Université de Bordeaux

Probabilités, Statistiques, Combinatoire : TD1

1.1 Manipulation des notations ensemblistes

Exercice 1.1

On pose $A = \{1, 2, 3, 4\}$, et $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ la fonction définie par $f(n) = n^2$. Écrire chacun des ensembles suivants en donnant la liste de tous ses éléments.

1. $B = \{(a, b) \in A \times A : a < b\}$
2. $C = (A \times A) - B$
3. $D = f(A)$
4. $E = f^{-1}(A)$.

Exercice 1.2

On considère deux ensembles A et B, supposés finis mais quelconques.

1. On note $E = A \cap B$ et $F = A - B$. Montrer que E et F sont disjoints. Qu'est-ce que l'ensemble $E \cup F$?
2. Quelle identité peut-on en déduire sur les cardinaux des ensembles A, $A \cap B$ et $A - B$?
3. En déduire une formule pour le cardinal de $A \cup B$ en fonction des cardinaux de A, B et $A \cap B$, valable même si A et B ne sont pas disjoints.
4. Que deviennent les relations précédentes si A et B sont disjoints ? Si $B \subset A$?

Exercice 1.3

Une opération ensembliste non vue en cours est la *différence symétrique* de deux ensembles, définie de la manière suivante : si A et B sont deux ensembles, leur différence symétrique est l'ensemble $A\Delta B$ défini ainsi :

$$A\Delta B = (A - B) \cup (B - A)$$

1. Décrire par une phrase, la plus simple possible, l'ensemble $A\Delta B$ (sur le modèle suivant, pour l'union : "$A \cup B$ est l'ensemble des éléments présents dans A ou dans B").
2. Donner une autre expression (équivalente) pour $A\Delta B$, en termes de $A \cup B$ et $A \cap B$.
3. Écrire une formule donnant le cardinal de $A\Delta B$ en fonction des cardinaux de A, de B, et de $A \cap B$ (en supposant que A et B sont finis).
4. À quoi se ramène $A\Delta B$ si A et B sont disjoints ? si $A \subset B$? si $A = B$?
5. Décrire le plus simplement possible l'ensemble $(A\Delta B)\Delta C$. Comparer cet ensemble à $A\Delta(B\Delta C)$.

1.2 Quelques problèmes de comptage

Exercice 1.4
Formation d'équipes

1. À partir d'un groupe de 7 filles et 13 garçons, combien d'équipes paritaires (comportant autant de filles que de garçons) de beach volley (4 personnes) peut-on former ? De volley (6 personnes) ?
2. Généraliser : à partir d'un groupe de n filles et m garçons, combien d'équipes paritaires de $2k$ personnes peut-on former ? (Exprimer votre réponse au moyen de coefficients binomiaux $\binom{n}{k}$)
3. Un groupe de 4 filles et 10 garçons veut jouer au volley, en formant deux équipes de 2 filles et 4 garçons chacune (il restera deux arbitres). De combien de façons peut-on former les équipes ? On considère qu'on ne distingue pas une équipe A d'une équipe B, ni entre les deux arbitres. (Le calcul peut être fait de plusieurs manières différentes, qui devraient amener à des expressions différentes en termes de coefficients binomiaux ; il peut être intéressant de vérifier qu'elles donnent toutes le même résultat final)

Exercice 1.5
Le code PIN

Une carte de paiement est protégée par un code secret, composé de 4 chiffres à taper sur un clavier de 10 touches.

1. Combien existe-t-il de codes possibles ?
2. Combien existe-t-il de codes possibles si on interdit que deux chiffres consécutifs soient égaux (par exemple, 2663 est alors un code interdit) ?
3. Combien existe-t-il de codes possibles si on interdit que le même chiffre apparaisse plus d'une fois ? (par exemple, 2636 est alors interdit)
4. Généraliser vos réponses précédentes si on change la longueur du code (k chiffres au lieu de systématiquement 4), et si on change le nombre de "chiffres" possibles (n caractères possibles au lieu de 10).

Exercice 1.6
Les entiers comme classe combinatoire ?

