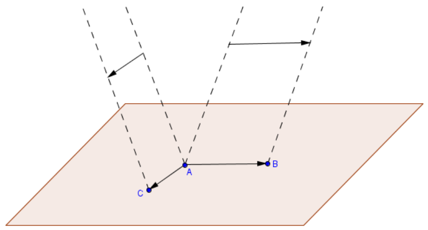
Produit scalaire dans l'espace

I. Produit scalaire dans l'espace

1. Différentes expressions du produit scalaire.

Définition:
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace, et A,B et C trois points tels que:
$\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$. Il existe au moins un plan P contenant les points A, B et C.
On appelle **produit scalaire** de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$ le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ calculé dans le plan P.



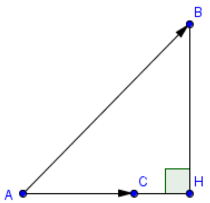
Toutes les propriétés dans le plan vues en Première sont conservées dans l'espace.

Définition 1: ***(rappel)***
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. On appelle produit scalaire de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$, le nombre réel défini par: $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$
d'où si $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ *et* $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ $\qquad \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - CB^2)$.

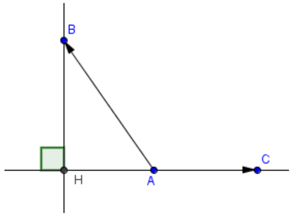
Définition 2: ***(rappel)***
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan.
- Si l'un des deux vecteurs est nul alors le produit scalaire est nul.
- Si les deux vecteurs sont non nuls alors $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$ d'où $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$
-

Définition 3: ***Avec des projections orthogonales. (rappel)***
Soient A, B et C 3 points et H le projeté orthogonal de B sur (AC).

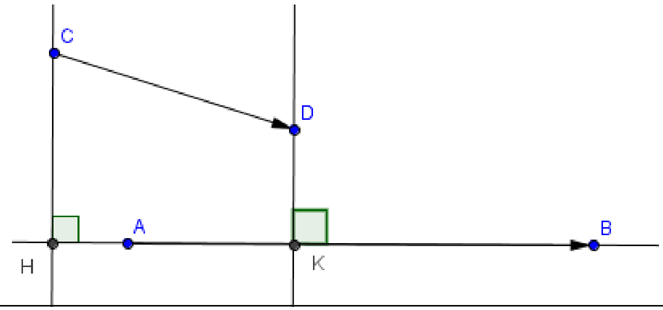
- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AH \times AC$
Si $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont de même sens.



- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -AH \times AC$
Si $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont de sens contraires.



- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{HK}$ H étant le projeté orthogonal de C sur (AB) et K celui de D sur (AB)



Propriétés:
Pour tout vecteur $\vec{u}$, $\vec{v}$, *et* $\vec{w}$ et pour tout réel k, on a:
- $\vec{u}.\vec{u} = \vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$ est appelé carré scalaire de $\vec{u}$.
- $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$
- $(k\vec{u}).\vec{v} = k \times (\vec{u}.\vec{v}) = \vec{u}.(k\vec{v})$
- $\vec{u}.(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$
- $(\vec{u} + \vec{v}).(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$
- $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = (\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2$
- $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = (\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2$

Application 1 :
On considère le tétraèdre ABCD, dans lequel la face ABC est un triangle équilatéral de côté 1, et les faces ACD et BCD sont des triangles isocèles rectangles en C.
1. Calculer les produits scalaires $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{CB}$, puis $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}$.
2. Soit H le pied de la hauteur issue de B dans le triangle ABD. En exprimant d'une autre façon le produit scalaire $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}$, déterminer la position de H sur le segment [AD].

