Probabilités, Statistiques, Combinatoire : TD2

Combinatoire : chemins, pavages

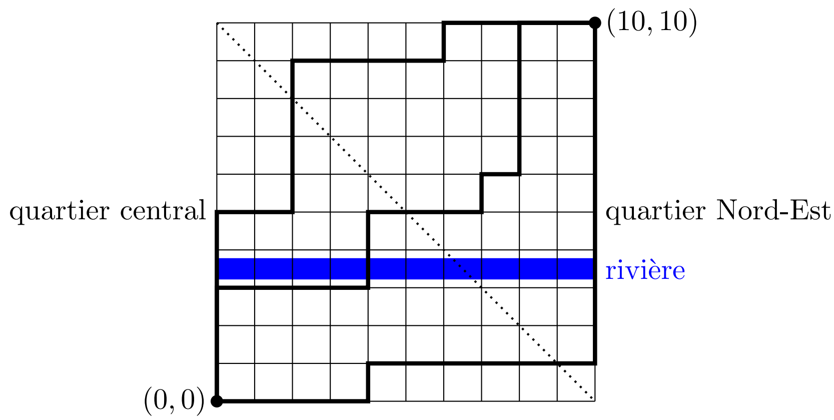
Exercice 2.1

Chemins et distance de Manhattan

On considère une ville avec un plan “à l’américaine”, représenté par un quadrillage : les rues sont sur une orientation soit Nord-Sud, soit Est-Ouest ; on considère que les distances entre deux carrefours sur chaque rue sont identiques, et on repère les carrefours par des coordonnées entières : le carrefour $(0, 0)$ est la position de l’hôtel de ville, et le carrefour $(5, 3)$ se situe 5 rues à l’Est et 3 rues au Nord.

La *distance de Manhattan* représente les distances dans une telle ville : la distance entre le carrefour (a, b) et le carrefour (a', b') est définie comme étant $|a' - a| + |b' - b|$; c’est le nombre de “longueurs de bloc” qu’il faut parcourir, au minimum, pour se rendre de l’un à l’autre. Dans une telle ville, les *plus courts chemins* d’un point à un autre ne sont pas forcément des lignes droites.

Sur la figure ci-dessous, le point $(0, 0)$ est en bas à gauche, le point $(10, 10)$ en haut à droite. Plusieurs plus courts chemins de l’un à l’autre sont indiqués en gras.



Un *pas* dans un chemin va d’un carrefour au suivant, dans une des quatre directions : Nord, Sud, Est ou Ouest. Le *codage* d’un tel chemin est un mot sur l’alphabet $\{N, S, E, O\}$ où chaque lettre code un pas dans la direction correspondante. On considère que les chemins partent du point $(0, 0)$.

1. Donner les mots de codage des trois chemins figurés en gras sur la figure.
2. En général, combien existe-t-il de chemins de longueur n, en fonction de n ? (on considère que la ville s’étend à l’infini dans toutes les directions ; on veut tous les chemins, pas seulement des plus courts chemins)
3. Parmi les chemins de longueur n, combien ne font jamais un demi-tour ? (un demi-tour correspondrait à deux pas consécutifs dans des directions opposés : Nord suivi de Sud, Sud suivi de Nord, Est suivi de Ouest, ou Ouest suivi de Nord).
4. Pour un chemin codé par un mot w, donner son point d’arrivée, en fonction des nombres d’occurrences des différents lettres dans le mot : $|w|_N$, $|w|_S$, $|w|_E$, $|w|_O$.
5. On s’intéresse maintenant uniquement aux plus courts chemins reliant le point $(0, 0)$ à un point (a, b) donné. On considère le cas $a > 0$ et $b > 0$; les plus courts chemins ne font que des pas Nord et Est.

Décrire en termes de mots, l'ensemble de tous les mots qui codent des plus courts chemins de $(0,0$ à $(10,10)$. Combien y a-t-il de tels chemins ?

Généraliser à une destination (a,b) quelconque (avec $a>0$ et $b>0$).

6. Combien y a-t-il de plus courts chemins de $(0,0)$ à $(4,5)$? De $(4,5)$ à $(10,10)$? Combien de plus courts chemins de $(0,0)$ à $(10,10)$ passent par $(4,5)$?
7. La bande horizontale entre les lignes d'ordonnée 3 et 4 représente une rivière (bien droite), et les pas Nord-Sud qui la traversent sont donc des ponts ; le pont i est celui qui traverse au niveau de la colonne i. Un plus court chemin de $(0,0)$ à $(10,10)$ doit donc traverser un pont i, entre $(i,3)$ et $(i,4)$ pour un certain entier i (entre 0 et 10).

