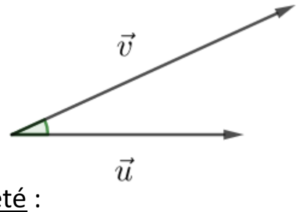
Calcul vectoriel et produit scalaire

I) Définition du produit scalaire

Définition :

On appelle produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls le réel noté $\vec{u}.\vec{v}$ défini par
$\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u},\vec{v})$ ⟵ attention, c'est un réel
où $(\vec{u},\vec{v})$ représente l'angle formé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ en tournant dans le sens trigonométrique.
Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, le cosinus de l'angle $(\vec{u},\vec{v})$ n'est pas défini. Dans ce cas, le produit scalaire est défini égal à 0.

$\vec{u}.\vec{v}$ se lit « $\vec{u}$ scalaire $\vec{v}$ ».

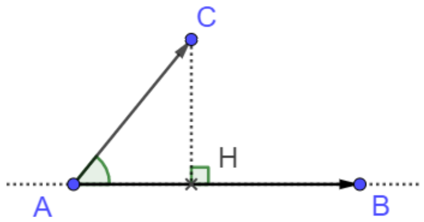


Remarques :

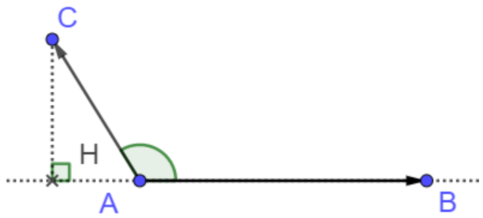
- Le cosinus d'un angle étant égal au cosinus de l'angle opposé, on a $\cos(\vec{v},\vec{u}) = \cos(\vec{u},\vec{v})$ et par suite $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$
- Il n'y a pas d'interprétation géométrique particulière du produit scalaire

Propriété :

Soient A, B et C trois points distincts du plan.
Soit H le projeté orthogonal de C sur (AB).
Si $\widehat{BAC}$ est un angle aigu, alors $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AH$
Si $\widehat{BAC}$ est un angle obtus, alors $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -AB \times AH$



Si l'angle $\widehat{BAC}$ est un angle aigu, alors
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right) = AB \times AH$



Si l'angle $\widehat{BAC}$ est un angle obtus, alors

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} &= AB \times AC \times \cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)\\ &= AB \times AC \times \left(-\cos\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AH}\right)\right)\\ &= -AB \times AC \times \cos\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AH}\right)\\ &= -AB \times AH\end{aligned}$$

Cas particuliers : on suppose $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$

$\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \Leftrightarrow \vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de même sens
$\vec{u}.\vec{v} = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \Leftrightarrow \vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de sens contraire

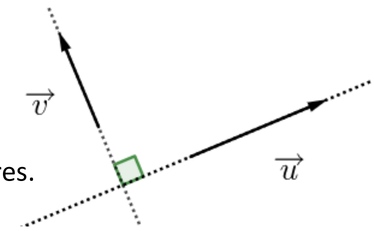
$\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$
$\Leftrightarrow \cos(\vec{u},\vec{v}) = 1$
$\Leftrightarrow$ la mesure principale de l'angle $(\vec{u},\vec{v})$ est 0
$\Leftrightarrow \vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de même sens

$\vec{u}.\vec{v} = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$
$\Leftrightarrow \cos(\vec{u},\vec{v}) = -1$
$\Leftrightarrow$ la mesure principale de l'angle $(\vec{u},\vec{v})$ est π
$\Leftrightarrow \vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de même contraire

On a donc $\boxed{\vec{u}.\vec{u} = \|\vec{u}\|^2}$ Notation : on peut écrire $\vec{u}.\vec{u} = \vec{u}^2$

Définition :

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits orthogonaux
si la mesure principale de l'angle $(\vec{u},\vec{v})$ est $\frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2}$.



Cela signifie que deux droites de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont perpendiculaires.
Par convention, le vecteur nul $\vec{0}$ est orthogonal à tout vecteur.

