ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

ИУ3 - 5 семестр

Лекция 4. СПЕЦИАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА БИНАРНЫХ ОТНОШЕНИЙ

Среди всех бинарных отношений на произвольном множестве выделяют классы отношений в зависимости от свойств, которыми эти отношения обладают.

Бинарное отношение на некотором множестве называют:

1) **эквивалентностью**, если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно;

2) **толерантностью**, если оно рефлексивно и симметрично;

3) **порядком** (или **частичным порядком**), если оно рефлексивно, антисимметрично и транзитивно;

4) **предпорядком** (или **квазипорядком**), если оно рефлексивно и транзитивно;

5) **строгим порядком**, если оно иррефлексивно, антисимметрично и транзитивно;

6) **строгим предпорядком**, если оно иррефлексивно и транзитивно.

Определенные выше бинарные отношения называют **отношениями эквивалентности**, **толерантности**, **порядка (частичного порядка)**, **предпорядка (квазипорядка)**, **строгого порядка**, **строгого предпорядка**.

Пример 4.1. **а.** Бинарное отношение параллельности двух прямых или двух плоскостей в евклидовой геометрии, если считать каждую прямую (плоскость) параллельной самой себе, есть отношение эквивалентности.

б. Бинарное отношение ρ на множестве всех непустых подмножеств некоторого множества U, для которого $A\,\rho\,B$ тогда и только тогда, когда $A \cap B \neq \varnothing$, является толерантностью.
Это отношение рефлексивно и симметрично, но не транзитивно.
Действительно, из того, что $A \cap B \neq \varnothing$ и $B \cap C \neq \varnothing$, никак не следует, что $A \cap C \neq \varnothing$

в. **Естественный числовой порядок** является отношением порядка.

г. Отношение строгого неравенства на числовом множестве, отношение строгого включения множеств, есть отношения строгого порядка.

Пример 4.2.
На множестве натуральных чисел $\mathbb{N}$ задано бинарное отношение:
$a \mid b$ (a делит b ; a является делителем b).

Это отношение рефлексивно, любое число является делителем самого себя.
Антисимметричнсть.

$$((a \mid b) \wedge (b \mid a)) :$$
$$(\exists t_1 \in \mathbb{N}) : b = at_1 \wedge (\exists t_2 \in \mathbb{N}) : a = bt_2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow b = bt_2t_1 \Rightarrow t_1 = t_2 = 1 \Rightarrow (a = b).$$

Транзитивность.

$$((a \mid b) \wedge (b \mid c)) : (\exists\, t_1, t_2 \in \mathbb{N}) : (b = at_1) \wedge (c = bt_2) \Rightarrow c = at_1t_2 \Rightarrow (a \mid c)$$

„Отношение делимости“ на множестве $\mathbb{N}$ является **отношением порядка**.

На множество целых чисел это отношение будет только **предпорядком**, поскольку теряется свойство антисимметричности.
Пример, 2 делится на -2 и -2 делится на 2, однако 2 не равно -2.

Пример 4.3.
Рассмотрим множество 2^A всех подмножеств множества A.
Отношение включения $\subseteq$ на множестве 2^A есть порядок.

Отношение рефлексивно, для любого множества X справедливо включение $X \subseteq X$.

Антисимметричнсть.

$$(\forall\, X, Y) : (X \subseteq Y) \wedge (Y \subseteq X) \Rightarrow (X = Y)$$

Транзитивность.
Из определения включения следует: $(X \subseteq Y) \wedge (Y \subseteq Z) \Rightarrow (X \subseteq Z)$.

Определение 4.1. Отношение ρ^* называют **рефлексивно-транзитивным замыканием** бинарного отношения ρ на множестве A ($\rho \subseteq A^2$), если $(x, y) \in \rho^*$ тогда и только тогда, когда $x = y$
или существует последовательность x_0, x_1, ..., x_n, $n \geq 1$,
такая, что $x_0 = x$, $x_n = y$ и для каждого $i = \overline{0, n-1}$ выполняется $(x_i, x_{i+1}) \in \rho$.

