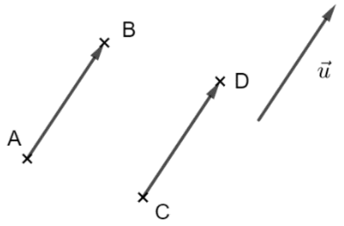
Les vecteurs (partie 2)

I) Rappels

Un vecteur est la représentation graphique à l'aide d'une flèche d'une translation. On identifie un vecteur avec la translation qu'il représente.

Un vecteur est défini par :
- une direction ;
- un sens ;
- une norme, notée $\|\vec{u}\|$, qui représente la longueur de la flèche.

Caractérisation du vecteur $\overrightarrow{AB}$:
- sa direction est celle de la droite (AB) ;
- son sens est défini par l'origine A et l'extrémité B ;
- sa norme est la longueur du segment $[AB]$.

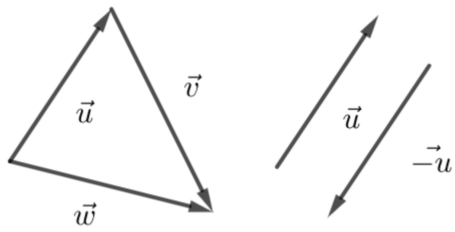


On a $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si et seulement si $ABDC$ est un parallélogramme.
$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ et $\vec{u}$ sont trois représentants d'un même vecteur. Ils définissent la même translation.

Opérations sur les vecteurs

La somme des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, notée $\vec{u} + \vec{v}$,
est la translation qui résulte de l'enchaînement des translations $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Pour déterminer $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$, on met les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ « bout à bout ».



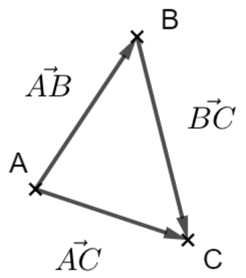
Vecteur opposé : $\vec{u} + (\overrightarrow{-u}) = \vec{u} - \vec{u} = \vec{0}$.
$\vec{0}$ est le vecteur nul. Il correspond à un déplacement nul.

Relation de Chasles :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

On a aussi les égalités :

$-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$



II) Produit d'un vecteur par un réel

Définition :

Soit $\vec{u}$ un vecteur et $k \in \mathbb{R}$.
On définit $k\vec{u}$ de la manière suivante :
- Si $k > 0$
  - $\vec{u}$ et $k\vec{u}$ ont la même direction
  - $\vec{u}$ et $k\vec{u}$ ont le même sens
  - $\|k\vec{u}\| = k\|\vec{u}\|$, ce qui signifie que la longueur de la flèche est multipliée par k
- Si $k < 0$
  - $\vec{u}$ et $k\vec{u}$ ont la même direction
  - $\vec{u}$ et $k\vec{u}$ ont des sens opposés
  - $\|k\vec{u}\| = |k|\|\vec{u}\|$, ce qui signifie que la longueur de la flèche est multipliée par $|k| > 0$
- Si $k = 0$, alors $k\vec{u} = \vec{0}$

Remarque : $\forall k \in \mathbb{R}$, $k\vec{0} = \vec{0}$

Propriétés :

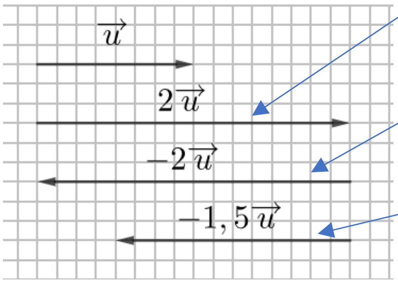
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ des vecteurs et $k \in \mathbb{R}, k' \in \mathbb{R}$. On a :

$$k(\vec{u}+\vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$$
$$(k+k')\vec{u} = k\vec{u} + k'\vec{u}$$
$$k(k'\vec{u}) = (kk')\vec{u}$$

Remarque :
On a aussi $k(\vec{u}-\vec{v}) = k\vec{u} - k\vec{v}$

Exemples :

a)

