Probabilités, Statistiques, Combinatoire : TD6

Variables aléatoires

Dans les exercices de cette feuille, il est fréquemment demandé de *déterminer la loi* d'une variable aléatoire X donnée. Rappelons ce que cela signifie :

— identifier l'ensemble des valeurs possibles de X ;

— pour chaque valeur possible a, déterminer la probabilité de l'événement $\{X = a\}$ (que ce soit par une formule, valable à la fois pour toutes les valeurs de a, ou au cas par cas, ou même par une combinaison des deux)

Exercice 6.1

Somme de deux variables aléatoires particulières

On suppose que l'on dispose de deux variables aléatoires X et Y, dont la loi jointe est décrite par le tableau suivant.

$Y \backslash X$	0	1	2
1	0.1	0.2	0.1
2	0.2	0.3	0.1

Ce tableau doit se lire ainsi : 0.3 est la probabilité de l'événement $\{X = 1 \text{ et } Y = 2\}$.

1. Déterminer la loi de X, et la loi de Y.
2. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
3. On définit la variable aléatoire $Z = X + Y$. Quelles sont les valeurs possibles de Z ? Déterminer la loi de Z.

Exercice 6.2

Somme de deux variables aléatoires

On suppose que, dans un espace de probabilités (qu'on ne décrira pas), on a défini deux variables aléatoires X et Y, à valeurs dans $\mathbb{N}$. On définit alors $Z = X + Y$ comme variable aléatoire à valeurs également dans $\mathbb{N}$.

1. Écrire les événements $\{Z = 0\}$, $\{Z = 1\}$, $\{Z = 2\}$ en fonction des événements $\{X = 0\}$, $\{X = 1\}$, $\{X = 2\}$, $\{Y = 0\}$, $\{Y = 1\}$ et $\{Y = 2\}$.
2. Plus généralement, écrire une expression pour l'événement $\{Z = k\}$, valable pour n'importe quel entier $k \geq 0$, en fonction d'événements de la forme $\{X = a\}$ et/ou $\{Y = b\}$.
3. On suppose connues les lois de X et de Y : notons, pour chaque entier k, $p_k = \mathbb{P}(X = k)$ et $q_k = \mathbb{P}(Y = k)$. On suppose également que X **et** Y **sont indépendantes** (rappel : cela signifie que, pour tous entiers k et ℓ, les événements $\{X = k\}$ et $\{Y = \ell\}$ sont indépendants).

   Montrer que ces informations permettent de déterminer la loi de Z ; donner une formule générale pour $\mathbb{P}(Z = k)$.
4. On change les hypothèses : on ne suppose plus que X et Y sont indépendantes, mais on suppose connue, pour tout k et tout ℓ, la quantité $p_{k,\ell} = \mathbb{P}(X = k \text{ et } Y = \ell)$.

   Donner une formule pour $\mathbb{P}(Z = 0)$, pour $\mathbb{P}(Z = 1)$, pour $\mathbb{P}(Z = 2)$ (à chaque fois, en fonction des quantités $p_{k,\ell}$). Généraliser en une formule pour $\mathbb{P}(Z = n)$, en fonction de n.

6.1 Calculs de lois

Exercice 6.3

On considère une variable aléatoire X, uniforme sur $[[1, 6]]$; c'est-à-dire que les valeurs possibles de X sont les entiers de 1 à 6, et que, pour chaque tel entier k, on a $\mathbb{P}(X = k) = 1/6$.

1. On définit une nouvelle variable aléatoire $Y = 7 - X$. Déterminer la loi de Y.
2. On définit également $Z = X^2 + X$. Déterminer la loi de Z.
3. On définit enfin $T = (X - 2)^2$. Déterminer la loi de T.

Exercice 6.4

On lance deux dés classiques, équilibrés. On suppose que les deux dés sont distinguables (on sait dire quel est le "premier" dé, et quel est le "deuxième" ; par exemple, les deux dés sont de couleurs différentes, et on décide à l'avance lequel est le premier et lequel est le second). On considère que les deux lancers sont indépendants (tout événement qui ne porte que sur le premier lancer, est indépendant de tout événement qui ne porte que sur le second lancer).