В частности, если $(x, y) \in \rho$, то $(x, y) \in \rho^*$, т.е. $\rho \subseteq \rho^*$.

Обозначим

$$\rho^0 = \mathrm{id}_A, \quad \rho^1 = \rho, \quad \rho^n = \rho \circ \rho^{n-1}, \quad n > 1,$$

тогда

$$\rho^* = \rho^0 \cup \rho^1 \cup \ldots \cup \rho^n \ldots = \bigcup_{i=0}^{\infty} \rho^i.$$

Отношение ρ^* является рефлексивным, так как $\mathrm{id}_A \subseteq \rho^*$.
Докажем его транзитивность.
Пусть найдутся x, y, z , для которых выполняется $(x,\ y) \in \rho^*$ и $(y,\ z) \in \rho^*$.
Покажем, что $(x,\ z) \in \rho^*$.
Будем считать, что элементы x , y , z попарно различны (при $x = y$ или $y = z$ доказывать нечего).
Тогда существуют последовательности $x = x_0$, x_1 , . . . , $x_n = y$ и $y = y_0$, y_1 , . . . , $y_m = z$,
такие, что $(x_i,\ x_{i+1}) \in \rho$ для каждого $i = \overline{0,\ n-1}$
и $(y_j,\ y_{j+1}) \in \rho$ для каждого $j = \overline{0,\ m-1}$ ($n,\ m \geq 1$).
Построим новую последовательность $\{z_k\}_{k=\overline{0,\, n+m}}$,
где

$$z_0 = x_0 = x,\ z_1 = x_1, \ldots, z_n = y,\ z_{n+1} = y_1,\ z_{n+m} = z.$$

В сформированной последовательности $(z_i,\ z_{i+1}) \in \rho$ для любого $i = \overline{0,\ n+m-1}$, т.е. $(x,\ z) \in \rho^*$.

4.1. Семейства множеств

Пусть U — *универсальное множество*.
Если каждому натуральному числу n взаимно однозначно сопоставлено некоторое подмножество $A_n \subseteq U$, то тем самым определена последовательность множеств $A_1, \ldots, A_n, \ldots$, ($(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$).

Предположим, что вместо множества $\mathbb{N}$ натуральных чисел задано произвольное множество I и каждому элементу $i \in I$ взаимно однозначно сопоставлено подмножество $A_i \subseteq U$.

Тогда говорят, что задано **(индексированное) семейство множеств** $(A_i)_{i\in I}$.

Множество I называют множеством индексов, а множества A_i — элементами семейства $(A_i)_{i\in I}$.

В случае $I = \mathbb{N}$ получаем последовательность множеств, или **счетное семейство множеств**;
Если множество I конечно, получаем **конечное семейство множеств**.

Семейство $(A_i)_{i\in I}$ определено, если задано *отображение* $\nu\colon I \to 2^U$.

Операции **объединения** и **пересечения множеств** можно распространить на произвольные семейства множеств.

1. Объединение семейства множеств:

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \{x\colon (\exists i)(x \in A_i)\}\,.$$

2. Пересечение семейства множеств:

$$\bigcap_{i\in I} A_i = \{x\colon (\forall i)(x \in A_i)\}\,.$$

Основные тождества для произвольных семейств множеств:

$$A \cup \Big(\bigcup_{i\in I} B_i\Big) = \bigcup_{i\in I}(A \cup B_i), \quad A \cap \Big(\bigcap_{i\in I} B_i\Big) = \bigcap_{i\in I}(A \cap B_i). \tag{4.1}$$

$$A \cap \Big(\bigcup_{i\in I} B_i\Big) = \bigcup_{i\in I}(A \cap B_i), \quad A \cup \Big(\bigcap_{i\in I} B_i\Big) = \bigcap_{i\in I}(A \cup B_i), \tag{4.2}$$

$$\overline{\bigcup_{i\in I} A_i} = \bigcap_{i\in I}\overline{A}_i, \qquad \overline{\bigcap_{i\in I} A_i} = \bigcup_{i\in I}\overline{A}_i. \tag{4.3}$$

Тождества (3.2) выражают свойство **бесконечной дистрибутивности** операций пересечения и объединения. Тождества (3.3) называют **бесконечными законами де Моргана**.

