Université de Bordeaux

Probabilités, Statistiques, Combinatoire : TD1

Combinatoire - **version corrigée**

1.1 Manipulation de notations ensemblistes

Les exercices de cette section ont pour but de faire pratiquer les définitions et leur application. Ils ne sont censés présenter aucune difficulté si les définitions sont connues.

Exercice 1.1

On pose $A = \{1, 2, 3, 4\}$, et $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ la fonction définie par $f(n) = n^2$. Écrire chacun des ensembles suivants en donnant la liste de tous ses éléments.

1. $B = \{(a, b) \in A \times A : a < b\}$ $B = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$
2. $C = (A \times A) - B$ $C = \{(1, 1), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4)\}$
3. $D = f(A)$ $D = \{1, 4, 9, 16\}$
4. $E = f^{-1}(A)$. $E = \{1, -1, 2, -2\}$ - les définitions de l'image et de l'image réciproque d'un ensemble ont été données, mais sans exemples, en cours

Exercice 1.2

correction à rédiger

Exercice 1.3

Une opération ensembliste non vue en cours est la *différence symétrique* de deux ensembles, définie de la manière suivante : si A et B sont deux ensembles, leur différence symétrique est l'ensemble $A \Delta B$ défini ainsi :

$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$$

1. Décrire par une phrase, la plus simple possible, l'ensemble $A \Delta B$ (sur le modèle suivant, pour l'union : "$A \cup B$ est l'ensemble des éléments présents dans A ou dans B"). Ce qu'on espère : "$A \Delta B$ est l'ensemble des éléments qui appartiennent à A ou à B mais pas aux deux", ou une chose équivalente.
2. Donner une expression alternative (mais équivalente) pour $A \Delta B$ en termes de $A \cup B$ et $A \cap B$. $A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$
3. Écrire une formule donnant le cardinal de $A \Delta B$ en fonction des cardinaux de A, de B, et de $A \cap B$ (en supposant que A et B sont finis). On doit arriver à $\#(A \Delta B) = \#A + \#B - 2\#(A \cap B)$
4. À quoi se ramène $A \Delta B$ si A et B sont disjoints ? si $A \subset B$? si $A = B$? Si disjoints, $A \cup B$; si $A \subset B$, $B - A$; si $A = B$, $\emptyset$. On peut pousser les étudiants à remarquer que $A \Delta B = \emptyset$ **si et seulement si** $A = B$.

1.2 Quelques problèmes de comptage

Exercice 1.4

Formation d'équipes

1. À partir d'un groupe de 7 filles et 13 garçons, combien d'équipes paritaires (comportant autant de filles que de garçons) de beach volley (4 personnes) peut-on former ? De volley (6 personnes) ? beach volley : on veut 2 filles parmi 7 et 2 garçons parmi 13, donc $\binom{7}{2}\binom{13}{2}$, soit $21 \times 78 = 1014$. Volley : $\binom{7}{3}\binom{13}{3} = 35 \times 286 = 10010$. Noter qu'on n'a pas revu la formule à base de factorielles pour les binomiaux, donc $\binom{13}{3}$ n'est pas évident (on a revu la formule additive).
2. Généraliser : à partir d'un groupe de n filles et m garçons, combien d'équipes paritaires de $2k$ personnes peut-on former ? (Exprimer votre réponse au moyen de coefficients binomiaux $\binom{n}{k}$) $\binom{m}{k}\binom{n}{k}$, à condition que $n \geq k$ et $m \geq k$; sinon, 0
3. Un groupe de 4 filles et 10 garçons veut jouer au volley, en formant deux équipes de 2 filles et 4 garçons chacune (il restera deux arbitres). De combien de façons peut-on former les équipes ? On considère qu'on ne distingue pas une équipe A d'une équipe B, ni entre les deux arbitres. (Le calcul peut être fait de plusieurs manières différentes, qui devraient amener à des expressions différentes en termes de coefficients binomiaux ; il peut être intéressant de vérifier qu'elles donnent toutes le même résultat final) En disant “je forme une premiere équipe, puis une deuxième avec ce qui reste, et enfin je divise par 2 pour ne pas compter deux fois (A, B) et (B, A), on obtient une formule : $\binom{4}{2}\binom{10}{2}\binom{2}{2}\binom{8}{2}/2$. En disant “je choisis d'abord les 8 garçons qui vont jouer, puis, en fixant une des 4 filles, laquelle des trois autres va jouer avec elle, et quels 4 garçons vont jouer avec elle”, on obtient par exemple, $\binom{10}{8} \times 3 \times \binom{8}{4}$.

Exercice 1.5

correction à rédiger

Exercice 1.6

correction à rédiger

Exercice 1.7

Coefficients multinomiaux

Soit $n > 0$ un entier, et a, b, c trois entiers positifs ou nuls, tels que l'on ait $a + b + c = n$.

Le *coefficient multinomial* noté $\binom{n}{a,b,c}$ désigne le nombre de façons possibles de partager l'ensemble $[[1, n]]$ en trois parties A, B et C, deux à deux disjointes, telles que l'on ait $\#A = a$, $\#B = b$ et $\#C = c$.

