Université de Bordeaux – 2021/22
UE Mathématiques approfondies **R. Coulangeon - G. Ricotta**

TD 4 Géométrie et nombres complexes

Rappels.

Exercice 1. Ecrire sous la forme $x + iy$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, les nombres complexes suivants :
1. $\forall n \in \mathbb{N}$, i^n **2.** $\frac{1+2i}{2+i}$ **3.** $(2 + 3i)^3$ **4.** $\frac{2+5i}{1-i} + \frac{2-5i}{1+i}$

Exercice 2. Calculer le module et l'argument de chacun des nombres complexes suivants :
1. $1 + i\sqrt{3}$ **2.** $-\sqrt{6} + i\sqrt{2}$ **3.** $(1 - i)(\sqrt{3} - i)(\cos\frac{\pi}{5} + i \sin\frac{\pi}{5})$ **4.** $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^4$.

Exercice 3. Déterminer les entiers naturels n tels que $(1 - i\sqrt{3})^n$ soit
(1) imaginaire pur,
(2) réel négatif.

Exercice 4. Donner l'écriture cartésienne et l'écriture trigonométrique de $\frac{\sqrt{3}-i}{1-i}$.
En déduire les valeurs de $\cos\frac{\pi}{12}$ et de $\sin\frac{\pi}{12}$.

Exercice 5.
(1) Exprimer $\cos\theta$ à l'aide de $e^{i\theta}$ et de $e^{-i\theta}$.
(2) Calculer $(e^{i\theta} + e^{-i\theta})^5$ à l'aide de la formule du binôme de Newton.
(3) En regroupant les termes de la forme $e^{in\theta}$ et $e^{-in\theta}$, trouver une expression de $\cos^5\theta$ en fonction des cosinus et des sinus de multiples de θ.

Exercice 6.
(1) Exprimer $e^{5i\theta}$ en fonction des puissances de $\cos\theta$ et de $\sin\theta$.
(2) En déduire une expression de $\cos 5\theta$ en fonction des puissances de $\cos\theta$ et de $\sin\theta$.

Exercice 7. Soit x un nombre réel appartenant à $]-\pi, \pi[$. Déterminer le module et l'argument de $1 + e^{ix}$ (mettre $e^{i\frac{x}{2}}$ en facteur).

Exercice 8.
Soient $S = \sum_{k=0}^{n} \cos kx$ et $S' = \sum_{k=0}^{n} \sin kx$, pour $n \in \mathbb{N}^*$.
(1) Donner une écriture trigonométrique de $S + iS'$.
(2) En déduire une autre écriture de S et de S'.
(3) Donner une autre écriture de $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos kx$.

Cercles et droites dans le plan complexe.

Exercice 9. Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que
(1) $|1 - z| \leq \frac{1}{2}$ (2) $\mathrm{Re}(1 - z) \leq \frac{1}{2}$ (3) $\mathrm{Re}(iz) \leq \frac{1}{2}$

Exercice 10. On rappelle que l'équation d'un cercle dans le plan complexe peut être donné sous les deux formes suivantes :
— la forme $|z - \omega| = r$,
— en développant la forme ci-dessus, $z\bar{z} - \bar{\omega}z - \omega\bar{z} + \gamma = 0$.
Donner ces deux formes pour chacun des cercles suivants :
(1) Le cercle de centre $-1 - i$ et de rayon 3.
(2) Le cercle d'equation $z\bar{z} + iz - i\bar{z} - 3 = 0$.
(3) le cercle de diamètre le segment $[A, B]$ où A est le point d'affixe $4 + i$ et B le point d'affixe $1 - 3i$.

Exercice 11. Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que
(1) $|1 - \frac{1}{z}|^2 = 2$ (2) $|\frac{z-3}{z+3}| = 2$ (3) $|\frac{z-3}{z+3}| < 2$

Exercice 12. On rappelle que l'équation d'une droite dans le plan complexe peut être donnée sous les deux formes suivantes :

— la forme $ax + bx = c$, où $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$,
— la forme $\bar{\omega}z + \omega\bar{z} = k$.

Donner les deux formes des équations des droites suivantes :
(1) la droite d'equation $y = 4x - 2$.
(2) la droite $\mathrm{Re}(z) = 1$.
(3) la droite passant par les points d'affixe $4 + i$ et $1 - 3i$.
(4) la droite d'equation $(1 + 2i)\bar{z} + (1 - 2i)z + 4 = 0$.

