université de BORDEAUX	**Année Universitaire 2020-2021** Licence Informatique L3, UE 4TIN504U, Logique et Preuve. Vendredi 13 novembre 2020. Durée : 1h.	**Collège Sciences et Technologies**

Nom : **Prénom :** **Groupe :**

Devoir surveillé

Toutes les preuves peuvent être écrites dans le format de votre choix. Le barème indiqué est approximatif.

1 Logique minimale (6pts)

Considérons les deux séquents suivants :

$$P \rightarrow Q, (P \rightarrow R \rightarrow Q) \rightarrow S \vdash S$$

$$P \rightarrow R \rightarrow Q, (P \rightarrow Q) \rightarrow S \vdash S$$

L'un des deux est prouvable en logique minimale, l'autre ne l'est pas.

1. Identifier le séquent non prouvable. Justifier votre réponse.

$$\underbrace{P \rightarrow R \rightarrow Q}_{V}, \underbrace{(P \rightarrow Q) \rightarrow S}_{V} \vdash \underbrace{S}_{F}$$

$v(S) = F$ $v(R) = F$

$v(Q) = F$

$v(P) = V$

valuation qui rend vraie hypothèses et fausse conclusion → non valide donc non-prouvable

2. Prouver l'autre séquent.

$$\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash (P \rightarrow R \rightarrow Q) \rightarrow S}\,h \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma, P, R \vdash P \rightarrow Q}\,h \qquad \dfrac{}{\Gamma, P, R \vdash P}\,h}{\Gamma, P, R \vdash Q}\,\rightarrow_e (P)}{\Gamma \vdash P \rightarrow R \rightarrow Q}\,\rightarrow_i}{\Gamma \vdash S}\,\rightarrow_e (P \rightarrow R \rightarrow Q)$$

1. Supposons $P \rightarrow Q$
2. Supposons $(P \rightarrow R \rightarrow Q) \rightarrow S$

{

3. Supposons P
4. Supposons R
5. Q [$\rightarrow_e$, 1, 3]

}

6. $P \rightarrow R \rightarrow Q$ [$\rightarrow_i$, 3-5]
7. S [$\rightarrow_e$, 2, 6]

2 Logique minimale avec négation (4pts)

Prouver le séquent suivant :

$$P \to Q \to \sim(Q \to P), Q \vdash P \to R$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma, P \vdash P \to Q \to \sim(Q\to P)\; h \quad \Gamma, P \vdash Q\; h}{\Gamma, P \vdash Q \to \sim(Q \to P)}\to_e(P) \quad \Gamma, P \vdash Q\; h}{\Gamma, P \vdash \sim(Q \to P)}\to_e(Q) \quad \dfrac{\Gamma, P \vdash P\; h}{\Gamma, P \vdash Q \to P}\to_i}{\Gamma, P \vdash \bot}\to_e(Q\to P)}{\Gamma, P \vdash R}\bot_e}{\Gamma \vdash P \to R}\to_i$$

1. On suppose P→Q→~(Q→P)
2. On suppose Q
{
3. On suppose P
4. Q→~(Q→P) [→e, 1, 3]
5. ~(Q→P) [→e, 2, 4]
6. Q→P [→i, 2-3] ?
7. ⊥ [→e, 5, 6]
8. R [⊥e, 7]
}
P→R [→i, 3-8]

3 Logique propositionnelle intuitionniste (6pts)

Prouver le séquent suivant :

$$P \to (Q \vee R), Q \to (P \wedge S), R \to Q \vdash P \to S$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma, P \vdash Q \to (P\wedge S)\; h \quad \dfrac{\dfrac{\Gamma, P \vdash P \to (Q\vee R)\; h \quad \Gamma, P \vdash P\; h}{\Gamma, P \vdash Q \vee R}\to_e(P) \quad \Gamma, P, Q \vdash Q\; h \quad \dfrac{\Gamma, P, R \vdash R \to Q\; h \quad \Gamma, P, R \vdash R\; h}{\Gamma, P, R \vdash Q}\to_e(R)}{\Gamma, P \vdash Q}\vee_e(Q\vee R)}{\Gamma, P \vdash P \wedge S}\to_e(Q) \quad \Gamma, P, S \vdash S\; h}{\Gamma, P \vdash S}\wedge_e(P\wedge S)}{\Gamma \vdash P \to S}\to_i$$

1. On suppose P→(Q∨R)
2. On suppose Q→(P∧S)
3. On suppose R→Q
{
4. On suppose P
5. Q∨R [→e, 1, 4]
6. Q [∨e, 5]
7. R [∨e, 5]
8. P∧S [→e, 2, 6]
9. S [∧e(2), 8]
}
10. P→S [→i, 4-9]

4 Règles dérivées (4pts)

La proposition de règle ci-dessous est-elle une règle dérivée en logique propositionnelle intuitionniste ? Justifier votre réponse, soit au moyen d'un arbre partiel (si vous pensez que c'est une règle dérivée), soit en exhibant un séquent non prouvable qui deviendrait prouvable au moyen d'une telle règle (si vous pensez que ce n'est pas une règle dérivée).

$$\dfrac{\Gamma \vdash A \to (B \vee C) \qquad \Gamma, A \vdash \sim B}{\Gamma \vdash A \to C}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma, A \vdash A \to (B\vee C) \quad \Gamma, A \vdash A\; h}{\Gamma, A \vdash B \vee C}\to_e(A) \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma, A, B \vdash \sim B\; aff \quad \Gamma, A, B \vdash B\; h}{\Gamma, A, B \vdash \bot}\to_e(B)}{\Gamma, A, B \vdash C}\bot_e \quad \Gamma, A, C \vdash C\; h}{}}{\Gamma, A \vdash C}\vee_e(B\vee C)}{\Gamma \vdash A \to C}\to_i$$

Aide-mémoire : règles de base (et quelques règles dérivées)

	introduction	élimination
$\to$	$\dfrac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \to B} \to_i$	$\dfrac{\Gamma \vdash A \to B \qquad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B}$ m.p.
$\bot$		$\dfrac{\Gamma \vdash \bot}{\Gamma \vdash A} \bot_e$
$\sim$	$\dfrac{\Gamma, A \vdash \bot}{\Gamma \vdash {\sim}A} \sim_i$	
$\vee$	$\dfrac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B} \vee_{i,1}$ $\qquad$ $\dfrac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B} \vee_{i,2}$	$\dfrac{\Gamma \vdash A \vee B \qquad \Gamma, A \vdash C \qquad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma \vdash C} \vee_e$
$\wedge$	$\dfrac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B} \wedge_i$	$\dfrac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash A} \wedge'_{e,1}$ $\qquad$ $\dfrac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash B} \wedge'_{e,2}$ $\dfrac{\Gamma \vdash A \wedge B \qquad \Gamma, A, B \vdash C}{\Gamma \vdash C} \wedge_e$

Règle d'hypothèse

$$\dfrac{}{\Gamma \vdash A} \text{hyp } (A \in \Gamma)$$