4.2. Отношения эквивалентности

Пусть A — произвольное множество.
Семейство $(B_i)_{i\in I}$ **непустых** и попарно **не пересекающихся** множеств называют **разбиением** множества A, если **объединение** множеств семейства $(B_i)_{i\in I}$ равно **A**, т.е. $\bigcup\limits_{i\in I} B_i = A$.

Сами множества B_i называют **элементами** (или **членами**) **разбиения** $(B_i)_{i\in I}$.
Например, множества $[0,\ 1/3)$, $[1/3,\ 2/3)$ и $[2/3,\ 1]$ образуют разбиение отрезка $[0,\ 1]$.

Тривиальными разбиениями A являются, по определению, разбиение $\{A\}$, состоящее только из самого A, и разбиение, состоящее из всех одноэлементных подмножеств множества A.

Пусть ρ — *эквивалентность* на множестве A и $x \in A$.

Классом эквивалентности по отношению ρ называют множество всех элементов A, *эквивалентных* x, т.е. множество $\{y\colon y\,\rho\,x\}$.

Класс эквивалентности обозначают $[x]_\rho$.

Для любого элемента $x \in A$ класс эквивалентности не пуст в силу рефлексивности, так как $x \in [x]_\rho$.

Фактор-множеством множества A по отношению ρ называют множество всех классов эквивалентности по данному отношению эквивалентности ρ на множестве A и обозначают A/ρ.

Утверждение 4.1. Любые два класса эквивалентности по отношению ρ либо не пересекаются, либо совпадают.

◀ Пусть два класса эквивалентности $[x]_\rho$ и $[y]_\rho$ имеют общий элемент $z \in [x]_\rho \cap [y]_\rho$. Тогда $z\,\rho\,x$ и $z\,\rho\,y$.
В силу *симметричности* отношения ρ : $x\,\rho\,z$, тогда $x\,\rho\,z$ и $z\,\rho\,y$.
В силу *транзитивности* отношения ρ получим $x\,\rho\,y$.
Пусть

$$h \in [x]_\rho \Rightarrow (h\,\rho\,x \wedge x\,\rho\,y) \Rightarrow h\,\rho\,y \Rightarrow h \in [y]_\rho.$$

Это верно для любого элемента $h \in [x]_\rho$.
Обратно, если

$$h \in [y]_\rho \Rightarrow (h\,\rho\,y) \wedge (x\,\rho\,y) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (\text{ то в силу симметричности}\rho)\ (h\,\rho\,y) \wedge (y\,\rho\,x) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (\text{в силу транзитивности})\ h\,\rho\,x \Rightarrow h \in [x]_\rho \Rightarrow [x]_\rho = [y]_\rho.$$

▶

Теорема 1. Для любого *отношения эквивалентности* на множестве A множество классов эквивалентности образует разбиение множества A. Обратно, любое разбиение множества A задает на нем отношение эквивалентности, для которого классы эквивалентности совпадают с элементами разбиения.

Пример 4.4. На множестве **целых чисел** $\mathbb{Z}$ определим отношение $\equiv_{(\mathrm{mod\,k})}$ **отношение равенства по модулю** k, где $k \in \mathbb{N}$:

$x \equiv_{(\mathrm{mod\,k})} y$, если и только если $x - y$ делится на k.

$\equiv_{(\mathrm{mod\,k})}$ — отношение эквивалентности.

Рефлексивность $\forall m \in \mathbb{Z}\; m - m = 0$ и делится на k;

Симметричность если $m - n$ делится на k, то и $n - m$ делится на k.

Транзитивности если $m - n$ делится на k, $n - p$ делится на k, то их сумма $(m - n) + (n - p) = m - p$ делится на k.