2. Orthogonalité

Propriété:
- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls sont orthogonaux si, et seulement si, $\vec{u}.\vec{v} = 0$
- Deux droites D et D' de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{u'}$ sont orthogonales si, et seulement si, $\vec{u}.\overrightarrow{u'} = 0$

Application 2:
SABCD est une pyramide à base carrée de sommet S dont toutes les arêtes ont la même longueur a. Calculer, en fonction de a, les produits scalaires suivants:
• $\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SB}$ • $\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SC}$ • $\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{AC}$ • $\overrightarrow{SC}.\overrightarrow{AB}$

Application 3:
Soit ABCD un tétraèdre régulier d'arête de longueur a.

1. Calculer les produits scalaires $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$.
2. Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$. Que peut-on en déduire pour les droites (AB) et (CD)?

3. Expression analytique du produit scalaire.

Propriété:
Dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour coordonnées respectives $(x; y; z)$ et $(x'; y'; z')$ alors $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy' + zz'$.

En particulier $\vec{u}.\vec{u} = x^2 + y^2 + z^2$ et donc $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Application 4:
L'espace est muni d'un repère orthonormé . On considère les points A(1; 5; $-$3), B (3; 9; 3) et C (9; 7; $-$7). Soit I le milieu de [BC].

1. Démontrer que le triangle ABC est rectangle en A.
2. Déterminer une valeur approchée à 0,01 près de l'angle $\widehat{BAI}$ en radians.

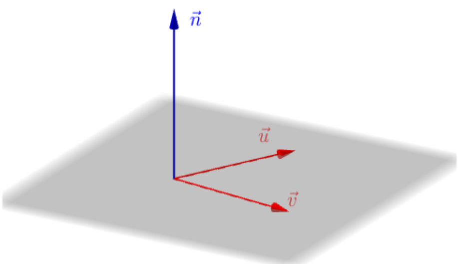
II. Vecteur normal, projeté orthogonal

1. Vecteur normal à un plan.

Définition : Un vecteur non nul $\vec{n}$ de l'espace est **normal** à un plan *P* lorsqu'il est orthogonal à tout vecteur admettant un représentant dans *P*.

Propriété : - Soit un point A et un vecteur $\vec{n}$ non nul de l'espace.
L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$ est un plan de l'espace.
- Réciproquement, soit P un plan de l'espace. Pour tout point A de P et tout vecteur normal $\vec{n}$ de P, P est l'ensemble des points tels que $\overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$

Théorème : Un vecteur non nul $\vec{n}$ de l'espace est normal à un plan *P*, s'il est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de *P*.



Méthode : Déterminer si un vecteur est normal à un plan
Il faut montrer qu'il est normal à 2 vecteurs non colinéaires du plan

Vidéo https://youtu.be/aAnz_cP72Q4

Application 5:
ABCDEFGH est un cube d'arête a.

1. Calculer $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{FH}$.
2. Démontrer que $\overrightarrow{AG}$ est un vecteur normal au plan (FHC).

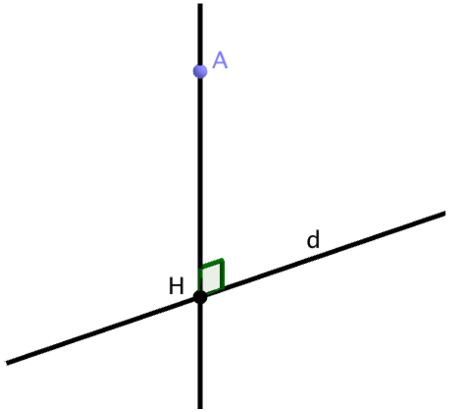
Méthode : Déterminer un vecteur normal à un plan défini par 2 vecteurs non colinéaires
On doit résoudre $\begin{cases} \vec{n}.\vec{u} = 0 \\ \vec{n}.\vec{v} = 0 \end{cases}$

Vidéo https://youtu.be/IDBEI6thBPU

Application 6:
Soit $\vec{u}(1; 2; -3)$ et $\vec{v}(-2; 1; 3)$ 2 vecteurs dirigeant un plan P. Déterminer $\vec{n}(a; b; c)$, un vecteur normal de P.