En raisonnant à partir de la définition des nombres $\binom{m}{k}$, donner au moins deux expressions distinctes pour $\binom{n}{a,b,c}$. Si vous connaissez l'expression à base de factorielles pour $\binom{m}{k}$, vous pouvez montrer que les différentes formules sont équivalentes.

Si on raisonne en formant d'abord A, puis B à partir de ce qui reste, on obtient $\binom{n}{a}\binom{n-a}{b}$. D'autres formules sont obtenues en formant d'abord un autre ensemble, évidemment. En connaissant la formule factorielle pour les binomiaux, on obtient $\frac{n!}{a!b!c!}$

Exercice 1.8

On considère dans cet exercice un alphabet $A = \{a, b, c\}$, et la classe combinatoire A^* des mots finis sur l'alphabet (avec comme taille, la longueur des mots).

1. Écrire *in extenso* la "tranche" A_2 des mots de taille 2. $A_2 = \{aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb, cc\}$
2. D'après le cours, quelle est la suite de comptage de la classe A^* ? $A_n = A^n$, donc on doit trouver $a_n = 3^n$.
3. Sans utiliser votre réponse à la question précédente, montrer directement que l'on a (pour $n \geq 1$) $a_n = 3a_{n-1}$, en suivant les étapes suivantes :
   — On définit $A_{n,a}$ (respectivement, $A_{n,b}$, $A_{n,c}$) comme l'ensemble des mots de A^* de longueur n, et qui commencent par la letre a (respectivement, par la lettre b, par la lettre c).
   Décrire des bijections (les plus simples possible !) entre A_{n-1} et $A_{n,a}$; entre A_{n-1} et $A_{n,b}$; entre A_{n-1} et $A_{n,c}$.
   À chaque fois, la transformation consiste à ajouter en tête la bonne lettre au mot : $w \mapsto a.w$, $w \mapsto b.w$, $w \mapsto c.w$. Ce serait une bonne chose de leur faire pratiquer l'écriture d'expressions avec concaténation.
   — Quelles égalités entre cardinaux peut-on déduire de ces bijections ? Que manque-t-il pour pouvoir affirmer que l'on a $a_n = 3a_{n-1}$? On obtient $\#A_{n,a} = \$A_{n-1}$, et idem pour les autres lettres. Il suffit de montrer que les ensembles $A_{n-1,a}$, $A_{n-1,b}$, $A_{n-1,c}$ sont deux à deux disjoints (insister sur le "deux à deux") pour en déduire que $\#A_n = \#A_{n-1} + \#A_{n-1} + \#A_{n-1}$.
   — Terminer la preuve, ainsi que la preuve de la formule de comptage, en utilisant la question précédente (faire une preuve par récurrence sur n). Il suffit de remarquer qu'aucun mot ne peut commencer à la fois par a et par b, etc. Puis, preuve par récurrence de ce que si $a_0 = 1$ et $a_n = 3a_{n-1}$ pour $n \geq 1$, alors $a_n = 3^n$ pour tout n (on n'a pas écrit de preuve par récurrence en cours : ce serait pas mal d'en faire une explicitemnet, en écrivant son hypothèse de récurrence et tout)
4. On garde le même ensemble A^*, mais on prend comme taille d'un mot w, $t(w) = |w|_a + 2|w|_b + 3|w|_c$. On note $(a'_n)_{n\geq 0}$ la nouvelle suite de comptage. Écrire *in extenso* les nouveaux ensembles A_1, A_2, A_3. En vous inspirant de ce que vous avez fait précédemment, déterminez une formule de récurrence permettant de définir la nouvelle suite de comptage $(a'_n)_{n\geq 0}$. Calculer a'_{10}. En décomposant par la première lettre, on obtient $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}$ (le cas avec deux lettres, qui donne la récurrence de Fibonacci, a été vu en cours). Premiers termes de la suite, calculés de tête : $1, 1, 2, 4, 7, 13, 24, 44, 81, 149, 274$, donc normalement $a_{10} = 274$.

1.3 Exercices et problèmes

Exercice 1.9

Factorielle et mélange de cartes On sait que le nombre de façons d'ordonner n nombres distincts (ou, de manière équivalente, étant donné un ensemble de n valeurs, le nombre de *séquences* distinctes qu'on peut former et qui contiennent chaque valeur exactement une fois) est $n! = 1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot n$. Ce nombre est également le cardinal du produit cartésien $\{1\} \times [[1, 2]] \times \cdots \times [[1, n]]$. L'objectif de cet exercice est de décrire deux telles bijections.

1. On note S_n l'ensemble des permutations de $[[1, n]]$, vues comme suites de longueur n d'entiers, dans lesquelles chaque entier de 1 à n apparaît une fois et une seule.

Rappeler la bijection ébauchée en cours, entre S_n et $[[1, n]] \times S_{n-1}$. On nommera cette bijection Φ_n.

