$$\frac{}{\Gamma \vdash A}\, h \qquad \frac{\Gamma \vdash A \to B \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash B}\, mp(A) \qquad \frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \to B} \to_i \qquad \frac{\Gamma \vdash \bot}{\Gamma \vdash A} \bot_c$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B} \wedge_i \qquad \frac{\Gamma \vdash A \wedge B \quad \Gamma, A, B \vdash C}{\Gamma \vdash C} \wedge_e (A \wedge B) \qquad \frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B} \vee_i (1) \qquad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B} \vee_i (2)$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \vee B \quad \Gamma, A \vdash C \quad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma \vdash C} \vee_c (A \vee B)$$

$$A \leftrightarrow B \equiv (A \to B) \wedge (B \to A)$$

$\Gamma \models A$: "le séquent $\Gamma \vdash A$ est **valide**"

$\Gamma \vdash_J A$: "le séquent $\Gamma \vdash A$ est prouvable en logique intuitionniste"

$A \equiv_J B$: "le séquent $\vdash A \leftrightarrow B$ est prouvable en logique intuitionniste"

Sujet exam :

1 Preuves de séquents propositionnels (12 pts)

Prouver les séquents suivants. Par défaut, on attend une preuve intuitionniste ; les séquents marqués (LK) sont à prouver en logique classique.

1. $(\sim P \vee Q) \vee R \vdash P \to (Q \vee R)$
2. $P \vee \sim Q, P \vee \sim R, (\sim P \vee Q) \vee R \vdash (Q \vee R) \to P$
3. (LK) $P \to Q, \sim P \to \sim Q \vdash P \leftrightarrow Q$
4. $P \to (Q \vee R), (P \wedge Q) \to R \vdash P \to R$
5. (LK) $(P \vee Q) \to R, \sim P \to \sim Q \to R \vdash R$
6. $\sim Q \vee P, P \to R \vdash R \vee \sim Q$

2 Règles dérivées (3 pts)

La proposition de règle ci-dessous est-elle une règle dérivée en logique propositionnelle intuitionniste ? Justifier votre réponse, soit au moyen d'un arbre partiel (si vous pensez que c'est une règle dérivée), soit en exhibant un séquent non prouvable qui deviendrait prouvable au moyen d'une telle règle (si vous pensez que ce n'est pas une règle dérivée).

$$\frac{\Gamma \vdash A \vee B \qquad \Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A}$$

1. $(\neg P \vee Q) \vee R \vdash P \to (Q \vee R)$

$$\frac{}{\Gamma, P, \neg P \vee Q, \neg P \vdash \bot}\,h \qquad \frac{\Gamma, P, \neg P \vee Q, \neg P \vdash \bot}{\Gamma, P, \neg P \vee Q, \neg P \vdash Q \vee R}\,\bot_e$$

$$\frac{}{\Gamma, P, \neg P \vee Q, Q \vdash Q}\,h \qquad \frac{\Gamma, P, \neg P \vee Q, Q \vdash Q}{\Gamma, P, \neg P \vee Q, Q \vdash Q \vee R}\,\vee_i(1)$$

$$\frac{\dfrac{}{\Gamma, P, \neg P \vee Q \vdash \neg P \vee Q}\,h \quad \Gamma, P, \neg P \vee Q, \neg P \vdash Q \vee R \quad \Gamma, P, \neg P \vee Q, Q \vdash Q \vee R}{\Gamma, P, \neg P \vee Q \vdash Q \vee R}\,\vee_e$$

$$\frac{\dfrac{}{\Gamma, P, R \vdash R}\,h}{\Gamma, P, R \vdash Q \vee R}\,\vee_i(2)$$

$$\frac{\dfrac{}{\Gamma, P \vdash (\neg P \vee Q) \vee R}\,h \quad \Gamma, P, \neg P \vee Q \vdash Q \vee R \quad \Gamma, P, R \vdash Q \vee R}{\Gamma, P \vdash Q \vee R}\,\vee_e((\neg P \vee Q) \vee R)$$

$$\frac{\Gamma, P \vdash Q \vee R}{\Gamma \vdash P \to (Q \vee R)}\,\to_i$$

2. $P \vee \neg Q,\ P \vee \neg R,\ (\neg P \vee Q) \vee R \vdash (Q \vee R) \to P$

$$\frac{\dfrac{}{\Gamma, Q \vdash P \vee \neg Q}\,h \quad \dfrac{}{\Gamma, Q, P \vdash P}\,h \quad \dfrac{\dfrac{}{}\,h \quad \dfrac{}{}\,h}{\Gamma, Q, \neg Q \vdash P}\,\bot_e}{\Gamma, Q \vdash P}\,\vee_e(P \vee \neg Q)$$

$$\frac{\dfrac{}{\Gamma, R \vdash P \vee \neg R}\,h \quad \dfrac{}{\Gamma, R, P \vdash P}\,h \quad \dfrac{\dfrac{}{}\,h \quad \dfrac{}{}\,h}{\Gamma, R, \neg R \vdash P}\,\bot_e}{\Gamma, R \vdash P}\,\vee_e(P \vee \neg R)$$

$$\frac{\Gamma, Q \vdash P}{\Gamma, Q \vee R, Q \vdash P}\,aff \qquad \frac{\Gamma, R \vdash P}{\Gamma, Q \vee R, R \vdash P}\,aff$$

