# Probabilités, Statistiques, Combinatoire : TM2

Combinatoire : permutations et mots de Dyck

Cette feuille d'exercices fait suite à la feuille TM1 ; il est naturel d'y réutiliser certaines des fonctions que vous avez été amené à écrire.

Télécharger depuis la page du cours le fichier `tm2.py`, qui contient plusieurs versions de certaines des fonctions demandées dans le TM1, et les déclarations à compléter pour cette séance.

## 2.1 Retour sur les permutations

On rappelle que les permutations telles qu'elles sont représentées dans vos programmes par des tuples, représentent des fonctions (en fait, des bijections) de $[[1, n]]$ vers $[[1, n]]$ : le tuple $t = (t_1, t_2, \ldots, t_n)$ représente une fonction $s$ définie par : pour chaque entier $i \in [[1, n]]$, $s(i) = t_i$. **Attention** une fois de plus au fait que les indices dans les tuples PYTHON vont, pour un tuple de longueur $k$, de 0 à $k - 1$ et non de 1 à $k$ – il faut en tenir compte dans les programmes.

1. Un **cycle de longueur** 2, ou 2-cycle, dans une permutation $s$ est la donnée de deux entiers $i$ et $j$, distincts, tels que $s(i) = j$ et $s(j) = i$. Dans la représentation d'une permutation par un tuple, cela se traduit par le fait que la valeur $i$ apparaît en position $j$ dans le tuple, et la valeur $j$ apparaît en position $i$. Le nombre de cycle de longueur 2 dans la permutation est le nombre de telles paires d'entiers.

   Par exemple, dans $s = (3, 4, 1, 2)$ il y a deux cycles de longueur 2 : $\{1, 3\}$ (car 3 apparaît en position 1, et 1 en position 3) et $\{2, 4\}$ (2 apparaît en position 4, et 4 apparaît en position 2). On ne "compte" pas à la fois $(1, 3)$ et $(3, 1)$.

   Écrire une fonction `Nb2Cycles(s)` qui retourne le nombre de cycles de longueur 2 dans la permutation $s$. **Indication :** On peut faire la remarque suivante : dans chaque cycle de longueur 2, il y a un élément qui est plus petit que l'autre, on peut donc se contenter de compter le nombre d'éléments qui sont l'élément minimum d'un cycle de longueur 2. Or, un entier $i$ est un tel élément minimum de cycle de longueur 2 s'il satisfait deux conditions : $s(i) < i$, et $s(s(i)) = i$.

   Utiliser vos fonctions pour calculer, pour chaque entier $n$ de 2 à 10, le nombre total de cycles de longueur 2 dans l'ensemble des permutations de $[[1, n]]$. *Deviner* une formule donnant, en fonction de $n$, le nombre total de cycles de longueur 2 dans l'ensemble des permutations de longueur $n$.

2. Plus généralement, un *cycle de longueur* $k$ dans une permutation $s$ de $[[1, n]]$, est un $k$-uplet d'entiers $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$, tous deux à deux distincts, tels que, pour chaque entier $j \in [[1, k - 1]]$, $s(i_j) = i_{j+1}$, et de plus, $s(i_k) = i_1$. Un même cycle pourrait être représenté de $k$ manières différentes, en choisissant lequel des éléments est mis en tête ; afin de ne pas compter plusieurs fois le même cycle, on convient de toujours écrire le plus petit élément en premier. Par exemple, dans la permutation $(2, 6, 1, 7, 5, 3, 4)$ il y a 3 cycles : $(1, 2, 6, 3)$ de longueur 4, $(4, 7)$ de longueur 2, et $(5)$ de longueur 1 (un cycle de longueur 1 est composé d'un point fixe).

   Chaque élément $i$ de $[[1, n]]$ apparaît forcément dans un unique cycle (car $s$ est une bijection) ; la longueur de ce cycle est le plus petit entier $k$ strictement positif tel que l'on ait $s(s \dots s(i)) = i$, où $k$ est le nombre de compositions de la fonction $s$ avec elle-même.

Écrire une fonction `LongueurCycle(s,i)`, qui retourne la longueur du cycle de $s$ qui contient l'entier $i$. En réutilisant votre fonction qui produit toutes les permutations d'une longueur donnée, écrire une fonction `Longueurs(n)` qui retourne une liste de longueur $n$ indiquant, en chaque position $k$, le nombre de permutations de $[[1, n]]$ dans lesquelles le cycle contenant 1 est de longueur $k$.

Par exemple, pour $n = 3$ : il y a deux permutations où 1 est point fixe, $(1, 2, 3)$ et $(1, 3, 2)$ ; deux permutations où 1 est dans un cycle de longueur 2, $(2, 1, 3)$ et $(3, 2, 1)$ ; et deux permutations où 1 est dans un cycle de longueur 3, $(2, 3, 1)$ et $(3, 1, 2)$ ; donc l'appel `Longueurs(3)` devrait retourner la liste `[2,2,2]`. On note que la somme est $6 = 3!$ : on retrouve bien le nombre total de permutations de $[[1, 3]]$.

En expérimentant avec votre fonction `Longueurs`, *deviner* une formule donnant en fonction de $n$ et $k$, le nombre de permutations de $[[1, n]]$ dans lesquelles 1 est dans un cycle de longueur $k$.

## 2.2 Mots de Dyck

Dans cet exercice, on va représenter les mots de Dyck comme des séquences binaires, en traitant la valeur 0 comme la lettre $b$ (pas Est dans les chemins) et la valeur 1 comme la lettre $a$ (pas Nord dans les chemins).

1. Écrire une fonction `EstDyck(s)`, qui retourne `True` si la séquence binaire $s$ est un mot de Dyck, et `False` sinon.
2. Une méthode possible pour générer tous les mots de Dyck d'une longueur donnée est de générer tous les mots binaires de la même longueur, et de ne conserver que ceux qui sont des mots de Dyck. En réutilisant les fonctions écrites lors du TM1, écrire (cela ne doit pas prendre plus de quelques lignes !) une fonction `TousMotsDyck(n)`, qui retourne la liste de tous les mots de Dyck de longueur $2n$. Vous connaissez une formule donnant le nombre de tels mots en fonction de $n$ ; vérifiez au moins que votre fonction donne le bon nombre de mots pour $n$ allant de 0 à 10.
3. Un **pic** dans un mot de Dyck est une lettre $a$, immédiatement suivie d'une lettre $b$ (dans le chemin : un pas Nord suivi d'un pas Est ; le nom vient d'une représentation alternative des chemins, où les pas correspondent à des diagonales Nord-Est et Sud-Est). Écrire une fonction `Pics(s)`, qui retourne le nombre de pics du mot de Dyck passé en paramètre.
4. Utiliser vos fonctions pour déterminer combien il y a, au total, de pics dans l'ensemble des mots de Dyck de longueur $2n$, pour $n$ allant jusqu'à 9. *Deviner* une formule donnant le *nombre moyen de pics* dans les mots de Dyck de longueur $2n$, c'est-à-dire le nombre total de pics, divisé par le nombre de mots de Dyck.

   **Indication :** pour les longueurs que vos fonctions vous permettent d'explorer, écrire le nombre total de pics, divisé par le nombre de mots de Dyck, comme une fraction irréductible, et essayez de deviner une formule générale.