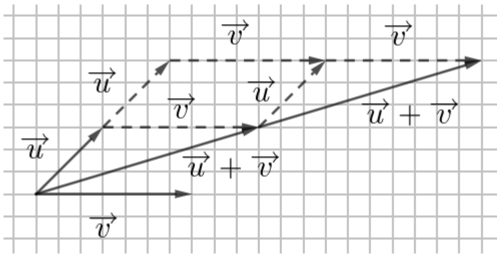


même direction, même sens et 2 fois plus long

même direction, sens contraire
et 2 fois plus long

même direction, sens contraire
et 1,5 fois plus long

b) La propriété
$2(\vec{u}+\vec{v}) = 2\vec{u} + 2\vec{v}$
est illustrée par la figure ci-contre.



c) Exemples de calculs vectoriels, avec simplification :

$$2\vec{u} + 3\vec{u} = (2+3)\vec{u} = 5\vec{u}$$

$$-\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{u} = \left(-1+\frac{1}{2}\right)\vec{u} = -\frac{1}{2}\vec{u}$$

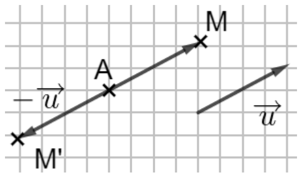
$$-2 \times \left(\frac{2}{3}\vec{u}\right) = \left(-2 \times \frac{2}{3}\right)\vec{u} = -\frac{4}{3}\vec{u}$$

$$\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AB} = (1-2)\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$$

$2\overrightarrow{AM} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \vec{0} \Leftrightarrow$ les points A et M sont confondus

Méthodes pour construire des points définis par une relation vectorielle :

a) Comment placer un point M défini par une relation vectorielle de la forme $\overrightarrow{AM} = \vec{u}$?
On trace le représentant du vecteur $\vec{u}$ ayant le point A comme origine.
Le point M est à l'extrémité de ce vecteur.

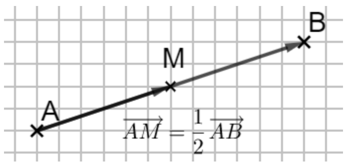


b) Comment placer un point M' défini par une relation vectorielle de la forme $\overrightarrow{M'A} = \vec{u}$?
On trace le représentant du vecteur $-\vec{u}$ ayant le point A comme origine.
Le point M' est à l'extrémité de ce vecteur.

c) Comment placer un point M défini par une relation vectorielle de la forme $\overrightarrow{AM} = k\vec{u}$?
Il faut tracer le représentant du vecteur $k\vec{u}$ ayant le point A comme origine.
Si $k > 0$, alors $\vec{u}$ et $k\vec{u}$ ont le même sens et si $k < 0$, alors $\vec{u}$ et $k\vec{u}$ ont des sens opposés.
On utilise la relation $\|k\vec{u}\| = |k|\|\vec{u}\|$ pour déterminer la norme du vecteur $k\vec{u}$ qui correspond à la distance entre A et M. Le point M est à l'extrémité du vecteur $k\vec{u}$.

Exemple :

Soit A et B deux points distincts du plan. Placer le point M tel que :



$\overrightarrow{AM} = \dfrac{1}{2}\,\overrightarrow{AB}$

M est sur la droite (AB).

Les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ ont même direction et même sens.

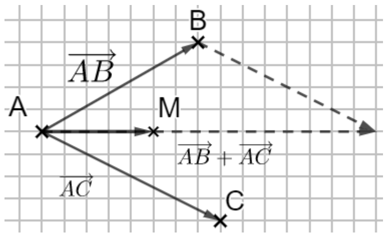
La longueur du segment $[AM]$ est égale à la moitié de celle du segment $[AB]$.

d) Comment placer un point M défini par une relation vectorielle dans laquelle le point M apparaît plusieurs fois ?

