Probabilités, Statistiques, Combinatoire

Adrian Tanasă

CM 6

Probabilités

Plan du cours d'aujourd'hui

- le vocabulaire des probabilités (univers, événement, loi de probabilités *etc.*)
- les définitions (axiomes d'une loi de probabilités)
- définition d'une probabilité par des choix de poids ; loi uniforme
- opérations ensemblistes et opérations sur les événements

Le vocabulaire des probabilités

- **Modèle, univers :** la description d'une expérience dont le résultat est *a priori* incertain
- **Événement :** la description, dans une expérience, de "quelque chose" qui peut se produire, ou ne pas se produire ; généralement, défini par une *condition* sur le résultat de l'expérience
- **Probabilité d'un événement :** un nombre, toujours compris entre 0 (0%, impossible) et 1 (100%, certain), et qui décrit la plausibilité de l'événement.
  Exemple : pile ou face - si un événement a une probabilité de $1/2$, cela correspond à la situation où il est équivalent de parier sur le fait que l'événement se produira, ou sur le fait qu'il ne se produira pas.
  jeu de dé - archétype de l'expérience qu'on associé au hasard
  dé en latin : "alea" (conduit au mot "aléatoire")
- On peut **combiner des événements** pour en décrire de nouveaux : "A et B" ; "A ou B, mais pas C" ; "exactement un parmi A, B et C"...

Des règles intuitives

règles de cohérence que doivent satisfaire, collectivement, les probabilités

- **certitude :** si un événement est considéré comme certain, sa probabilité devrait valoir 1 ;
- **impossibilité :** si un événement ne peut pas se produire, sa probabilité devrait valoir 0 ;
- **monotonie :** si deux événements A et B sont tels que A ne peut pas se produire sans que B se produise (A entraîne automatiquement B), alors la probabilité de B devrait être supérieure ou égale à celle de A ;
- **additivité :** si plusieurs événements sont incompatibles entre eux (il est impossible que plus d'un d'entre eux se produise ensemble), la probabilité qu'*un d'entre eux se produise* devrait être la *somme* de leurs probabilités respectives.

Notion d'indépendance entre événements

- **indépendance :** si deux événements A et B sont tels que le fait que A se produise (ou pas), n'a aucune influence sur le fait que B se produise, alors la probabilité que A et B se produisent tous les deux devrait être le produit de leurs probabilités.

  Exemple : Si 50% des gens préfèrent le vélo à la marche à pied, et que 20% des gens préfèrent la télé au cinéma, on peut prédire que 10% des gens préfèrent le vélo à la marche **et** la télé au cinéma, mais pour cela, on fait l'hypothèse que les choix vélo/marche n'influent pas sur les choix télé/ciné.

  l'expérience c'est "on choisit une personne p au hasard parmi la population", A c'est "p préfère la télé au ciné" et B c'est "p préfère le vélo à la marche".

  indépendance : la probabilité que plusieurs événements se réalisent tous sera le produit de leurs probabilités respectives.

Probabilités discrètes

Probabilités discrètes

- **univers :** un ensemble fini Ω
- **événement :** on appelle événement, toute partie de Ω ;
- **loi de probabilité sur Ω :** une fonction $\mathbb{P} : \text{Parties}(\Omega) \to \mathbb{R}$, qui doit satisfaire à certaines règles :
  - **positivité :** pour tout $A \subset \Omega$, $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$;
  - $\mathbb{P}(\Omega) = 1$;
  - **additivité :** quels que soient les événements A et B, si A et B sont disjoints ($A \cap B = \emptyset$), alors on a $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

  Rappel : $\text{Parties}(\Omega) = \mathcal{P}(\Omega)$

  Exemple : $\Omega = \{a, b, c\}$.

n-additivité

On a défini l'additivité pour 2 événements ;

Définition n-additivité : Soit un entier $n \geq 2$, un univers de probabilités Ω, et n événements $A_1, \ldots, A_n$, deux à deux disjoints. La fonction f : Parties$(\Omega) \to \mathbb{R}$ est n-additive si

$$f\left(\cup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} f(A_i).$$

Théorème

Si f est m-additive pour un certain $m \geq 2$, alors elle est n-additive pour tout $n \geq 2$.

