CM 5 (Combinatoire)

Adrian Tanasă

Licence Informatique

université de Bordeaux

Rappel - ce qu'on a vu la semaine dernière

- Arbres binaires complets (ABC)
- Comptage d'ABC - formule de récurrence (nombres de Catalan)
- Mots de Dyck et chemins de Dyck
- Codage des ABC par de mots de Dyck
- Bijection mots de Dyck - ABC
- Principe de réflexion et formule pour les nombres de Catalan :

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

$$C_n = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!}$$

Plan du cours d'aujourd'hui

- Autre description du codage des ABC par les mots de Dyck
- Bijection de Rémy sur les ABC
  (2ème preuve de la formule pour les nombres de Catalan)
- Arbres ternaires

Codage des ABC par les mots de Dyck

Rappel CM précèdent :
codage des ABC par un parcours préfixe de l'ABC
(a pour un nœud interne, b pour une feuille, on ne code pas la dernière feuille)

2ème façon de définir le même codage :
à partir de la description récursive des arbres.
Notation :
(g, d) pour l'arbre dont les sous-arbres sont g et d
Définition récursive du codage :

- l'ABC (trivial) réduit à sa racine est codé par ε
- récursivement, soit $t = (g, d)$ un arbre non réduit à sa racine :
  soient w_g et w_d les mots qui codent les arbres g et d ;
  alors, le mot qui code t est :

$$w_t = a \cdot w_g \cdot b \cdot w_d .$$

2ème preuve formule nombres de Catalan

rappel :

$$C_0 = 1, \ C_n = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!}$$

Exo. : Calculer C_{n+1}/C_n.
On trouve $C_{n+1}/C_n = \frac{2(2n+1)}{n+2}$ soit

$$(n+2)C_{n+1} = 2(2n+1)C_n. \tag{1}$$

Soit maintenant la suite

$$u_0 = 1, \ (u_n)_{n\geq 0}$$

définite par

$$u_{n+1} = \frac{2(2n+1)}{n+2}u_n, \forall n \geq 0$$

Cette suite est donc une (ré-écriture) de la suite de Catalan.

Stratégie preuve

Donc, pour (re)prouver que la suite de comptages des ABC est la suite des nombres de Catalan, il suffit de prouver qu'elle satisfait la relation de récurrence (1) ci-dessus.

C'est ce qu'on va faire, en interprétant les expressions à gauche et à droite de l'égalité comme comptant quelque chose, et en montrant une bijection (combinatoire bijective)

Soit C_n le nombre d'ABC à n nœuds
(dont on veut prouver que c'est égal aux nombres de Catalan)

1. Interprétation du produit $2(2n+1)C_n$:
   1.1 C_n : choix d'un ABC à n nœuds
   1.2 $2n+1$: choix d'un nœud quelconque de l'arbre (n nœuds internes, donc $n+1$ feuilles, donc $2n+1$ nœuds).
   1.3 facteur 2 : choix d'une "direction", Gauche ou Droite.
2. Interprétation du produit (n + 2)Cn+1
   2.1 C_{n+1} : choix d'un arbre binaire complet à $n+1$ noeuds
   2.2 $n+2$: choix d'une feuille de l'arbre

Il suffit donc de montrer qu'il y a, pour n'importe quel n, autant

1. de couples formés d'un arbre de taille n, avec un nœud marqué, et d'une direction Gauche ou Droite ;
2. que d'arbres de taille $n+1$, avec une feuille marquée.

La bijection de Rémy

- On part d'un arbre binaire complet t, avec un nœud marqué x, et d'un choix de direction d.
- On remplace le nœud x par un nouveau nœud interne, qui a
  1. comme enfant dans la direction d, une nouvelle feuille
  2. comme enfant dans l'autre direction, le nœud x (avec tout son sous-arbre)
- On enlève la marque de x, et on marque à la place la nouvelle feuille.
- Le résultat est un arbre binaire complet t', avec un nœud interne de plus que t, et avec une feuille marquée.

La bijection réciproque

- On part d'un ABC t', avec une feuille f marquée.
- On note la direction : Gauche si f est une feuille gauche, Droite si f est une feuille droite.
- L'arbre est complet : f à donc un nœud "frère", qu'on appelle x.
- On supprime la feuille f et son parent, et on colle à la place du parent, le nœud x (et son sous-arbre).
- On marque le nœud x dans l'arbre t obtenu.
- On a obtenu un arbre t, qui a un nœud interne de moins que t', un nœud marqué, et une direction.

Remarque : Si on fait une transformation, puis l'autre, on revient à son point de départ : c'est une bijection et sa bijection réciproque !

Arbres ternaires

Définition :

Un **arbre ternaire complet** est un arbre dans lequel chaque nœud interne (cad nœud autre qu'une feuille) a exactement 3 enfants.

La **taille** d'un arbre ternaire complet est son nombre de nœuds internes.