La dérivation

I) Le taux de variation

Taux de variation d'une fonction entre deux réels

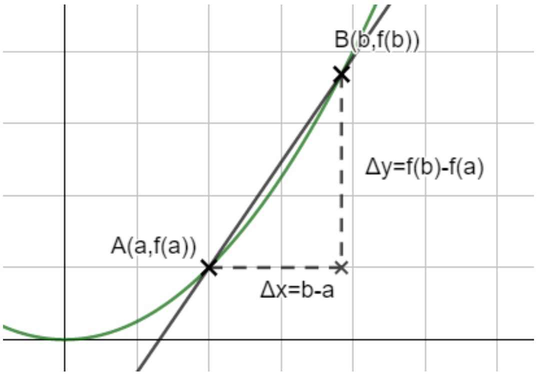
Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

Soit $a \in I$ et $b \in I$, tels que $a \neq b$.

On appelle taux de variation de f entre a et b le nombre $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Le taux de variation est aussi appelé taux d'accroissement.



Le taux de variation représente le coefficient directeur de la droite (AB), c'est-à-dire sa pente.

Rappel :

Soit $A(x_a, y_a)$ et $B(x_b, y_b)$ tels que $x_a \neq x_b$.

L'équation de la droite (AB) est donnée par la formule

$$y - y_a = \left(\frac{y_b - y_a}{x_b - x_a}\right)(x - x_a)$$

Il y a proportionnalité des écarts sur les abscisses et sur les ordonnées.

II) Le nombre dérivé et la tangente

Définition :

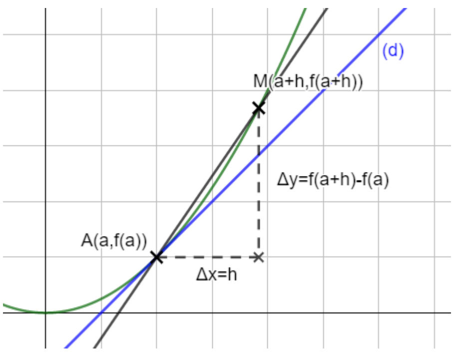
Soit f une fonction définie sur $I \subset \mathbb{R}$.

Soit $a \in I$ et $h \neq 0$ tel que $a + h \in I$.

On dit que f est dérivable en a si le taux de variation de f entre a et $a+h$ admet une limite lorsque h tend vers 0. Cette limite s'appelle le nombre dérivé de la fonction f en a et se note $f'(a)$.

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

Si cette limite existe, on dit que f est dérivable en a.



La droite (AM) est appelée sécante en A de la courbe C.

Son coefficient directeur est le taux de variation de f entre a et $a+h$. Lorsque M se rapproche de A, le taux de variation de f admet une limite $f'(a)$ et le coefficient directeur de (AM) tend vers la limite $f'(a)$.

Le programme Python ci-après permet le calcul approché du nombre dérivé d'une fonction polynomiale du second degré $f(x) = 3x^2 - 2x + 4$, comme limite du taux de variation.

Compréhension du code : la fonction tauxDeVariation est appelée 10 fois et avant chaque appel la valeur de h passée en paramètre est divisée par deux. Lors du dernier appel, on a donc $h = \frac{1}{2^{10}}$ soit $h = \frac{1}{1024}$.

Programme

```python
# défini une fonction polynomiale du second degré
def f(x):
  return 3*x**2-2*x+4
# calcul du taux de variation d'une fonction f entre a et a+h
def tauxDeVariation(f,a,h):
  return (f(a+h)-f(a))/h
# calcul approché du nombre dérivé
h=2
for n in range(10):
  h/=2
  print(tauxDeVariation(f,1,h))
```

Résultat

```
7.0
5.5
4.75
4.375
4.1875
4.09375
4.046875
4.0234375
4.01171875
4.005859375
```

<u>Définition</u> :

> Soit f définie sur $I \subset \mathbb{R}$ dérivable en $a \in I$.
> On appelle tangente à la courbe C_f au point $A(a\,; f(a))$ la droite passant par A et de coefficient directeur $f'(a)$.