$$\frac{\dfrac{}{\Gamma, Q \vee R \vdash Q \vee R}\,h \quad \Gamma, Q \vee R, Q \vdash P \quad \Gamma, Q \vee R, R \vdash P}{\Gamma, Q \vee R \vdash P}\,\vee_e(Q \vee R)$$

$$\frac{\Gamma, Q \vee R \vdash P}{\Gamma \vdash (Q \vee R \to P)}$$

3. $\neg Q \vee P,\ P \to R \vdash R \vee \neg Q$

$$\frac{\dfrac{}{\Gamma, P \vdash P \to R}\,h \quad \dfrac{}{\Gamma, P \vdash P}\,h}{\Gamma, P \vdash R}\,\to_e(P)$$

$$\frac{\Gamma, P \vdash R}{\Gamma, P \vdash R \vee \neg Q}\,\vee_i(1) \qquad \frac{\dfrac{}{\Gamma, \neg Q \vdash \neg Q}\,h}{\Gamma, \neg Q \vdash R \vee \neg Q}\,\vee_i(2)$$

$$\frac{\dfrac{}{\Gamma \vdash \neg Q \vee P}\,h \quad \Gamma, \neg Q \vdash R \vee \neg Q \quad \Gamma, P \vdash R \vee \neg Q}{\Gamma \vdash R \vee \neg Q}\,\vee_e(\neg Q \vee P)$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \vee B \qquad \Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A}$$

$$\cfrac{\Gamma \vdash A \vee B \qquad \cfrac{}{\Gamma, A \vdash A}\,h \qquad \cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{}{\Gamma, B, A \vdash A}\,h \quad \cfrac{}{\Gamma, B, A \vdash B}\,h}{\Gamma, B, A \vdash A \wedge B}\,\wedge_i}{\Gamma, B \vdash A \to (A \wedge B)}\,\to_i \quad \cfrac{}{\Gamma, B \vdash A}\,?}{\Gamma, B \vdash A \wedge B}\,\to_e(A) \quad \cfrac{}{\Gamma, B, A \vdash A}\,h}{\Gamma, B \vdash A}\,\wedge_e(A \wedge B)}{}}{\Gamma \vdash A}\,\vee_e(A \vee B)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \sim(A \to B)}{\Gamma \vdash \sim\sim A}$$

$v(A) = V$
$v(B) = F$

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash \sim(A \to B)}$$

$v(A) = V$
$v(B) = F$

$A = P$
$B = Q$

$\Gamma = \{P\}$

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{}{P \vdash P}\,h}{P \vdash \sim(P \to Q)}}{F}$$

$v(P) = V$
$v(Q) = V$

$$\frac{\Gamma \vdash \neg A \to B}{\Gamma \vdash \neg(A \to B)}$$

$$\frac{\dfrac{\dfrac{\overline{\Gamma, \neg P \vdash P \to Q}^{\,h} \qquad \overline{\Gamma, \neg P \vdash P}^{\,h}}{\Gamma, \neg P \vdash Q}\ \to_e(P)}{\Gamma \vdash \neg P \to Q}\ \to_i}{\Gamma \vdash \neg(P \to Q)}$$

$A = P$
$B = Q$
$\Gamma = \{P, P \to Q\}$

$$\left.\begin{array}{l} v(P) = V \\ v(Q) = V \end{array}\right\} v(P \to Q) = V \qquad v(\neg(P \to Q)) = F$$

Cette valuation rend vraies les hypothèses $P \to Q$, Q et fausse la conclusion $\neg(P \to Q)$.
Ce sequent n'est pas valide. Donc, par le méta-théorème de correction, il n'est pas prouvable.

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash \neg A \to \neg B}$$

$A = P$
$B = Q$
$\Gamma = \{P \to Q\}$

$$\frac{\dfrac{\overline{\Gamma, P \vdash P \to Q}^{\,h} \qquad \overline{\Gamma, P \vdash P}^{\,h}}{\Gamma, P \vdash Q}\ \to_e(P)}{\Gamma \vdash \neg P \to \neg Q}\ ?$$

Soit $P \to Q \vdash \neg P \to \neg Q$ un sequent, il est prouvable avec (?)
Soit la valuation v définie par :

$v(P) = F \qquad v(Q) = V$

$v(P \to Q) = V \qquad v(\neg P \to \neg Q) = F$

Cette valuation rend vraie l'hypothèse et fausse la conclusion. Donc par le méta-théorème de correction, le sequent n'est pas valide donc pas prouvable

$P \to (Q \lor R),\ (P \land Q) \to R \vdash P \to R$

$$
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{}{\Gamma, P \vdash P \to (Q \lor R)}\,h
\quad
\dfrac{}{\Gamma, P \vdash P}\,h
}{\Gamma, P \vdash Q \lor R}\,\to_e
\qquad
\dfrac{
\dfrac{}{\Gamma, P, Q \vdash (P \land Q) \to R}\,h
\quad
\dfrac{
\dfrac{}{\Gamma, P, Q \vdash P}\,h
\quad
\dfrac{}{\Gamma, P, Q \vdash Q}\,h
}{\Gamma, P, Q \vdash P \land Q}\,\land_i
}{\Gamma, P, Q \vdash R}\,\to_e
\qquad
\dfrac{}{\Gamma, P, R \vdash R}\,h
}{
\dfrac{\Gamma, P \vdash R}{\Gamma \vdash P \to R}\,\to_i
}\,\lor_e (Q \lor R)
$$