Université de Bordeaux – 2021/22
UE Mathématiques approfondies **R. Coulangeon - G. Ricotta**

TD 1 L'anneau $\mathbb{Z}$

Exercice 1.

1. Calculer le quotient et le reste de la division euclidienne de 430 par 38. Peut-on en déduire, sans faire une nouvelle division, le quotient et le reste de la division euclidienne de 860 par 76 ?
2. Connaissant le reste de la division euclidienne d'un entier par 10, pouvez vous en déduire celui de la division euclidienne de cet entier par 5 ? par 6 ?

Exercice 2. Si on divise 4373 et 826 par un même nombre positif b on obtient 8 et 7 pour restes. Déterminer b.

Exercice 3. Connaissant la division euclidienne de deux entiers n et n' par un entier $b \geq 1$, donner un moyen simple de déterminer la division euclidienne de $n + n'$ par b.

Exercice 4.

1. Sachant que $6471 = 123 \times 52 + 75$, déterminer, sans faire la division, le quotient et le reste de la division euclidienne du nombre 6471 par chacun des nombres 123 et 52.
2. Déterminer par l'algorithme d'Euclide $\mathrm{PGCD}(585, 247)$ et $\mathrm{PGCD}(2006, 1789)$.

Exercice 5. Montrer que pour élément d de $\mathbb{Z}$, l'entier $d^2(d-1)(d+1)$ est divisible par 12.

Exercice 6.

1. Déterminer le reste de la division euclidienne de 35 par 11.
2. Montrer que $2^5 = 10 \mod 5$.
3. En déduire que $35^{57} - 7$ est un multiple de 11.
4. En procédant de manière analogue, montrer que $9518^{42} \equiv 4 \mod 5$.

Exercice 7.

1. Est-ce que 13 divise $2^{70} + 3^{70}$?
2. Quel est le reste de la division euclidienne par 17 de 7^{77} ?
3. L'entier $7^{1980^{1990}} - 3^{80^{90}}$ est-il divisible par 10 ?

Exercice 8. Soit n un élément de $\mathbb{Z}$ et a et b deux élément de $\mathbb{N}^*$. Soient q le quotient dans la division euclidienne de n par a et q' celui de q par b. Montrer que q' est aussi le quotient de n par le produit ab.

Exercice 9. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, les nombres $2n^2 + 2n$ et $2n + 1$ sont premiers entre eux, c'est-à-dire que leur pgcd est 1.

Exercice 10. Montrer que pour élément d de $\mathbb{Z}$, l'entier $d^2(d-1)(d+1)$ est divisible par 12.

Exercice 11. Déterminer les entiers n appartenant à $\mathbb{N}$ tels que $\mathrm{PGCD}(3n + 1, 2n) = 1$.

Exercice 12.

1. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a
   (a) $10^k \equiv 1 \mod 3$,
   (b) $10^k \equiv 1 \mod 9$,
   (c) $10^k \equiv (-1)^k \mod 11$.

2. Soit n un entier naturel, $a_k a_{k-1} \cdots a_1 a_0$ son écriture en base 10. Autrement dit, les a_i sont des entiers compris entre 0 et 9 (les *chiffres* du développement en base 10 de n) et on a

$$n = a_k.10^k + a_{k-1}.10^{k-1} + \cdots + a_0.10^0.$$

Montrer que

(a) $n \equiv a_0 \mod 2$,

(b) $n \equiv a_0 \mod 5$,

(c) $n \equiv a_0 + 10a_1 \mod 4$,

(d) $n \equiv a_0 + a_1 + \cdots + a_k \mod 3$,

(e) $n \equiv a_0 + a_1 + \cdots + a_k \mod 9$,

(f) $n \equiv a_0 - a_1 + \cdots + (-1)^k a_k \mod 11$.

En déduire des critères (bien connus...) de divisibilité par 2, 3, 4, 5, 9 et 11.

Exercice 13. Les nombres a, b, c étant des éléments non nuls de $\mathbb{Z}$, dire si les propriétés suivantes sont vraies ou fausses, en justifiant la réponse

1. S'il existe u et v des entiers tels que $au + bv = 1$, alors $\mathrm{PGCD}(a, b) = 1$.
2. S'il existe u et v des entiers tels que $au + bv = c$, alors $\mathrm{PGCD}(a, b) = c$.
3. Si 4 ne divise pas bc, alors b ou c est impair.
4. Si a divise b et b ne divise pas c, alors a ne divise pas c.

Exercice 14. Soient a et b deux entiers naturels, d leur PGCD et m leur PPCM.

1. Montrer que $\dfrac{ab}{d}$ est un entier et qu'il est divisible par m. En déduire que md divise ab.
2. Rappeler pourquoi il existe u et v dans $\mathbb{Z}$ tels que
$$au + bv = d. \tag{1}$$
En multipliant l'équation (1) par m, en déduire que ab divise dm.
3. Conclure que $ab = dm$.

Exercice 15.

1. Faire la liste des éléments de $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$, et déterminer leur ordre.
2. Donner les tables d'addition et de multiplication de $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$.

Exercice 16. Soient n un entier naturel non nul et k un entier relatif. On note $\overline{k}$ la classe de k modulo n. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. k et n sont premiers entre eux.
2. L'ordre de $\overline{k}$ dans $(Z/n\mathbb{Z}, +)$ est égal à n.