Preuve : double implication ; on prouverait deux sous-propriétés :

- si f est 2-additive, alors elle est n-additive pour tout $n \geq 2$ (récurrence sur n) ;
- si f est n-additive, alors elle est 2-additive.

Quelques remarques

- pour un univers donné, la notion de probabilité n'est pas intrinsèque, **elle dépend du choix** qu'on fait de la fonction de probabilité.
- On note qu'il n'y a pas de règle qui parle d'indépendance. La formule par le produit de probabilités va servir à *définir* l'indépendance.
- On ne peut pas parler de la probabilité d'autre chose que d'un **événement**
- Inversement, la probabilité d'un événement, c'est un **nombre** ; écrire une expression comme $\mathbb{P}(A) \cup \mathbb{P}(B)$, c'est tout autant une erreur de type (l'union de deux nombres, ce n'est pas défini).

Conséquences des axiomes

Les axiomes qu'on a posés entraînent des conséquences systématiques :

- $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$ (car $\emptyset \cup \emptyset = \emptyset$, donc $\mathbb{P}(\emptyset) = \mathbb{P}(\emptyset) + \mathbb{P}(\emptyset)$).
- Si $A \subset B$, $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \backslash A)$ (car A et $B \backslash A$ sont disjoints) ; en particulier $\mathbb{P}(B) \geq \mathbb{P}(A)$.
- Si A et B ne sont pas forcément disjoints, $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$; en particulier, $\mathbb{P}(A \cup B) \leq \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.
- Plus généralement, si $A_1, \ldots, A_k$ sont des événements **quelconques**, si on pose $B = \cup_{i=1}^k A_i$, alors

$$\mathbb{P}(B) \leq \sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}(A_i).$$

  (cette inégalité permet de faire énormément de choses quand il s'agit de **majorer** une probabilité)

Définition d'une probabilité par des choix de poids

- Pour décrire un modèle (univers avec sa fonction de probabilités), il est **impératif** de décrire, au moins implictement, la fonction de probabilités.
- Difficulté : cela veut dire donner $\mathbb{P}(A)$, pour **chaque** $A \subset \Omega$; si $\#\Omega = n$, il y a 2^n parties
- Mais, pour chaque événement élémentaire x (élément de Ω), on donne (juste) un "poids" $p(x)$ - un nombre positif
- on peut alors définir, pour tout $A \subset \Omega$,

$$f(A) = \frac{1}{C} \sum_{x \in A} p(x),$$

où on pose $C = \sum_{x \in \Omega} p(x)$.

Définir une fonction de probabilités (suite)

- On a donc, pour tout $A \subset \Omega$,
$$f(A) = \frac{\sum_{x \in A} p(x)}{\sum_{y \in \Omega} p(y)}.$$
- La fonction f ainsi définie est alors une fonction de probabilités ; de plus, toute fonction de probabilités peut être définie d'une telle manière.
- En particulier, si $x \in \Omega$, $f(\{x\}) = p(x)/C$; $f(\{x, y\}) = (p(x) + p(y))/C$, etc.

Un exemple

- On veut modéliser l'expérience consistant à lancer un dé, puis à tirer à pile ou face avec une pièce.
- Il y a *a priori* 12 résultats possibles, qu'on représente par les couples de $\{(1,p),(1,f),(2,p),(2,f),(3,p),(3,f),(4,p),(4,f),(5,p),(5,f),(6,p),(6,f)\}$.
- L'événement "le dé donne 1" sera $D_1 = \{(1,p),(1,f)\}$; l'événement "la pièce tombe côté Face" sera $F = \{(1,f),(2,f),(3,f),(4,f),(5,f),(6,f)\}$.
- **Quelle fonction de probabilité ?**
  poids $1/12$ à chaque événement élémentaire,
  $\Longrightarrow$ pour chaque événement A,