On considère l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels (rappel : 0 en fait partie ; ce sont les entiers positifs ou nuls). On va considérer plusieurs notions possibles de *taille* d'un entier.

1. On considère dans un premier temps que la *taille* d'un entier n, c'est l'entier n lui-même. Quelle est la suite de comptage associée ?
2. Deuxième notion de taille : on considère le codage binaire de chaque entier, sur l'alphabet $\{0, 1\}$: l'entier 0 se code 0, 6 se code 110, etc. Ainsi, 0 est le seul entier dont le codage ne commence pas par 1. On considère que la *taille* d'un entier, c'est la longueur de son codage. Quelle est la suite de comptage ? (attention, la longueur 1 est un cas particulier).
3. On essaie une troisième notion de taille : la taille d'un entier, c'est le nombre de 1 dans son codage binaire. Quels sont alors les entiers de "taille" 1 ? A-t-on une vraie classe combinatoire ?

Exercice 1.7
Coefficients multinomiaux

Soit $n > 0$ un entier, et a, b, c trois entiers positifs ou nuls, tels que l'on ait $a + b + c = n$.

Le *coefficient multinomial* noté $\binom{n}{a,b,c}$ désigne le nombre de façons possibles de partager l'ensemble $[[1, n]]$ en trois parties A, B et C, deux à deux disjointes, telles que l'on ait $\#A = a$, $\#B = b$ et $\#C = c$.

En raisonnant à partir de la définition des nombres $\binom{m}{k}$, donner au moins deux expressions distinctes pour $\binom{n}{a,b,c}$. Si vous connaissez l'expression à base de factorielles pour $\binom{m}{k}$, vous pouvez montrer que les différentes formules sont équivalentes, et chercher une expression qui rendre "évidente" le fait que $\binom{n}{a,b,c}$ est inchangé par permutation des paramètres a, b, c (*i.e.*, $\binom{n}{a,b,c} = \binom{n}{a,c,b} = \binom{n}{b,c,a}$).

Exercice 1.8

On considère dans cet exercice un alphabet $A = \{a, b, c\}$, et la classe combinatoire A^* des mots finis sur l'alphabet (avec comme taille, la longueur des mots).

1. Écrire *in extenso* la "tranche" A_2 des mots de taille 2.
2. D'après le cours, quelle est la suite de comptage de la classe A^* ?
3. Sans utiliser votre réponse à la question précédente, montrer directement que l'on a (pour $n \geq 1$) $a_n = 3a_{n-1}$, en suivant les étapes suivantes :
   — On définit $A_{n,a}$ (respectivement, $A_{n,b}$, $A_{n,c}$) comme l'ensemble des mots de A^* de longueur n, et qui commencent par la letre a (respectivement, par la lettre b, par la lettre c).
   Décrire des bijections (les plus simples possible !) entre A_{n-1} et $A_{n,a}$; entre A_{n-1} et $A_{n,b}$; entre A_{n-1} et $A_{n,c}$. Vous décrirez vos bijections au moyen de l'opération de concaténation.
   — Quelles égalités entre cardinaux peut-on déduire de ces bijections ? Que manque-t-il pour pouvoir affirmer que l'on a $a_n = 3a_{n-1}$?
   — Terminer la preuve, ainsi que la preuve de la formule de comptage, en utilisant la question précédente (faire une preuve par récurrence sur n).
4. On garde le même ensemble A^*, mais on prend comme taille d'un mot w, $t(w) = |w|_a + 2|w|_b + 3|w|_c$. On note $(a'_n)_{n\geq 0}$ la suite de comptage pour cette nouvelle classe combinatoire. Écrire *in extenso* les nouveaux ensembles A_1, A_2, A_3. En vous inspirant de ce que vous avez fait précédemment, déterminez une formule de récurrence permettant de définir la nouvelle suite de comptage $(a'_n)_{n\geq 0}$. Calculer a'_{10}.