$\forall m, n, p \in \mathbb{Z}\; ((m \equiv_{(\mathrm{mod\,k})} n) \wedge (n \equiv_{(\mathrm{mod\,k})} p)) \Rightarrow (m \equiv_{(\mathrm{mod\,k})} p)$

Равенство чисел m и n по модулю k означает, что при делении на k эти числа дают одинаковые остатки.

Для каждого $x \in \mathbb{Z}$ имеем $x = m \cdot k + r$, где r — остаток от деления x на k. Следовательно, $x - r = m \cdot k$, т.е. $x \equiv_{(\mathrm{mod\,k})} r$.

Каждое число попадает в тот же класс эквивалентности по отношению $\equiv_{(\mathrm{mod\,k})}$, что и остаток от деления его на k.

Различных остатков всего может быть ровно k: 0, $1, \ldots, k-1$. Получаем k попарно различных классов эквивалентности по данному отношению:

$[0]_{\equiv_{(\mathrm{mod\,k})}}$, $[1]_{\equiv_{(\mathrm{mod\,k})}}$, $\ldots$, $[k-1]_{\equiv_{(\mathrm{mod\,k})}}$,

где класс $[r]_{\equiv_{(\mathrm{mod\,k})}}$ состоит из всех целых чисел, дающих при делении на k остаток r.

Мы установили взаимно однозначное соответствие между фактор-множеством $\mathbb{Z}/\equiv_{(\mathrm{mod}\,\mathrm{k})}$ и множеством $\mathbb{Z}_k$, состоящим из чисел $0, 1, \ldots, k-1$.

Фактор-множество состоит из k элементов, каждый из которых есть не число, а множество всех целых чисел, при делении на k дающих фиксированный остаток.

Фактор-множество $\mathbb{Z}/\equiv_{(\mathrm{mod}\,\mathrm{k})}$ не равно множеству $\{0,\ 1,\ \ldots,\ k-1\}$.

Каждому такому классу эквивалентности однозначно сопоставляется целое число от 0 до k-1, и, наоборот, каждому целому числу от 0 до k-1 соответствует единственный класс эквивалентности по отношению $\equiv_{(\mathrm{mod}\,\mathrm{k})}$.

4.3. Упорядоченные множества.

Множество вместе с заданным на нем *отношением порядка* называют **упорядоченным множеством**.

Отношение порядка будем обозначать $\leq$ (или значками $\preccurlyeq$, $\sqsubseteq$ и т.п., похожими на $\leq$).
Может рассматриваться любое отношение порядка, не только *естественный числовой порядок*.(даже для $S \subseteq \mathbb{R}$)

Множество M с заданным на нем отношением порядка $\leq$ будем записывать как пару $(M, \leq)$.
Запись $x \leq y$, означает "элемент x не больше элемента y".

Каждому отношению порядка $\leq$ на множестве M можно сопоставить следующие отношения.

1. Отношение $<$, получается из исходного отношения порядка $\leq$ выбрасыванием всех элементов диагонали id_M.

$$(x < y)\ \forall\, x, y \in M \Leftrightarrow ((x \leq y) \wedge (x \neq y))$$

"Элемент x строго меньше элемента y."

Бинарное отношение $<$ на множестве M —*отношение строгого порядка*. Оно *иррефлексивное*, *антисимметричное* и *транзитивное*.

2. **Двойственный порядок**. Это бинарное отношение на множестве M, называемое также и **отношением, двойственным к отношению порядка** $\leq$, определяется как *бинарное отношение на множестве* M*, обратное* к отношению $\leq$.

Его обозначают $\geq$.

Тогда для любых x, y условие $x \geq y$ равносильно тому, что $y \leq x$.
Отношение $\geq$ тоже является отношением порядка.
Читается "Элемент x не меньше элемента y."

Отношение строгого порядка,ассоциированное с $\geq$, обозначим $>$. Элемент x строго больше элемента y, если $x \geq y$ и $x \neq y$.

3. Отношение доминирования $x \lhd y$.

Для двух элементов x и y, по определению, $x \lhd y$ тогда и только тогда, когда x строго меньше y и не существует такого элемента z, что $x < z < y$.

