Fonctions trigonométriques

I) Le cercle trigonométrique

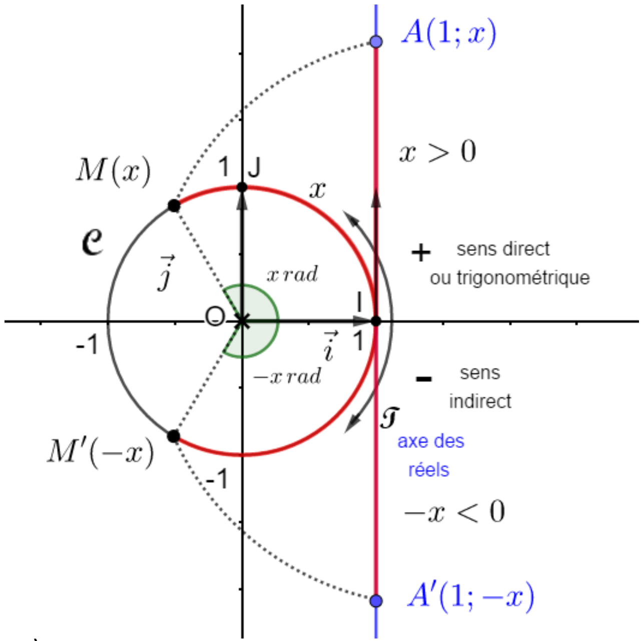
Orienter un cercle, c'est choisir un sens de parcours sur le cercle, appelé sens direct.

Définition :

Dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, on appelle **cercle trigonométrique** le cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 1 orienté dans le sens direct, appelé sens trigonométrique.

Remarques :

- Le sens trigonométrique est le sens inverse du sens des aiguilles d'une montre. C'est le sens de la rotation qui transforme $\vec{\imath}$ en $\vec{\jmath}$.
- Le périmètre de $\mathcal{C}$ vaut 2π.



Soit $\mathcal{T}$ la tangente à $\mathcal{C}$ au point I.

Cette droite est appelée l'**axe des réels**.

Soit $x > 0 \in \mathbb{R}$ et $A(1\,;x)$. Le point A se trouve sur l'axe des réels.

On enroule imaginairement la droite $\mathcal{T}$ autour du cercle $\mathcal{C}$ dans le sens trigonométrique. Le point A va se retrouver au point M.

Pour tout réel $x > 0$, il y a ainsi un unique point $A(x;1)$ sur la droite $\mathcal{T}$ et un unique point M qui lui correspond sur le cercle.

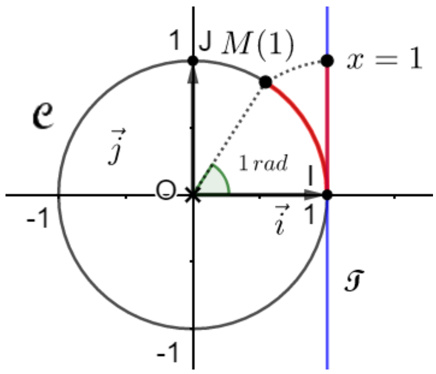
Pour les valeurs réelles négatives, on enroule imaginairement la droite $\mathcal{T}$ autour du cercle $\mathcal{C}$ dans le sens inverse (appelé sens indirect).

De la même façon, on obtient un unique point du cercle associé à une valeur réelle négative.
Par ce procédé on peut donc faire correspondre à tous les nombres réels un point unique du cercle.

Le nombre réel 2π correspond à un tour complet du cercle. On définit une nouvelle unité d'angle, le radian, tel qu'un tour complet corresponde à 2π radians (notation rad).

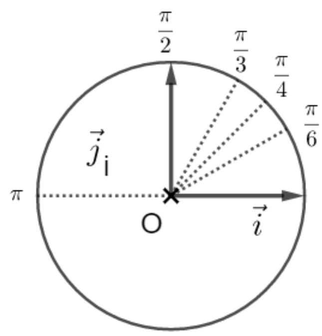
Définition :

On appelle **radian**, noté *rad*, la mesure de l'angle au centre qui intercepte un arc de longueur 1 du cercle $\mathcal{C}$.
Pour un point M quelconque placé sur le cercle $\mathcal{C}$,
la longueur x de l'arc $\widehat{\mathrm{IM}}$ est une mesure en **radian** de l'angle orienté $\widehat{IOM}$.



