



Exam 2022-2023

I.

$$1. (P \vee Q) \rightarrow (R \wedge S) \vdash P \rightarrow R$$

$$\frac{\frac{\frac{\Pi_1, P \vdash R \vee a}{\Pi_1, P \vdash R \vee a} \vee_i}{\Pi_1, P \vdash R \vee a} \vee_i}{\Pi_1, P \vdash R \vee a} \vee_i$$

$$2. (P \rightarrow \neg Q) \vee (P \rightarrow R) \vdash Q \rightarrow P \rightarrow R$$

[illegible]

3. (LK)  $Q \rightarrow P \rightarrow R \vdash \neg R \rightarrow (\neg P \vee \neg Q)$

[illegible]



II -

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash \neg B}{\Gamma \vdash \neg(A \rightarrow B)} \text{ règle } A$$

$$\Gamma = \{A, \neg B\}$$

$$A, \neg B \vdash \neg(A \rightarrow B)$$

$$\begin{array}{l} \sqrt{A} = V \\ \sqrt{B} = F \end{array} \quad \left| \quad \sqrt{\neg(A \rightarrow B)} = V \right.$$

règle alternée

$$\begin{array}{c} \neg \text{ intro} \quad \frac{\Gamma'' \vdash A}{\Gamma'' \vdash \neg A} \\ \frac{\Gamma'' \vdash \neg A}{\Gamma, A \rightarrow B, A \vdash \perp} \neg \text{ elim} \\ \frac{\Gamma, A \rightarrow B, A \vdash \perp}{\Gamma, A \rightarrow B, A \vdash \perp} \text{ ex} \\ \frac{\Gamma, A \rightarrow B, A \vdash \perp}{\Gamma, A \rightarrow B \vdash \perp} \text{ ex} \\ \frac{\Gamma, A \rightarrow B \vdash \perp}{\Gamma \vdash \neg(A \rightarrow B)} \neg \text{ intro} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \neg \text{ elim} \quad \frac{\Gamma' \vdash B}{\Gamma' \vdash \neg B} \\ \frac{\Gamma' \vdash \neg B}{\Gamma, A \rightarrow B, A, \neg B \vdash \perp} \neg \text{ elim} \\ \frac{\Gamma, A \rightarrow B, A, \neg B \vdash \perp}{\Gamma, A \rightarrow B, \neg A \vdash \perp} \neg \text{ intro} \\ \frac{\Gamma, A \rightarrow B, \neg A \vdash \perp}{\Gamma, A \rightarrow B \vdash \perp} \neg \text{ elim} \\ \frac{\Gamma, A \rightarrow B \vdash \perp}{\Gamma \vdash \neg(A \rightarrow B)} \neg \text{ intro} \end{array}$$

FF ?

$$\frac{\Gamma \vdash (A \rightarrow C) \vee (B \rightarrow C)}{\Gamma \vdash (A \vee B) \rightarrow C} \text{ règle } B$$

$$\Gamma = \{(A \rightarrow C) \vee (B \rightarrow C)\}$$

$$\begin{array}{l} \sqrt{A} = V \\ \sqrt{B} = F \\ \sqrt{C} = F \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} \sqrt{((A \rightarrow C) \vee (B \rightarrow C))} = V \\ \sqrt{((A \vee B) \rightarrow C)} = F \end{array} \right.$$

$$\frac{\frac{\Pi \vdash (A \rightarrow C) \vee (B \rightarrow C)}{\Pi \vdash (A \vee B) \rightarrow C} \text{r\acute{e}gle-}\alpha}{\vdash} h$$

La r\^egle B est prouvable d'apr\^es l'arbre. Cependant, la valuation rend vraies les hypoth\^eses et fausse la conclusion, donc d'apr\^es notre th\^eor\^eme de correction, pas valide donc pas prouvable.

### III

D : "d\^ev\^eloppeur" et L : "langage de prog"

I(l) : "l est un langage impératif"

F(l) : "l est un langage fonctionnel"

P(d, l) : "le d\^ev\^eloppeur d pratique le langage l"

P(d) : "langage favori de d"

1. "Il existe un langage de programmation \`a la fois fonctionnel et impératif"

$$\exists (l : L), F(l) \wedge I(l)$$

2. "Tout d\^ev\^eloppeur pratique au moins un langage impératif"

$$\forall (d : D), \exists (l : L), P(d, I(l))$$

3. "Tout d\^ev\^eloppeur pratique son langage favori"

$$\forall (d : D), P(d, P(d))$$

4. "Il existe un d\^ev\^eloppeur qui ne pratique que son langage favori"

$$\exists (d : D), \forall (l : L), P(d, P(d)) \wedge \neg P(d, l) \wedge \neg (P(d) = l) \quad \times$$

$$\exists (d : D), (\forall (l : L), P(d, l) \rightarrow l = P(d)) \wedge P(d, P(d)) \quad \checkmark$$

5. "Aucun d\^ev\^eloppeur ne pratique tous les langages fonctionnels"

$$\forall (d : D), \forall (l : L), \neg P(d, I(l))$$

Rappel :

"5' de la logique" →

$$\forall (x: H), \exists (y: H), A(m, y) \wedge \neg(x=y) \wedge \neg A(m, x)$$

$$\exists (x: H), A(m, x) \wedge (\forall (y: H), A(m, y) \rightarrow x=y)$$

$$\exists (d: D), p(d, p(d)) \wedge (\forall (l: L), p(d, l) \rightarrow l = p(d))$$