Probabilités, Statistiques, Combinatoire, CM 9 - Variables aléatoires

Adrian Tanasă

Université de Bordeaux – Licence Informatique

Notions vu le dernier cours - probabilité conditionnelle

- expérience composite ; exemple
- analogie avec les proportions
- définition de la probabilité conditionnelle
- quelques remarques
- formule des probabilités totales
- formule généralisée des probabilités totales
- conditionnement et indépendance
- conditionnement successifs
- formule de Bayes

Plan du cours d'aujourd'hui - variables aléatoires

- expérience de la somme de 2 dés
- définition
- exemples
- variables aléatoires particulières
- loi d'une variables aléatoires ; exemples

Jusqu'ici...

- Jusqu'à présent, on a vu comment modéliser une expérience, et comment calculer une probabilité, ou une probabilité conditionnelle.

- Très souvent, dans une expérience aléatoire, il y a une ou plusieurs grandeurs numériques (des nombres aléatoires) dont la ou les valeurs nous intéressent.
- **Exemple** 1 **:** On lance deux dés ; on s'intéresse à la **somme** des résultats des deux dés.
- **Exemple :** On lance 5 dés ; on s'intéresse au **nombre de dés qui donnent le résultat** 6.
- **Exemple :** On tire 10 fois consécutivement à pile ou face ; on s'intéresse à *plusieurs* nombres :
  - le nombre de Face ;
  - le nombre Pile qu'on obtient avant le premier Face (s'il y en a)
  - le nombre maximum de Pile consécutifs, par forcément avant le premier Face.

Jusqu'ici (suite)

- **Exemple :** On choisit un individu dans une population donnée, et on s'intéresse à son *âge*, sa *taille*, son *nombre de frères et sœurs*.
- Dans tous ces exemples, on a une grandeur numérique (souvent un entier) qui dépend du résultat de l'expérience.

Somme de deux dés

expérience : lancer deux dés, on s'intéresse à la somme des deux dés.

modélisation : univers de probabilités - l'ensemble $\Omega = [[1, 6]]^2$ (36 éléments), avec la loi de probabilités uniforme ;

On peut ainsi définir 11 événements pertinents :

- S_2 : "la somme vaut 2", $S_2 = \{(1, 1)\}$; probabilité : $1/36$.
- ...
- S_7 : "la somme vaut 7", $S_7 = \{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)\}$; probabilité : $6/36 = 1/6$.
- ...
- S_{12} : "la somme vaut 12", $S_{12} = \{(6, 6)\}$; probabilité : $1/36$.
- On a ainsi 11 événements deux à deux disjoints (la somme des deux dés ne peut pas prendre deux valeurs à la fois), et dont l'union représente l'univers tout entier (la somme des deux dés est forcément un nombre entier entre 2 et 12).

Notion de “variable aléatoire”

- **Exemple 1 :** dans l’expérience consistant à lancer deux dés, on peut définir plusieurs variables aléatoires :
  - S : somme des résultats des dés (entier entre 2 et 12)
  - D : différence entre le résultat du premier dé et celui du second (entier entre -5 et 5)
  - I : nombre de dés donnant un résultat impair (0, 1 ou 2)
  - M : maximum des résultats des deux dés (entier entre 1 et 6)
  - B : “π si on obtient $(1, 1)$, 0 sinon”
  - *etc.*
- **Exemple 2 :** dans l’expérience consistant à tirer au dé de manière répétée jusqu’à obtenir un 6, on peut également définir plusieurs variables aléatoires :
  - N : nombre de tirages nécessaires pour obtenir un 6
  - S : somme des résultats obtenus avant de s’arrêter
  - N_3 : nombre de fois où on obtient 3 avant d’obtenir le premier 6
  - *etc.*

Variable aléatoire

- **Définition :** si $(\Omega, \mathbb{P})$ est un espace de probabilités, une *variable aléatoire* sur Ω, est une fonction $X : \Omega \to \mathbb{R}$.
- On peut aussi parler de variable aléatoire à valeurs dans un autre ensemble que $\mathbb{R}$: mot aléatoire (à valeurs dans un ensemble A^*, où A est l'alphabet) ; arbre binaire aléatoire (à valeurs dans l'ensemble de tous les arbres binaires), *etc.*

Remarque sur la terminologie “variable aléatoire”

- Note : la terminologie est trompeuse : une variable aléatoire n’est pas une variable, c’est une fonction

- Néanmoins, on va se tenir à cette terminologie, qui est standard.