Un point M du cercle trigonométrique peut en effet être l'image d'une infinité de nombres réels : $\boldsymbol{x}$ **,** $\boldsymbol{x+2\pi}$ **et de façon plus générale** $\boldsymbol{x+k\times 2\pi}$ **où** $\boldsymbol{k\in\mathbb{Z}}$ **auront la même image sur le cercle**.

Les valeurs remarquables :



Un tour complet de 360° correspond à 2π radians.
Par proportionnalité, on obtient le tableau de correspondance suivant :

Mesure en degré	0	30	45	60	90	180	360
Mesure en radian	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	2π

Exemples :

On a $2\pi\, rad = 360°$ et $\pi\, rad = 180°$.

Un degré correspond à $\frac{2\pi}{360} = \frac{\pi}{180}$ radian. Inversement, un radian correspond à $\frac{180}{\pi} \approx 57{,}3$ degrés

$72° = 72 \times \frac{\pi}{180} = \frac{2\pi}{5}$ radians

On a vu que x et $x + k \times 2\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$ avaient la même image sur le cercle trigonométrique et donc représentaient deux mesures du même angle. Une seule de ces mesures se trouve dans l'intervalle $]-\pi;\pi]$.

Propriété :

On appelle mesure principale d'un angle l'unique mesure de l'angle appartenant à l'intervalle $]-\pi;\pi]$.

II) Cosinus et sinus d'un nombre réel

Soit $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ un repère orthonormé et $\mathcal{C}$ le cercle trigonométrique dans ce repère. Pour tout réel x, il existe un unique point $M(x)$ du cercle trigonométrique $\mathcal{C}$ associé à x.

Définition :

L'abscisse du point M dans ce repère est le cosinus du réel x, noté $\cos x$.
L'ordonnée du point M dans ce repère est le sinus du réel x, noté $\sin x$.
Les coordonnées du point M sont donc $(\cos x; \sin x)$.

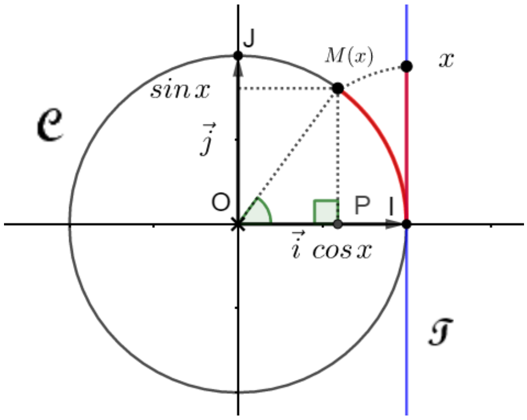
Le point M étant sur le cercle trigonométrique $\mathcal{C}$, on en déduit les propriétés suivantes.

Propriétés :

Pour tout réel x :

$-1 \leq \cos x \leq 1$ et $-1 \leq \sin x \leq 1$

$(\cos x)^2 + (sinx)^2 = 1$



Démonstration :

Soit le point P de coordonnées $(cos\ x\,; 0)$.

Le repère étant orthonormé, le triangle OPM est rectangle en P.

D'après le théorème de Pythagore, on a donc : $OM^2 = OP^2 + PM^2$

Le point M étant sur le cercle trigonométrique, on a $OM = 1$.

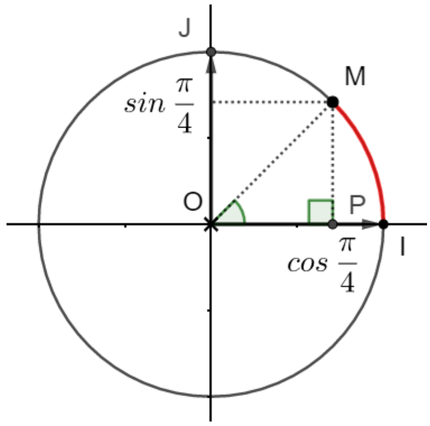
Par ailleurs $OP = cos\ x$ et $PM = sin\ x$. On en déduit que $(\cos x)^2 + (sinx)^2 = 1$.