Отношение $x \lhd y$ называют **отношением доминирования** (или просто **доминированием**), ассоциированным с отношением порядка $\leq$.

"Элемент y доминирует над элементом x".

Отношение доминирования иррефлексивно, антисимметрично, но не транзитивно.

Отношение доминирования будет пустым, если исходный порядок является *плотным бинарным отношением на* соответствующем *множестве*.

Пример 4.5. a. На множестве всех подмножеств трехэлементного множества $\{a,\ b,\ c\}$

$$2^{\{a,\ b,\ c\}} = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\},$$

задано отношения порядка $\subseteq$ (отношение теоретико-множественного включения).

Подмножество $\{a,\ b\}$ доминирует над подмножествами $\{a\}$ и $\{b\}$, но не доминирует над пустым множеством.
Все множество $\{a,\ b,\ c\}$ доминирует над любым своим двухэлементным подмножеством, но не доминирует над одноэлементным и над пустым.

b. На множестве натуральных чисел $\mathbb{N}$ задано отношения порядка : отношение делимости

По отношению делимости на множестве натуральных чисел 15 доминирует над 3 и 5, но 20 не доминирует над 5, так как существует „промежуточный“ элемент — 10, делитель 20, который делится на 5, но не равен ни 20, ни 5.

Рассмотрим упорядоченное множество $(M, \leq)$ и его произвольное непустое подмножество $B \subseteq M$.

Упорядоченное множество $(B, \leq|_B)$, где $\leq|_B$ — *ограничение отношения* $\leq$ *на подмножество* B, называют **упорядоченным подмножеством** упорядоченного множества $(M, \leq)$.

Можно переносить отношения порядка на непустые подмножества исходного упорядоченного множества.

Вместо $\leq|_B$ будем писать просто $\leq$ (если ясно, о каком подмножестве B идет речь).

Порядок $\leq|_B$ на подмножестве B называют также **порядком, индуцированным** исходным порядком $\leq$ на всем множестве A.

Элементы x и y упорядоченного множества $(M, \leq)$ называют **сравнимыми** по отношению порядка $\leq$, если $x \leq y$ или $y \leq x$.
В противном случае элементы x и y называются **несравнимыми**.

Упорядоченное множество, все элементы которого попарно сравнимы, называют **линейно упорядоченным**, а соответствующее отношение — **отношением линейного порядка** (или просто **линейным порядком**).

Если индуцированный порядок на подмножестве упорядоченного множества является линейным, то это линейно упорядоченное подмножество называют **цепью**.

Любое подмножество попарно не сравнимых элементов данного упорядоченного множества называют **антицепью**.

Пример 4.6. **а.** Отношение естественного числового порядка на множестве $\mathbb{R}$ действительных чисел является отношением линейного порядка, поскольку для любых двух чисел a, b имеет место или неравенство $a \leq b$, или неравенство $b \leq a$.
б. Отношение делимости на множестве $\mathbb{N}$ и отношение включения $\subseteq$ на $\mathcal{B}(A)$ не являются линейными порядками, за исключением случая, когда A — одноэлементное множество. #

Пусть $(A, \le)$ — упорядоченное множество.

Элемент $a \in A$ называют **наибольшим элементом** множества A, если для всех $x \in A$ выполняется неравенство $x \le a$.

Элемент b называют **максимальным элементом** множества A, если для всякого $x \in A$ имеет место одно из двух: или $x \le b$, или x и b не сравнимы.

Наименьший элемент упорядоченного множества A — это такой его элемент a, что $a \le x$ для каждого $x \in A$.

Минимальный элемент — это такой элемент $b \in A$, что для любого $x \in A$ элементы b и x не сравнимы или $b \le x$.

Утверждение 4.2. Наибольший (наименьший) элемент множества, если он существует, является единственным.

◄ Пусть a и a' — наибольшие элементы A по отношению порядка $\le$. Для всякого $x \in A$ выполняется $x \le a$ и $x \le a'$. В частности, $a' \le a$ и $a \le a'$. Следовательно, $a = a'$ (антисимметричность отношения порядка). ►

Единственность наименьшего элемента доказывается аналогично.