On choisit un point particulier P et on fait apparaître ce point dans tous les vecteurs dans lesquels le point M est mentionné, en utilisant la relation de Chasles. On peut alors exprimer le vecteur $\overrightarrow{PM}$ en fonction de vecteurs dans lesquels le point M n'est plus mentionné et ainsi placer M.

Exemple :

Placer un point M défini par la relation :



(1) $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM} = \vec{0}$

(1) $\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} + (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM}) + (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AM}) = \vec{0}$ ⟵ on choisit A

$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$ ⟵ ensuite, on isole $\overrightarrow{AM}$

$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{CA}$

$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$ ⟵ on peut alors placer le point M

Propriété :

On peut caractériser le milieu d'un segment de plusieurs façons.

I est le milieu de $[AB]$	$\Leftrightarrow \overrightarrow{AI} = \dfrac{1}{2}\,\overrightarrow{AB}$
	$\Leftrightarrow \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$
	$\Leftrightarrow \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BI} = \vec{0}$

Démonstration :

$$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow 2\,\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB}$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB}$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AI}$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{IA}$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB}$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$$

En pratique, pour démontrer qu'un point I est le milieu d'un segment $[AB]$, il suffit donc de démontrer l'une de ces égalités équivalentes.

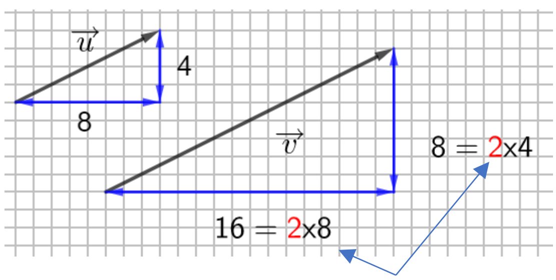
III) Vecteurs colinéaires, alignement et parallélisme

Définition :

> Deux vecteurs non nuls sont dits colinéaires s'ils ont la même direction.
> Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires
> $\Leftrightarrow$ il existe $k \in \mathbb{R}^*$ tel que $\vec{v} = k\vec{u}$.

Remarque : on ne parle pas de vecteurs parallèles, mais de vecteurs colinéaires.

Par convention, le vecteur nul $\vec{0}$ est colinéaire avec tous les autres vecteurs.



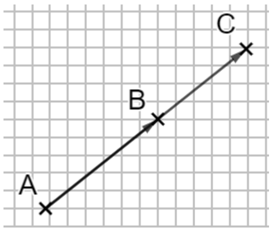
2 est le coefficient de colinéarité entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$

On a ici $\vec{v} = 2\vec{u}$

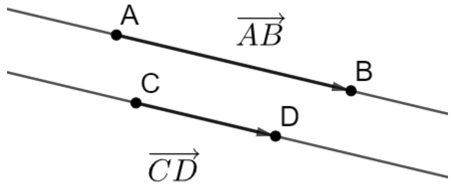
Propriétés :

Trois points A, B et C sont alignés
$\Leftrightarrow$ les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Remarque : on peut choisir aussi $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ ou $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$



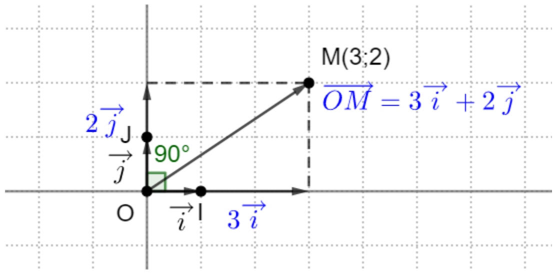
Deux droites (AB) et (CD) sont parallèles
$\Leftrightarrow$ les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.



IV) Coordonnées d'un vecteur

Rappel de la définition d'un repère cartésien :

On considère O, I et J trois points distincts et non alignés du plan.
On dit que $(O;\ I;\ J)$ est un repère cartésien du plan.
Si $(OI) \perp$ (OJ), le repère est dit orthogonal.
Si $(OI) \perp$ (OJ) et $OI = OJ$, le repère est dit orthonormé.