Cosinus et sinus des angles remarquables

Mesure en degré	0	30	45	60	90	180	360
Mesure en radian	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	2π
Cosinus	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	1
Sinus	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	0

Démonstration :

1) Pour $\frac{\pi}{4}$ (démonstration au programme)



Le triangle OPM est isocèle et rectangle en P.

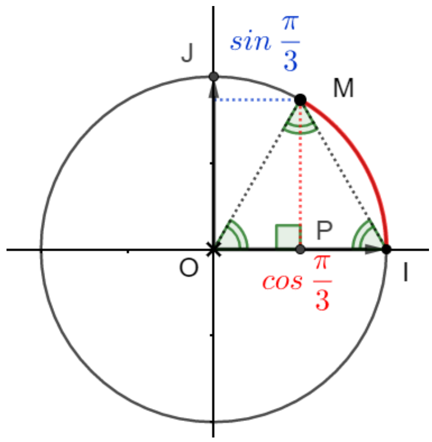
On a donc $\sin\frac{\pi}{4} = cos\frac{\pi}{4}$.

Par suite $\left(\cos\frac{\pi}{4}\right)^2 + \left(sin\frac{\pi}{4}\right)^2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{4}\right)^2 = 1$

$\Leftrightarrow \left(\cos\frac{\pi}{4}\right)^2 = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \cos\frac{\pi}{4} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

2) Pour $\frac{\pi}{3}$ (démonstration au programme)



En premier, on montre que le triangle OIM est un triangle équilatéral.

Il est isocèle en O car OI=OM=1. Les angles $\widehat{OIM}$ et $\widehat{IMO}$ sont donc de même mesure. Comme la somme des mesures des angles dans un triangle est de 180° (soit π) et que l'angle $\widehat{IOM}$ a pour mesure 60° (soit $\frac{\pi}{3}$), on en déduit que le triangle est bien équilatéral.

La hauteur (MP) du triangle coupe donc le segment [OI] en son milieu.

On a ainsi montré que $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

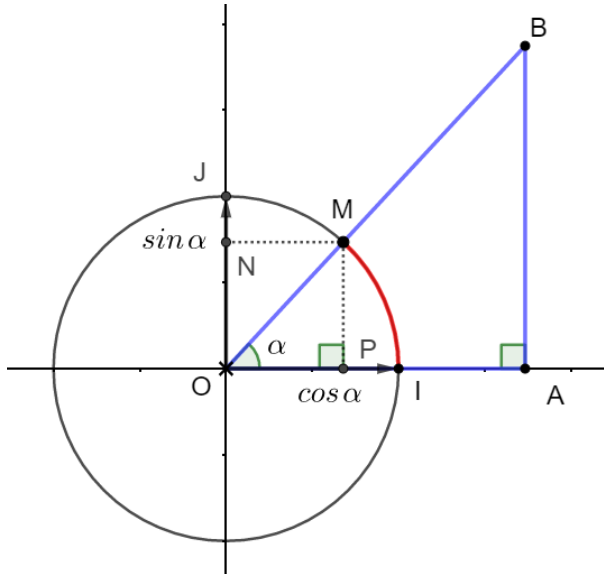
Pour calculer $sin\frac{\pi}{3}$, on utilise la formule $\left(\cos\frac{\pi}{3}\right)^2 + \left(sin\frac{\pi}{3}\right)^2 = 1$

$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(sin\frac{\pi}{3}\right)^2 = 1$

$\Leftrightarrow \left(sin\frac{\pi}{3}\right)^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

$\Leftrightarrow sin\frac{\pi}{3} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Lien avec le cosinus et le sinus dans un triangle rectangle



La définition retenue ci-dessus pour le cosinus et le sinus est parfaitement compatible avec la définition vue au collège.