   Un plus court chemin de $(0,0)$ à $(10,10)$ qui traverse le pont i peut donc être décomposé en trois parties : un plus court chemin de $(0,0)$ à $(i,3)$, un pas Nord, et un plus court chemin de $(i,4)$ à $(10,10)$. En déduire une formule pour le nombre de plus courts chemins de $(0,0)$ à $(10,10)$ qui traversent le pont i.
8. Généraliser : si on considère que la rivière se trouve entre les lignes j et $j+1$, combien y a-t-il de plus courts chemins de $(0,0)$ à (a,b) qui traversent la rivière sur le pont i ? (on considère $a \geq i$ et $b > j$)
9. En déduire une formule qui donne le coefficient binomial $\binom{a+b}{a}$ comme une somme de produits d'autres coefficients binomiaux.
10. La ligne diagonale entre les points $(0,10)$ et $(10,0)$ représente la limite entre deux quartiers de la ville : le quartier central, contenant l'hôtel de ville, et le quartier Nord-Est, contenant $(10,10)$.

    Sur un plus court chemin de $(0,0)$ à $(10,10)$, combien de pas se font dans le quartier central, et combien se font dans le quartier Nord-Est ?
11. Un plus court chemin de $(0,0)$ à $(10,10)$ doit passer d'un quartier à l'autre en un point, de coordonnées (i,j). Quel doit être le lien entre i et j ?
12. Parmi les plus courts chemins de $(0,0)$ à $(10,10)$, combien quittent le quartier central en $(5,5)$? En $(3,7)$? En un point quelconque de la séparation (en fonction des coordonnées de ce point) ?
13. Généraliser : si les chemins vont de $(0,0)$ à (n,n), et que la limite entre les deux quartiers va de $(0,n)$ à $(n,0)$, combien de plus courts chemins quittent le quartier central en un point donné ?
14. Montrer la formule suivante, valable pour n'importe quel entier $n \geq 0$:

$$\binom{2n}{n} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2.$$

    (Cette question ne nécessite pas de manipulations utilisant la formule pour les coefficients binomiaux)

Exercice 2.2
Compositions d'entiers

On convient d'appeler *composition de l'entier* $n \geq 0$, toute suite (de longueur quelconque) d'entiers strictements positifs telle que la somme de tous les éléments de la suite soit égale à n. Ainsi, $(5,7,2,1,2)$ est une composition de l'entier 17, et $(2,2,1,7,5)$ en est une autre (bien que composée des mêmes nombres) ; et $(13,0,4)$ n'en est pas une, car la suite contient la valeur 0.

1. On considère l'ensemble C de toutes les compositions, avec comme fonction taille, la somme des éléments (l'entier dont la séquence est une composition). Expliquer pourquoi il s'agit bien d'une classe combinatoire.
2. Écrire toutes les compositions de 1, de 2, de 3, et de 4. Quels sont les premiers termes de la suite de comptage ?
3. Proposer une formule décrivant le nombre de compositions de n comme une fonction de n. (À ce stade, il n'est pas attendu de preuve de votre formule)
4. Nous allons chercher une preuve bijective de l'affirmation suivante : *pour tout entier $n \geq 2$, il y a exactement deux fois plus de compositions de n que de compositions de $n-1$.*.
   a On note C_n l'ensemble des compositions de l'entier n, D_n l'ensemble des compositions de l'entier n *dont le premier élément vaut* 1, et E_n l'ensemble des compositions de l'entier n *dont le premier élément est strictement supérieur à* 1.
   Écrire des relations (au moyen d'opérations ensemblistes) entre C_n, D_n et E_n. En déduire une relation entre leurs cardinaux respectifs c_n, d_n et e_n.
   b Pour un entier $n \geq 2$, montrer que l'on a $d_n = c_{n-1}$. **Indication :** décrire une transformation systématique permettant de passer d'un élément de D_n à un élément de C_{n-1}, et montrer que votre transformation est une *bijection*.
   c Faire de même pour prouver $e_n = c_{n-1}$.
   d En déduire que l'on a, pour tout $n \geq 2$, $c_n = 2c_{n-1}$. En déduire une formule exprimant c_n comme une fonction de n (dont on espère que c'est la même que la formule proposée plus tôt).
5. **Question bonus :** chercher une preuve combinatoire directe de la formule : partant d'une famille d'objets dont vous savez déjà qu'elle a la bonne suite de comptage, décrire une bijection entre les objets de taille n de cette famille et les compositions de l'entier n.

Exercice 2.3
Pavages par dominos d'une bande

On considère dans cet exercice des "formes", qui sont des parties (finies) d'une grille potentiellement infinie, et on se pose la question générale suivante : pour une forme donnée, de combien de façons différentes peut-on la remplir entièrement par des "dominos", *i.e.* des rectangles de 2 cases, placés soit verticalement, soit horizontalement, sans que deux rectangles se chevauchent. Un tel remplissage est appelé un *pavage*.

En toute généralité (pour des "formes" quelconques), le problème est difficile ; on va se cantonner au cas où la "forme" est un rectangle de largeur n et de hauteur h, pour de petites valeurs de h.

On notera, pour une forme C, $p(C)$ son nombre de pavages. Le rectangle de hauteur h et de largeur n sera noté $h \times n$.

