算法基础第一次作业

肖桐 PB18000037

2020 年 10 月 1 日

解 1. *(a).*

```
for(i = 1; i <= A.length; i++)
{
    if(v == A[i])
    {
        return i;
    }
}
v = NIL;
return v;
```

循环不变式：每次进入循环时，对于 $1 \le k < i$，有 $A[k] \neq v$.

否则若存在 k_0，有 $1 \le k_0 < i$ 且 $A[k_0] = v$，则在 $i = k_0$ 时就已经 *return* 了，不会再运行.

此时若 $A[i] = v$，则返回 i，否则再次进入循环.

若循环结束时 $i = A.length + 1$，即对所有 $1 \le k \le A.length$，有 $A[k] \neq v$，即此时 v 与 A 中任何一个元素都不相等，故此时返回 $v = NIL$.

(b). 记 $A.length = n$. 不妨设 $A[i] = v$ 的概率为 $P_i = \dfrac{1}{n}$.

则平均检查的元素个数为 $\sum\limits_{k=1}^{n} kP_k = \dfrac{n(n+1)}{2n} = \dfrac{n+1}{2}$，此时 $T(n) = \Theta(n)$

最差情况下为 $A[n] = v$ 或找不到与 v 相同的元素，此时需要检查 n 个元素，此时也有 $T(n) = \Theta(n)$.

解 2. ***(a).*** 错误，理由如下：

由 O 的定义，存在正常数 c, n_0，当 $n > n_0$ 时，有 $0 \le f(n) \le c(f(n))^2$.

而当 $\lim\limits_{n\to+\infty} f(n) = 0$ 时，若有 $0 \le f(n) \le c(f(n))^2$，则有 $f(n) \ge \dfrac{1}{c}$，其中 c 为一确定的正常数.

这与 $\lim\limits_{n\to+\infty} f(n) = 0$ 矛盾，故 $f(n) = O\left((f(n))^2\right)$ 错误.

(b). 正确，理由如下：

由 Θ 的定义，存在正常数 c_1, c_2, n_0，当 $n > n_0$ 时，有 $0 \le c_1 \max\{f(n), g(n)\} \le f(n) + g(n) \le c_2 \max\{f(n), g(n)\}$

当 $n > n_0$ 时，若 $f(n) = g(n) \equiv 0$ 时结论显然成立. 否则证明如下.

首先，$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{f(n)+g(n)}{\max\{f(n), g(n)\}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{f(n)}{\max\{f(n), g(n)\}} + \dfrac{g(n)}{\max\{f(n), g(n)\}} \right) < +\infty$.

这是因为 $f(n) \le \max\{f(n), g(n)\}$，$g(n) \le \max\{f(n), g(n)\}$，则 $\dfrac{f(n)}{\max\{f(n), g(n)\}} \le 1$ 且 $\dfrac{g(n)}{\max\{f(n), g(n)\}} \le 1$.

因而能够找到一个确定的常数 $c_2 = \sup\left\{ \dfrac{f(n)+g(n)}{\max\{f(n), g(n)\}} \right\}$，使得当 $n > n_0$ 时，有 $\dfrac{f(n)+g(n)}{\max\{f(n), g(n)\}} \le c_2$，即 $f(n) + g(n) \le c_2 \max\{f(n), g(n)\}$.

其次，$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{f(n)+g(n)}{\max\{f(n), g(n)\}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{f(n)}{\max\{f(n), g(n)\}} + \dfrac{g(n)}{\max\{f(n), g(n)\}} \right) \ge 1$.

这是因为 $\dfrac{f(n_1)}{\max\{f(n_1),g(n_1)\}}=1$ 与 $\dfrac{g(n_1)}{\max\{f(n_1),g(n_1)\}}=1$ 对于任意一个确定的 n_1 必至少有一个成立. 否则存在 n_1 使得 $\max\{f(n_1),g(n_1)\}\neq f(n_1)$ 且 $\max\{f(n_1),g(n_1)\}\neq g(n_1)$, 这显然与 $\max\{f(n),g(n)\}$ 的定义相矛盾.
不妨设 $\dfrac{f(n)}{\max\{f(n),g(n)\}}=1$, 又 $\lim\limits_{n\to+\infty} f(n)\geq 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} g(n)\geq 0$, 故 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{g(n)}{\max\{f(n),g(n)\}}\geq 0$
因此有 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{f(n)}{\max\{f(n),g(n)\}}+\dfrac{g(n)}{\max\{f(n),g(n)\}}\right)\geq 1$.
因而能够找到一个确定的常数 $0<c_1<1$, 使得当 $n>n_0$ 时, 有 $\dfrac{f(n)+g(n)}{\max\{f(n),g(n)\}}\geq c_1$.
即 $c_1\max\{f(n),g(n)\}\leq f(n)+g(n)$.
故综上有: $f(n)+g(n)=\Theta(\max\{f(n),g(n)\})$.
(c.) 由 O 定义, 存在正常数 c_0,n_0, 当 $n>n_0$ 时, 有 $0\leq O(f(n))\leq c_0f(n)$.
则当 $n>n_0$ 时, 有 $0\leq f(n)\leq f(n)+O(f(n))\leq (c_0+1)f(n)$.
即存在正常数 $c_1=1,c_2=c_0+1,n_0$, 当 $n>n_0$ 时, 有 $0\leq c_1f(n)\leq f(n)+O(f(n))\leq c_2f(n)$
即 $f(n)+O(f(n))=\Theta(f(n))$.
(d.) 错误, 理由如下:
由 Ω 的定义, 存在正常数 c_1,n_1, 当 $n>n_1$ 时, 有 $0\leq c_1g(n)\leq f(n)$. 因此以下命题是错误的:
对于任意正常数 c_2, 存在正常数 n_2, 当 $n>n_2$ 时, 有 $0\leq f(n)\leq c_2g(n)$. 即 $f(n)\neq o(g(n))$.