Максимальных (минимальных) элементов может быть сколько угодно.

Пример 4.7. Рассмотрим множество точек плоскости с некоторой фиксированной **прямоугольной декартовой системой координат**.
Координаты каждой **точки** плоскости задаются **упорядоченной парой** $(x,\ y)$ действительных чисел.
Отношение порядка на множестве точек плоскости определим следующим образом: $(a,\ b) \le (c, d)$, если и только если $a \le c$ и $b \le d$.

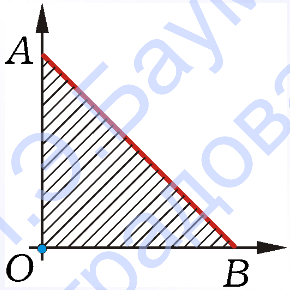

Рис. 1

Рассмотрим множество точек треугольника **OAB** . Точка с координатами $(0,\ 0)$ является наименьшим элементом этого множества.
Максимальными элементами являются все точки, лежащие на стороне AB .
Наибольшего элемента нет.
#

Пусть $(A, \leq)$ — упорядоченное множество и $B \subseteq A$.

Элемент $a \in A$ называется **верхней** (соответственно **нижней**) **гранью множества** B, если для всех элементов $x \in B$ имеет место $(x \leq a)$ (соответственно $(x \geq a)$).

Точной верхней гранью B называют наименьший элемент множества всех верхних граней множества B и обозначают $\sup B$

Точной нижней гранью B называют наибольший элемент множества всех нижних граней и обозначают($\inf B$).

Множество всех верхних (нижних) граней множества B называют **верхним (нижним) конусом** B и обозначают B^{∇} (соответственно B^{Δ}).

Элементы $\sup B$ и $\inf B$ могут не принадлежать множеству B.
(наибольший и наименьший элементы множества B всегда принадлежат множеству B)
Точная верхняя (нижняя) грань множества существует не всегда.

Пример 4.8. На числовой прямой с „выколотой“ точкой b для полуинтервала $[a, b)$ множество верхних граней есть $(b, +\infty)$, но точной верхней грани нет.

Рис. 2

Пример 4.9.

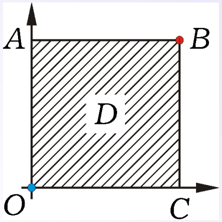

Рис. 3

Рассмотрим множество D точек прямоугольника **OABC** отношением порядка $(a,\ b) \le (c, d)$, если и только если $a \le c$ и $b \le d$.
Точка O является точной нижней гранью, а точка B — точной верхней гранью этого множества. Обе точки принадлежат множеству.

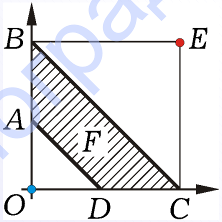

Рис. 4

Рассмотрим множество **F** с тем же отношением порядка.
Точная нижняя грань (точка O) и точная верхняя грань (точка E) множества F существуют, но не принадлежат множеству.

Упорядоченное множество $(M, \leq)$ называют **вполне упорядоченным**, если его любое непустое подмножество имеет наименьший элемент. ▮

Множество натуральных чисел с отношением естественного числового порядка вполне упорядоченное.▮

Множество целых чисел не вполне упорядоченное, поскольку оно не имеет наименьшего элемента. ▮

Аналогично множества рациональных и действительных чисел не являются вполне упорядоченными. ▮

Для **упорядоченных множеств** справедлив принцип двойственности .

Пусть $(M, \leq)$ — произвольное упорядоченное множество.

Тогда любое утверждение, доказанное для порядка $\leq$, останется справедливым для двойственного порядка $\geq$, если в нем:

1) порядок $\leq$ заменить на порядок $\geq$ и наоборот;
2) наименьший (минимальный) элемент заменить наибольшим (максимальным) элементом и наоборот;
3) $\inf$ заменить на $\sup$ и наоборот.

