Probabilités, Statistiques, Combinatoire : TD7

Variables aléatoires ; espérances

Exercice 7.1

Indépendance et forme de la loi jointe

On suppose que l'on a deux variables aléatoires X et Y, à valeurs entières (ce n'est pas essentiel mais cela permet de simplifier les notations), dont on connaît implicitement la loi jointe : on sait que la probabilité de l'événement $\{X = k \text{ et } Y = \ell\}$ s'exprime toujours sous la forme $f(k)g(\ell)$, pour deux fonctions f et g qu'on ne précisera pas (mais qui sont supposées fixées).

1. Écrire l'événement $\{X = n\}$ en fonction d'événements de la forme $\{X = k \text{ et } Y = \ell\}$. En déduire que l'on a $\mathbb{P}(X = n) = C.f(n)$, pour une constante C à déterminer (**Si vous n'êtes pas à l'aise avec la manipulation de sommes infinies, vous pouvez supposer que les deux variables X et Y sont à valeurs dans un intervalle** $[[0, M]]$).
2. De même, montrer que $\mathbb{P}(Y = m) = D.g(m)$, pour une constante D à déterminer.
3. Expliquer pourquoi on a forcément $C.D = 1$.
4. En déduire que X et Y sont des variables aléatoires indépendantes.

Cet exercice est techniquement un peu complexe, mais sa conclusion est importante : si deux variables aléatoires X et Y sont telles que la probabilité de l'événement $\{X = k\} \cap \{Y = \ell\}$ s'exprime par un produit $f(k)g(\ell)$, alors X et Y sont indépendantes.

Exercice 7.2

Sur la loi binomiale

1. Rappeler comment on peut obtenir une variable aléatoire binomiale de paramètres (n, p), à partir d'une suite de n variables de Bernoulli indépendantes de paramètre p.
2. On suppose que B est une variable aléatoire binomiale de paramètres (n, p). Déterminer **(sans calculs)** la loi de la variable aléatoire C définie par $C = n - B$.

Exercice 7.3

Loi binomiale négative

La **loi binomiale négative**, ou **loi de Pólya**, est définie de la manière suivante. Elle dépend de deux paramètres n (un entier positif) et p (un réel entre 0 et 1).

Partant d'une suite infinie de "tentatives" indépendantes, chacune ayant probabilité p de "réussir", la variable aléatoire N (binomiale négative de paramètres n et p) désigne le nombre d'**échecs** subis avant le n-ème **succès**.

En d'autres termes, si on a une suite infinie $(B_1, B_2, \dots)$ de variables de Bernoulli indépendantes de même paramètre p, et que S_n désigne l'indice du n-ème 1 dans la suite $(B_1, B_2, \dots)$ (S_n est donc une variable aléatoire définie à partir de l'ensemble des B_i), $S_n - n$ suit la loi binomiale négative de paramètres n et p (on soustrait n car on ne "compte" que les échecs, pas toutes les tentatives).

1. Si N est une variable binomiale négative de paramètres $(1, p)$, alors $N + 1$ suit une loi déjà connue ; laquelle ?

2. Soit $k \geq 0$ un entier positif. Combien existe-t-il de séquences $(b_1, b_2, \ldots, b_{n+k})$, formées de 0 et de 1, de longueur $k + n$, qui se terminent par un 1 et qui, au total, comportent exactement n occurrences de 1 et k occurrences de 0 ?
3. Pour une séquence $(b_1, \ldots, b_{k+n})$ telle que décrite à la question précédente, quelle est la probabilité que les Bernoulli $B_1, \ldots, B_{n+k}$ donnent exactement cette séquence (c'est-à-dire, la probabilité que l'on ait, pour chaque entier $1 \leq i \leq k + n$, $B_i = b_i$) ?
4. En déduire une formule pour $\mathbb{P}(N = k)$, lorsque N suit la loi binomiale négative de paramètres (n, p).

   On admet que l'espérance d'une variable de loi binomiale négative de paramètres (n, p), est $\frac{n(1-p)}{p} = \frac{n}{p} - n$.
5. Alice et Bob jouent à un jeu de hasard : à chaque tour, Alice lance un dé (équilibré). Si le résultat est 1 ou 2, Alice "gagne" le coup et Bob lui donne 2 euros ; si le résultat est 3 ou plus, Alice "perd" le coup et donne 1 euro à Bob. La partie s'arrête dès qu'Alice a perdu 6 coups.