Exercice 13. Calculer
(1) le point d'intersection des droites d'équations $iz - i\bar{z} = 2$ et $(1 + 2i)\bar{z} + (1 - 2i)z + 4 = 0$.
(2) les points d'intersection de la droite $\mathrm{Re}(z) = 1$ et du cercle $|z - i| = 3$.
(3) l'equation de la droite joignant les deux points d'intersection du cercle de centre $-i$ de rayon 1 et du cercle de centre $2 + 2i$ de rayon 3 (il n'est pas demandé de calculer ces points d'intersection).

Racines de l'unité.

Exercice 14.
(1) Déterminer les racines cubiques de l'unité (i.e. les complexes z tels que $z^3 = 1$). Donner leur forme algébrique et leur forme géométrique.
(2) Soient j et j' les deux racines non réelles de cette équation. Montrer que

$$j' = j^2 = \bar{j} \qquad 1 + j + j^2 = 0.$$

Exercice 15. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations :
(1) $z^3 = 8i$,
(2) $4z^4 = -i$,
(3) $(z + 1)^4 = -16$.

Exercice 16. Soit un entier $n \geq 2$.
(1) Calculer la somme des racines n-èmes de l'unité dans $\mathbb{C}$.
(2) Calculer le produit des racines n-èmes de l'unité dans $\mathbb{C}$.

Exercice 17.
(1) En écrivant la somme des racines 5è de l'unité, trouver une relation entre $\cos(\frac{2\pi}{5})$ et $\cos(\frac{4\pi}{5})$.
(2) En déduire les valeurs de $\cos(\frac{2\pi}{5})$ et $\cos(\frac{4\pi}{5})$.

Exercice 18. Résoudre les équations suivantes :
(1) $z^n = \bar{z}$, pour $n \geq 2$.
(2) $1 + 2z + 2z^2 + \ldots + 2z^{n-1} + z^n = 0$.

Exercice 19. Soit $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n-èmes de l'unité dans $\mathbb{C}$. Calculer

$$\sum_{z \in \mathbb{U}_n} |z - 1|.$$

Exercice 20. Soit $a \in \mathbb{C}$ tel que $|a| = 1$ et $z_1, \ldots, z_n$ les solutions de l'equation $z^n = a$. Montrer que les points d'affixes $(1 + z_1)^n, \ldots, (1 + z_n)^n$ sont alignés.

Exercice 21.
Une racine n-ième de l'unité x dans $\mathbb{C}$ est dite *primitive* si pour toute autre racine n-ième de l'unité y il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $y = x^k$. Montrer que $x = e^{i\theta}$ est racine n-ième primitive de l'unité si et seulement si θ est de la forme $\frac{p}{n}$ où p est premier avec n.

Exercice 22. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on note $\mathbb{U}_n = \{z \in \mathbb{C}, z^n = 1\}$.
(1) Montrer que si n divise $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ alors $\mathbb{U}_n \subset \mathbb{U}_m$.
(2) Soient $m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Montrer que $\mathbb{U}_n \cap \mathbb{U}_m = \mathbb{U}_d$ où $d = PGCD(n, m)$.

Exercice 23. On reprend les notations de l'exercice précédent.
(1) Montrer que pour tout $(z, z') \in \mathbb{U}_n \times \mathbb{U}_m$, on a $zz' \in \mathbb{U}_{mn}$. Soit $f\colon \mathbb{U}_n \times \mathbb{U}_m \to \mathbb{U}_{mn}$ l'application ainsi définie.

(2) Montrer que f est injective si et seulement si 1 a pour unique antécédent le couple $(1,1)$.
(3) En déduire que f est une bijection si et seulement si n et m sont premiers entre eux.

Transformations du plan complexe.

Exercice 24. Soient $a,b,c \in \mathbb{C}$ et $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la fonction polynomiale d'expression $f(z) = az^2+bz+c$.
(1) Montrer que si f est non constant, alors f est surjective.
(2) Montrer que f est injective si et seulement si f est de degré 1.