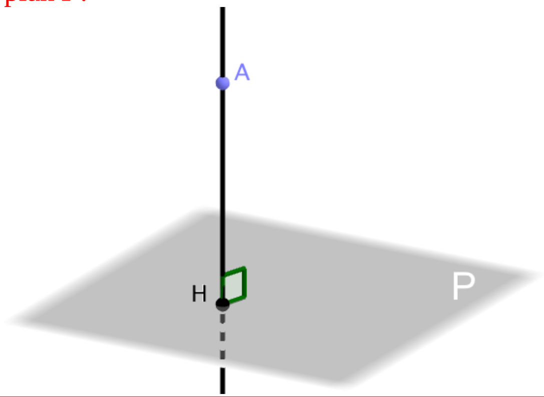
2. Projection orthogonale d'un point sur une droite

Définition : Soit un point A et une droite *d* de l'espace.
Le projeté orthogonal de A sur *d* est le point H appartenant à *d* tel que la droite (AH) soit perpendiculaire à la droite *d*.



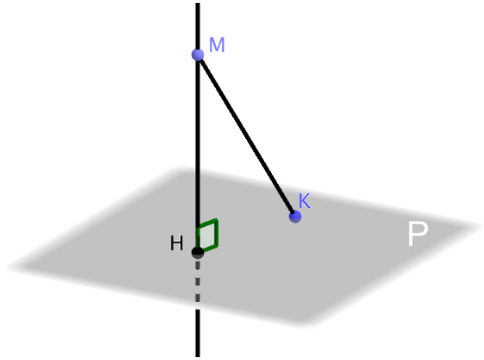
3. Projection orthogonale d'un point sur un plan

Définition : Soit un point A et un plan P de l'espace.
Le projeté orthogonal de A sur P est le point H appartenant à P tel que la droite (AH) soit orthogonale au plan P.



Propriété : Le projeté orthogonal d'un point M sur un plan P est le point de P le plus proche de M.

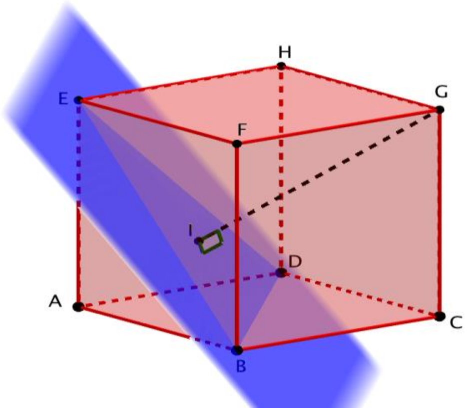
Démonstration au programme :
Soit H le projeté orthogonal du point M sur le plan P.
Supposons qu'il existe un point K du plan P plus proche de M que l'est le point H.



Méthode : Utiliser la projection orthogonale pour déterminer la distance d'un point à un plan

Vidéo https://youtu.be/1b9FtX4sCmQ

Application 7:
On considère un cube $ABCDEFGH$ et le repère orthonormé $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$.
Calculer la distance du point G au plan BDE.



III. Equations cartésiennes d'un plan

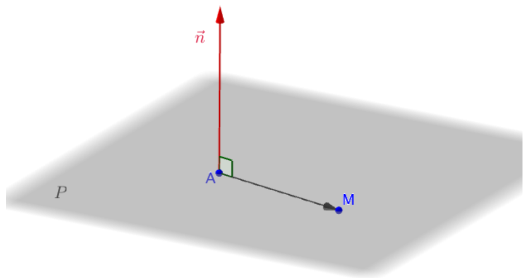
Propriété: *Caractérisation d'un plan par un point et un vecteur normal.*

Soit $\vec{n}$ un vecteur non nul et A un point de l'espace. L'unique plan P passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$ est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$

Propriété: *Equation cartésienne d'un plan*

- Dans un repère orthonormé, un plan P de vecteur normal $\vec{n}(a;b;c)$ a une équation de la forme $ax + by + cz + d = 0$
- Réciproquement, si a, b, et c ne sont pas tous trois nuls, l'ensemble des points M$(x;y;z)$tels que $ax + by + cz + d = 0$ est un plan de vecteur normal $\vec{n}(a;b;c)$.