1. On définit la variable aléatoire X_1 représentant le résultat du premier dé. Décrire la loi de X_1.
2. On définit la variable aléatoire X_2 représentant le résultat du second dé. Décrire la loi de X_2.
3. Les variables aléatoires X_1 et X_2 sont-elles **égales** ?
4. On définit la variable aléatoire $S = X_1 + X_2$. Quelle est l'interprétation, en langage naturel, de S ? Déterminer la loi de S.
5. On définit $Y = 7 - X_1$. Déterminer la loi de Y.
6. On définit $S' = X_1 + Y$, et $S'' = X_2 + Y$. Décrire S' et S'' en fonction de X_1 et X_2, et déterminer la loi de S' ainsi que celle de S''.
7. En général, peut-on dire que la connaissance des lois de deux variables aléatoires X et Y permet de déterminer la loi de $X + Y$?

Exercice 6.5

On joue trois fois à pile ou face avec une pièce équilibrée, et on note F_i, pour $i = 1, 2, 3$, l'événement "la i-ème piece tombe sur Face" (les trois événements F_1, F_2, F_3 sont indépendants) ; on définit alors les trois variables aléatoires X_1, X_2, X_3, par $X_i = \mathbf{1}_{F_i}$.

1. Décrire X_1 en langage naturel (en l'exprimant en fonction du résultat de la première pièce).
2. Determiner la loi de chaque X_i (pour $i = 1, 2, 3$).
3. On définit $S_1 = X_1 + X_3$, et $S_2 = X_2 + X_3$. Déterminer la loi de S_1 et de S_2.
4. On définit $S = S_1 + X_1$, et $S' = S_2 + X_1$. Déterminer la loi de S et celle de S'.
5. En général, peut-on dire que la connaissance des lois de deux variables aléatoires X et Y permet de déterminer la loi de $X + Y$?

6.2 Lois classiques et leurs propriétés

Exercice 6.6

On suppose qu'on dispose d'une pièce de monnaie déséquilibrée : chaque fois qu'on la lance, elle a probabilité p de tomber côté Pile, et $1-p$ de tomber côté Face. **On ne suppose pas** que $p = 1/2$; p est juste un paramètre fixé. Les lancers successifs sont supposés indépendants.

On considère l'expérience (fictive !) consistant à lancer une infinité de fois la pièce, de manière séquentielle (il y a un premier lancer, un deuxième lancer, etc ; pour chaque entier $n > 0$, il y a un n-ème lancer).

On définit la variable aléatoire X comme le nombre total de lancers effectués jusqu'à la première fois que l'on obtient Pile (par exemple, si le premier lancer donne Face et le second donne Pile, X vaudra 2). Si on n'obtient jamais Pile, X prend la valeur spéciale ∞ (X est donc une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$; dans les comparaisons, on considère que ∞ est plus grand que tout entier n).

1. Pour chaque entier n, on note F_n l'événement "le n-ème lancer donne Face". On suppose donc que ces événements sont globalement indépendants, chacun étant de probabilité $1-p$.

   Comment s'interprète l'événement $F_1 \cap F_2 \cap \overline{F_3}$?
2. Pour un entier $n > 0$ quelconque, écrire l'événement $\{X = n\}$ au moyen des événements F_i et de leurs complémentaires. En déduire sa probabilité.
3. Faire de même pour l'événement $\{X > n\}$.
4. Même si cela semble *a priori* très peu probable, on doit considérer la possibilité que la suite de tirages ne donne jamais de Pile, c'est-à-dire que X prenne la valeur ∞.