Conventions

- "variable aléatoire à valeurs dans E" pour dire que la variable aléatoire ne prend que des valeurs dans l'ensemble E ; le plus souvent on prendra $E = \mathbb{N}$ ou $E = \mathbb{Z}$ ("variable aléatoire à valeurs entières").

- De même qu'on prend l'habitude de nommer les événements par des lettres majuscules (A, B, C...), on utilise aussi souvent des lettres majuscules pour désigner des variables aléatoires, mais plutôt avec la fin de l'alphabet : X, Y...

Exemples

- une expérience “lancer de deux dés” modélisée par un espace $\Omega = [[1, 6]]^2$, un élément générique de Ω peut se noter (x, y)

  on peut définir des variables aléatoires :
  - résultat du premier dé : $X_1(x, y) = x$
  - résultat du second dé : $X_2(x, y) = y$
  - somme des deux dés : $S(x, y) = x + y = X_1(x, y) + X_2(x, y)$;
    ce qu'on note plus simplement : $S = X_1 + X_2$

Combinaison de variables aléatoires

- **Remarque fondamentale :**
  On peut **combiner** les variables aléatoires pour en construire de nouvelles.
  - $S = X_1 + X_2$ (**sommes** de variables aléatoires)
  - $D = X_1 - X_2$
  - *etc.*

Variables aléatoires particulières

- **constantes :** on peut définir la "fonction 1" comme étant la fonction constante qui vaut toujours 1 : pour tout $t \in \Omega$, $\mathbf{1}(t) = 1$.
- **Variable indicatrice d'un événement :** si $A \subset \Omega$ est un événement, on peut définir la variable aléatoire $\mathbf{1}_A$: pour tout $t \in \Omega$, $\mathbf{1}_A(t)$ vaut 1 sur A, 0 ailleurs
(cas particulier : la "fonction 1" ci-dessus, est l'indicatrice de l'événement Ω)
- On peut alors exprimer $\mathbf{1}_{A\cap B}$ ou $\mathbf{1}_{A\cup B}$ en fonction de $\mathbf{1}_A$ et de $\mathbf{1}_B$...

Solutions

- $\mathbf{1}_{A\cap B}$, c'est la fonction qui vaut 1 sur $A \cap B$ et 0 ailleurs ; en d'autres termes, la fonction qui vaut 1 lorsque $\mathbf{1}_A$ et $\mathbf{1}_B$ valent 1, et 0 sinon :
$$\mathbf{1}_{A\cap B} = \mathbf{1}_A.\mathbf{1}_B$$
(produit de fonctions ; on utilise le fait que $1 \times 1 = 1$ et $0 \times 0 = 0$)
- $\mathbf{1}_{A\cup B}$ peut s'écrire $\mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_{A\cap B}$ (si on oublie le dernier terme, on obtient 2 sur $A \cap B$) ; ce qui peut se réécrire en
$$\begin{aligned}\mathbf{1}_{A\cup B} &= \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A.\mathbf{1}_B \\ &= 1 - (1 - \mathbf{1}_A)(1 - \mathbf{1}_B)\end{aligned}$$

À partir d'une variable aléatoire

- Question : Une fois définis un univers de probabilités $(\Omega, \mathbb{P})$ et une variable aléatoire X sur Ω, que peut-on calculer comme probabilités ?
- Une notation comme $\mathbb{P}(X)$ n'a pas de sens : les seules choses dont la probabilité est définie, ce sont les événements (les parties de Ω) ; or X n'est pas une partie de Ω.
- **En revanche**, on peut utiliser X pour définir d'événements, dont on pourra calculer la probabilité
- Si a est une valeur possible de X, on peut définir l'événement

  $$\{t \in \Omega : X(t) = a\} = X^{-1}(\{a\})$$

  (c'est l'ensemble des $t \in \Omega$ pour lesquels X prend la valeur a)
- Plus généralement, si A est une partie de l'ensemble des valeurs possibles de X, on peut définir

  $$\{t \in \Omega : X(t) \in A\} = X^{-1}(A)$$

  (ensemble des $t \in \Omega$ pour lesquels X prend une valeur dans A)

Notations (importantes)

Soit X une variable aléatoire définie sur l'univers de probabilité Ω. Soit a une valeur possible pour X, et soit A un ensemble de valeurs possibles ($A \subset E$, si X est à valeurs dans E).