   Quelle est la loi du nombre de coups *gagnés* par Alice au cours d'une partie ? Quelle est la probabilité qu'à la fin du jeu, les gains des deux joueurs s'équilibrent (c'est-à-dire qu'au total, Alice ait donné autant à Bob que Bob à Alice) ? Quelle est l'espérance du "gain net" d'Alice au cours d'une partie (ce que Bob lui donne, moins ce qu'elle donne à Bob) ? (Exprimer le gain net d'Alice comme une fonction du nombre de coups qu'elle gagne)
6. Anatole, Barnabé et Charles-Édouard jouent ensemble à un jeu vidéo. Chacun joue une série de parties contre l'ordinateur ; une victoire rapporte 1 point à l'équipe ; une défaite termine la série de parties du joueur et c'est le joueur suivant qui prend son tour. On suppose que chacun des joueurs a probabilité 2/3 de gagner chaque partie, et que toutes les parties jouées sont indépendantes.

   Quelle est la loi du nombre total de points marqués par l'équipe ? Son espérance ?

Exercice 7.4
Insectes et Poisson

Pour cet exercice, on admet la formule suivante, valable pour tout nombre réel t :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} = e^t.$$

Un insecte pond un certain nombre, aléatoire, d'œufs. On suppose que le nombre d'œufs pondus est une variable aléatoire X qui suit la loi de Poisson de paramètre $x > 0$. Chaque œuf a une même probabilité p d'éclore, indépendamment des autres. On note Z la variable aléatoire qui représente le nombre d'œufs qui éclosent, et $Y = X - Z$ le nombre d'œufs qui n'éclosent pas.

Quelques notations : pour un nombre entier quelconque $n > 0$, on notera A_n l'événement "il y a n œufs pondus", soit $A_n = \{X = n\}$; et E_n l'événement "exactement n œufs éclosent", soit $E_n = \{Z = n\}$.

L'un des objectifs de cet exercice est de déterminer la loi de la variable aléatoire Z, donc, pour tout k, la probabilité de l'événement E_k.

1. Rappeler la formule qui donne $\mathbb{P}(A_n)$.

2. Dans cette question, on fixe un entier $n \geq 0$, et on suppose qu'il y a exactement n œufs ; en d'autres termes, les probabilités qu'on va calculer sont des probabilités conditionnelles *sachant* A_n.

   En se souvenant de la façon dont est déterminé le nombre d'oeufs qui éclosent (il y a n œufs, qui éclosent indépendamment les uns des autres, chacun avec probabilité p), donner une formule pour $\mathbb{P}_{A_n}(E_k)$, et ce pour chaque entier $k \geq 0$; on distinguera le cas $k > n$ du cas $k \leq n$.
3. Utiliser la formule des probabilités totales pour en déduire une formule (sous forme de somme infinie) pour la probabilité (non conditionnelle) $\mathbb{P}(E_k)$.
4. En "triturant" la formule trouvée à la question précédente (il faudra factoriser des facteurs communs, et faire un changement d'indice de sommation), et en utilisant la formule donnée en préambule, trouver une formule plus simple pour $\mathbb{P}(E_k)$. Quelle est la loi de la variable aléatoire Z ?
5. **Sans calculs compliqués** (mais en utilisant le résultat de la question précédente), donner la loi de Y.
6. **(Question subsidiaire)** En adaptant les raisonnements des questions précédentes, déterminer $\mathbb{P}_{A_n}(Z = k \text{ et } Y = k')$ en fonction de n, k et k', puis $\mathbb{P}(Z = k \text{ et } Y = k')$. Que remarque-t-on de surprenant sur les variables aléatoires Y et Z ?

7.1 Calculs d'espérances

Exercice 7.5

On considère deux variables aléatoires X et Y, dont la loi jointe (loi du couple (X, Y)) est définie par le tableau suivant :

$Y \backslash X$	1	2	3
1	0.2	0.1	0.2
2	0.3	0.2	0

1. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
2. Calculer l'espérance de X et celle de Y.
3. Calculer l'espérance de $X + Y$, et de $X - Y$.
4. Calculer la loi de $X + Y$, et sa variance.