Considérons en effet un triangle OAB rectangle en A.
On peut définir un repère orthonormé $(O\,;\ I, J)$ suivant le schéma ci-contre.

P étant la projection orthogonale de M sur l'axe des abscisses, on peut appliquer le théorème de Thalès et on a :

$\frac{OP}{OA} = \frac{OM}{OB} = \frac{PM}{AB} \Leftrightarrow \frac{\cos\alpha}{OA} = \frac{1}{OB} = \frac{sin\alpha}{AB}$

car $OP = cos\alpha$, $OM = 1$, et $PM = sin\alpha$

On retrouve bien les formules vues au collège, à savoir :

$cos\alpha = \frac{OA}{OB}$ et $sin\alpha = \frac{AB}{OB}$

Les relations trigonométriques

Les formules qui suivent ne sont pas obligatoirement à connaître par cœur.
Il faut savoir les retrouver à partir du cercle trigonométrique.

Remarque : dans les formules, on a utilisé la notation fonctionnelle en écrivant $\cos(x)$ et non $\cos x$.

1) Les relations de symétrie

$\cos(\pi - x) = -\cos(x)$
$\sin(\pi - x) = \sin(x)$

$\cos(\pi + x) = -\cos(x)$
$\sin(\pi + x) = -\sin(x)$

$\cos(-x) = \cos(x)$
$\sin(-x) = -\sin(x)$

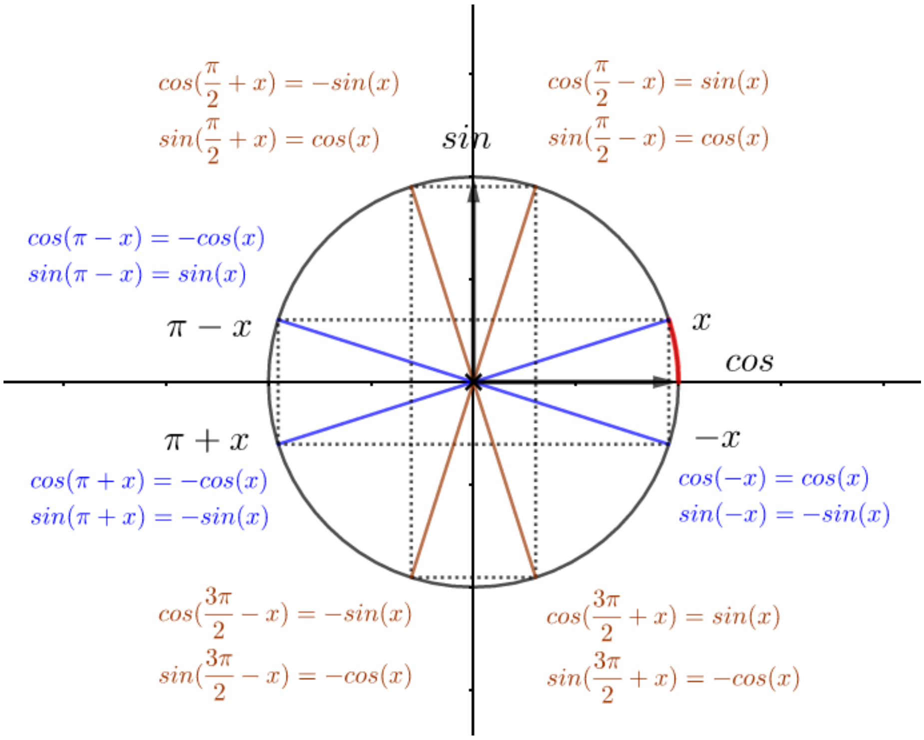
2) Les relations de déphasage

$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$

$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$

$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin(x)$

$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x)$



III) Fonctions cosinus et sinus d'un nombre réel

On définit simplement les fonctions cosinus et sinus par :

$\cos : \mathbb{R} \to [-1; 1]$
$\quad x \to \cos(x) = \cos x$
$\sin : \mathbb{R} \to [-1; 1]$
$\quad x \to \sin(x) = sinx$

Remarques :

- Pour obtenir ces valeurs, il suffit de placer par enroulement $M(x)$ sur le cercle trigonométrique. Ses coordonnées sont alors $(\cos(x) ; \sin(x))$.
- Comme $-1 \leq \cos x \leq 1$ et $-1 \leq sinx \leq 1$, l'ensemble image de ces fonctions est $[-1; 1]$.

