Probabilités, Statistiques, Combinatoire - cours 7

Adrian Tanasă

université de Bordeaux – Licence Informatique

Rappel - notions vu le dernier cours

- le vocabulaire des probabilités (univers, événement, loi de probabilités, ...)
- les définitions essentielles (axiomes d'une loi de probabilités)
- définition d'une probabilité par des choix de poids ; probabilité uniforme.
- opérations ensemblistes $\rightarrow$ opérations sur les événements

Plan du cours d'aujourd'hui

- Interprétation possible de la définition d'un espace de probabilités ; exemples
- Exemples utilisations de la loi uniforme
- Quelques formules utiles
- Espace produit
- Indépendance de 2 événements
- Indépendance de plus de 2 événements : indépendance 2-à-2 et indépendance globale
- Calcul d'événements

Interprétation

interprétation possible de la définition d'un espace de probabilités est la suivante :

- on a défini l'ensemble des "résultats possibles" de l'expérience (les événements élémentaires)

- on imagine ensuite que "quelque chose" (ou "quelqu'un") choisit un élément $x \in \Omega$ au hasard, de telle sorte que chaque élément x ait probabilité $\mathbb{P}(\{x\})$ d'être choisi ;

- pour n'importe quel événement A, on considère alors que "l'événement A se produit" lorsque le x choisi est dans A

- et donc, "les événements A et B se produisent tous les deux" correspond à la condition "$x \in A$ et $x \in B$", soit $x \in A \cap B$; et "l'un au moins des événements A et B se produit" correspond à la condition "$x \in A$ ou $x \in B$", soit $x \in A \cup B$.

Quelques exemples

- **Lancer d'un dé équilibré :** on peut prendre $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, et, pour tout $A \subset \Omega$, $\mathbb{P}(A) = \#A/6$

- **Tirage à pile ou face avec une pièce équilibrée :** on peut prendre $\Omega = \{\text{pile}, \text{face}\}$, avec $\mathbb{P}(\{\text{pile}\}) = \mathbb{P}(\{\text{face}\}) = 1/2$.

- **Tirage deux fois à pile ou face :** on peut prendre pour Ω, les séquences de longueur 2, à valeur dans $\{P, F\}$: par exemple, $\Omega_2 = \{(P, P), (P, F), (F, P), (F, F)\}$ (avec loi $\mathbb{P}(x) = \frac{1}{4}$ pour tout $x \in \Omega_2$)

- **Tirage à pile ou face avec une pièce déséquilibrée :** par exemple, $\Omega = \{P, F\}$ avec $\mathbb{P}(\{P\}) = 0.6$ et $\mathbb{P}(\{F\}) = 0.4$.

Rappel : loi uniforme

Parmi les lois de probabilités sur un tel ensemble, la **loi uniforme** est la seule qui accorde la même probabilité à tous les singletons, *i.e.* pour tout $x \in \Omega$, $p(x) = 1/\#\Omega$.

Définition

La loi uniforme $\mathbb{P}_U$ sur Ω est définie de la façon suivante : pour toute partie $A \subseteq \Omega$,

$$\mathbb{P}_U(A) = \frac{\#A}{\#\Omega}.$$

- C'est la loi des "tirages équitables".

Exemples :
"dé équilibré" (univers : les entiers de 1 à 6),
"[jeu de cartes] bien mélangé" (univers : les ordres possibles sur le paquet de cartes, *i.e.* les permutations sur un ensemble à 32, ou 52, ou 78 éléments),
"choisir uniformément" parmi un ensemble fini...

Formules utiles

- vide : on a toujours $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$;
- union : pour n'importe quels événements A et B,
  $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$;
- complémentaire : pour n'importe quel événement A,
  $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$;
- $A \backslash B$: pour n'importe quels événements A et B,
  $\mathbb{P}(A \backslash B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B)$;
- En particulier, monotonie : si $B \subset A$, on a bien $\mathbb{P}(B) \leq \mathbb{P}(A)$.

(preuves en TD)

Espace produit

- Situation fréquente : on a une expérience “composite”, facile à décrire comme : “on effectue l’expérience $\mathcal{A}$, puis, indépendamment, l’expérience $\mathcal{B}$”.
- On a une modélisation pour $\mathcal{A}$, par un espace $(\Omega_{\mathcal{A}}, \mathbb{P}_{\mathcal{A}})$; et une modélisation pour $\mathcal{B}$, par un espace $(\Omega_{\mathcal{B}}, \mathbb{P}_{\mathcal{B}})$.
- Soient $(p(x))_{x \in \Omega_{\mathcal{A}}}$ les poids pour la première proba, $(q(y))_{y \in \Omega_{\mathcal{B}}}$ les poids pour la deuxième.
- pour modéliser l’expérience composite, l’espace “produit” : $\Omega = \Omega_{\mathcal{A}} \times \Omega_{\mathcal{B}}$, avec poids $p'(x, y) = p(x)q(y)$.