Démonstration :



- Soit un point $A(x_A;y_A;z_A)$ de P.
$M(x;y;z) \in P \Leftrightarrow$
$\overrightarrow{AM}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux$\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$ $\Leftrightarrow$
$a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$
$\Leftrightarrow ax + by + cz + d = 0$
avec $d = -ax_A - by_A - cz_A$.

- Réciproquement, supposons par exemple que $a \neq 0$ (a, b et c sont non tous nuls).
On note E l'ensemble des points $M(x;y;z)$ vérifiant l'équation
$ax + by + cz + d = 0$
Alors le point $A\left(-\frac{d}{a};0;0\right)$ vérifie l'équation . $ax + by + cz + d = 0$
Et donc $A \in E$.
Soit un vecteur $\vec{n}$ $(a;b;c)$. Pour tout point $M(x;y;z)$, on a :
$\overrightarrow{AM}.\vec{n} = a\left(x + \frac{d}{a}\right) + b(y - 0) + c(z - 0) = ax + by + cz + d = 0.$
E est donc l'ensemble des points $M(x;y;z)$ tels que $\overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$.
Donc l'ensemble E est le plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.

Méthode : Déterminer une équation cartésienne de plan
On utilise un vecteur normal au plan et un point du plan

Vidéo **https://youtu.be/s4xqI6IPQBY**

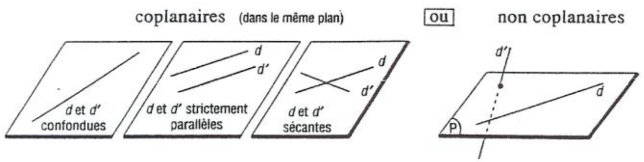
Application 8:
L'espace est muni d'un repère orthonormé.
Donner une équation cartésienne du plan P passant par le point A $(-2; 1; 3)$ et orthogonal à (BC) avec B$(1; -2; 2)$ et C$(4; 1; -1)$.

Application 9:
L'espace est muni d'un repère orthonormé.
1. Justifier que les points A (3; 1; 2) , B(5; 1; -4) et C(-1; 0; 3) déterminent un plan
2. Déterminer une équation cartésienne de ce plan . (on déterminera un vecteur normal au plan)

IV. Intersection de droites et de plans

1. Intersection de deux droites de l'espace

Des droites de l'espace peuvent être :



Méthode : Déterminer la position de 2 droites

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ vecteurs directeurs respectifs de d et d'.

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires les droites peuvent être
  - parallèles confondues. Dans ce cas un point quelconque de d appartiendra à d'.
  - strictement parallèles. Un point de d n'appartiendra pas à d'.
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires les droites peuvent être
  - sécantes. On détermine leur point d'intersection. S'il n'existe pas, elles sont
  - non coplanaires.

Il y a donc 4 cas.

Vidéo
https://www.bing.com/videos/search?q=droites+paralleles+dans+l%27espace&&view=detail&mid=D08980A8DA396EDEF89AD08980A8DA396EDEF89A&&FORM=VRDGAR&ru=%2Fvideos%2Fsearch%3Fq%3Ddroites%2Bparalleles%2Bdans%2Bl%2527espace%26FORM%3DHDRSC3

Vidéo https://www.youtube.com/watch?v=MG2HiGfRzPU

Vidéo https://www.youtube.com/watch?v=6k9_kIVlwgw

Vidéo https://www.youtube.com/watch?v=4eWgwFBjOzA

Application 10:
Dans chacun des cas suivants, déterminer la position relative des droites d et d'.