Exercice 25. Déterminer l'expression de $f(z)$ où $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est
(1) la translation de vecteur d'affixe $3+i$,
(2) la rotation de centre 0 et d'angle $-2\pi/3$,
(3) la rotation de centre $-2+i$ et d'angle $3\pi/4$,
(4) la symétrie centrale par rapport au point 2,
(5) l'homothetie de rapport $1/3$ et de centre $3i$,
(6) la composée des deux transformations précédentes.

Exercice 26. Inversement, caractériser les applications suivantes de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$:
(1) $f(z) = z-5-i$,
(2) $f(z) = e^{\frac{i\pi}{3}}z+4$,
(3) $f(z) = 3e^{\frac{i\pi}{2}}z$.

Exercice 27. Soient $f,g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ les applications définies par $f(z) = -i\bar{z}+1+i$ et $g(z) = i\bar{z}-1+i$, respectivement.
(1) Déterminer les points fixes de f, c'est à dire les $z \in \mathbb{C}$ tels que $f(z) = z$, et les points fixes de g.
(2) Soit $h = f \circ g$. Quelle est cette transformation, que peut-on dire de son centre ?

Exercice 28. Soit $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ l'application définie par $f(z) = az+b$, où $a,b \in \mathbb{C}$ et $a \neq 1$.
(1) Montrer que f admet un unique point fixe ω.
On écrit $a = \rho e^{i\theta}$, où $\rho, \theta \in \mathbb{R}$.
(2) Donner l'image de $z \in \mathbb{C}$ par la rotation r de centre ω et d'angle θ.
(3) Donner l'image de $z \in \mathbb{C}$ par l'homothétie h de centre ω et de rapport ρ.
(4) Donner l'image d'un complexe z par $r \circ h$ en fonction de a, b et z. Que peut-on en conclure ?

Exercice 29. Soit $f\colon z \in \mathbb{C} \mapsto (-1+i\sqrt{3})z - i\sqrt{3}$.
(1) Déterminer les points fixes de f.
(2) Montrer que f est une *similitude directe*, c'est-à-dire la composée d'une rotation et d'une homothétie de rapport positif.
(3) Montrer que f est la composée d'une homothétie de centre 0 dont on donnera le rapport et d'une rotation, dont on donnera le centre et l'angle.

Exercice 30. Etant donnés $a,b \in \mathbb{C}$, on définit l'application $f_{a,b}\colon z \mapsto az+b$.
(1) Montrer que $f_{a,b}$ est une bijection de $\mathbb{C}$ si et seulement si $a \neq 0$.
(2) Montrer que l'ensemble $\mathcal{S} = \{f_{a,b}, a \in \mathbb{C}^*, b \in \mathbb{C}\}$ muni de la loi $\circ$ est un groupe.

Exercice 31. On considère dans cet exercice l'application $f\colon \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ définie par $f(z) = \frac{1}{z}$.
(1) Montrer que f est bijective et déterminer son application réciproque.
(2) Déterminer l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Im}(f(z)) \geq 0$.
(3) Donner l'image par f de l'axe réel et l'axe imaginaire.
(4) Montrer que l'image d'une droite passant par l'origine (privée de 0) est une droite passant par l'origine (privée de 0).
(5) Calculer l'image par f de la droite passant par les points d'affixe 1 et i (indication : on pourra d'abord écrire l'equation en z et $\bar{z}$ de la droite joignant ces 2 points).
(6) Généraliser en déterminant l'image d'une droite quelconque qui ne passe pas par 0.
(7) Déterminer l'image d'un cercle passant par l'origine.
(8) Déterminer l'image par f du cercle de centre 0 de rayon r.
(9) Déterminer l'image d'un cercle quelconque qui ne passe pas par l'origine.

Exercice 32. Soit $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la fonction définie par $f(z) = \frac{-1+z}{1+z}$.
(1) Montrer que f définit une bijection de $\mathbb{C} \setminus \{-1\}$ sur $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ et calculer son inverse.

(2) Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a^2 > b$. Montrer que $|z|^2 + a(z + \bar{z}) + b = 0$ est l'équation du cercle de centre $-a$ et de rayon $\sqrt{a^2 - b}$.

(3) Ecrire l'equation de la droite Δ passant par $i - 1$ et -2.

(4) Calculer l'image par f de la droite Δ.

(5) Soit $\rho > 0$. Calculer l'image par f du cercle de centre 0 et de rayon ρ.