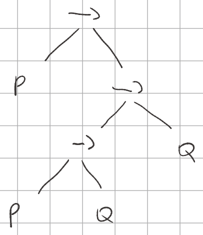
TD 2

Exercice 1

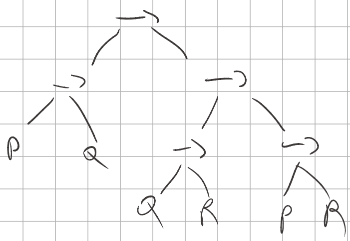
1.

$P \rightarrow (P \rightarrow Q) \rightarrow Q \equiv P \rightarrow ((P \rightarrow Q) \rightarrow Q)$



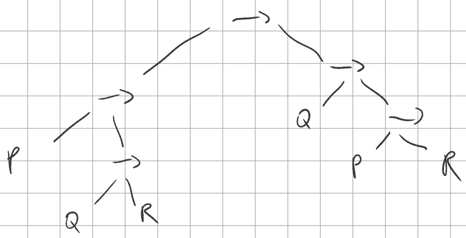
2.

$(P \rightarrow Q) \rightarrow (Q \rightarrow R) \rightarrow P \rightarrow R \equiv (P \rightarrow Q) \rightarrow ((Q \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow R))$



3.

$(P \rightarrow Q \rightarrow R) \rightarrow Q \rightarrow P \rightarrow R \equiv (P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \rightarrow (Q \rightarrow (P \rightarrow R))$



Exercice 2

$P \to Q \to R,\ P \to Q,\ P \vdash R$

Posons $\Gamma = \{P \to Q \to R,\ P \to Q,\ P\}$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma, Q, P \vdash R}{\Gamma, Q \vdash P \to R} \quad \dfrac{}{\Gamma, Q \vdash P}\,h}{\Gamma, Q \vdash R}\,mp(P)}{\Gamma \vdash Q \to R}\,\to_i \qquad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash Q \to R}\,h \quad \dfrac{}{\Gamma \vdash P}\,h}{\Gamma \vdash Q}\,mp(P)}{P \to Q \to R,\ P \to Q,\ P \vdash R}\,mp(Q)$$

(recopier feuille)

Exercice 6 :

" règle $\to_{i,k}$ "

$$\dfrac{\Gamma, A_1, A_2, \ldots, A_k \vdash B}{\Gamma \vdash A_1 \to A_2 \to \cdots \to A_k \to B}\,\to_{i,k}$$

On doit montrer : pour tout $k \geq 1$, la règle $\to_{i,k}$ est une règle dérivée

(par récurrence sur k)

<u>cas $k=1$</u> : $\to_{i,1}$ est la règle de base

cas héréditaire

Soit $n \geq 1$, on suppose que $\rightarrow_{i,n}$ est une règle dérivée (et on doit prouver que $\rightarrow_{i,n+1}$ est une règle dérivée)

ordre de preuve partie)

$$\cfrac{\cfrac{\Gamma, A_1, A_2, \dots, A_n, A_{n+1} \vdash B}{\Gamma, A_1, A_2, \dots, A_n \vdash A_{n+1} \rightarrow B}\rightarrow_i}{\Gamma \vdash A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow \dots \rightarrow A_n \rightarrow (A_{n+1} \rightarrow B)}\rightarrow_{i,n}$$

Exercice 7

$v_1, v_2, v_3, \dots, v_k$: des variables propositionnelles (toutes $\neq$)

$B_1, B_2, B_3, \dots, B_k$: des formules

A : une formule

La formule $A_{[v_1/B_1, v_2/B_2, \dots, v_k/B_k]}$ est définie par

- si A est une formule atomique v
  - si n'est pas une des variables $v_1, \dots, v_k$, A
  - si $v = v_i$: B_i
- si $A = \neg A'$, $\neg(A'_{[\dots]})$
- si $A = A_1 \wedge A_2$, $A_{1[\dots]} \wedge A_{2[\dots]}$

Exercice 10

$$(((P \to Q) \to P) \to P) \to Q \vdash Q$$

$$\underbrace{(((P \to Q) \to P) \to P)}_{\text{"Formule de Peirce" = tautologie}}$$

$$A = \{((P \to Q) \to P) \to P\}$$

$$\frac{}{\ldots, P \vdash P}\,h$$

$$\frac{}{\ldots \vdash A \to Q}\,h \qquad \frac{\ldots, P \vdash P}{A \to Q, (P \to Q) \to P, P \vdash ((P \to Q) \to P) \to P}\,\to_i$$

$$\frac{\ldots \vdash A \to Q \qquad A \to Q, (P \to Q) \to P, P \vdash ((P \to Q) \to P) \to P}{A \to Q, (P \to Q) \to P, P \vdash Q}\,mp(A)$$

$$\frac{}{A \to Q, (P \to Q) \to P \vdash (P \to Q) \to P}\,h \qquad \frac{A \to Q, (P \to Q) \to P, P \vdash Q}{A \to Q, (P \to Q) \to P \vdash P \to Q}\,\to_i$$

$$\frac{A \to Q, (P \to Q) \to P \vdash (P \to Q) \to P \qquad A \to Q, (P \to Q) \to P \vdash P \to Q}{A \to Q, (P \to Q) \to P \vdash P}\,mp(P \to Q)$$

$$\frac{}{A \to Q \vdash A \to Q}\,h \qquad \frac{A \to Q, (P \to Q) \to P \vdash P}{A \to Q \vdash A}\,\to_i$$

$$\frac{A \to Q \vdash A \to Q \qquad A \to Q \vdash A}{A \to Q \vdash Q}\,mp(A)$$