

Calcul d'accroissements relatifs

- Augmenter de $t\%$ revient à multiplier par $CM = 1 + \frac{t}{100}$.
- Diminuer de $t\%$ revient à multiplier par $CM = 1 - \frac{t}{100}$.

On peut remarquer que le coefficient multiplicateur CM est plus grand que 1 lors d'une hausse, et plus petit que 1 lors d'une baisse. On appelle *taux de croissance* le nombre $t\%$.

Que signifie l'expression "croissance exponentielle ?" On étudie dans cette séance, l'évolution d'une grandeur au cours du temps.

Si chaque fois que le temps augmente d'une unité (seconde, minute, heure, jour ou année...selon l'exemple donné), la grandeur subit un taux d'évolution

constant $t\%$, alors à chaque étape, la grandeur est multipliée par le coefficient CM associé au taux t .

Supposons que la grandeur soit égale à 1000 initialement, alors les valeurs successives de la grandeur au cours du temps sont données dans le tableau suivant.

temps	valeurs	Exercice 1
0	1000	
1	$1000 \, CM$	
2	$1000 \, CM^2$	
3	$1000 \, CM^3$	
...	...	
10	$1000 \, CM^{10}$	

VOCABULAIRE:

Lorsqu'à chaque étape, le *taux de croissance* d'une grandeur est

constant, on parle de *suite géométrique* en langage mathématique, et de *croissance exponentielle* dans le langage courant¹

¹Les deux définitions coïncident au sens mathématique lorsque le coefficient multiplicateur est égal au nombre $e \simeq 2,76 \dots$

Exercice 1 : un revenu en croissance exponentielle Prenons l'exemple d'un jeune adulte de 20 ans dont le revenu, partant de 1000 euros en 2022, aurait une croissance de 10% par an. Sur le tableau précédent, calculer le revenu après 1 an, 2 ans, 3 ans et 10 ans. La figure 1 ci-dessous décrit l'allure de son revenu jusqu'à ses 70 ans.

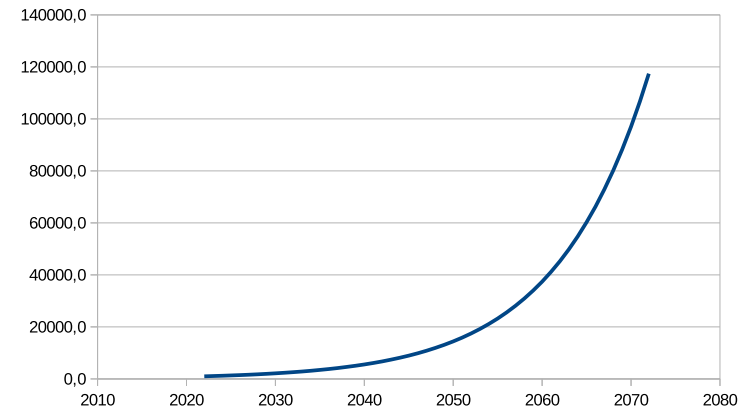


Figure 1: Si le revenu d'un jeune adulte croît de 10% par an, on peut parler de croissance exponentielle

Exercice 2 : Changement d'échelle de temps

Question 1 : Si le revenu de Pierre croît de 5% par an, calculer le coefficient multiplicateur par an, puis le coefficient multiplicateur pour 10 ans. Quel est le taux de croissance par décennie ?

Question 2 : On peut trouver dans *Le Capital* de Karl Marx les estimations suivantes : à partir d'un taux de croissance sur 11 ans dans la colonne de gauche, il donne une estimation du taux de croissance annuel dans la colonne de droite.

EXCÉDENT DU REVENU ANNUEL EN 1864 SUR 1853 :		
	Augmentation par an	
	%	%
Maisons	38,60	3,50
Carrières.....	84,76	7,70
Mines	68,85	6,26
Forges	39,92	3,63
Pêcheries	57,37	5,21
Usines à gaz	126,02	11,45
Chemins de fer	83,29	7,57 (a)

Comment Karl Marx a-t-il estimé le taux d'augmentation par an ? Si on applique ce taux pendant 11 ans à partir d'une valeur initiale de 100, est-ce qu'on retrouve bien le taux de croissance donné sur la colonne de droite ?

Définition : la racine n -ième d'un nombre positif y est l'unique nombre positif x tel que $x^n = y$. On note alors $y = \sqrt[n]{y}$

Propriété :

Si le coefficient multiplicateur sur 10 ans est CM alors le coefficient multiplicateur par an est $cm = \sqrt[10]{CM}$.

Si le coefficient multiplicateur sur un an est CM alors le coefficient multiplicateur par trimestre est $cm = \sqrt[4]{CM}$.

Question 3 : quel est le taux de croissance annuel du revenu des mines dans l'exemple précédent ?

Exercice 3 : peut-on parler de croissance exponentielle du PIB ? Le Produit Intérieur Brut représente "le résultat final de l'activité de production des unités productrices résidentes d'un pays", c'est un indicateur du revenu engrangé par un pays au cours d'une année.

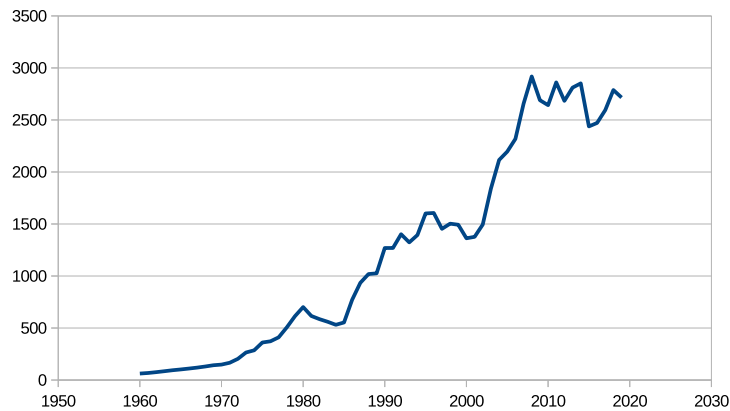


Figure 2: Evolution du PIB français, en milliards de dollars.

Répondre à la question à l'aide du Tableau 1 et de la Figure 2 .

Année	PIB (G\$)	CM	taux de croissance
1960	62	xxxx	xxxx
1970	148		
1980	701		
1990	1269		
2000	1362		
2010	2643		

Tableau 1: PIB de la France en milliards de dollars

Exercice 4 : la fable du nénuphar Sur un étang se trouvent quelques nénuphars et ceux ci ne cessent de se multiplier. Si l'on sait que la surface de l'étang sera entièrement couverte par ces plantes en 50 jours et que leur étendue double chaque 24 heures, au bout de combien de temps les nénuphars recouvriront-ils la moitié de l'étang ?²

²Albert Jacquard , L'équation du nénuphar : Les plaisirs de la science , éditions Calmann-Lévy 1998