<u>Equation réduite de la tangente</u>

<u>Propriété</u> :

> Soit $f : I \to R$ dérivable en $a \in I$.
> L'équation réduite de la tangente à la courbe C_f en $(a\,; f(a))$ est : $y = f'(a)(x-a) + f(a)$

<u>Démonstration</u> :

L'équation réduite est par définition de la forme $y = mx + p$ où m et p sont à déterminer.

m est le coefficient directeur de la droite donc $m = f'(a)$ par définition de la tangente.

$A(a\,; f(a))$ appartient à la tangente donc $f(a) = f'(a)a + p \Leftrightarrow p = f(a) - f'(a)a$.

Par suite, l'équation de la tangente est $y = f'(a)x + f(a) - f'(a)a \Leftrightarrow y = f'(a)(x-a) + f(a)$

III) <u>Fonctions dérivées</u>

<u>Définition</u> :

> Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que f est <u>dérivable sur I</u> si et seulement si pour tout $x \in I$, le nombre dérivé $f'(x)$ existe. La fonction qui à $x \in I$ associe le nombre dérivé de f en x s'appelle <u>la fonction dérivée</u> et se note f'. On a : $f' : I \to \mathbb{R}$
> $x \to f'(x)$

<u>Formulaire de dérivation</u>

	Fonction f	f dérivable sur	Fonction dérivée f'
1)	$f(x) = k$, où $k \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$
2)	$f(x) = x$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 1$
3)	$f(x) = ax + b$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = a$
4)	$f(x) = x^2$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 2x$
5)	$f(x) = x^n$ où $n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$
6)	$f(x) = \frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^* =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
7)	$f(x) = \frac{1}{x^n}$ où $n \in \mathbb{N}$	$\mathbb{R}^* =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$	$f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$
8)	$f(x) = \sqrt{x}$	$\mathbb{R}^{+*} =]0; +\infty[$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Démonstrations :

Les cas 1) et 2) sont des cas particuliers du cas 3).

Cas 3) :

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \to ax + b$

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}^*$. On a :

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{(a(x_0+h)+b)-(ax_0+b)}{h} = \frac{ax_0+ah+b-ax_0-b}{h} = \frac{ah}{h} = a$$

Et donc

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = a$$

Cas 4) : démonstration au programme

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \to x^2$

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}^*$. On a :

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{(a+h)^2-a^2}{h} = \frac{a^2+2ah+h^2-a^2}{h} = \frac{2ah+h^2}{h} = \frac{2ah}{h}+\frac{h^2}{h} = 2a+h$$

Et donc

$$f'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = 2a$$

Cas 4) : démonstration au programme

Soit $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$

$x \to \frac{1}{x}$

Soit $a \in \mathbb{R}^*$ et $h \in \mathbb{R}^*$ tel que $a+h \neq 0$. On a :

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{\frac{1}{a+h}-\frac{1}{a}}{h} = \frac{\frac{a}{a(a+h)}-\frac{a+h}{a(a+h)}}{h} = \frac{a-a-h}{ha(a+h)} = \frac{-h}{ha(a+h)} = \frac{-1}{a(a+h)}$$

Et donc

$$f'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = -\frac{1}{a^2}$$

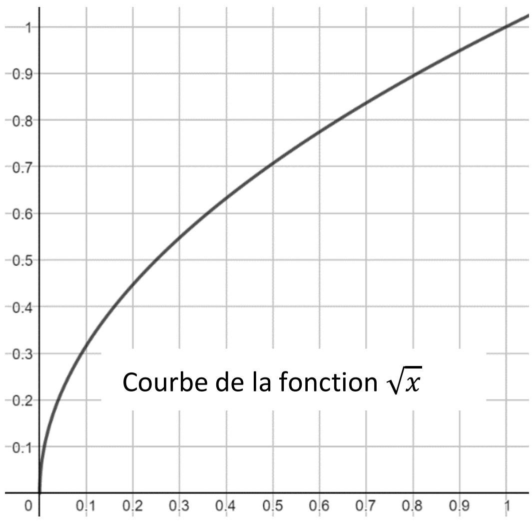
Cas 8) :

Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$

$x \to \sqrt{x}$

Soit $a > 0$ et $h \in \mathbb{R}^*$ tel que $a+h \geq 0$. On a :

$$\begin{aligned}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} &= \frac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h}\\ &= \frac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h}\times\frac{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}}\\ &= \frac{\left(\sqrt{a+h}\right)^2-\left(\sqrt{a}\right)^2}{h\left(\sqrt{a+h}+\sqrt{a}\right)}\\ &= \frac{a+h-a}{h\left(\sqrt{a}+\sqrt{a+h}\right)}\end{aligned}$$



$$= \frac{h}{h(\sqrt{a} + \sqrt{a+h})}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{a+h}}$$

Et donc

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

Cas où $a = 0$: démonstration au programme

$\sqrt{x}$ n'est pas dérivable en 0

$f(0+h)$ n'est pas défini si $h < 0$. Donc f n'est pas dérivable en 0 au sens de la définition de la dérivabilité.

De plus, si $h > 0$, on a :

$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{1}{\sqrt{h}} \quad \text{et donc} \quad \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{1}{\sqrt{h}} = +\infty$$

Le taux de variation tend vers $+\infty$ quand $h \to 0$ avec $h > 0$. Cela signifie que la courbe admet une tangente verticale au point d'abscisse 0.

Formules d'opérations sur les fonctions dérivées

Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

	Dérivabilité de la fonction	Fonction dérivée
1)	ku , où $k \in \mathbb{R}$, est dérivable sur I	$(ku)' = ku'$
2)	$u + v$ est dérivable sur I	$(u+v)' = u' + v'$
3)	uv est dérivable sur I	$(uv)' = u'v + uv'$
4)	$\frac{1}{u}$ est dérivable sur I, si u ne s'annule pas sur I	$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$
5)	$\frac{u}{v}$ est dérivable sur I, si v ne s'annule pas sur I	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

Démonstrations :

Cas 1) :

On définit la fonction ku par $ku : I \to \mathbb{R}$

$$x \to (ku)(x) = ku(x)$$

Soit $a \in I$ et $h \neq 0$ tels que $a + h \in I$

On a $\frac{ku(a+h) - ku(a)}{h} = k\frac{u(a+h) - u(a)}{h}$ et donc $(ku)'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{ku(a+h) - ku(a)}{h} = ku'(a)$

Exemples :

a) la dérivée de la fonction $x \to 3x$ est la fonction $x \to (3x)' = 3(x)' = 3$ car $(x)' = 1$
b) la dérivée de la fonction $x \to -4x^2$ est la fonction $x \to (-4x^2)' = -4(x^2)' = -4 \times 2x = -8x$ car $(x^2)' = 2x$

Cas 2) : la dérivée d'une somme est la somme des dérivées

On définit la fonction $u + v$ par $u + v : I \to \mathbb{R}$

$$x \to (u+v)(x) = u(x) + v(x)$$

Soit $a \in I$ et $h \neq 0$ tels que $a + h \in I$

$$\frac{u(a+h)+v(a+h)-\big(u(a)+v(a)\big)}{h}=\frac{\big(u(a+h)-u(a)\big)+\big(v(a+h)-v(a)\big)}{h}$$
$$=\frac{u(a+h)-u(a)}{h}+\frac{v(a+h)-v(a)}{h}$$

Et donc

$$\lim_{h\to 0}\frac{u(a+h)+v(a+h)-\big(u(a)+v(a)\big)}{h}=u'(a)+v'(a)$$

Exemples :

a) $(7x^2-2x+3)'=(7x^2)'+(-2x)'+(3)'=7\times 2x+(-2)+0=14x-2$

b) $\left(x+\frac{1}{x}\right)'=(x)'+\left(\frac{1}{x}\right)'=1-\frac{1}{x^2}$

<u>Remarque</u> : on a immédiatement $(u-v)'=(u)'-(v)'$

<u>Cas 3</u>) : démonstration au programme

On définit la fonction uv par $uv:\ I\to\mathbb{R}$

$$x\to(uv)(x)=u(x)v(x)$$

Soit $a\in I$ et $h\neq 0$ tels que $a+h\in I$

$$\frac{u(a+h)v(a+h)-u(a)v(a)}{h}=\frac{u(a+h)v(a+h)-u(a)v(a+h)+u(a)v(a+h)-u(a)v(a)}{h}$$
$$=\frac{(u(a+h)-u(a))v(a+h)+u(a)(v(a+h)-v(a))}{h}$$
$$=\frac{\big(u(a+h)-u(a)\big)}{h}v(a+h)+u(a)\frac{v(a+h)-v(a)}{h}$$