Например, если для некоторого $a \in M$ и для $B \subseteq M$ мы доказали, что $a = \sup B$ при заданном отношении порядка, то для двойственного порядка $a = \inf B$.

Взаимно двойственные определения: если в любом определении, связанном с упорядоченным множеством, произвести взаимные замены согласно принципу двойственности, то получится новое определение, называемое двойственным к исходному.

Определение наибольшего (максимального) элемента множества двойственно к определению наименьшего (минимального) элемента, и наоборот.

Наглядное представление упорядоченных множеств.

Упорядоченное множество можно графически изобразить в виде **диаграммы Хассе**.

На этой диаграмме элементы множества изображаются кружочками.

При этом если элемент b **доминирует** над элементом a, то кружочек, изображающий элемент b, располагается выше кружочка, изображающего элемент a, и соединяется с ним прямой линией. Иногда для большей наглядности из a в b ведут стрелку.

Диаграммы Хассе для упорядоченных множеств делителей чисел 2, 6, 30 по отношению делимости.

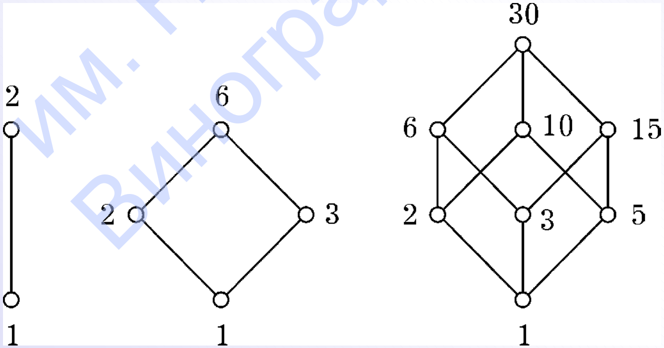

Рис. 5

ОТНОШЕНИЕ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ .

(Материал для самостоятельного изучения)

Пример 4.10. На множестве $\mathbb{R}$ действительных чисел зададим отношение $a \equiv_{(\mathrm{mod}\,1)} b$, полагая, что числа a и b равны по модулю 1 тогда и только тогда, когда число $a-b$ является целым.

Из определения следует, что каждое число по модулю 1 равно своей дробной части
Так как отношение $\equiv_{(\mathrm{mod}\,1)}$ определено через равенство, все свойства отношения эквивалентности для него выполняются.
Каждый класс эквивалентности будет содержать числа с равными дробными частями.

Каждый класс эквивалентности по данному отношению однозначно определяет некоторое число из полуинтервала $[0,\,1)$.
Наоборот, каждому числу $\gamma \in [0,\,1)$ однозначно сопоставляется класс эквивалентности, состоящий из всех действительных чисел, дробная часть которых равна γ.

Таким образом, фактор-множество $\mathbb{R}/\equiv_{(\mathrm{mod}\,1)}$ и полуинтервал $[0,\,1)$ на числовой прямой находятся во взаимно однозначном соответствии.

Связь между понятиями эквивалентности и отображения.

Для любого отношения эквивалентности ρ на множестве A можно определить отображение $f_\rho\colon A \to A/\rho$, сопоставив каждому $x \in A$ содержащий его класс эквивалентности.
$f_\rho(x) = [x]_\rho$
Это *отображение сюръективно*, так как каждый элемент множества A принадлежит некоторому классу эквивалентности, т.е. для каждого $[x]_\rho \in A/\rho$ справедливо $[x]_\rho = f_\rho(x)$.

Отображение f_ρ, определенное таким образом, называют **канонической сюръекцией** множества A.

Любое отображение однозначно определяет некоторое отношение эквивалентности.

Теорема 2. Для любого *отношения эквивалентности* на множестве A множество классов эквивалентности образует разбиение множества A.
Обратно, любое разбиение множества A задает на нем отношение эквивалентности, для которого классы эквивалентности совпадают с элементами разбиения.