Exercice 7.6

Un jeu possible de casino est le suivant : le joueur paie 1 euro pour jouer une partie, et lance trois dés (équilibrés, à 6 faces) ; son gain G est alors déterminé en fonction du nombre N de 6 obtenus sur les trois dés :

— si $N = 0$, il ne gagne rien ($G = 0$) ;

— si $N = 1$ ou $N = 2$, il gagne 2 euros ($G = 2$) ;

— si $N = 3$, il gagne 20 euros ($G = 20$).

(Le gain "net" du joueur est $G - 1$, si l'on tient compte du fait qu'il a payé 1 euro pour jouer)

1. Déterminer la loi de N.

2. Déterminer la loi de G.
3. Déterminer l'espérance de G.
4. Par quelle valeur faudrait-il remplacer le gain lorsque $N = 3$, pour que le jeu devienne "équitable" (au sens où l'espérance de G serait égale à la mise, soit 1) ?

Exercice 7.7

Espérances des lois usuelles

Les formules pour l'espérance des lois usuelles ont été vues en cours ; l'objectif de cet exercice est de voir comment les formules peuvent être obtenues. On s'autorisera à manipuler les sommes infinies de manière formelle : on peut sortir un terme de la somme, "sortir" un facteur commun, et faire un changement de variable sur l'indice de sommation.

1. **Bernoulli :** calculer, en fonction du paramètre p, l'espérance d'une variable de Bernoulli de paramètre p.
2. **Binomiale :** déduire de la question précédente, une expression simple pour l'espérance d'une variable binomiale de paramètres (n, p).
3. **Géométrique :** On considère une variable aléatoire géométrique G, de paramètre p $(0 < p < 1)$. On note E l'espérance de cette variable aléatoire.
   (a) Écrire, sous la forme d'une somme infinie (qu'il n'est pas encore question de calculer), la formule de l'espérance E pour G.
   (b) En sortant le premier terme de la somme, montrer qu'on a, formellement,
   $$E = p + (1-p)\sum_{k=2}^{\infty} k(1-p)^{k-2}p.$$
   (c) En faisant un changement de variables (poser $k' = k-1$) dans la somme infinie, montrer que l'on a
   $$E = p + (1-p)(1+E)$$
   Indication : on a $\sum_{n=1}^{\infty}(1-p)^{n-1}p = 1$ (pourquoi ?)
   (d) En résolvant l'équation obtenue à la question précédente, déterminer E en fonction de p.
4. **Poisson :** On considère une variable aléatoire P de Poisson de paramètre x $(x > 0)$. On note F l'espérance de P.
   (a) Écrire la formule de définition de l'espérance pour P.
   (b) Pourquoi a-t-on $F = \sum_{k=1}^{\infty} \exp(-x)\frac{x^k}{(k-1)!}$?
   (c) En manipulant formellement la somme infinie, et en faisant un changement de variable (poser $k' = k-1$), montrer qu'on a
   $$F = x\exp(-x)\sum_{k'=0}^{\infty}\frac{x^{k'}}{k'!}$$
   (d) Dans la formule précédente, que vaut la somme infinie ? En déduire l'expression de F en fonction de x.

7.2 Exercices plus avancés (modélisation, applications)

Exercice 7.8

Le magasin (Cet exercice prend son sens seulement si vous avez traité l'exercice sur la somme de variables de Poisson de la feuille 6, et l'exercice "Insectes et Poisson" de cette feuille ; si ce n'est pas le cas, il faut au moins en connaître les conclusions.)

Un magasin ouvre de 10h à 13h, puis de nouveau de 14h à 18h. On modélise le nombre de clients qui entrent au cours d'une heure le matin (entre 10h et 11h ; entre 11h et 12h ; entre 12h et 13h) par une variable de Poisson de paramètre 10, et, pour une heure de l'après-midi, par une variable de Poisson de paramètre 20 ; on considère que ces différentes variables aléatoires sont indépendantes.

On définit les variables aléatoires suivantes : C_M désigne le nombre de clients qui entrent dans la boutique le matin ; C_A, celui des clients qui entrent l'après-midi ; C_T, le nombre total de clients de la journée ; et V_M, V_A, V_T désignent respectivement le nombre de clients qui achètent réellement quelque chose le matin, l'après-midi, ou au cours de la journée.

