HW 7

肖桐 PB18000037

2020 年 12 月 8 日

解 1. 假设 $2^k \le n < 2^{k+1}$, $k \in N$, 故 n 次操作总代价为:

$$C = \sum_{i=0}^{k} 2^i + (n-k) = 2^{k+1} + n - k - 1$$

使用聚合分析可得摊还代价为:

$$\frac{C}{n} = \frac{2^{k+1}+n-k-1}{n} \le \frac{2^{k+1}+n-k-1}{2^k} = 2 - \frac{1}{2^k} + \frac{n}{2^k} - \frac{k}{2^k} \le 2+2 = 4$$

故摊还代价为 $O(1)$.

解 2. 由第一题的结论, 可以为所有的操作赋予费用 $\hat{c} = 4$. 则 n 次操作的摊还代价为 $\hat{c}n = 4n$.
而对任意的 n, 实际操作代价为: $2^{k+1}+n-k-1$. 下面只需比较摊还代价和实际代价的大小即可.
因为:

$$2^{k+1}+n-k-1 = 2\times 2^k + n - k - 1 \le 2n + n - k - 1 \le 3n < 4n$$

因此对任何 n, 都有摊还代价大于实际代价. 因此单个操作的摊还代价 $O(1)$.

解 3. 记 $\Phi(D_i)$ 为第 i 个操作的势能. 则令 $\Phi(D_0)=0, \Phi(D_i)=1,\ i>0$. 显然满足 $\Phi(D_n)\ge 0$.
假设 $2^k \le n < 2^{k+1}, k\in N$, 故 n 次操作的摊还代价为

$$\hat{C} = C + 1 = \sum_{i=0}^{k} 2^i + (n-k) + 1 = 2^{k+1} + n - k$$

由第一题的结论知: 单个操作的摊还代价为

$$\frac{\hat{C}}{n} \le \frac{2^{k+1}+n-k}{2^k} \le 4$$

故单个操作的摊还代价为 $O(1)$.

解 4. *(a).*

$$\begin{aligned}
y_{k_1,\ldots,k_d} &= \sum_{j_1=0}^{n_1-1} \cdots \sum_{j_d=0}^{n_d-1} a_{j_1,\ldots,j_d}\omega_{n_1}^{j_1k_1}\cdots\omega_{n_d}^{j_dk_d} \\
&= \sum_{j_d=0}^{n_d-1} \cdots \sum_{j_1=0}^{n_1-1} a_{j_1,\ldots,j_d}\omega_{n_1}^{j_1k_1}\cdots\omega_{n_d}^{j_dk_d} \\
&= \sum_{j_d=0}^{n_d-1} \cdots \sum_{j_2=0}^{n_2-1} \left(\sum_{j_1=0}^{n_1-1} a_{j_1,\ldots,j_d}\omega_{n_1}^{j_1k_1}\right)\omega_{n_2}^{j_2k_2}\cdots\omega_{n_d}^{j_dk_d}
\end{aligned}$$

显然括号中的计算即第一维计算共需计算 $n_2n_3\cdots n_d = \dfrac{n}{n_1}$ 次. 依此类推, 第 k 维需要计算 $n_{k+1}\cdots n_d = \dfrac{n}{n_1\cdots n_k}$ 次. 一直计算到第 d 维, 则 d 维的傅里叶变换计算完成.

(b). 因为求和的个数为有限个, 所以求和的顺序可以进行调换. 计算结果与计算次序无关.

(c). 因为对第 i 维执行 FFT 算法的时间复杂度为 $O(n_i \lg n_i)$, 且共重复了 $\dfrac{n}{n_1 \cdots n_i}$ 次, 因此第 i 维的总时间为 $O(n_i \lg n_i)\dfrac{n}{n_1 \cdots n_i} = O\left(\dfrac{n}{n_1 \cdots n_{i-1} \lg n_i}\right)$. 则 d 维的总时间复杂度为:

$$\sum_{i=1}^{d} \frac{n}{n_1 \cdots n_{i-1}} \lg n_i \leq \left(n + \frac{n}{n_1} + \cdots + \frac{n}{n_1 \cdots n_{d-1}}\right) \lg n$$

因为 $n_i \geq 2,\ i \geq 1$, 故总时间复杂度为:

$$\left(n + \frac{n}{n_1} + \cdots + \frac{n}{n_1 \cdots n_{d-1}}\right) \lg n \leq n \lg n \sum_{i=0}^{d-1} \frac{1}{2^i} < 2n \lg n$$

故总复杂度为 $O(n \lg n)$, 与 d 无关.