Or $\lim\limits_{\mathrm{h}\to 0}\frac{u(a+h)-u(a)}{h}=u'(a)$ et $\lim\limits_{\mathrm{h}\to 0}\frac{v(a+h)-v(a)}{h}=v'(a)$

Donc $\lim\limits_{\mathrm{h}\to 0}\frac{u(a+h)v(a+h)-u(a)v(a)}{h}=u'(a)v(a)+u(a)v'(a)$

Exemples :

a) $\big(3x^2(x+4)\big)'=(3x^2)'(x+4)+(3x^2)(x+4)'=6x(x+4)+3x^2=9x^2+24x$

b) $(x\sqrt{x})'=(x)'\sqrt{x}+x(\sqrt{x})'=1\times\sqrt{x}+\frac{x}{2\sqrt{x}}=\sqrt{x}+\frac{(\sqrt{x})^2}{2\sqrt{x}}=\sqrt{x}+\frac{\sqrt{x}}{2}=\frac{3}{2}\sqrt{x}$

<u>Cas 4</u>) :

On définit la fonction $\frac{1}{u}$ par $\frac{1}{u}:\ I\to\mathbb{R}$

$$x\to\left(\frac{1}{u}\right)(x)=\frac{1}{u(x)}$$

Soit $a\in I$ et $h\neq 0$ tels que $a+h\in I$

$$\frac{\frac{1}{u(a+h)}-\frac{1}{u(a)}}{h}=\frac{\frac{u(a)-u(a+h)}{u(a+h)u(a)}}{h}=\frac{u(a)-u(a+h)}{h}\frac{1}{u(a+h)u(a)}=-\frac{u(a+h)-u(a)}{h}\frac{1}{u(a+h)u(a)}$$

On constate alors que

$$\lim_{h\to h}\frac{\frac{1}{u(a+h)}-\frac{1}{u(a)}}{h}=-\frac{u'(a)}{u(a)^2}$$

Cas 5) :

Il peut se déduire des cas 3) et 4) ou être démontré directement

Fonction dérivée de $g(ax+b)$

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \to ax + b$

Et $g : J \to \mathbb{R}$, où J est un intervalle de $\mathbb{R}$

$x \to g(x)$

On suppose que g est dérivable sur l'intervalle J.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ tel que les valeurs prises par f sur I soient incluses dans J.

On peut définir la fonction

$h : I \to \mathbb{R}$

$x \to g(f(x)) = g(ax+b)$

La fonction h est dérivable sur I et $h'(x) = ag'(ax+b)$

Démonstration admise

Exemple :

Soit $h : [2; +\infty[\to \mathbb{R}$

$x \to \sqrt{2x-4}$

En appliquant la formule ci-dessus, on trouve

$$h'(x) = 2 \times \frac{1}{2\sqrt{2x-4}} = \frac{1}{\sqrt{2x-4}}$$

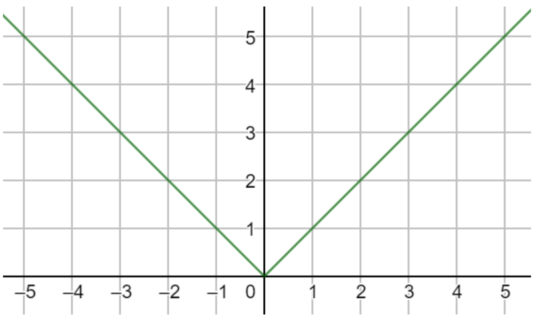
IV) Etude de la fonction valeur absolue

La fonction valeur absolue est définie par

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \to |x| = \begin{cases} x \text{ si } x \geq 0 \\ -x \text{ si } x \leq 0 \end{cases}$$

On a représenté ci-contre la courbe de la fonction valeur absolue.



x	$-\infty$	0	$+\infty$
$x \mapsto \lvert x\rvert$	↘	0	↗

On se propose de montrer que cette fonction n'est pas dérivable en 0 (démonstration au programme).