a) d $\begin{cases} x = 3t+1 \\ y = 4t \\ z = -t+1 \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$ et d' $\begin{cases} x = -9s+4 \\ y = -12s+4 \\ z = 3s \end{cases}$ $s \in \mathbb{R}$

b) d $\begin{cases} x = t+1 \\ y = -3t+2 \\ z = -3t+3 \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$ et d' $\begin{cases} x = s \\ y = -3s-3 \\ z = -s+1 \end{cases}$ $s \in \mathbb{R}$

c) d $\begin{cases} x = 2t-1 \\ y = t \\ z = -3t+1 \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$ et d' $\begin{cases} x = -6s+3 \\ y = -3s+2 \\ z = -6+9s \end{cases}$ $s \in \mathbb{R}$

d) d $\begin{cases} x = t+1 \\ y = 2t-3 \\ z = -t+2 \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$ et d' $\begin{cases} x = 3s+2 \\ y = -s-1 \\ z = s+1 \end{cases}$ $s \in \mathbb{R}$

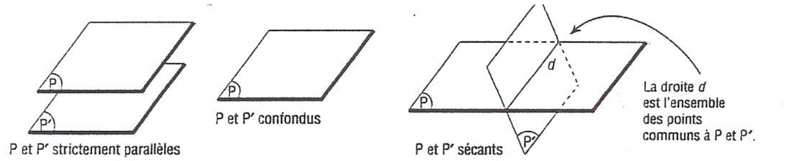
Application 11 :
Dans un repère orthonormé, on considère les droites d et d' d'équations paramétriques:

d $\begin{cases} x = 3t+1 \\ y = 2t \\ z = -t+1 \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$ et d' $\begin{cases} x = 2+s \\ y = 1 \\ z = 1+3s \end{cases}$ $s \in \mathbb{R}$

Montrer que d et d' sont orthogonales. Sont- elles perpendiculaires?

2. Intersection de deux plans.

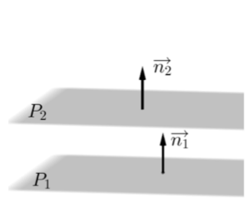
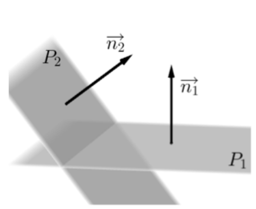
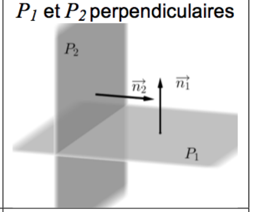
Des plans de l'espace peuvent être:



Méthode : Déterminer la position de 2 plans

Soient $\vec{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ des vecteurs normaux respectifs de P et P'.

- Si $\vec{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ sont colinéaires les plans peuvent être
  - parallèles confondus. Dans ce cas un point quelconque de P appartiendra à P'.
  - strictement parallèles. Un point de P n'appartiendra pas à P'.
- Si $\vec{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ ne sont pas colinéaires les plans sont sécants suivant une droite dont on détermine une équation paramétrique.

Positions relatives	P_1 et P_2 parallèles	P_1 et P_2 sécants	
			P_1 et P_2 perpendiculaires
- Plan P_1 de vecteur normal $\vec{n_1}$ - Plan P_2 de vecteur normal $\vec{n_2}$			
Vecteurs	$\vec{n_1}$ et $\vec{n_2}$ colinéaires	$\vec{n_1}$ et $\vec{n_2}$ non colinéaires	$\vec{n_1}$ et $\vec{n_2}$ orthogonaux $\vec{n_1}.\vec{n_2}=0$

Vidéo https://youtu.be/4dkZ0OQQwaQ

Application 12:

On considère les plans P et P' d'équations respectives:

P : $2x + y - 2 = 0$ P': $x + 3y + 7z - 11 = 0$

1. Démontrer que les deux plans sont sécants.
2. Déterminer une équation paramétrique de la droite d, intersection de P et P'.