La transformation vue en cours consiste à identifier la position qui contient la valeur n (ça donne un entier entre 1 et n) et à donner, comme nouvelle séquence, la séquence dans laquelle on a simplement supprimé n. Par exemple, $(2, 5, 3, 1, 4) \mapsto (2, (2, 3, 1, 4))$

2. Décrire la bijection réciproque, notée Φ_n^{-1} : si $(i, s) \in [[1, n]] \times S_{n-1}$, expliquer comment obtenir $s' \in S_n$ tel que l'on ait $\Phi_n(s) = (i, s)$. Pour retrouver s' à partir de (i, s), il suffit d'insérer $n = 1 + |s|$ entre les $(i-1)$-ème et i-ème éléments de s.

3. À partir d'une permutation $s \in S_n$ quelconque, on obtient une séquence $c = f(s) \in \{1\} \times [[1, 2]] \times \cdots \times [[1, n]]$, de la manière suivante : partant de $s = s_n$, on lui applique Φ_n et on obtient un couple (i_n, s_{n-1}) ; puis on applique Φ_n à s_{n-1}, pour obtenir (i_{n-1}, s_{n-2}) ; on itère de la sorte jusqu'à appliquer Φ_2 à s_2, ce qui donne un couple (i_2, s_1) (remarque : comme S_1 ne contient que la séquence (1), on a forcément $s_1 = (1)$). Le codage c est alors la séquence $(1, i_2, \ldots, i_n)$.

   Appliquer l'ensemble de ces transformations en partant de la permutation $s \in S_7$ suivante : $s = (4, 2, 3, 7, 1, 6, 5)$.

   On obtient successivement $(4, (4, 2, 3, 1, 6, 5))$, puis $(5, (4, 2, 3, 1, 5))$, $(5, (4, 2, 3, 1))$, $(1, (2, 3, 1))$, $(2, (2, 1))$, $(1, (1))$. Le codage est donc $(1, 1, 2, 1, 5, 5, 4)$ (le codage commence ainsi toujours par 1, mais ça fait des séquences dont le i-ème terme est majoré par i, c'est plus simple à retenir qu'en décalant).

4. Expliquer comment, à partir d'une séquence de codage c, on obtient la permutation de départ. Faire le calcul avec $c = (1, 1, 2, 1, 5, 5, 4)$, et avec $c = (1, 1, 3, 2, 5, 4, 6)$.

   Partant de la séquence (1), on insère successivement $2, 3, \ldots, n$ en positions données par le codage (sans son 1 initial). Le premier codage donne la s précédente ; le second donne $(2, 4, 1, 6, 3, 7, 5)$.

   Si l'on suppose que les séquences sont représentées par des listes, par exemple dans le langage PYTHON, le passage d'une permutation à son codage ou vice versa n'est pas très efficace (il faut insérer ou supprimer des valeurs en positions arbitraires dans des listes, à chaque itération). Nous allons décrire une autre méthode de codage/décodage, pour laquelle l'operation de décodage se prête mieux à une implémentation par des tableaux ou des listes PYHON.

   Le nouveau décodage fonctionne de la manière suivante : pour décoder une séquence $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$, on forme initialement la séquence $s_1 = (1, 2, \ldots, n)$, et, itérativement, dans la séquence courante s_k, on échange les entiers présents en positions k et i_k (en faisant varier k de 1 à n - ou de 2 à n, c'est suffisant).

5. Appliquer cette technique de décodage au code $(1, 1, 2, 1, 5, 5, 4)$, et au code $(1, 1, 3, 2, 5, 4, 6)$ (on ne s'attend pas à trouver les mêmes résultats qu'à la question précédente !)

   Le premier donne $(4, 3, 1, 7, 6, 5, 2)$; le deuxième, $(2, 4, 3, 6, 5, 7, 1)$ (la valeur 1 se déplace plusieurs fois)

6. Décrire l'opération inverse de codage : comment, en ne partant que d'une permutation s, on obtient son codage.

   Itérativement, pour i de n à 1 : on repère la position de i dans la séquence, on l'échange avec la valeur en position i, et on note la position où on l'a trouvé. Le codage, c'est la séquence (retournée) des positions. (Résultat, le décodage se fait bien en temps linéaire parce qu'on a juste des échanges à faire, mais pour faire le codage, il faut maintenir deux tableaux, un pour la permutation et un pour son inverse : on peut largement passer ce fait sous silence).

7. **Question subsidiaire :** expliquer pourquoi il s'agit bien d'un codage bijectif, *i.e.* pourquoi chaque permutation a bien un unique codage.

   Argument le plus simple pour montrer qu'une transformation est bijective : partant d'un objet d'arrivée quelconque, j'exhibe un objet de départ qui se transforme en lui (surjectivité) ; partant d'un objet d'arrivée quelconque, je montre que je n'ai qu'une seule façon de revenir en arrière (injectivité).
   Pour les transformations décrites comme ça, de manière itérative, le plus simple est de montrer que chaque étape est bijective, *i.e.* qu'à chaque étape on peut toujours revenir en arrière (surjectivité) et d'une seule manière (injectivité).
   L'injectivité peut aussi se montrer directement (pour une étape) : si j'ai deux séquences différentes, si elles diffèrent par la position de n je vais "extraire" des valeurs différentes ; sinon, les séquences obtenues en faisant le mêm échange vont être différentes.