Remarque : si $OI = OJ$, le triangle est isocèle en O.
Le point O est l'origine du repère, la droite (OI) est l'axe des abscisses et la droite (OJ) l'axe des ordonnées.

Définition :

On appelle vecteurs unitaires de ce repère les vecteurs $\vec{\imath} = \overrightarrow{OI}$ et $\vec{\jmath} = \overrightarrow{OJ}$.
Le repère est alors noté $(O\ ;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Rappel des coordonnées d'un point M :

Soit M un point du plan.
On trace la droite parallèle à (OJ) passant par M. Elle coupe (OI) en x (on confond le point et son abscisse sur la droite). De même la droite parallèle à (OI) et passant par M coupe (OJ) en y.
Le couple (x ; y) représente les coordonnées du point M, ce que l'on note M(x ; y).

Propriété :

Soit un repère $(O\ ;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
Pour tout point M de coordonnées (x ; y) dans ce repère, on a $\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$.

Définition :

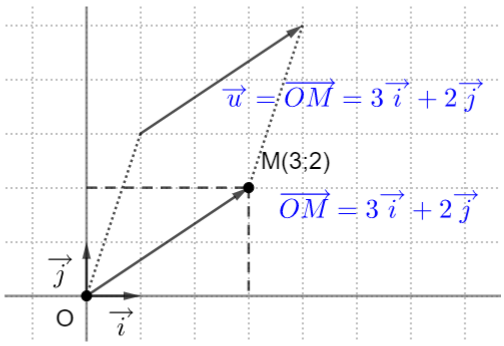
On dit que le vecteur $\overrightarrow{OM}$ a pour coordonnées $\binom{x}{y}$ dans la base $(\vec{\imath}; \vec{\jmath})$.

Remarque : On note $(x\ ;\ y)$ les coordonnées du point M et $\binom{x}{y}$ les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OM}$.

Propriété :

Pour tout vecteur $\vec{u}$ dans la base $(\vec{\imath}; \vec{\jmath})$, il existe un unique couple de réels $(x\ ;\ y)$ tel que $\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$.
On dit que le vecteur $\vec{u}$ a pour coordonnées $\binom{x}{y}$ dans la base $(\vec{\imath}; \vec{\jmath})$.

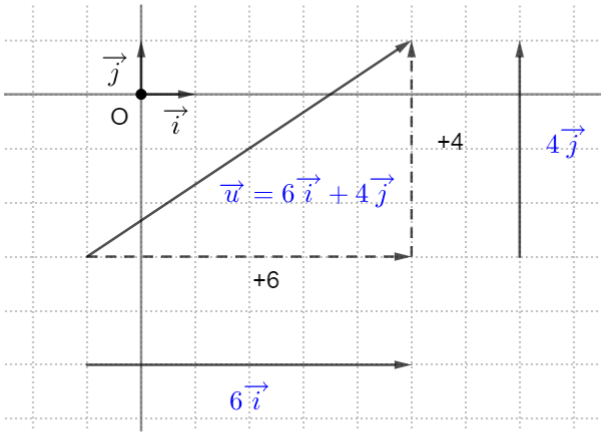
Les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ dépendent uniquement du choix de la base $(\vec{\imath}; \vec{\jmath})$.
Si on considère un repère $(O\ ;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ sont les coordonnées de l'unique point M tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$.



Comment déterminer les coordonnées d'un vecteur ?

Pour déterminer les coordonnées d'un vecteur, il n'est pas nécessaire de placer un point M tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$. Les coordonnées d'un vecteur correspondent aux déplacements comptés suivant la direction de $\vec{\imath}$, en prenant $\|\vec{\imath}\|$ comme unité de mesure ($\|\vec{\imath}\| = 1$ par définition) et suivant la direction de $\vec{\jmath}$, en prenant $\|\vec{\jmath}\|$ comme unité de mesure ($\|\vec{\jmath}\| = 1$ par définition).

