Université de Bordeaux – 2021/22
UE Mathématiques approfondies **R. Coulangeon - G. Ricotta**

TD 3 Compléments sur les applications

1 Applications injectives, surjectives, bijectives

Exercice 1. Soit h l'application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ définie par $f(n) = 3n$ pour tout entier naturel n
(1) f est-elle injective ?
(2) f est-elle surjective ?
(3) f est-elle bijective ?

Exercice 2. Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $f\colon \begin{cases} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \\ x \mapsto \overline{x} \end{cases}$.
(1) f est-elle injective ? Surjective ? Bijective ?
(2) Donner un ensemble $A \subset \mathbb{Z}$ tel que la fonction $f_{|A}\colon \begin{cases} A \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \\ x \mapsto f(x) \end{cases}$ est injective.

Exercice 3. Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $a \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}^*$. Soit $f_a\colon \begin{cases} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \\ x \mapsto ax \end{cases}$.
(1) En étudiant les cas $n = 3, 4$ montrer que f_a peut être injective ou non.
(2) On suppose n premier. Montrer que f_a est injective et en déduire que f_a est bijective.
(3) Soit n non premier. Donner un a tel que f_a n'est pas surjective.

Exercice 4. Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $f\colon \begin{cases} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \\ x \mapsto x^2 \end{cases}$.
(1) f est-elle injective ? Surjective ? Bijective ?
(2) Décrire l'ensemble $\{f(x), x \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\}$ pour $n = 9$.
Soit $\Sigma = \{\overline{k}, 0 \le k \le n/2\} \subset \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. On considère la fonction

$$f_{|\Sigma}\colon \begin{cases} \Sigma \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \\ x \mapsto f(x) \end{cases}$$

(3) $f_{|\Sigma}$ est-elle injective pour $n = 9$?
(4) Montrer que si n est premier, alors $f_{|\Sigma}$ est injective.
(5) La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 5. Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Pour tout $a \in \mathbb{Z}$, on définit $f_a\colon \begin{cases} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \\ x \mapsto x + \overline{a} \end{cases}$.
(1) Montrer que pour tout $a, b \in \mathbb{Z}$, $f_a \circ f_b = f_{a+b}$.
(2) En déduire que f_a est bijective pour tout $a \in \mathbb{Z}$.

Exercice 6. Soient f et g les applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par $f(x) = x^2$ et $g(x) = x^3$ pour tout nombre réel x.
(1) f est-elle injective ? g est-elle injective ?
(2) f est-elle surjective ? g est-elle surjective ?
(3) f est-elle bijective ? g est-elle bijective ?

Exercice 7.
(1) Montrer que l'application f définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = (2x - 3y, -7x + y)$ pour tout (x, y) dans $\mathbb{R}^2$ est bijective.

(2) Donner l'expression de f^{-1}.

Exercice 8.
(1) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = 2\sin(x).$$

Déterminer l'image de l'application f. L'application f est-elle surjective ?
(2) Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{1}{x^2+1}.$$

Déterminer les antécédents de $1/2$ par l'application g. L'application g est-elle injective ?
(3) Montrer que l'application $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = -2x + 3$$

est bijective. Donner l'expression de la bijection réciproque f^{-1}.

Exercice 9. Soient

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ x & \mapsto & (x, 2x+1) \end{array} \quad \text{et} \quad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x^2+y. \end{array}$$

(1) Calculer $(g \circ f)(x)$ pour tout nombre réel x.
(2) L'application $g \circ f$ est-elle bijective ? Justifier la réponse.

Exercice 10. Soient $f : [0,1] \to [1,e]$ et $g : [1,e] \to \left[1, e^2\right]$ les applications définies par

$$\forall x \in [0,1], \quad f(x) = \exp(x) \quad \text{et} \quad \forall x \in [1,e], \quad g(x) = x^2.$$

(1) Quel est l'ensemble de départ et l'ensemble d'arrivée de $g \circ f$?
(2) Calculer $(g \circ f)(x)$ pour tout x dans $[0,1]$.
(3) Montrer que $g \circ f$ est une bijection.
(4) Déterminer sa bijection réciproque $(g \circ f)^{-1}$ (ensemble de départ, ensemble d'arrivée et formule).

