Université de Bordeaux – 2021/22
UE Mathématiques approfondies **R. Coulangeon - G. Ricotta**

TD 2 Nombres réels et suites

1 Développements décimaux des rationnels

Exercice 1.
Déterminer des entiers a et b tels que le développement décimal du nombre rationnel $\frac{a}{b}$ soit égal à :

1. $0,\overline{3} = 0,33333...$
2. $0,\overline{18} = 0,181818...$
3. $0,\overline{135} = 0,135135135...$
4. $0,123456\overline{78} = 0,123456787878...$

Exercice 2. [propriété d'Archimède et conséquences]

1. Soient $x = \frac{a}{b}$, $y = \frac{c}{d}$, où a, b, c et d sont des entiers strictement positifs.
   (a) Soit n un entier naturel. Monter que $nx > y$ si et seulement si $nad > bc$.
   (b) Soit q le quotient de la division euclidienne de bc par ad. Montrer que $(q+1)ad > bc$.
2. Conclure que si x et y sont deux nombres rationnels strictement positifs, il existe un entier naturel n tel $nx > y$.
3. Applications
   (a) Montrer que pour tout nombre rationnel strictement positif ϵ, il existe un entier naturel non nul tel que $\frac{1}{n} < \epsilon$.
   (b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, 10^n \geq n$ et en déduire que pour nombre rationnel strictement positif ϵ, il existe un entier naturel non nul tel que $\frac{1}{10^n} < \epsilon$.

Exercice 3. [Sur la période du développement décimal des rationnels]

1. Déterminer le développement décimal de $\frac{1}{7}, \frac{3}{7}, \frac{22}{7}$. Que constate-t-on ?
2. Trouver le plus petit entier naturel non nul n tel que $10^n \equiv 1 \mod 7$.
3. Quel lien y a-t-il entre le résultat de la question 2 et le phénomène observé à la question 1 ?
4. Plus généralement, montrer que si b est un entier premier à 10, il existe un entier naturel non nul tel que $10^n \equiv 1 \mod b$ et que le plus petit de ces entiers est égal à la longueur de la période du développement décimal de tous les rationnels de la forme $\frac{a}{b}$, où a est un entier premier à b.

Exercice 4. Déterminer les entiers positifs n tel que développement décimal de $\frac{1}{n}$ soit de la forme $0,\overline{a_1a_2}$, avec $a_1 \neq a_2$.

2 Suites de nombres réels

2.1 Calcul de limite

Exercice 5. Dans chacun des cas suivants, déterminer, si elle existe, la limite de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$.
(1) $u_n = 3 - \frac{5}{n^2}$.
(2) $u_n = -n^2 + 4n - 3$.
(3) $u_n = \frac{2n^2-n+3}{6+n^2}$.
(4) $u_n = \frac{1}{n}\sin(\frac{\pi}{n})$.
(5) $u_n = 7\left(\frac{5}{9}\right)^n$.

Exercice 6. [Utilisation d'une suite auxiliaire] Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par $u_0 = 5$ et, pour tout entier naturel n, par $u_{n+1} = (2u_n + 6)/3$. Soit aussi $(v_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n - 6$.
(1) Calculer u_1, u_2 et u_3.
(2) Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n pour tout entier naturel n.
(3) En déduire que $(v_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
(4) Exprimer v_n en fonction de n puis u_n en fonction de n pour tout entier naturel n.
(5) Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$.

Exercice 7. Etudier la convergence et déterminer la limite, lorsqu'elle existe, des suites suivantes.
(1) $u_n = \frac{n^2-1}{n^2+1}$ pour $n \geqslant 0$.
(2) $x_n = \frac{\cos n}{n}$ pour $n \geqslant 1$.
(3) $w_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ pour $n \geqslant 1$.

Exercice 8. On veut étudier la convergence de la suite

$$v_n = \frac{a^n - b^n}{a^n + b^n}$$

pour $n \geqslant 0$ où $a > 0$ et $b > 0$.

1. Expliquer pourquoi il suffit de considérer le cas $a > b > 0$.
2. Calculer la limite de cette suite dans le cas où $a = 1$ et $1 > b > 0$.
3. Se ramener au cas précédent lorsque $a > b > 0$ puis conclure.

