．因此设点 D 是黄色的．作等边三角形 $\triangle AED$ 和 $\triangle BDF$，并连接 EC 和 CF．显然，$\triangle ACE\cong\triangle CBF\cong\triangle ABD$．如果点 E 和 F 中有一个是红色的，则结论已成立．因此设点 E 和 F 都是黄色的．连接 DG 和 DH．显然，$\triangle DGE\cong\triangle ABD\cong\triangle HDF$．如果点 G 和 H 中有一个是黄色的，则结论已成立．因此设点 G 和 H 都是红色的．于是 $\triangle CGH$ 即是所需的单色三角形

10．只需证明，任意一个二色平面总含有边长分别是 1，$\sqrt{3}$，$\frac{\pi}{\sqrt{2}}$ 的单色三角形，因为只要把证明过程中所遇到的长度都放大 $\sqrt{2}$ 即可．由例4，二色平面要么含有边长为1的单色等边三角形，要么含有边长为 $\sqrt{3}$ 的单色等边三角形．如果是前者，则由上题即可知结论成立．如果是后者，则把 $\sqrt{3}$ 看成单位，由上题便可证明结论成立．

习 题 九

1．把集合 S 中的元素看成顶点，当元素 $a\to b$ 时连一条由顶点 a 指向 b 的边，由性质(1)，如此便得到一个竞赛图 T_n，这里 n 是集合 S

中的元素个数．对于 T_n 中的顶点 x，如果 $s(x)\geqslant 2$，则 T_n 含有顶点 u 和 v，使得 $x\to u$，$x\to v$．于是不论 $u\to v$，或 $v\to u$，都和性质(2)矛盾．因此 $s(x)\leqslant 1$．于是由定理1，有

$$n\geqslant \sum_{x\in V(T_n)} s(x)=\binom{n}{2}.$$

解之得 $n\leqslant 3$．当 $n=3$时，有向三角形即是符合要求的3阶竞赛图 T_n．因此所求最大值为3．

2．把选手看成顶点，当选手 u 胜 v 时连一条由 u 指向 v 的边，得到 n 阶竞赛图 T_n．在 T_n 中取得分最大的顶点 u．顶点 u 所占优的所有顶点集合(即选手 u 所战胜的所有选手集合)记作 $N^+(u)$，记 $N_2^+(u)=\{w\in V(T_n)|\exists v\in N^+(u)$，使 $v\to w\}$．则 $N_2^+(u)$ 是 T_n 中被顶点 u 所占优的顶点占优的所有顶点集合(即所有被选手 u 的手下败将所打败的选手集合)．显然，$N^+(u)\cup N_2^+(u)\subseteq V(T_n)/\{u\}$．现在设 $x\in V(T_n)/\{u\}$，且 $x\notin N^+(u)$，则 $x\in N^-(u)$，即 $x\to u$．如果对所有 $y\in N^+(u)$，均有 $x\to y$，则 $N^+(x)\geqslant N^+(u)\cup\{u\}$，即 $s(x)\geqslant s(u)+1$，与 u 是得分最大的顶点相矛盾．因此存在 $y\in N^+(u)$，使得 $y\to x$．这表明，$x\in N_2^+(u)$．于是 $V(T_n)/\{u\}=N^+(u)\cup N_2^+(u)$．这就证明了结论．

3．把100只昆虫看成100个顶点，当昆虫 u 能吃掉 v 时连一条由顶点 u 指向 v 的边，得到100阶竞赛图 T_{100}．由定理2，竞赛图 T_{100} 含有哈密尔顿道路 $u_1u_2\cdots u_{100}$．于是，只要把100只昆虫按照它们所相应的顶点在这条哈密尔顿道路上的顺序排成一列，每只昆虫就能够吃掉排在紧挨着它后面的昆虫．

4．把 n 名选手看成 n 个顶点，当选手 u 胜 v 时连一条由顶点 u 指向 v 的边，得到 n 阶竞赛图 T_n．题中的优秀选手相应于竞赛图 T_n 中的优顶点．所要证明的是，如果 T_n 中优顶点唯一，则优顶点的得分为 $n-1$．这正是定理5的必要性部分．这里不再给出证明．