◄ Отношение эквивалентности ρ на множестве A определяет некоторое разбиение этого множества.
Каждый элемент множества A принадлежит некоторому классу эквивалентности по отношению ρ т.к. для любого $x \in A$ справедливо $x \in [x]_\rho$ ($x \rho x$).
Множество всех классов эквивалентности по отношению ρ образует разбиение исходного множества A.

Т. о. , любое отношение эквивалентности однозначно определяет некоторое разбиение.

Пусть $(B_i)_{i\in I}$ — некоторое разбиение множества A.
Рассмотрим отношение ρ, такое, что

$$x\,\rho\,y \Leftrightarrow (\exists i \in I)(x \in B_i) \wedge (y \in B_i).$$

Введенное отношение ρ рефлексивно и симметрично.
Если для любых x, y и z имеет место $x\,\rho\,y$ и $y\,\rho\,z$, то x, y и z в силу определения отношения ρ принадлежат одному и тому же элементу B_i разбиения.
Следовательно, $x\,\rho\,z$ и отношение ρ транзитивно.
Таким образом, ρ — эквивалентность на A. ▶

Любая эквивалентность определяет единственное разбиение и наоборот.

Теорема 3. Пусть $f\colon A \to B$ — произвольное отображение. На множестве A определим отношение ρ_f : $(x,\,y) \in \rho_f$, если и только если $f(x) = f(y)$. Это отношение ρ_f является отношением эквивалентности, причем существует биекция фактор-множества A/ρ_f на множество $f(A)$.

◄ Рефлексивность : $f(x) = f(x)$;
Симметричность : $f(x) = f(y)$ и $f(y) = f(x)$;
Транзитивность : $f(x) = f(y) \wedge f(y) = f(z) \Rightarrow f(x) = f(z)$;
т.е. ρ_f — эквивалентность.

$\varphi\colon A/\rho_f \to f(A)$ $\varphi([x]_{\rho_f}) = f(x)$. Каждому классу эквивалентности поставлен в соответствие единственный элемент $y \in f(A)$ (отображение определено корректно).
φ — биекция (инъекция и сюръекция одновременно).
Пусть классы эквивалентности $[x]_{\rho_f}$ и $[y]_{\rho_f}$ не совпадают.
В силу теоремы 2 они не пересекаются, т.е. x не эквивалентно y.
Из определения отношения ρ_f следует, что $f(x) \neq f(y)$.
Таким образом, φ — инъекция.
Если элемент $u \in f(A)$, то найдется такой элемент $x \in A$, что $u = f(x) = \varphi([x]_{\rho_f})$, т.е. φ — сюръекция.
Итак, φ — биекция. ►

Следовательно, в силу доказанных теорем 2 и 3 существует связь между тремя понятиями — отображением множества, отношением эквивалентности на множестве и разбиением множества.

Но **неверно**, что существует взаимно однозначное соответствие между отображениями и отношениями эквивалентности.
Два разных отображения могут определять одно и то же разбиение отображаемого множества, тем самым задавая на нем одно и то же отношение эквивалентности.

Пример 4.11.
a. Любое биективное отображение $f\colon A \to B$ задает на A одно и то же разбиение — тривиальное разбиение на одноэлементные множества.
b. Тождественное отображение множества целых чисел и отображение, сопоставляющее каждому целому n число $n+1$, задают одинаковые разбиения множества целых чисел.

Отношение порядка

Пример 4.12. Рассмотрим множество действительных чисел $\mathbb{R}$ с естественным числовым порядком.

Пусть $a < c$.
Для любых a и c найдется такое b, что $a < b < c$.
Отношение порядка на множестве действительных чисел является плотным.
Поэтому отношение доминирования будет пустым.

Пустым будет и отношение доминирования, ассоциированное с естественным числовым порядком на множестве рациональных чисел.

На множестве целых чисел с естественным числовым порядком отношение доминирования не пусто.
$1 \lhd 2$, $-5 \lhd -4$;
между 1 и 2 не существует „промежуточный" элемент.
Записывать $1 \lhd 3$ **неверно**, что , поскольку между единицей и тройкой существует „промежуточный" элемент — двойка.