解 3. 先证 $\lg(n!)=\Theta(n\lg n)$:
由 *Stirling* 公式: $n!=\sqrt{2\pi n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n\left(1+\Theta\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)$
则 $\lg(n!)=\lg\left(\sqrt{2\pi n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n\left(1+\Theta\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)\right)=\dfrac{1}{2}\lg(2\pi)+\dfrac{1}{2}\lg n+n\lg n-n\lg e+\lg\left(1+\Theta\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)$
因为 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-n\lg e+\dfrac{1}{2}\lg n\right)=-\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\lg\left(1+\Theta\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)=0$.
因此存在正常数 n_0, 当 $n>n_0$ 时, $\dfrac{1}{2}\lg(2\pi)+\dfrac{1}{2}\lg n-n\lg e+\lg\left(1+\Theta\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)\leq 0$,
则当 $n>n_0$ 时, 有 $\lg(n!)\leq n\lg n$.
当 $n>e^2$ 时, 有 $\dfrac{\sqrt{n}}{e}\geq 1$, 则 $n(\lg\sqrt{n}-\lg e)\geq 0$, 即 $\dfrac{1}{2}n\lg n\leq n\lg n-n\lg e$.
则 $n>e^2$ 时有: $\lg(n!)\geq n\lg n-n\lg e\geq\dfrac{1}{2}n\lg n$.
故存在正常数 $c_1=\dfrac{1}{2},c_2=1,n_1=\max\{n_0,e^2\}$, 当 $n>n_1$ 时, 有 $0\leq c_1n\lg n\leq lg(n!)\leq c_2n\lg n$.
即 $\lg(n!)=\Theta(n\lg n)$.
下证 $n!=\omega(2^n)$:
对于任意正常数 c_0, 都存在正常数 n_0, 当 $n>n_0$ 时, 有 $n\geq 2ec_1$. 则 $n>n_0$ 时, 有 $n^n\geq c_0(2e)^n$, 即 $\left(\dfrac{n}{e}\right)^n\geq c_02^n$.
故 $n!=\sqrt{2\pi n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n\left(1+\Theta\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)\geq\left(\dfrac{n}{e}\right)^n\geq c_02^n$.
即对于任意正常数 c_0, 存在正常数 n_0, 当 $n>n_0$ 时, 有 $0\leq c_02^n\leq n!$, 即 $n!=\omega(2^n)$.
下证 $n!=o(n^n)$:
因为 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\Theta\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)=1$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sqrt{2\pi n}}{n}=0$, 故存在正常数 n_1, $n>n_1$ 时, 有 $\sqrt{2\pi n}\left(1+\Theta\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)\leq 2n$
因为 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2n}{e^n}=0$, 故对于任意正常数 c_0, 存在正常数 n_2, 当 $n>n_2$ 时, 有 $\dfrac{2n}{e^n}\leq c_0$.
故 $n>\max\{n_1,n_2\}$ 时有 $n!=\sqrt{2\pi n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n\left(1+\Theta\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)\leq n^n\dfrac{2n}{e^n}\leq c_0n^n$.
即对于任意正常数 c_0, 存在正常数 $n_0=\max\{n_1,n_2\}$, 使得 $n>n_0$ 时, 有 $0\leq n!\leq c_0n^n$, 即 $n!=o(n^n)$.

解 4. 假设存在正常数 c_0, 使得对于任意 $1<k<n$, 有 $T(k)\leq c_0\lg k$.
$n=2$ 时, $T(2)=T(1)+1$, 为一常数时间, 则必存在一个正常数 c_1, 使得 $T(2)\leq c_2\lg 2$.