   Écrire l'événement $\{X = \infty\}$ au moyen des événements F_i.
5. L'hypothèse d'indépendance de la famille (infinie) d'événements $(F_i)_{i \geq 1}$ ne donne pas immédiatement de formule pour $\mathbb{P}(X = \infty)$; pourquoi ?
6. Montrer qu'on a, pour tout $n > 0$, $\{X = \infty\} \subset \cap_{i=1}^{n} F_i$. Que peut-on en déduire sur $\mathbb{P}(X = \infty)$?
7. Décrire complètement la loi de X.

Une variable aléatoire qui suit la loi de X est appelée **variable géométrique** (de paramètre p).

Exercice 6.7

Loi binomiale

Dans un réseau informatique, on doit transmettre un message long de N bits par un canal qui peut provoquer des erreurs. On fait l'hypothèse, très simplificatrice, que chaque bit a la même probabilité p d'être transmis de manière incorrecte, **indépendamment** de chacun des autres.

1. Quelle est, en fonction de p et de N, la probabilité que l'ensemble du message soit transmis sans erreur ?
2. Quelle est la probabilité que le message soit transmis avec exactement une erreur ? Exactement deux erreurs ?

3. On modélise cette expérience par l'univers $\Omega = \{0,1\}^N$ des suites de longueur N de 0 et de 1. Un 0 en position k indique que le k-ème bit est transmis sans erreur ; un 1 en position k indique que le k-ème bit est transmis avec erreur.

   Quelle est la loi de probabilité correspondant à la situation, pour cet univers ? (c'est-à-dire, pour *chaque* séquence de longueur N formée des symboles 0 et 1, il faut dire quelle est sa probabilité)
4. Pour un entier $n > 0$ et un entier $0 \leq k \leq n$ donnés, combien existe-t-il de suites de longueur n sur l'alphabet $\{0,1\}$, qui comptent exactement k occurrences de 1 ?
5. On note X la variable aléatoire donnant le nombre d'erreurs de transmission. Déterminer la loi de X. **Il est possible que vous connaissiez un nom, voire une formule, pour cette loi ; on souhaite ici prouver cette formule**.
6. On utilise, pour la transmission, un "code correcteur d'erreurs", qui permet de reconstituer le message d'origine du moment que le nombre d'erreurs de transmission est au plus de 2. Déterminer la probabilité de pouvoir reconstituer le message, pour les valeurs suivantes : $p = 0.001$, $N = 1024$ (on attend une réponse sous forme de formule, mais aussi une valeur numérique). Comparer à la probabilité de transmettre le message sans erreurs.

Une variable aléatoire qui suit la loi de X est appelée **binomiale** (de paramètres N et p).

Exercice 6.8

Somme de variables de Poisson indépendantes Une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ suit la *loi de Poisson de paramètre* x (où $x > 0$ est un nombre réel quelconque, mais fixé) si on a, pour tout entier $k \geq 0$,

$$\mathbb{P}(X = k) = e^{-x}\frac{x^k}{k!}.$$

(Le facteur e^{-x} est là pour assurer que la somme des probabilités vaut 1 ; il est vrai en général, et on l'admettra ici, que pour tout nombre réel – même négatif – on a $\sum_{k=0}^{\infty} x^k/k! = e^x$, et donc $\sum_{k=0}^{\infty} e^{-x}\frac{x^k}{k!} = 1$.)

1. Déterminer, en fonction de x, quelle est la valeur la plus probable pour une variable de Poisson de paramètre x. **Indication :** calculer, en fonction de x et de k, $\mathbb{P}(X = k+1)/\mathbb{P}(X = k)$, et comparer à 1. On pourra se limiter au cas où x n'est pas un entier.
2. On suppose que X et Y sont deux variables aléatoires de Poisson – de paramètre x pour X, et de paramètre y pour Y. On suppose également que X et Y sont indépendantes. Déterminer la loi de Z, définie par $Z = X + Y$.

   Indication : Utiliser la formule obtenue dans l'exercice sur la somme de deux variables indépendantes. On pourra utiliser la *formule du binôme* : pour tout entier $n > 0$ et tous réels a et b,

   $$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

   (Que se passe-t-il si on divise de part et d'autre par $n!$?)