1.3 Exercices et problèmes

Exercice 1.9
Factorielle et mélange de cartes

Soit $n > 0$ un nombre entier. On note S_n l'ensemble des façons d'écrire chacun des n entiers de 1 à n, une fois chacun (on considère donc que S_n est l'ensemble des mots de longueur n sur l'alphabet $[[1, n]]$, dans lesquels chaque "lettre" apparaît une fois et une seule).

Par exemple, $S_2 = \{(1,2),(2,1)\}$.

On sait que le nombre d'éléments de S_n (son cardinal) est $n! = 1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot n$. Ce nombre est également le cardinal du produit cartésien $\{1\} \times [[1,2]] \times \cdots \times [[1,n]]$. L'objectif de cet exercice est de décrire des bijections explicites entre ces ensembles d'objets.

1. Écrire tous les éléments de S_3. Pour chaque élément de S_3, déterminer quel élément de S_2 on obtient en "effaçant" la lettre 3 et en ne gardant que les autres lettres, dans le même ordre. Combien de fois obtient-on chaque élément de S_2 si on effectue cette opération sur chaque élément de S_3 ?

2. Généraliser à un n quelconque : si, dans chaque élément de S_n, on efface la lettre n, combien de fois obtient-on chaque élément de S_{n-1} ?

3. En vous inspirant des deux questions précédentes, décrire une transformation systématique T_n, permettant de passer d'un élément de S_n à un élément de $S_{n-1} \times [[1,n]]$, de telle sorte qu'il soit toujours possible de revenir en arrière. Ainsi, pour tout mot $w \in S_n$, $T_n(w)$ est un couple (w', k) avec $w' \in S_{n-1}$ et $k \in [[1,n]]$. Décrire la transformation réciproque U_n (permettant de passer du couple (w', k) au mot w).

4. Au moyen des transformations $T_1, T_2, \ldots, T_n$, on définit ainsi le *codage* d'une permutation $w \in S_n$:
   — en appliquant T_n à $w_n = w$, on obtient un couple (w_{n-1}, i_n) ;
   — en appliquant T_{n-1} à w_{n-1}, on obtient un couple (w_{n-2}, i_{n-1}) ;
   — on continue ainsi : en appliquant T_{n-k} à w_{n-k}, on obtient (w_{n-k-1}, i_{n-k}), jusqu'à obtenir (w_1, i_2). Que vaut w_1 ?
   — Le codage de w est alors la séquence $(1, i_2, \ldots, i_n)$.
   Déterminer le codage de $w = 7453126$ ($n = 7$).

5. Inversement, de quelle(s) permutation(s) la séquence $(1,1,2,3,1,6,2)$ (pour $n = 7$) est-elle le codage ?

6. Chercher une description "directe" de la transformation de codage (sans passer par les mots w_2, w_3, etc).

Une **autre** façon de décrire une transformation pour passer d'un élément de $\{1\} \times [[1,2]] \times \cdots \times [[1,n]]$ à un élément de S_n (la correspondance n'est **pas** la même) est la suivante. On part de la séquence $s = (1,2,\ldots,n)$ où le k-ème élément est égal à k, et on se donne une séquence $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ d'entiers, avec $1 \leq i_k \leq k$.

Attention : dans ce qui suit, chaque s_k désigne une séquence d'entiers de 1 à n (qui représente une permutation), pas le k-ème élément d'une séquence de tels entiers.

À partir de la séquence $s_0 = s$, on effectue n étapes : lors de la k-ème étape, on détermine la séquence s_k à partir de la séquence s_{k-1} en échangeant les lettres en positions k et i_k (les autres sont inchangées).

La permutation "codée" par la séquence $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$, est s_n.

1. Appliquer la transformation précédente, pour $n = 8$, avec $I = (1,1,2,4,3,4,7,3)$: déterminer chacune des séquences s_1 à s_8.

2. En règle générale, pour $k < n$, dire quelles sont les lettres en positions $k+1$ à n dans la séquence s_k.

3. En déduire comment, à partir de s_k, on peut retrouver à la fois s_{k-1} et i_k.

4. Calculer toutes les séquences I qui permettent d'obtenir la permutation 83251764.