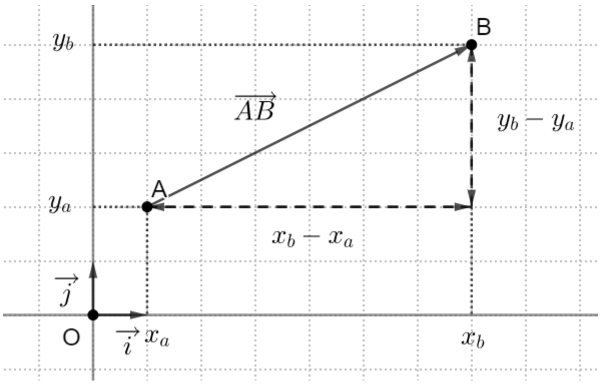
Le vecteur $\vec{u}$ de la figure ci-contre a donc pour coordonnées $\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$.

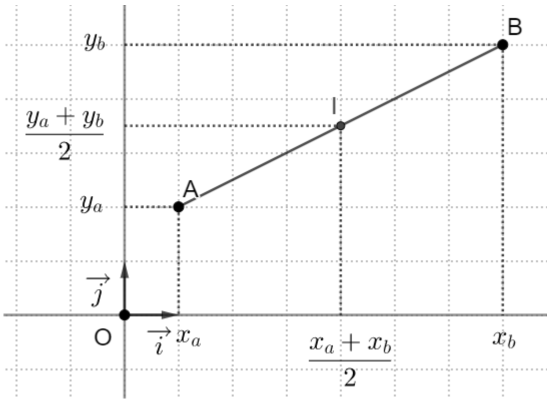


Propriété :

Soient deux points $A(x_a; y_a)$ et $B(x_b; y_b)$ dont les coordonnées sont données dans un repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1) Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $\begin{pmatrix} x_b - x_a \\ y_b - y_a \end{pmatrix}$;
2) Les coordonnées du point I milieu du segment $[AB]$ sont $\left(\frac{x_a+x_b}{2}; \frac{y_a+y_b}{2}\right)$;
3) La distance AB est $AB = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2}$ et on a $\|\overrightarrow{AB}\| = AB = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2}$





Exemple :

Soient les points $A(1; 2)$ et $B(7; 5)$ dont les coordonnées sont données dans un repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $\begin{pmatrix} 7-1 \\ 5-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$. On écrit $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Les coordonnées du milieu I du segment $[AB]$ sont $\begin{pmatrix} \frac{1+7}{2} \\ \frac{2+5}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ \frac{7}{2} \end{pmatrix}$.

La distance entre les points A et B est $AB = \sqrt{(7-1)^2 + (5-2)^2} = \sqrt{36+9} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$

V) Calculs avec les vecteurs

Propriétés :

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux vecteurs dont les coordonnées sont définies dans une base $(\vec{\imath}; \vec{\jmath})$.

1) $\vec{u} = \vec{v}$ si et seulement si $x = x'$ et $y = y'$
2) Les coordonnées du vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ sont $\begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$
3) Les coordonnées du vecteur $k\vec{u}$ sont $\begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$, où $k \in \mathbb{R}$.

Exemples :

a) Soient les points $A(2;-2)$, $B(5;2)$, $C(3;2)$ et $D(10;14)$.
Montrer que $\overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$
On calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{CD}$, $2\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
On a $\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 10-3 \\ 14-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 12 \end{pmatrix}$,
$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 5-2 \\ 2-(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$,
$2\overrightarrow{AB} = 2\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\times 3 \\ 2\times 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}$
$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 3-2 \\ 2-(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$
$2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6+1 \\ 8+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 12 \end{pmatrix}$
Et donc par identification des coordonnées, on a bien $\overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

b) Trouver les coordonnées d'un point $M(x\,;y)$ tel que $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$
On a $\overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} x-2 \\ y-(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-2 \\ y+2 \end{pmatrix}$
$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+1 \\ 4+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}$
On cherche donc $M(x\,;y)$ tel $\begin{pmatrix} x-2 \\ y+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2=4 \\ y+2=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4+2 \\ y=8-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=6 \\ y=6 \end{cases}$
Le point M recherché est $M(6\,;6)$.