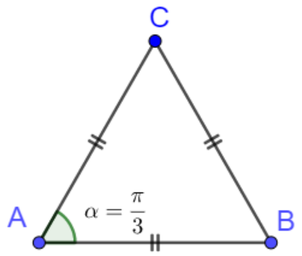
Propriété :

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u}.\vec{v} = 0$

La démonstration est immédiate avec la définition retenue de l'orthogonalité de deux vecteurs car $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

Exemples de calcul du produit scalaire :

a) On considère un triangle équilatéral ABC de côté c

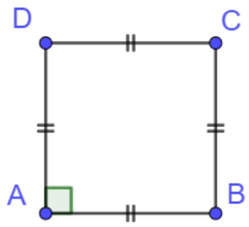


$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\| \times \cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$$
$$= \mathrm{c}^2 \times \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$
$$= \frac{c^2}{2}$$

On peut aussi retrouver ce résultat en considérant le projeté orthogonal H de C sur (AB).

On a $AH = \frac{AB}{2} = \frac{c}{2}$ et donc $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AH \times AB = \frac{c^2}{2}$

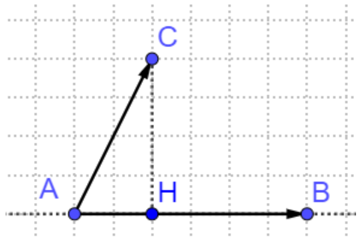
b) On considère un carré $ABCD$ de côté c



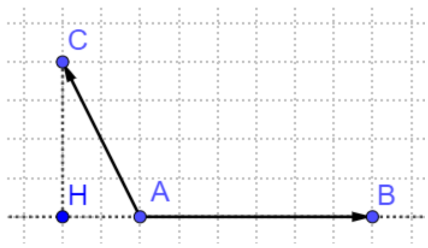
On a :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB^2 = c^2$$
$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DC} = AB^2 = c^2$$
$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = 0 \text{ car } \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD}$$
$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CA} = -AB^2 = -c^2$$

c)



$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AH = 6 \times 2 = 12$$



$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -AB \times AH = -6 \times 2 = -12$$

Remarque : dans les deux cas, on a $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}$

II) Propriétés du produit scalaire

Propriétés :

Soient $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs.
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
On a les relations suivantes :

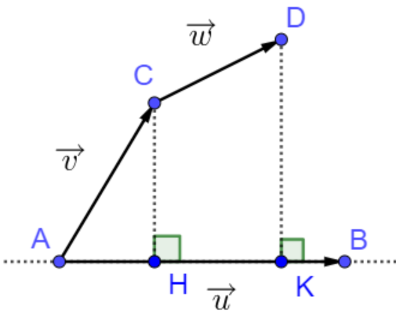
(1) $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$ (symétrie)
(2) $\vec{u}.(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$ (distributivité à gauche)
(3) $(\vec{u} + \vec{v}).\vec{w} = \vec{u}.\vec{w} + \vec{v}.\vec{w}$ (distributivité à droite)
(4) $(\lambda\vec{u}).\vec{v} = \vec{u}.(\lambda\vec{v}) = \lambda(\vec{u}.\vec{v})$

Démonstrations :

On suppose les vecteurs non nuls et $\lambda \neq 0$.
Les cas de nullité peuvent être démontrés séparément et sont immédiats.

(1) $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u},\vec{v})$
$= \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(-(\vec{v},\vec{u}))$
$= \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{v},\vec{u})$ car $\cos(-x) = \cos(x)$
$= \|\vec{v}\| \times \|\vec{u}\| \times \cos(\vec{v},\vec{u})$
$= \vec{v}.\vec{u}$

(2) La démonstration est faite dans un cas particulier. Elle est similaire dans les autres cas.



On considère 4 points A, B, C et D tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{CD}$.
On nomme H le projeté orthogonal de C sur (AB) et K le projeté orthogonal de D sur (AB).

On a :

$$\vec{u}.(\vec{v} + \vec{w}) = \overrightarrow{AB}.\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}\right) = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = AB \times AK$$

D'autre part

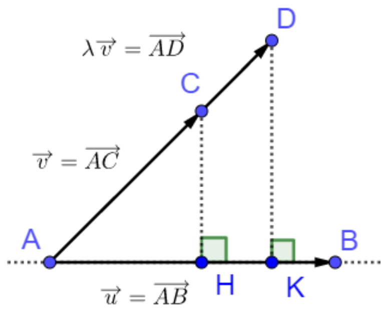
$$\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AH$$
$$\vec{u}.\vec{w} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = AB \times HK$$

Et donc $\vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w} = AB \times AH + AB \times HK = AB \times (AH + HK) = AB \times AK$

L'égalité est bien vérifiée.