Rappels :

Soit f une fonction définie sur un intervalle $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}$.
On dit que f est paire si pour tout $x \in \mathcal{D}$, on a $-x \in \mathcal{D}$ et $f(-x) = f(x)$.
On dit que f est impaire si pour tout $x \in \mathcal{D}$, on a $-x \in \mathcal{D}$ et $f(-x) = -f(x)$.

Une fonction paire admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie sur son ensemble de définition.
Une fonction impaire admet l'origine O comme centre de symétrie sur son ensemble de définition.

Propriété :

La fonction cos est paire et on a $\cos(-x) = \cos(x)$
La fonction sin est impaire et on a $\sin(-x) = -\sin(x)$

Ces propriétés sont illustrées et visibles en observant le cercle trigonométrique de la figure précédente.

Propriété :

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a les égalités :

$\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$

$\sin(x + 2\pi) = \sin(y)$

Les fonctions cos et sin sont dites périodiques de période 2π.

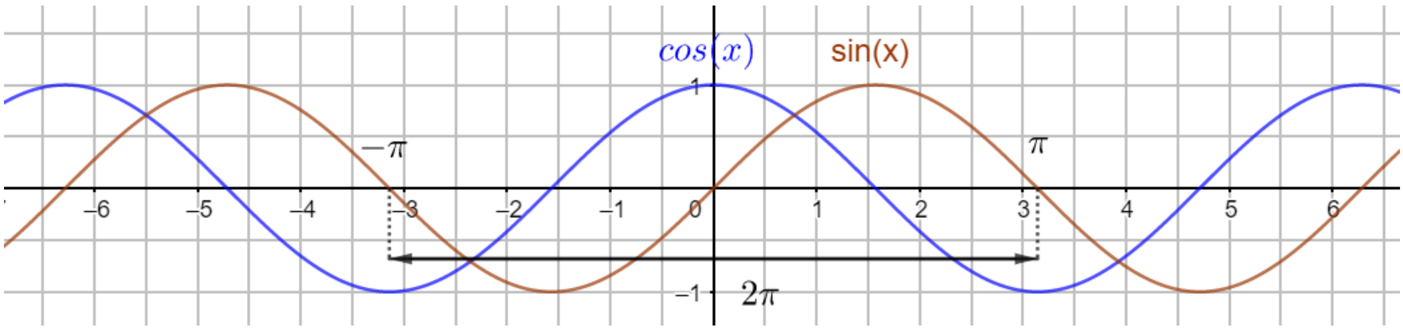
Cette formule doit être sue. Quand on enroule l'axe des réels autour du cercle trigonométrique, les réels x et $x + 2\pi$ auront la même image $M(x)$ sur le cercle car celui-ci à une circonférence de 2π. Entre ces deux réels, il y aura exactement un tour de cercle en plus pour le second.

De façon plus générale, pour tout $k \in \mathbb{Z}\ et\ x \in \mathbb{R}$ on a les égalités :

$\cos(x + 2k\pi) = \cos(x)$

$\sin(x + 2k\pi) = \sin(y)$

Courbes des fonctions cosinus et sinus



La périodicité étant de 2π le motif des courbes se répète.

Il suffit de tracer une courbe sur l'intervalle $[-\pi; \pi]$ pour en déduire par translation de 2π son tracé sur $\mathbb{R}$.

Tableaux de variation de $\cos(x)$ et $\sin(x)$ sir $[-\pi; \pi]$:

x	$-\pi$		0		$+\pi$
$cos(x)$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}$		$+\pi$
$sin(x)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	0