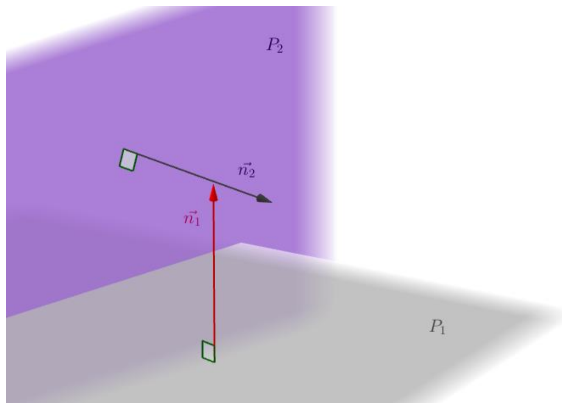
Application 13:

Soient trois plans P, Q et R d'équations respectives:

P : $x + y + z + 3 = 0$ Q: $2x + 2y + 2z + 7 = 0$ R : $3x + y + 2 = 0$

1. Déterminer un vecteur normal à chaque plan.
2. Etudier l'intersection des plans P et Q.
3. Etudier l'intersection des plans P et R.

Propriété :
Deux plans sont perpendiculaires lorsqu'un vecteur normal de l'un est orthogonal à un vecteur normal de l'autre.



Méthode : Démontrer que deux plans sont perpendiculaires

On montre que leurs vecteurs normaux sont orthogonaux

Vidéo https://youtu.be/okvo1SUtHUc

Application 14:

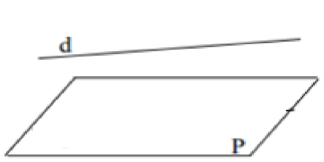
Dans un repère orthonormé, les plans P et P' ont pour équations respectives $2x + 4y + 4z - 3 = 0$ et $2x - 5y + 4z - 1 = 0$.

Démontrer que les plans P et P' sont perpendiculaires.

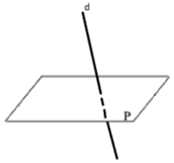
4. <u>Intersection d'une droite et d'un plan.</u>

Un plan et une droite de l'espace peuvent être:

d est contenue dans P



d est parallèle à P

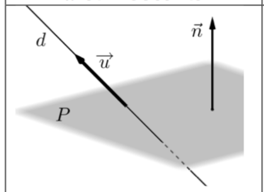
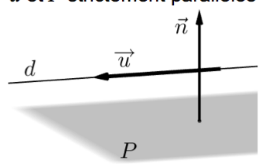
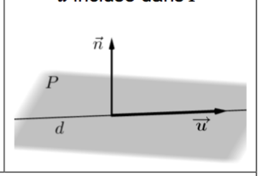


d et P sont sécants

<u>Méthode :</u> Déterminer la position d'une droite et d'un plan

Soit $\vec{u}$ un vecteur directeur de d et $\vec{n}$ un vecteur normal de P.

- Si $\vec{u}.\vec{n} = 0$ alors la droite d peut être
  - contenue dans le plan P . Dans ce cas, tout point de d est contenue dans P.
  - strictement parallèle à P.
- Si $\vec{u}.\vec{n} \neq 0$ alors la droite d est sécante à P en un point dont on détermine les coordonnées.

	d et P sécants	d et P parallèles	
Positions relatives - Droite d de vecteur directeur $\vec{u}$ - Plan P de vecteur normal $\vec{n}$		d et P strictement parallèles 	d incluse dans P 
Vecteurs	$\vec{u}$ et $\vec{n}$ non orthogonaux	$\vec{u}$ et $\vec{n}$ orthogonaux	
Produit scalaire	$\vec{u}.\vec{n} \neq 0$	$\vec{u}.\vec{n} = 0$	

Vidéo https://youtu.be/BYBMauyizhE

Application 15:

Soient A $(2; 1; -2)$ et B $(-1; 2; 1)$. P le plan d'équation: $2x + 2y + z - 2 = 0$
Prouver que (AB) et P sont sécants et déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.

Application 16:

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
Soit le plan P d'équation $4x - 2y + 6z = 1$ et d la droite dirigée par le vecteur $\vec{u} = \vec{\imath} + 5\vec{\jmath} + \vec{k}$ passant par A $(-1; 1; 2)$.
Prouver que P et d sont strictement parallèles.