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\#A}{12}.$$

Un exemple de modélisation plus compliqué

- on lance une pièce équilibrée, et on observe le résultat ; si elle tombe côté Pile, on s'arrête ; si elle tombe côté Face, on la relance et on observe également le résultat.
- Il y a trois résultats distinguables :
  - P : Le premier lancer donne Pile ;
  - FP : Le premier lancer donne Face, le second donne Pile ;
  - FF : Le premier lancer donne Face, le second donne Face.
- Premier modèle : $\Omega = \{a, b, c\}$, avec comme événements $P = \{a\}$, $FP = \{b\}$, $FF = \{c\}$ (quelle serait la fonction $\mathbb{P}$?)
- Autre modèle possible : $\Omega' = \{(p,p),(p,f),(f,p),(f,f)\}$, avec $P = \{(p,p),(p,f)\}$, $FP = \{(f,p)\}$, $FF = \{(f,f)\}$ (semble étrange ? la fonction $\mathbb{P}'$ est beaucoup plus simple à décrire)
- Remarquons que dans le second modèle, il existe des événements qui n'ont pas de sens pour l'expérience décrite, comme $PF = \{(p,f)\}$ (si le premier lancer donne Pile, on ne relance pas la pièce).

Pile ou face (suite)

Définition de la fonction de probabilités :

- On estime avoir une chance sur deux que la première pièce tombe côté Pile : $\mathbb{P}(P) = 1/2$
- On estime avoir une chance sur quatre que la première pièce tombe côté Face et la seconde côté Face : $\mathbb{P}(FP) = 1/4 = \mathbb{P}(FF)$.
- Dans le cas de l'univers Ω', on peut définir $\mathbb{P}'$ sur toute partie de Ω' par $\mathbb{P}'(A) = \#A/4$ ("si on lançait la deuxième pièce aussi lorsque la première donnait Pile, on aurait une chance sur 4 d'obtenir Pile puis Face")
- Sur Ω', la fonction de probabilités $\mathbb{P}'$ est appelée loi uniforme : chaque événement élémentaire a la même probabilité.

Loi uniforme

- Si Ω est un ensemble fini, on a une fonction additive naturelle sur Parties(Ω) : le cardinal ! ($f(A) = \#A$ pour tout $A \subset \Omega$)
- Une telle fonction ne définit pas une probabilité, car, en général, $f(\Omega) \neq 1$
- Mais on peut très facilement se ramener à une probabilité en normalisant : on pose, pour tout $A \subset \Omega$,

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\#A}{\#\Omega}$$

- C'est un cas particulier, mais un cas particulier très important ; la probabilité ainsi définie est appelée **probabilité uniforme**.

Devoir maison

- On dispose de trois jetons de couleur : un a deux côtés blancs, un autre a deux côtés noirs, le dernier a un côté blanc et un côté noir. On tire un des trois jetons de manière aléatoire uniforme, et on le pose d'un côté aléatoire uniforme.
  - Quelle est la probabilité que le jeton choisi ait ses deux faces de la même couleur ?
  - Quelle est la probabilité que la face cachée soit blanche ?
  - La face visible est blanche ; quelle est la probabilité que la face cachée soit blanche ?

Opérations ensemblistes et opérations sur les événements

Les opérations ensemblistes (union, intersection, différence ; complémentaire) permettent d'exprimer des opérations logiques sur les événements :

- $C = A \cup B$: "A se produit, **ou** B se produit" (Attention : les éléments de C sont les éléments de A **et** les éléments de B ; *i.e.* les éléments de Ω qui sont dans A **ou** dans B...
- $D = A \cap B$: "A et B se produisent tous les deux".
- $E = A \backslash B$: "A se produit, mais pas B"
- $F = \overline{A}$ (notation pour $F = \Omega \backslash A$, en considérant que Ω est fixé) : "A ne se produit pas".
- Généralisations : $G = \cup_{i \geq 0} A_i$, "un au moins des A_i se produit" ; $H = \cap_{i \geq 0} A_i$, "tous les A_i se produisent".