- On note $\{X = a\}$, l'événement

$$\{t \in \Omega : X(t) = a\}$$

- On note $\{X \in A\}$, l'événement

$$\{t \in \Omega : X(t) \in A\}$$

- il s'agit **d'événements** : dans une expérience, cela peut se produire (être vrai) ou non.
- Dans la notation d'une probabilité, on s'autorise à ne pas écrire les accolades : on écrira $\mathbb{P}(X = 1)$ au lieu de $\mathbb{P}(\{X = 1\})$ par exemple.

Loi d'une variable aléatoire

Définition (loi d'une variable aléatoire)

Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace de probabilités, et X une variable aléatoire sur Ω, à valeur dans E. La **loi** de X est par définition la loi de probabilités sur E, notée parfois $\mathbb{P}_X$, définie par : pour toute partie $A \subset E$,

$$\mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(\{t \in \Omega : X(t) \in A\}.$$

(**c'est** une loi de probabilités sur E)

Remarques

- L'ensemble $\{t \in \Omega : X(t) \in A\}$ est une partie de Ω : c'est bien un événement.
- On le note aussi $X^{-1}(A)$ Attention : c'est une notation, il n'existe pas de fonction X^{-1}.
- On le note également $(X \in A)$ (on fait disparaître la variable t de l'écriture
- Quand $A = \{a\}$ (A est un singleton), on accepte pour le même événement, la notation $(X = a)$
- On préférera la notation $\mathbb{P}(X \in A)$ qui ne risque pas d'être confondue avec une probabilité conditionnelle.

Identifier la loi d'une variable aléatoire

Déterminer la loi d'une variable aléatoire X, cela veut dire :

- décrire l'ensemble des valeurs possibles pour la variable X
- pour chaque valeur possible a, calculer la probabilité que la variable X prenne la valeur a (calculer la probabilité de l'événement $\{X = a\}$)

Un exemple de calcul de lois

On prend l'expérience consistant à lancer deux dés équilibrés ; on la modélise par l'espace $\Omega = [[1, 6]]^2$, avec la probabilité uniforme.
On définit les deux variables aléatoires X_1 (résultat du premier dé) et X_2 (résultat du deuxième dé).

- Pour $(x, y) \in \Omega$, $X_1(x, y) = x$, et $X_2(x, y) = y$.
- L'événement $\{X_1 = 1\}$, c'est $\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6)\}$; on en déduit $\mathbb{P}(X_1 = 1) = 1/6$.
- On peut répéter le calcul pour $\{X_1 = 2\}$, $\{X_1 = 3\}$: au final, la loi de X_1 est la loi uniforme sur $[[1, 6]]$.
- La loi de X_2 est **aussi** la loi uniforme sur $[[1, 6]]$; les deux variables ont la même loi.
- Pour autant, les deux variables ne sont pas **identiques** : $X_1(4, 6) = 4$, $X_2(4, 6) = 6$; il existe des éléments de Ω pour lesquels X_1 et X_2 prennent des valeurs différentes.

Un exemple de calcul de loi

Reprenons l'expérience consistant à lancer deux dés équilibrés ; et calculons la loi de la variable aléatoire “maximum des deux dés”.

- $X_1(x,y) = x$: résultat du premier dé ; $X_2(x,y) = y$: résultat du deuxième dé.
- On définit, pour $(x,y) \in \Omega$, $M(x,y) = \max(x,y)$, à valeur dans $E = \{1,2,3,4,5,6\}$. (En fait, généralement on écrit seulement $M = \max(X_1, X_2)$)
- Pour décrire la loi de M, il suffit de décrire la probabilité $\mathbb{P}_M$ pour les singletons de E, *i.e.*, $\mathbb{P}(M = i)$ pour chaque $i \in E$:
- pour $i = 1$, c'est facile, $(M = 1) = \{(1,1)\}$ et $\mathbb{P}(M = 1) = 1/36$;
- pour $i = 2$: $(M = 2) = \{(1,2),(2,1),(2,2)\}$ et $\mathbb{P}(M = 2) = 3/36$;
- pour $i = 3$: $(M = 3) = \{(1,3),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\}$ et $\mathbb{P}(M = 3) = 5/36$;
- $\mathbb{P}(M = 4) = 7/36$, $\mathbb{P}(M = 5) = 9/36$ et $\mathbb{P}(M = 6) = 11/36$; on peut vérifier que la somme fait bien 1.