Probabilités, Statistiques, Combinatoire - CM 12

Adrian Tanasă

Université de Bordeaux – Licence Informatique

Rappel cours de la semaine dernière

- On a défini l'**espérance** (moyenne) d'une variable aléatoire
- On en a décrit certaines propriétés importantes (linéarité)
- On a également défini la **variance** (tendance à la dispersion) et l'**écart-type** d'une variable aléatoire (la racine carrée de la variance) (notation fréquence : σ)
- **Remarque :** l'écart-type à la même "dimension" que les valeurs de la variable, et que l'espérance (si les valeurs sont exprimées en mètres, l'écart-type est exprimé également en mètres, alors que la variance est exprimée en mètres carrés)

Plan cours d'aujourd'hui

- la "loi des grands nombres"

Loi des grands nombres

- **Intuitivement**, si une expérience a probabilité p de "réussir", en la répétant (de manière indépendante) un "grand" nombre de fois, la proportion des essais qui "réussissent" devrait être proche de p.
- (C'est ce qu'on fait quand on simule informatiquement une expérience : on la répète "plein de fois" et on regarde quelle proportion des essais réussissent, pour estimer la probabilité de réussir)
- **Plus généralement**, si on a une séquence de v.a. indépendantes de même loi $X_1, X_2, \ldots,$ toutes d'espérance m, on s'attend à ce que $M_n = (X_1 + \cdots + X_n)/n$ soit également proche de m.
- (C'est effectivement plus général : quand les X_i sont des Bernoulli de paramètre p, la proportion d'essais réussis est bien M_n)
- Un tel phénomène porte le nom de **loi (faible) des grands nombres**, et c'est un théorème

Loi des grands nombres

Théorème (loi faible des grands nombres)

Soit $X_1, X_2, \ldots$ une suite de variables aléatoires indépendantes, toutes de même loi ; on suppose que les X_i ont une espérance m, et une variance $\sigma^2 < \infty$.
Alors, en posant $M_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k$, on a, pour tout $\epsilon > 0$,

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(m - \epsilon \leq M_n \leq m + \epsilon) = 1$$

Il faut déchiffrer l'énoncé : n, c'est le nombre de répétitions ; pour peu qu'on répète l'expérience suffisamment souvent, il est presque sûr (la proba. tend vers 1) que la moyenne empirique M_n sera proche de la vraie moyenne m, à ϵ près.

Commentaires sur la loi des grands nombres

- Il existe une version “forte”, de la loi des grands nombres :

$$\mathbb{P}(\lim_{n\to\infty} M_n = m) = 1$$

  À "l'infini il n'y a plus de hasard" - quand $n \to \infty$ M_n prend la valeur m avec probabilité 1

- D'une certaine manière, ça justifie toutes les expériences qu'on a pu faire en simulation : chaque fois qu'on peut simuler l'expérience, et la répéter (indépendamment) suffisamment de fois, la *fréquence* des essais “réussis” va *converger* vers la *probabilité* de réussite.