1. Quelle est la probabilité qu'aucun client n'entre entre 10h et 11h ? Quelle est la probabilité qu'il entre plus de 12 personne pendant cette même heure ? (la valeur numérique n'est pas essentielle, la question est de trouver une formule qui permettrait de la calculer)
2. Quelle est l'espérance du nombre de clients qui entrent dans la boutique le matin ? l'après-midi ? au cours d'une journée ?
3. En utilisant les résultats obtenus dans les feuilles précédentes sur la loi de Poisson, déterminer la **loi** du nombre de clients C_M qui entrent dans la boutique le matin, celle du nombre C_A de clients de l'après-midi, ainsi que la loi du nombre total C_T de clients de la journée.
4. On estime que chaque client du matin a probabilité 0.3 d'acheter quelque chose ; pour les clients de l'après-midi, la probabilité est de 0.5. On considère que l'acte d'achat, pour chaque client, est indépendant de ceux des autres clients (ainsi que du nombre des clients). Quelle est l'espérance du nombre de clients qui achètent quelque chose au cours de la journée ? quelle est la **loi** du nombre de clients qui achètent quelque chose ?
5. On note N le nombre total de clients qui entrent dans la boutique au cours de la journée, mais qui n'achètent rien. Quelle est la loi de N ? Son espérance ? Quelle relation y a-t-il entre N et V_T ?

Exercice 7.9

Le jeu "Tapis vert" était un jeu télévisé de la Française des Jeux : le joueur choisissait, sur une grille, une carte de chaque couleur (Pique, Coeur, Carreau, Trèfle) d'un jeu de 32 cartes ; puis, lors d'un tirage aléatoire télévisé quotidien, une carte de chaque couleur était tirée, et le gain de chaque joueur était déterminé de la manière suivante : un joueur ayant trouvé 2 des 4 cartes gagnait 2 fois sa mise ; un joueur ayant trouvé 3 des 4 cartes, gagnait 30 fois sa mise ; et un joueur ayant trouvé les 4 cartes, gagnait 1000 fois sa mise.

1. Quelle est la loi du nombre de cartes devinées par un joueur donné ? Cette loi dépend-elle de son choix de combinaison ?
2. Déterminer, pour une mise de 1 franc (on parle des années 1980-90 !), l'espérance de gain du joueur. Le jeu, tel qu'il est défini, est-il plutôt favorable au joueur, ou à l'organisateur du jeu ?

3. Quelle est la probabilité qu'un tirage donné donne une combinaison donnée ? Qu'une combinaison donnée sorte au moins une fois en N tirages ?
4. (Cette question n'est **pas** une question de calcul des probabilités) Il se trouve qu'après environ deux ans d'existence du jeu, une combinaison "carré d'As" est sortie, coûtant une fortune à la Française des Jeux. Commenter cette situation : où se trouve l'erreur de conception dans ce jeu (du point de vue de l'organisateur) ?

Exercice 7.10

La compagnie aérienne

Une compagnie aérienne vend des réservations pour un avion qui dispose de 100 places. Le prix normal d'une place est de 100 euros (on s'intéresse à un modèle simplifié, où le prix de la place est fixe).

La compagnie a constaté qu'en moyenne, environ 5% des passagers ne se présentaient pas à l'embarquement – ces passagers ne sont pas remboursés.

1. Proposer une loi de probabilités pour le nombre de places vides dans l'avion, en supposant que la compagnie vend effectivement 100 places. Quelle est l'espérance de ce nombre de places vides ?
2. La compagnie pratique la **surréservation** : elle vend un nombre $N > 100$ de places, sans prévenir ses clients. Si le nombre de passagers qui se présentent est de 100 ou moins, "tout va bien" (la compagnie a gagné plus que si elle n'avait pas fait de surréservation) ; si le nombre de passagers qui se présentent est supérieur à 100, un nombre de passagers correspondant au surplus devra prenre un autre avion, et se voit offrir un dédommagement, sous la forme d'un remboursement de 200 euros (soit le double du prix payé initialement).

   En fonction de N qui est à considérer comme un paramètre (fixe, choisi par la compagnie), quelle est la loi du nombre A de passagers qui ne se présentent pas ? En fonction de A, quel le nombre de passagers à rembourser ?
3. Calculer numériquement (au besoin, en faisant des approximations justifiables) l'espérance du nombre de passagers à rembourser, pour $N = 104$, $N = 105$, $N = 106$. Quelle valeur de N semble, en moyenne, la plus rentable pour la compagnie ? Pour cette valeur, quelle est la probabilité qu'au moins un client qui se présente n'ait pas de place dans l'avion ?