(3) Démonstration identique à la démonstration précédente.

(4) Montrons que $\vec{u}.(\lambda\vec{v}) = \lambda(\vec{u}.\vec{v})$



On considère 4 points A, B, C et D tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ et $\lambda\vec{v} = \overrightarrow{AD}$.
On nomme H le projeté orthogonal de C sur (AB) et K le projeté orthogonal de D sur (AB).

On a :

$$\vec{u}.(\lambda\vec{v}) = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = AB \times AK$$

D'autre part

$$\begin{aligned}\lambda(\vec{u}.\vec{v}) &= \lambda\left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\right)\\ &= \lambda \times AB \times AH\\ &= AB \times \lambda \times AH\\ &= AB \times AK\end{aligned}$$

En effet, d'après le théorème de Thalès, on a : $\frac{AD}{AC} = \frac{AK}{AH} = \lambda$

L'égalité est bien vérifiée.

Par symétrie, on a $(\lambda\vec{u}).\vec{v} = \vec{v}.(\lambda\vec{u}) = \lambda(\vec{v}.\vec{u}) = \lambda(\vec{u}.\vec{v})$

<u>Produit scalaire et norme</u>

On a vu que $\vec{u}.\vec{u} = \|\vec{u}\|^2$

On a donc $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = (\vec{u} + \vec{v}).(\vec{u} + \vec{v})$
$= \vec{u}.(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{v}.(\vec{u} + \vec{v})$ d'après (3)
$= \vec{u}.\vec{u} + \vec{u}.\vec{v} + \vec{v}.\vec{u} + \vec{v}.\vec{v}$ d'après (2)
$= \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$ d'après (1)

De même $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = (\vec{u} - \vec{v}).(\vec{u} - \vec{v})$
$= \vec{u}.(\vec{u} - \vec{v}) - \vec{v}.(\vec{u} - \vec{v})$ d'après (3) et (4)
$= \vec{u}.\vec{u} - \vec{u}.\vec{v} - \vec{v}.\vec{u} + \vec{v}.\vec{v}$ d'après (3) et (4)
$= \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u}.\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$ d'après (1)

Et $(\vec{u} + \vec{v}).(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}.(\vec{u} - \vec{v}) + \vec{v}.(\vec{u} - \vec{v})$ d'après (3) et (4)
$= \vec{u}.\vec{u} - \vec{u}.\vec{v} + \vec{v}.\vec{u} - \vec{v}.\vec{v}$ d'après (3) et (4)
$= \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$ d'après (1)

On retrouve des identités remarquables proches des identités remarquables connues avec des nombres réels.

<u>Propriété</u> :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. On a les relations :

$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \|\vec{v}\|^2 \quad \Leftrightarrow (\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2$ (a)

$\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u}.\vec{v} + \|\vec{v}\|^2 \quad \Leftrightarrow (\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2$ (b)

$(\vec{u} + \vec{v}).(\vec{u} - \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 \quad \Leftrightarrow (\vec{u} + \vec{v}).(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$

<u>Propriété</u> :

> Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. On a la relation :
> $$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$$

Cette relation découle immédiatement de la relation (a) ci-dessus. En effet :

$$(a) \Leftrightarrow 2\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$$
$$\Leftrightarrow \vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$$

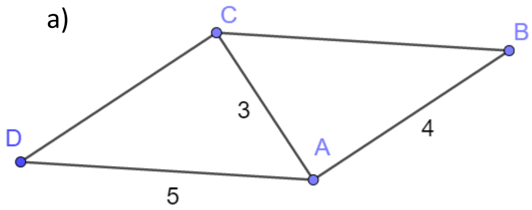
On a aussi les relations :

> $$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2)$$
> et $$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{4}(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2)$$

La première formule se démontre en utilisant la relation (b) et la seconde simplement en calculant (a)-(b).