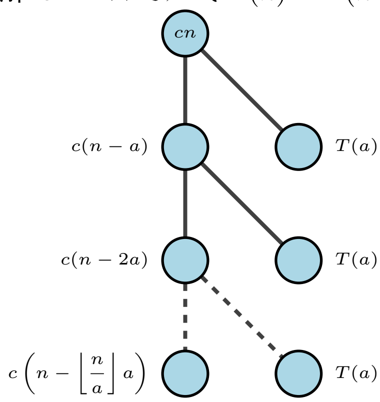
则 $n \geq 3$ 时, $T(n) = T(\lceil n/2 \rceil) + 1 \leq c_0 \lg(\lceil n/2 \rceil) + 1 \leq c_0 \lg n$. 只要 $c_0 \lg \dfrac{n}{\lceil n/2 \rceil} \geq 1$ 对所有 $n \geq 3$ 成立即可.

则有: $c_0 \lg \dfrac{n}{\lceil n/2 \rceil} \geq c_0 \lg \dfrac{n}{n/2+1} \geq c_0 \lg \dfrac{1}{1/2+1/n} \geq c_0 \lg \dfrac{6}{5}$, 令 $c_0 \lg \dfrac{6}{5} \geq 1$ 可得: $c_0 \geq \dfrac{1}{\lg 6 - \lg 5}$.

即取 $c_0 \geq \dfrac{1}{\lg 6 - \lg 5}$ 则可保证当 $n \geq 3$ 时 $T(n) \leq c_0 \lg n$.

故综上, 只需取 $c_0 = \max\left\{c_1, \dfrac{1}{\lg 6 - \lg 5}\right\}$ 即可满足 $T(n) \leq c_0 \lg n$, $(n \geq 2)$. 即 $T(n) = O(\lg n)$.

解 5. 画出递归式 $T(n) = T(n-a) + T(a) + cn$ 对应的递归树如下:



易知递归树一共有 $\left\lfloor \dfrac{n}{a} \right\rfloor$ 层, 故总复杂度为:

$$
\begin{aligned}
T(n) &= nT(a) + \sum_{k=0}^{\lfloor n/a \rfloor} c(n-ka) \\
&= cn(\lfloor n/a \rfloor + 1) - ca\frac{\lfloor n/a \rfloor (\lfloor n/a \rfloor + 1)}{2} + nT(a)
\end{aligned}
$$

因为 $\lfloor n/a \rfloor = \Theta(n)$, 故 $T(n) = \Theta(n^2)$

解 6. ***a.*** 本题中 $a = 2, b = 4$, 则 $\log_b a = \dfrac{1}{2}$, 故 $n^{\log_b a} = \sqrt{n} = f(n)$. 即 $f(n) = \Theta(\sqrt{n})$

故由主方法可得: $T(n) = \Theta(\sqrt{n} \lg n)$.

b. 本题中 $a = 2, b = 4$, 则 $\log_b a = \dfrac{1}{2}$, 故 $n^{\log_b a} = \sqrt{n}$.

故存在正常数 $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$, 有 $f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \varepsilon}) = \Omega(n)$.

且存在 $c = \dfrac{1}{2} < 1$, 使得对于所有足够大的 n 均有 $af(n/b) = \dfrac{n^2}{8} \leq \dfrac{n^2}{2} = cf(n)$.

故由主方法可知: $f(n) = \Theta(f(n)) = \Theta(n^2)$

解 7. 不能使用主方法.

此时 $f(n) = n^2 \lg n$, $n^{\log_b a} = n^2$. 因为对于任何正常数 α, 有 $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\lg n}{n^\alpha} = 0$, 显然此时不存在正常数 ε, 使得 $f(n) = \Theta(n^{2-\varepsilon})$ 或是 $f(n) = \Theta(n^{2+\varepsilon})$. 因此无法使用主方法.

此时应使用递归树或是代入法来进行求解.

下面给出代入法证明 $T(n) = O(n^2 \lg^2 n)$.

若对于所有 $2 \leq k < n$, 有 $T(k) \leq k^2 \lg^2 k$, 则当 $k = n$ 时, 有:

$$
\begin{aligned}
T(n) &= 4T(n/2) + n^2 \lg n \\
&\leq 4 \times \left(\left(\frac{n}{2}\right)^2 \lg^2 \frac{n}{2}\right) + n^2 \lg n \\
&= n^2 (\lg n - 1)^2 + n^2 \lg n \\
&= n^2 \lg^2 n + n^2 (1 - \lg n) \leq n^2 \lg^2 n
\end{aligned}
$$

即存在正常数 $c = 1$, 使得存在 $n_0 = 2$, 当 $n > n_0$ 时, 有 $0 \leq T(n) \leq n^2 \lg^2 n$

故 $T(n) = O(n^2 \lg^2 n)$