Indépendance

- **Définition :** deux événements A et B sont indépendants, si on a $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.
- À ne surtout pas confondre avec deux événements incompatibles : $A \cap B = \emptyset$ (donc $\mathbb{P}(A \cap B) = 0$).
- **Note :** la définition ne parle pas de causes communes, ou quoi que ce soit ; seulement de la formule.
- **Exemple important :** dans le cas de l'espace produit $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$, tout événement qui "vient" uniquement de Ω_1 est indépendant de tout événement qui "vient" uniquement de Ω_2.
- Mais il peut arriver qu'on découvre, par le calcul, que deux événements sont indépendants "sans qu'on le sache à l'avance".

Un exemple d'indépendance

$\Omega = \{(P,P),(P,F),(F,P),(F,F)\}$ avec loi uniforme.

- On modélise deux lancers successifs d'une pièce équilibrée.
- $A = \{(P,P),(P,F)\}$: "le premier lancer donne Pile".
- $B = \{(P,F),(F,F)\}$: "le second lancer donne Face".
- $A \cap B = \{(P,F)\}$; sans surprise, A et B sont indépendants.
- $C = \{(P,P),(F,F)\}$: "les deux lancers donnent le même résultat".
- A et C sont indépendants ; c'est déjà plus surprenant.
- De plus, B et C sont également indépendants.
- Par contre, $A \cap B \cap C = \emptyset$: $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) \neq \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$.

Indépendance de plus de deux événements

deux notions différentes

Soit n événements $A_1, A_2, \dots A_n$

- **Définition :** les n événements A_i sont deux-à-deux indépendants si, dès qu'on en prend deux, ils sont indépendants : pour tous i, j avec $i \neq j$, $\mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(A_j)$.
- **Définition :** les n événements A_i sont globalement indépendants si, dès qu'on en prend $k \leq n$ sur les n, la probabilité de leur intersection est le produit de leurs probabilités : pour tout $k \leq n$, pour tous $i_1 < i_2 \cdots < i_k$,

$$\mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = \mathbb{P}(A_{i_1})\mathbb{P}(A_{i_2}) \cdots \mathbb{P}(A_{i_k})$$

- Propriété : l'indépendance globale entraîne l'indépendance 2-à-2
  (mais la réciproque est fausse : voir par exemple le cas des deux pile-ou-face).

Calculs : calculs d'événements

- Dans énormément de situations, on ne connaît pas l'univers, mais on connaît certains événements "de base", et diverses relations entre eux (indépendance, probabilités d'intersections ou d'unions).
- On peut alors déterminer la probabilité de certains événements composites, définis par des combinaison des événements de base (par intersections, unions, complémentaires...)
- En bref, on **calcule** l'événement (on en donne une expression à base d'opérations ensemblistes) comme un préalable au calcul de sa probabilité.
- **Bonus :** ces calculs d'événements ne dépendent pas de la loi de probabilités choisie pour modéliser l'expérience ; les calculs de probabilités, eux, en dépendent généralement.

Exemple de calcul

- **Situation :** on a trois événements “de base” A, B, C, dont on sait les choses suivantes :
  - A et B sont incompatibles ;
  - A et C sont indépendants ;
  - $\mathbb{P}(A) = 0.3$, $\mathbb{P}(B) = 0.25$, $\mathbb{P}(C) = 0.5$, $\mathbb{P}(B \cap C) = 0.1$.
- Dans ce cas, on a assez d'informations pour calculer la probabilité de **n'importe quel événement** qui s'exprime en fonction de A, B et C.
- Par exemple : on s'intéresse à l'événement D : “A ou B se produit, mais pas C”
- On exprime $D = (A \cup B) \cap \overline{C}$.
- On développe : $D = (A \cap \overline{C}) \cup (B \cap \overline{C})$.
- $A \cap \overline{C} = A \backslash (A \cap C)$; similaire pour B ; de plus comme A et B sont incompatibles, l'union pour D est une union disjointe.
- Au final, $\mathbb{P}(D) = (0.3 - 0.3 \times 0.5) + (0.25 - 0.1) = 0.3$.

Au prochain cours

Probabilités conditionnelles