<u>Exemple d'application</u> :

a)



Ici $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\left(\left\|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{AD}\right\|^2\right)$

$= \frac{1}{2}(3^2 - 4^2 - 5^2)$ car $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$

$= -16$

et $\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right) = \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}}{\|\overrightarrow{AB}\|\|\overrightarrow{AD}\|} = -\frac{16}{4\times 5} = -0{,}8$

Dans ce parallélogramme, l'angle en A est d'environ 143° et l'angle en D de 180-143=37°.

b) On considère 3 points A, B et C du plan.
On a $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2)$
En effet a $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right\|^2\right)$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2)$ car $\left\|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right\| = \left\|\overrightarrow{CB}\right\| = BC$

III) <u>Expression du produit scalaire en géométrie repérée</u>

<u>Rappel</u> :

On se place dans un repère **orthonormé** $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
Soit $\vec{u}$ de coordonnées $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ dans ce repère. On a :

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2} \Leftrightarrow \|\vec{u}\|^2 = x^2 + y^2$$

<u>Expression algébrique du produit scalaire</u> :

> Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ deux vecteurs du plan. On a :
> $$\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy'$$

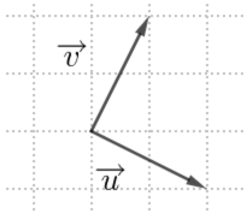
⚠ Cette formule n'est valable que dans un repère orthonormé !

<u>Démonstration</u> :

$$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$$
$$= \frac{1}{2}\left((x+x')^2 + (y+y')^2 - (x^2+y^2) - (x'^2+y'^2)\right)$$ car $\vec{u}+\vec{v}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}x+x'\\y+y'\end{pmatrix}$
$$= \frac{1}{2}(x^2 + 2xx' + x'^2 + y^2 + 2yy' + y'^2 - x^2 - y^2 - x'^2 - y'^2)$$
$$= \frac{1}{2}(2xx' + 2yy')$$
$$= xx' + yy'$$

On a ainsi un moyen aisé pour déterminer si deux vecteurs sont orthogonaux.

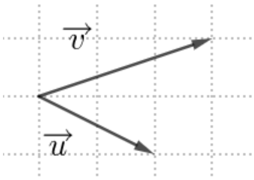
$$\boxed{\begin{aligned}\vec{u} \perp \vec{v} &\Leftrightarrow \vec{u}.\vec{v} = 0\\ &\Leftrightarrow xx' + yy' = 0\end{aligned}}$$



Exemples :

a) $\vec{u}\binom{2}{-1}$ et $\vec{v}\binom{1}{2}$ sont orthogonaux car $xx' + yy' = 2 \times 1 + (-1) \times 2 = 2 - 2 = 0$

b) On sait calculer $\vec{u}.\vec{v}$, $\|\vec{u}\|$ et $\|\vec{v}\|$ à partir des coordonnées des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
On peut donc calculer le cosinus de l'angle $(\vec{u}, \vec{v})$.
En effet $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v}) \Leftrightarrow \cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|}$ si $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$.



Si on considère les vecteurs représentés ci-contre, on a $\vec{u}\binom{2}{-1}$ et $\vec{v}\binom{3}{1}$

$\vec{u}.\vec{v} = 2 \times 3 + (-1) \times 1 = 6 - 1 = 5$

$\|\vec{u}\| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$

$\|\vec{v}\| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$

et donc $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{5}{\sqrt{5} \times \sqrt{10}} = \frac{5}{\sqrt{5} \times \sqrt{5} \times \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

On en déduit que la mesure principale de l'angle $(\vec{u}, \vec{v})$ est $\frac{\pi}{4}$.

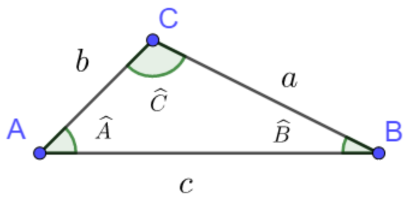
IV) Formule d'Al-Kashi

Propriété :

Soit ABC un triangle quelconque.
On note $a = CB$, $b = AC$, $c = AB$
et $\hat{A} = \widehat{BAC}$, $\hat{B} = \widehat{CBA}$, $\hat{C} = \widehat{ACB}$

On a les formules :

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\, cos\hat{A}$
$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\, cos\hat{B}$
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\, cos\hat{C}$



Démonstration :

$a^2 = BC^2 = \overrightarrow{BC}^2 = \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right)^2 = \overrightarrow{BA}^2 + 2\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}^2 = c^2 - 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} + b^2$

$\Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\, cos\hat{A}$ car $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = cb \cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = 2bc\, cos\hat{A}$

Les autres formules se démontrent de la même manière.