2.2 Propriétés des suites convergentes

Exercice 9. Déterminer si les énoncés suivants sont vrais ou faux et justifier votre réponse.
(1) Toute suite encadrée par deux suites convergentes est convergente.
(2) La somme de deux suites divergentes est divergente.
(3) Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge alors elle est monotone.
(4) Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge alors elle n'est pas bornée.
(5) Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée alors elle est convergente.
(6) Soit $a \in \mathbb{R}$. Si $u_n > a$ pour tout entier naturel n et si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers une limite $l \in \mathbb{R}$ alors $l > a$.
(7) Si $u_n > 0$ pour tout entier naturel n et $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ alors $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante à partir d'un certain rang.
(8) Si $u_n > 0$ pour tout entier naturel n et si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ n'est pas majorée alors $\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty$.
(9) Si une suite réelle a une limite strictement positive alors tous ses termes sont positifs à partir d'un certain rang.
(10) Si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante et positive alors $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers 0.

Exercice 10. Soit $(b_n)_{n\geqslant 1}$ la suite définie par

$$b_n = \frac{1}{n} + \cos(n\pi)$$

pour tout entier naturel $n \geqslant 1$. En utilisant la définition de la convergence à l'aide de quantificateurs, montrer que la suite $(b_n)_{n\geqslant 1}$ ne converge pas.

2.3 Etude de suites

Exercice 11. Soit f la fonction de $[-6, +\infty]$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \sqrt{6+x}$$

pour tout nombre réel x supérieur à -6 et soit $u = (u_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par $u_0 = 2$ et

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

pour tout entier naturel n.
(1) Dresser le tableau de variations de la fonction f.
(2) Représenter graphiquement quelques termes de la suite.
(3) Montrer que la suite u est majorée.
(4) Montrer que la suite u est croissante.
(5) La suite u est-elle convergente ? Si oui, vers quelle limite ?

Exercice 12. Soit $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{2}{x})$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite donnée par

$$\begin{cases} u_0 & = & a, \\ u_{n+1} & = & f(u_n) \end{cases}$$

où a est un réel strictement positif. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone et converge vers la même limite.

Exercice 13. Montrer que les suites suivantes sont covergentes et calculer leur limite

1. $u_n = 1 + \frac{2}{3} + \cdots + \frac{2^n}{3^n}$, pour tout $n \geq 0$.
2. $v_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$, pour tout $n \geq 1$.

Exercice 14. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_n = 1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \cdots + \frac{(-1)^n}{5^n} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{5^k}$$

pour tout entier naturel n est convergente et calculer sa limite.

Exercice 15. On considère la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$S_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$

pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.
(1) Vérifier que pour tout entier naturel $k \geqslant 2$

$$\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}.$$

(2) Montrer que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

Exercice 16. On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ en posant

$$u_1 = 1, \qquad \forall n \geqslant 1,\ u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n+1}$$

et une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ en posant $v_n = u_{2n}$ pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.
(1) Vérifier que le terme général de la suite peut aussi s'écrire

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

(2) Montrer que la suite u est croissante.
(3) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad v_n - u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} \cdots + \frac{1}{2n} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}.$$

(4) En déduire que pour tout $n \geqslant 1$, $v_n - u_n \geqslant \frac{1}{2}$.
(5) La suite u peut-elle converger ?
(6) La suite u est-elle majorée ?
(7) Que se passe-t-il lorsque n tend vers $+\infty$ pour la suite u ?

Exercice 17. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par

$$u_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.
(1) Montrer que les suites $(v_n = u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n = u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites adjacentes.
(2) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
(3) Montrer que pour tout nombre réel x dans $[0, 1]$ et tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$\frac{1}{x+1} = 1 - x + x^2 \cdots + (-1)^{n-1}x^{n-1} + \frac{(-x)^n}{1+x}.$$

(4) Calculer pour tout entier naturel n

$$\int_0^1 \left(1 - x + x^2 \cdots + (-1)^{n-1}x^{n-1}\right) dx.$$

Que reconnaissez-vous ?
(5) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\left|\int_0^1 \frac{(-x)^n}{1+x}\, dx\right| \leq \int_0^1 x^n\, dx$$

puis que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{(-x)^n}{1+x}\, dx = 0$$

(6) En déduire que

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln(2).$$

Exercice 18. [irrationalité de e] On considère les suites (a_n) et (b_n) définies par

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} = 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

et

$$b_n = a_n + \frac{1}{n \cdot n!}.$$

1. Montrer que (a_n) et (b_n) sont des suites adjacentes.
2. Soit e la limite commune de (a_n) et (b_n). Supposons qu'il existe des entiers positifs p, q tels que $e = p/q$. Montrer qu'alors
$$q!a_q < p \cdot (q-1)! < q!a_q + \frac{1}{q}.$$
3. Vérifier que $q!a_q$ et $p \cdot (q-1)!$ sont des entiers, et en déduire une contradiction.