Dans les calculs ci-dessus, on remarque que l'on identifie un vecteur avec ses coordonnées.
On écrit par exemple $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

VI) Critère de colinéarité

Propriété :

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.
Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow$ il existe $k \in \mathbb{R}^*$ tel que $\vec{v} = k\vec{u}$
$\Leftrightarrow$ il existe $k \in \mathbb{R}*$ tel que $\begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \end{cases}$

Les coordonnées de deux vecteurs colinéaires sont donc proportionnelles.

Exemple :
$\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 6 \\ 15 \end{pmatrix}$ sont colinéaires car $\begin{cases} 6 = 3\times 2 \\ 15 = 3\times 5 \end{cases}$
Le coefficient de colinéarité est 3 et $\vec{v} = 3\vec{u}$

Propriété :

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $xy' = x'y$

Démonstration : (au programme)

a) On suppose $\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires
Il existe $k \in \mathbb{R}^*$ tel que $\vec{v} = k\vec{u}$.
On a donc $\begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \end{cases}$
$xy' = x(ky) = kxy$
et $x'y = (kx)y = kxy$
On a bien l'égalité recherchée

b) On suppose que $xy' = x'y$ et on veut montrer que les vecteurs sont colinéaires.

Si $x \neq 0$ et $y \neq 0$

De l'égalité précédente, on déduit que

$\frac{x'}{x} = \frac{y'}{y} = k$ où $k \neq 0$

Et donc $x' = kx$ et $y' = ky$

On a bien $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, soit $\vec{v} = k\vec{u}$, ce qui montre que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Si $x = 0$ (avec $y \neq 0$) ou $y = 0$ (avec $x \neq 0$)

Supposons par exemple $x = 0$. On a donc $y \neq 0$ par hypothèse.

Comme $xy' = x'y$, on a $0 = x'y$ (car $x = 0$) et $x' = 0$ (car $y \neq 0$)

On a donc $\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$, avec $y \neq 0$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ y' \end{pmatrix}$.

Si on pose $k = \frac{y'}{y}$ (ce qui est possible car $y \neq 0$), on a $\vec{v} = k\vec{u}$ et $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont bien colinéaires.

On fait un raisonnement analogue si $y = 0$ et $x \neq 0$.

Si $x = 0$ et $y = 0$

Dans ce cas, on a $\vec{u} = \vec{0}$. Et $\vec{u}$ est colinéaire avec $\vec{v}$.

Remarque :

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires signifie que $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont proportionnels.

$\boxed{\begin{matrix} x & x' \\ y & y' \end{matrix}}$ est donc un tableau de proportionnalité.

Définition :

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux vecteurs.

Le déterminant de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le réel noté $\det(\vec{u}, \overrightarrow{v})$ tel que :

$\det(\vec{u}, \overrightarrow{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - yx'$

Bien faire attention à l'ordre de calcul.

$\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}$ on calcule le produit xy' « descendant » moins le produit yx' « montant ».

Propriété :

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux vecteurs.

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $\det(\vec{u}, \overrightarrow{v}) = 0$

Démonstration :

$\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow xy' = x'y$

$\Leftrightarrow xy' - yx' = 0$

$\Leftrightarrow \det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$

Application :

a) Montrer que les points $A(2;3)$, $B(5;1)$ et $C(8;-1)$ sont alignés.

Il suffit pour cela de montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

On a $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 5-2 \\ 1-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 8-2 \\ -1-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix}$.

$det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} = 3 \times (-4) - (-2) \times 6 = -12 + 12 = 0$ donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

b) On considère le point $D(3;-2)$. Montrer que les points A, B et D ne sont pas alignés.

Il suffit pour cela de montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ ne pas sont colinéaires.

$\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 3-2 \\ -2-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$

$det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}) = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -5 \end{vmatrix} = 3 \times (-5) - (-2) \times 1 = -15 + 2 = -13 \neq 0$ donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ ne sont pas colinéaires et les points ne sont pas alignés.