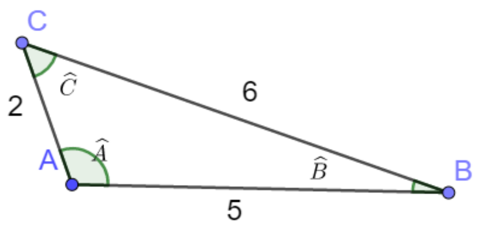
Application :

Avec ces formules :

- on peut connaître la mesure des angles connaissant les longueurs a, b et c des côtés d'un triangle.
  En effet, on peut alors calculer facilement $cos\hat{A}$, $cos\hat{B}$ et $cos\hat{C}$ en appliquant l'une des trois formules.
- on peut aussi calculer la longueur d'un côté connaissant la mesure d'un angle et les longueurs des deux autres côtés.

Exemples :

a)



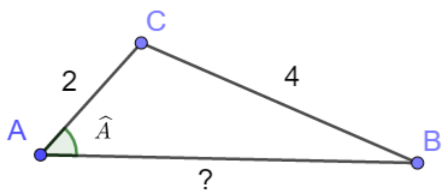
$cos\hat{A} = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{2^2+5^2-6^2}{2\times2\times5} = -\frac{7}{20}$ soit $\hat{A} \approx 110{,}49°$

$cos\hat{B} = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} = \frac{6^2+5^2-2^2}{2\times6\times5} = \frac{57}{60}$ soit $\hat{B} \approx 18{,}19°$

$cos\hat{C} = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \frac{6^2+2^2-5^2}{2\times6\times2} = \frac{15}{24}$ soit $\hat{C} \approx 51{,}32°$

On peut vérifier que le total fait bien 180°.

b)



Je connais $cos\hat{A} = \frac{13}{20}$, $a = 4$ et $b = 2$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\, cos\hat{A} \Leftrightarrow 4^2 = 2^2 + c^2 - 2 \times 2c \times \frac{13}{20}$$

$$\Leftrightarrow c^2 - \frac{13c}{5} - 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow 5c^2 - 13c - 60 = 0$$

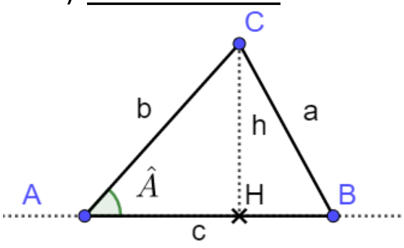
$\Delta = 13^2 - 4 \times 5 \times (-60) = 1369 > 0$ et $\sqrt{\Delta} = 37$

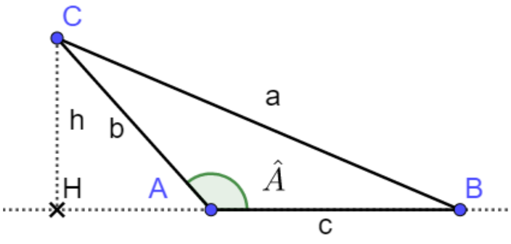
On a deux solutions possibles :

$c_1 = \frac{13-37}{10} = -2{,}4$ et $c_1 = \frac{13+37}{10} = 5$

La solution recherchée étant positive, on a $c = 5$

V) La loi des sinus





L'aire du triangle ABC est donnée par la formule :

$$Aire = \frac{c \times h}{2} = \frac{bc\sin\hat{A}}{2}$$

$h = b\sin\hat{A}$ $\qquad$ $h = b\sin(\pi - \hat{A}) = b\sin\hat{A}$

On montre de la même façon que $Aire = \frac{ac\sin\hat{B}}{2} = \frac{ab\sin\hat{C}}{2}$

