HW 6

肖桐 PB18000037

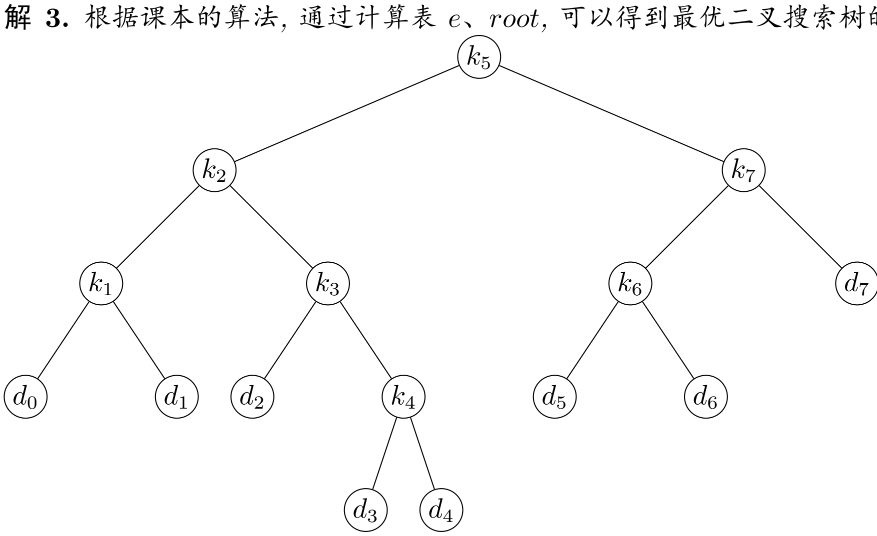
2020 年 11 月 24 日

解 1. 加入了切割成本之后，与原来的 $Bottom - Up$ 解决方案在于，选择不切割时的收益不需要减去切割成本. 因此只需要将不切割时的收益设置为初值，则不需要在求解子问题时单独讨论不切割的情形，其他的和原来代码一致即可.

```
BUTTOM_UP_CUT_ROD(p, n)
{
    let r[0...n] be a new array
    r[0] = 0;
    for i = 1 to n:
        r[i] = p[i];
        for j = 1 to i - 1:
            r[i] = max(r[i], r[j] + r[i - j] - c);
    return r[n];
}
```

解 2. 在有向无环图中，求两个顶点之间的最长路径问题具有最优子结构.
因此采取自顶向下的方法，记 $l[s,t]$ 为顶点 s 到顶点 t 之间的最长路径的长度.
记顶点集合：$U = \{u | ut \in E\}$，则有：$l[s,t] = \max_{u \in U}\{l[s,u] + 1\}$.

解 3. 根据课本的算法，通过计算表 e、$root$，可以得到最优二叉搜索树的结构如下：



且该最优二叉搜索树的期望代价为 $\sum_{i=1}^{n}(depth(k_i) + 1) \cdot p_i + \sum_{i=0}^{n}(depth(d_i) + 1) \cdot q_i = 3.12$.

解 4. 该问题具有最优子结构. 若结构树中 $Root$ 代表的人参加宴会, 则问题最优解 (即以 $Root$ 为根的最优解) 为 $Root$ 的宴会交际能力 $Root.act$ 加上以 $Root.left.left$ 为根的子树的最优解. 若 $Root$ 不参加宴会, 则问题最优解为以 $Root.left$ 为根的子树的最优解. 该性质由 $cut-paste$ 方法易证.
假设员工的编号为 i, 为了记号的方便, 该员工在结构树中的节点也用 i 进行标记. 因此可以设计算法:
初始化一个数组 $A[n]$, n 为公司职工的总人数. 初始设置, 对所有叶子节点对应的员工对应的编号 i, 令 $A[i]$ 为该员工的宴会交际能力值.
则有: $A[i]=\max\{A[i.left],A[i.left.left]+i.act+A[i.right]\}$.
原因是对于以 i 为根节点的子树, 若 i 参加, 则除了需要加上 $i.left.left$ 的最优解之外, 还要加上与 i 同级的员工为根的子树的最优宴会交际能力, 最后加上 i 本身的宴会交际能力. 将得到的结果与以 $i.left$ 为根的子树的最优宴会交际能力进行比较, 取最大值就是以 i 为根的子树的最优宴会交际能力.

解 5. 设计算法:
1. 令一个单位区间的左端点等于当前点集合中, 最左侧的点 x_i.
2. 假设该区间包含了点集合中的点 $x_i,\cdots,x_j$, 则从点集合中去掉 $x_i,\cdots,x_j$.
3. 若点集合为空, 算法结束; 否则执行第 1 步.
每一步选取单位区间的左端点都是当前点集中最左侧的点, 假设当前点集中最左侧的点为 x_i, 此时若将区间左端点取到最左侧的点的左侧, 即对于 $0<k<1$, 取区间: $[x_i-k,x_i-k+1]$, 显然在子区间 $[x_i-k,x_i]$ 不可能会存在任何点, 因此这部分区间就相当于被"浪费"了. 因此将区间左端点取到当前点集中的最左侧的点是最优的. 因此最终的结果也是最优的, 能使得集合个数最少.

解 6. *1.* 记待找零的数额为 T, 将可供找零的硬币面额从大到小排列, 存放在数组 $r[n]$ 中. n 为硬币面额种数. 同时初始化数组 $num[n]$, 用于记录找零时每种硬币的使用个数.
2. 初始化 $i=0$, 初始化当前已找零金额为 $M=0$.
3. 若 $M+r[i]<T$, 则令 $M+=r[i], num[i]+=1$, 继续执行 3; 若 $M+r[i]==T$, 则 $num[i]+=1$, 算法结束; 若 $M+r[i]>T$, 则 $i++$, 继续执行 3. 假设在算法执行过程中, 有一次找零本可以使用面额较大的硬币 (面额设为 S), 却选择了用面额更小的硬币进行找零. 则为了将这 S 元用面额更小的硬币进行补全, 则必定会使用超过 1 个硬币. 从而使用的总的硬币个数相较于原来的算法更多. 因此该算法是最优的.