On a $\dfrac{|0+h|-|0|}{h} = \dfrac{|h|}{h}$

Il faut distinguer deux cas :

Si $h \geq 0$, $\dfrac{|h|}{h} = \dfrac{h}{h} = 1$ et $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h \geq 0}} \dfrac{|0+h|-|0|}{h} = 1$

Si $h \leq 0$, $\dfrac{|h|}{h} = \dfrac{-h}{h} = -1$ et $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h \leq 0}} \dfrac{|0+h|-|0|}{h} = -1$

La limite de $\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}$ n'existe pas car elle dépend du signe de h.

La fonction valeur absolue n'est donc pas dérivable en 0.

V) Variation et courbes représentatives des fonctions

1) Signe de la fonction dérivée et sens de variation d'une fonction

Propriété (admise) :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

f est croissante (resp. strictement croissante) sur $I \Leftrightarrow \forall\, x\ \in I, f'(x) \geq 0$ (resp. $f'(x) > 0$)

f est décroissante (resp. strictement décroissante) sur $I \Leftrightarrow \forall\, x\ \in I, f'(x) \leq 0$ (resp. $f'(x) < 0$)

f est constante sur $I \Leftrightarrow \forall\, x\ \in I, f'(x) = 0$

Pour étudier les variations d'une fonction f, il suffit donc d'étudier le signe de sa fonction dérivée.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \to -x^2 + 2x + 4$

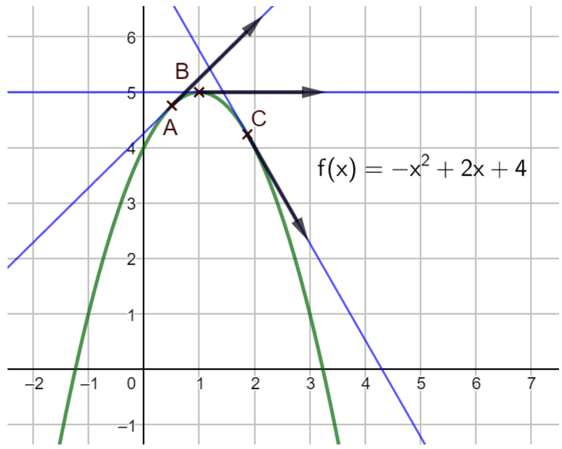
On calcule $f'(x) = -2x + 2$

Et on a $f'(x) = 0 \ \Leftrightarrow\ -2x + 2 = 0$

$\Leftrightarrow x = 1$

En étudiant le signe de f', on en déduit le tableau de variation de f.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	5	$\searrow$	$-\infty$



2) Extrema d'une fonction

Rappels :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

On appelle minimum de f sur l'intervalle I, noté m, la plus petite valeur de $f(x)$ pour un nombre $x \in I$.

Il existe $a \in I$ tel que $f(a) = m$ et $\forall\, x \in I$, on a $f(x) \geq m$.

On appelle maximum de f sur l'intervalle I, noté M, la plus grande valeur de $f(x)$ pour un nombre $x \in I$.

Il existe $a \in I$ tel que $f(a) = M$ et $\forall\, x \in I$, on a $f(x) \leq M$.

On appelle extremum de f sur I le minimum ou le maximum de f sur I.

Propriété :

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

f admet un extremum en $a \in I \Rightarrow f'(a) = 0$

$f'(a) = 0$ et f' change de signe en a $\Rightarrow f$ admet un extremum local en a

Deux cas de figure sont possibles pour le tableau de variation.

x		a	
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	$f(a)$	$\searrow$

x		a	
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$f(a)$	$\nearrow$

Exemple :

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \to 3x^2 - 6x + 5$

Etudier les variations de f.

On calcule $f'(x) = 6x - 6$.

On a $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 6 = 0$

$\Leftrightarrow x = 1$

On peut alors dresser le tableau de variation de f.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

Rappel :

On a $a = 3 > 0$ et on sait donc que la courbe est une courbe en U avec un minimum.

Comme $f(1) = 2$, l'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de solution.