On a donc $\frac{bc\sin\hat{A}}{2} = \frac{ac\sin\hat{B}}{2} = \frac{ab\sin\hat{C}}{2} \Leftrightarrow bc\sin\hat{A} = ac\sin\hat{B} = ab\sin\hat{C}$

$$\Leftrightarrow \frac{bc\sin\hat{A}}{abc} = \frac{ac\sin\hat{B}}{abc} = \frac{ab\sin\hat{C}}{abc}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin\hat{A}}{a} = \frac{\sin\hat{B}}{b} = \frac{\sin\hat{C}}{c}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{a}{\sin\hat{A}} = \frac{b}{\sin\hat{B}} = \frac{c}{\sin\hat{C}}}$$

Cette loi est connue sous le nom de **loi des sinus**

Remarque :

D'une façon générale, dans un triangle, il suffit de connaitre 3 des données $a, b, c, \hat{A}, \hat{B}$ ou $\hat{C}$ pour déterminer les 3 autres. La résolution de tels problèmes se fait en utilisant, éventuellement en les combinant :

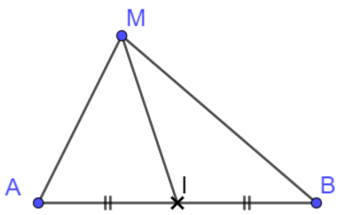
- les formules d'Al-Kashri
- la loi des sinus $\frac{a}{\sin\hat{A}} = \frac{b}{\sin\hat{B}} = \frac{c}{\sin\hat{C}}$
- la propriété sur la somme des mesures des angles d'un triangle, qui est égale à 180°

VI) Transformation de l'expression $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$

Propriété :

Soient A et B deux points du plan et I le milieu du segment [AB].
Pour tout point M du plan, on a :

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{1}{4}AB^2$$



Démonstration :

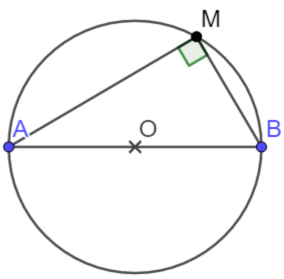
On fait apparaître le point I dans l'expression $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$

$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}).(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) = MI^2 + \overrightarrow{MI}.(\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IA}) + \overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB}$

I étant le milieu du segment [AB], on a $\overrightarrow{IB} = -\overrightarrow{IA}$ et donc $\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IA} = \vec{0}$

On a aussi $\overrightarrow{IA} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{IB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

Finalement $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB} = MI^2 - \frac{1}{4}AB^2$



Propriété :

Soient A et B deux points du plan.
Le cercle de diamètre [AB] est l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$

Démonstration :

Soit O le milieu du segment [AB].

On a $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}).(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB})$

$= \overrightarrow{MO}^2 + \overrightarrow{MO}.(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) + \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}$

O étant le milieu du segment [AB], on a $\overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OA}$ et donc $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \vec{0}$ et $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OA}^2 = -OA^2$

Finalement, $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = OM^2 - OA^2$

M appartient au cercle si et seulement si $OM = OA \Leftrightarrow OM^2 = OA^2 \Leftrightarrow OM^2 - OA^2 = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$

Propriété :

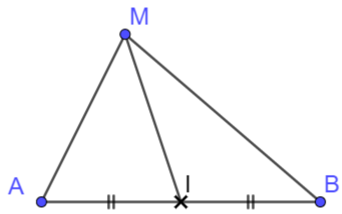
Soient A et B deux points du plan.
Un point M du plan appartient au cercle de diamètre [AB] si et seulement si le triangle ABM est rectangle en M.

En effet, M appartient au cercle $\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0 \Leftrightarrow$ le triangle ABM est rectangle en M

VII) Théorème de la médiane

Propriété :

Soient A et B deux points du plan et I le milieu du segment [AB].
Pour tout point M du plan, on a :
$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2$



Démonstration :

$MA^2 + MB^2 = \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2$

$= (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}).(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}).(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})$

$= MI^2 + 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IA} + IA^2 + MI^2 + 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IB} + IB^2$

$= 2MI^2 + 2\overrightarrow{MI}.(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) + 2IA^2$ car $IA = IB$

I étant le milieu de [AB], on a $IA = \frac{1}{2}AB$ et $IA^2 = \frac{1}{4}AB^2 \Leftrightarrow 2IA^2 = \frac{1}{2}AB^2$

De plus $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$.

On a bien l'égalité recherchée.