Exercice 11. Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ l'application définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \left(-2x+1; (x-3)^2\right)$$

et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$\forall (y,z) \in \mathbb{R}^2, \quad g(y;z) = -y^2 + 4z.$$

(1) Calculer $f(1)$ et $g(-1;0)$.
(2) Déterminer le ou les antécédent(s) de $(-9;4)$ par f.
(3) Déterminer l'image réciproque par f de $A = \mathbb{R}\times]-\infty, 0[$. f est-elle surjective ?
(4) Montrer que f est injective.
(5) Pour tout nombre réel z, calculer $g(0;z)$ en fonction de z. En déduire que g est surjective.
(6) g est-elle injective ?
(7) Déterminer $g \circ f$ (ensemble de départ, ensemble d'arrivée et $(g \circ f)(x)$).
(8) $g \circ f$ est-elle bijective ?

Exercice 12.
(1) Soit N un entier naturel non-nul fixé, donner une bijection entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{N} \setminus \{0, \ldots, N\}$.
(2) Trouver une bijection de $\mathbb{N}$ sur l'ensemble des entiers pairs (respectivement l'ensemble des entiers impairs).
(3) Montrer que l'application f définie de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{N}$ par

$$f(n) = \begin{cases} 2n & \text{si } n \geq 0 \\ 2(-n)-1 & \text{si } n < 0 \end{cases}$$

est une bijection de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{N}$.

Exercice 13. Considérons l'application suivante.

$$\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{N}\times\mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ & & (p,q) & \mapsto & p+\frac{(p+q)(p+q+1)}{2}. \end{array}$$

(1) Combien y a t-il de couples à coordonnées entières (p,q) tels que $p+q=n$, $p+q\leq n$?

(2) Pour tout entier n, on note $E_n := \mathbb{N}\cap[\frac{n(n+1)}{2}, n+\frac{n(n+1)}{2}]$. Justifier que les ensembles E_n sont deux à deux disjoints et que $\mathbb{N} = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} E_n$.

(3) Montrer que f est une bijection de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}$.

Exercice 14. On considère l'application suivante :

$\begin{array}{cccc} g: & E & \to & F \\ & u & \to & \cos u \end{array}$, où E et F sont des intervalles de $\mathbb{R}$.

(1) Si $E=[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ et $F=[0;1]$, l'application g est-elle injective ? surjective ?

(2) Si $E=[0;\frac{\pi}{2}]$ et $F=[-1;1]$, l'application g est-elle injective ? surjective ?

(3) Si $E=[0;\pi]$ et $F=[-1;1]$, l'application g est-elle injective ? surjective ? bijective ?

(4) On considère l'application suivante :

$\begin{array}{cccc} h: & E & \to & F \\ & u & \to & \sin u \end{array}$, où E et F sont des intervalles de $\mathbb{R}$. Déterminer deux intervalles E et F pour lesquels h est bijective. Sont-ils uniques ?

Exercice 15. Soit f l'application de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$ définie par $f(k)=k^2+k+1$ pour tout entier relatif k.

(1) f est-elle injective ?

(2) f est-elle surjective ?

(3) f est-elle bijective ?

Exercice 16. Soient f et g les applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ définies par

$$f(n)=2n, \qquad g(n)=\left[\frac{n}{2}\right]$$

pour tout entier naturel n où $[x]$ désigne la partie entière de x pour tout nombre réel x.

(1) Les applications f et g sont-elles bijectives ?

(2) Calculer $g\circ f$ puis $f\circ g$ (ensemble de départ, ensemble d'arrivée et formule).

(3) Les applications $g\circ f$ et $f\circ g$ sont-elles bijectives ?