1. **Cas $h = 1$:** donner une formule pour le nombre de pavages du rectangle $1 \times n$, de hauteur 1 et de largeur n (on peut distinguer deux cas, selon la parité de n)
2. **Cas $h = 2$:** dessiner tous les pavages d'un rectangle 2×3 (il y en a 3), et d'un rectangle 2×4.

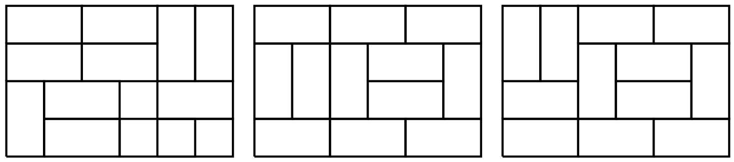


Figure 2.1 – Trois pavages de 4×6

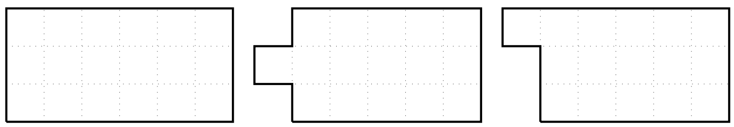


Figure 2.2 – $B_{6,\emptyset}$, $B_{6,\{1,3\}}$, et $B_{6,\{2,3\}}$

3. On note p_n^2, le nombre de pavages d'un rectangle $2 \times n$. En considérant la façon dont les deux carrés de la première colonne sont recouverts, donner une **relation de récurrence** pour la suite $(p_n^2)_{n\geq 0}$. Votre relation devrait permettre de calculer p_n^2 en fonction des termes précédents $p_0^2, p_1^2, \ldots, p_{n-1}^2$, au moins pour des valeurs "assez grandes" de n. Calculer p_n^2 pour n jusqu'à 11.
4. Utiliser un argument combinatoire pour répondre à la question suivante sans dessiner l'intégralité des cas : parmi les p_{11}^2 pavages du rectangle 2×11, quelle est la proportion de ceux dont les deux carrés de la 6-ème colonne (colonne centrale) sont recouverts par un domino vertical ?
5. Généraliser : pour $1 \leq k \leq n$, quelle proportion des p_n^2 pavages du rectangle $2 \times n$ ont leur k-ème colonne couverte par un domino vertical ?
6. **Plus compliqué : cas $h = 3$.** On note p_n^3, le nombre de pavages par dominos d'un rectangle $3 \times n$.

   Expliquer pourquoi on a forcément $p_n^3 = 0$ si n est impair, et pourquoi $p_n^3 > 0$ si n est pair (et positif).
7. Vous savez déjà combien vaut p_2^3 ; déterminer p_4^3 et dessiner tous les pavages correspondants.
8. Montrer que l'on a $p_{2n}^3 \geq 2^n$.
9. Afin de trouver un moyen de calculer p_n^3 pour de grandes valeurs de n, sans dessiner un à un tous les pavages (on sait par la question précédente que leur nombre croît rapidement), on considère des formes proches des rectangles $3 \times n$: pour $I \subset [[1, 3]]$, on note $B_{n,I}$ la forme obtenue en retirant du rectangle $3 \times n$, les cellules de la première colonne dont les lignes (numérotées de haut en bas, par exemple) sont les éléments de I.

   Dessiner $B_{4,\emptyset}$, $B_{4,\{1\}}$, $B_{4,\{1,2\}}$, $B_{4,\{1,3\}}$. À quoi ressemble $B_{n,\{1,2,3\}}$?
10. Expliquer pourquoi, si $n + \#I$ est impair, alors $p(B_{n,I}) = 0$.
11. Expliquer pourquoi on a, pour tout n, $p(B_{n,\{1,3\}}) = p(B_{n,\{2\}}) = 0$.
12. Montrer que, pour $n \geq 2$, on a $p_n^3 = p_{n-2}^3 + 2p(B_{n-1,\{1\}})$ **Indication :** raisonner sur le domino qui couvre la deuxième case de la première colonne : quelle autre case couvre-t-il ? une fois fixé ce premier domino, existe-t-il d'autres dominos obligatoires ?

13. De même, montrer qu'on a, pour $n \geq 2$, $p(B_{n,\{1\}}) = p^3_{n-1} + p(B_{n-1,\{2,3\}})$.
14. Déterminer p^3_n jusqu'à $n = 15$.

Pour les curieux : deux vidéos de vulgarisation sur les pavages de régions par des dominos. Vous y trouverez de belles images, une formule surprenante (et horriblement compliquée) pour le nombre de pavages d'un rectangle général, et une formule également surprenante (mais beaucoup plus simple) pour le nombre de pavages d'une forme appelée "diamant aztèque" (un carré, "tourné" de 45 degrés, et crénelé).

— Mathologer (en anglais) : `https://www.youtube.com/watch?v=Yy7Q8IWNfHM`
— Micmaths (en français) : `https://www.youtube.com/watch?v=2Wq6H8GMVm0` (les pavages n'occupent qu'une partie de la vidéo)