HW 9

肖桐 PB18000037

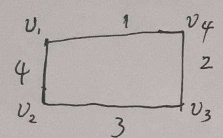
2021 年 1 月 2 日

解 1. 假设现有 n 个 $bool$ 值 $x_1, \ldots, x_n$ 需要满足 $2-SAT$ 问题. 首先将 n 个 $bool$ 变量抽象为图中 $2n$ 个顶点, 分别为 $x_{1t}, \ldots, x_{nt}$ 和 $x_{1f}, \ldots, x_{nf}$. 分别代表 $x_i = true$ 和 $x_i = false$.
首先将 m 个需要满足的表达式中的逻辑运算符 $\vee$ 和 $\wedge$ 都代换为实质蕴涵 $\rightarrow$ 和非运算 $\neg$.
因为实质蕴涵具有保真性, 则对 $x_{i*} \rightarrow x_{j*}$, 在图中画一条由 x_{i*} 指向 x_{j*} 的有向边.
然后使用 $Tarjan$ 算法对图进行遍历, 寻找强连通分量. 每个强连通分量中的顶点真值都是相同的, 因此只要判断是否存在两个顶点 x_{it}, x_{if} 处于同一个强连通分量即可.
若存在这样的顶点, 则该 $2-SAT$ 问题无解, 否则有解, 这一过程的时间复杂度为 $O(V)$.
$Tarjan$ 算法时间复杂度为 $O(V+E)$, 从而满足要求.

解 2.

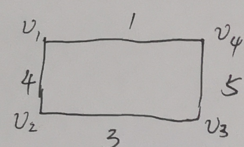
中国科学技术大学
UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY OF CHINA
Hefei,Anhui.230026 The People's Republic of China

2、a. 如图:



则 $S_G = \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4\} = E(T_G)$

b、如图:



则 $S_G = \{v_1v_2, v_4v_3\} \neq E(T_G) = \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4\}$.

c、反证: 若存在边 $(u,v) \in S_G$ 而 $(u,v) \notin T_G$,

则对于顶点 v 而言, $\omega(u,v) = max(v) = argmax_{(u,v)\in E}\{\omega(u,v)\}$.

即 (u,v) 是与 v 相连的边中权重最大的边.

设 T_G 中 $(u',v) \in E$, 则有 $\omega(u',v) < \omega(u,v)$,

若在 T_G 中删去 (u',v), 加上 (u,v) 得到 T_G', 因为边数仍为 $E = V-1$, 且仍是简单图.

故 $\omega(T_G') = \sum_{(u,v)\in E(T_G')} \omega(u,v) > \sum_{(u,v)\in E(T_G)} \omega(u,v)$, 矛盾. 故若 $(u,v) \in S_G$, 则必有 $(u,v) \in E(T_G)$.

从而 $S_G \subseteq T_G$

d、因为 $|S_G| \geq \frac{|V|}{2}$, $|E(T_G)| = |V|-1$, 故 $|E(T_G)-S_G| \leq \frac{|V|}{2} - 1 \leq |S_G|$

因为 S_G 中的边 $(u,v) = argmax_{(u,v)\in E}\{\omega(u,v)\}$. 故必有 $\omega(E(T_G)-S_G) \leq \omega(S_G)$

从而 $|E(T_G)| \leq 2|S_G|$. 即 $\omega(S_G) \geq \frac{\omega(T_G)}{2}$.

e、直接对图中所有顶点进行一次遍历, 对每个顶点都保存 max_edge 为与其相邻的、权重最大的边. 最后对所有 max-edge 取并集. 因为每个顶点、每条边都会遍历 2 次, 故复杂度为 $O(V+E)$.