Exercices sur le calcul propositionnel

1 Exercices simples (à faire prioritairement)

Exercice 1. *Parenthéser, et représenter sous forme d'arbres, les formules suivantes :*

- $P \to \neg Q \wedge R$
- $P \to Q \wedge Q \to R$
- $P \to Q \to R \to S$
- $(P \wedge Q \wedge R) \to S$

Exercice 2. *Dresser une table de vérité pour chacune de ces formules. Y a-t-il parmi elles des tautologies ? Des formules équivalentes entre elles ?*

- $((P \to Q) \to P) \to P$
- $(P \to Q) \to (Q \to P)$
- $P \to Q \to R$
- $Q \to P \to R$
- $(P \wedge Q) \to R$
- $R \vee \neg R$

Exercice 3. *Pour chacune des formules ci-dessous, calculer, en utilisant les réécritures proposées dans le polycopié, une formule qui lui soit équivalente et qui soit en **forme normale conjonctive**.*

- $\neg(P \vee (Q \to R))$
- $(P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee R)$
- $\neg(P \to (Q \vee R))$
- $((P \to Q) \wedge (Q \to R)) \to (P \to R)$

2 Exercices un peu moins simples

Les exercices de cette section peuvent demander un peu plus de réflexion et de temps ; il est probable qu'ils débordent du TD. Il est fortement conseillé de les terminer chez vous. Il pourra être diffusé une solution de certains.

Exercice 4. *Dans cet exercice, un objectif est d'utiliser aussi peu de calculs de tables de vérité que possible.*

- *Vérifier, par calcul de tables de vérité, que les formules* $P \to Q$ *et* $Q \vee \neg P$ *sont équivalentes. Faire de même pour* $\neg(P \wedge Q)$ *et* $\neg P \vee \neg Q$.

- *Montrer,* ***sans*** *calcul de tables de vérité, que* $(P \wedge Q) \rightarrow R$ *est équivalente à* $R \vee \neg P \vee \neg Q$.
- *Montrer, toujours sans calcul de tables de vérité, que* $P \rightarrow Q \rightarrow R$ *est équivalente à* $P \rightarrow (R \vee \neg Q)$ *et à* $R \vee \neg Q \vee \neg P$.
- *En déduire que les formules* $(P \wedge Q) \rightarrow R$ *et* $P \rightarrow Q \rightarrow R$ *sont équivalentes.*

Exercice 5. *On considère deux formules arbitraires* H *et* B. *L'objectif de l'exercice est de comparer la validité du séquent* $H \vdash B$, *et le statut de la proposition* $H \rightarrow B$.

- *Montrer que, si le séquent* $H \vdash B$ *est valide, alors la formule* $H \rightarrow B$ *est une tautologie.* ***Indication :*** *considérer une valuation* ν *quelconque, et discuter des valeurs possibles de* $\nu(H)$ *et* $\nu(B)$ *; en déduire la valeur de* $\nu(H \rightarrow B)$.
- *Montrer que, si la formule* $H \rightarrow B$ *est une tautologie, alors le séquent* $H \vdash B$ *est valide.*
- *Généraliser l'énoncé précédent : proposer une formule qui est une tautologie si et seulement si le séquent* $H_1, \ldots, H_n \vdash B$ *est valide. (On ne demande pas de preuve ; vous pouvez en donner une tout de même)*

Exercice 6. *En s'inspirant de la définition, donnée dans le polycopié, de* $A[v/B]$ *(substitution d'une formule dans une variable propositionnelle), donner une définition récursive de* $A[v_1/B_1, \ldots, v_k/B_k]$ *; on supposera que les variables* $v_1, \ldots, v_k$ *sont bien distinctes.*

On souhaite que les substitutions soient "simultanées" : en particulier, la formule $(P \rightarrow Q)[P/Q, Q/P \rightarrow Q]$ *doit être* $Q \rightarrow (P \rightarrow Q)$ *(de même que* $(P \rightarrow Q)[Q/P \rightarrow Q, P/Q]$*).*

Exercice 7. *On considère un "nouveau" connecteur,* $\odot$, *que l'on interprète via la table suivante :*

P	Q	$P \odot Q$
v	***v***	***f***
v	***f***	***v***
f	***v***	***v***
f	***f***	***v***

de sorte que $P \odot Q$ *est équivalente à* $\neg(P \wedge Q)$.

- *Vérifier, en calculant des tables de vérité, que les formules* $P \odot Q$ *et* $\neg(P \wedge Q)$ *sont équivalentes.*
- *Calculer la table de vérité de* $P \odot P$. *En déduire que* $P \odot P$ *est équivalente à* $\neg P$.

- *Trouver une formule équivalente à $P \wedge Q$, et n'utilisant que $\odot$ comme connecteur.*
- *Trouver une formule équivalente à $P \vee Q$, et n'utilisant que $\odot$ comme connecteur.*
- *Trouver une formule équivalente à $P \to Q$, et n'utilisant que $\odot$ comme connecteur.*
- *En déduire que toute formule propositionnelle est équivalente à une formule n'utilisant que $\odot$ comme connecteur. On admettra que les théorèmes de substitution et de remplacement (énoncés sans le connecteur $\odot$) s'appliquemt toujours pour les formules utilisant ce nouveau connecteur.*
- *(Optionnel) Étendre la définition du type `ocaml formule` pour inclure le connecteur $\odot$ (il vous faudra ajouter un constructeur pour le nouveau connecteur ; suggestion de nom : `Nonet`), et écrire une fonction (récursive, what else ?) qui, prenant une formule propositionnelle quelconque, retourne une formule équivalente qui n'utilise que $\odot$ comme connecteur. On ne cherchera pas forcément à minimiser la taille de la formule calculée ; le résultat risque d'être parfois assez gros.*

On rappelle la définition donnée pour le type `formule` *:*

```
type variable = P | Q | R | S

type formule =
| At of variable
| Non of formule
| Et of formule * formule
| Ou of formule * formule
| Implique of formule * formule
```