Probabilités, Statistiques, Combinatoire : corrigé TD2

Combinatoire : chemins, pavages

Exercice 2.1

Chemins et distance de Manhattan

1. Les trois chemins, “de gauche à droite”, sont codés par : $NNNNNEENNNNEEEENEEEE$ (ou $N^5E^2N^4E^4NE^4$), $NNNEEEENNEEENENNNNEE$ (ou $N^3E^4N^2E^3NEN^4E^2$), et $EEEENEEEEEENNNNNNNNN$ (ou $E^4NE^6N^9$).
2. Chaque chemin de longueur n est une suite de n pas, chaque pas étant pris dans un ensemble de 4 possibilités, et sans contrainte : il y a donc 4^n tels chemins.
3. Pour les chemins sans demi-tour le calcul change légèrement : le premier pas est toujours pris librement dans un ensemble de 4 possibilités, puis, pour chacun des $n-1$ autres pas, il y a 3 possibilités : quelque soit le pas précédent, il y a 3 pas autorisés à lui succéder (N, E ou O après un N ; N, E ou S après un E ; etc). Le nombre de chemins de longueur n sans demi-tour est donc $4 \times 3^{n-1}$.
4. Lorsqu'on suit le chemin, la première coordonnée augmente de 1 suite à un pas E, et diminue de 1 suite à un pas O ; la coordonnée finale est donc $|w|_E - |w|_O$. De même, la seconde coordonnée augmente de 1 suite à un pas N, et diminue de 1 suite à un pas S ; la coordonnée finale est donc $|w|_N - |w|_S$.

   Le point d'arrivée est donc le point $(|w|_E - |w|_O, |w|_N - |w|_S)$.
5. Les mots codant les plus courts chemins doivent être des mots sur l'alphabet $\{N, E\}$, qui ont pour point d'arrivée le point (a, b). D'après la question précédente, ce sont exactement les mots comportant a occurrences de la lettre E et b occurrences de la lettre N (ce sont donc des mots de longueur $a+b$).

   On peut donc décrire un tel mot en choisissant un ensemble de a positions (entiers de 1 à $a+b$), qui représenteront les positions où le mot aura une occurrence de E ; les b autres positions seront celles des N.

   Par conséquent, il y a autant de tels mots que de parties de $[[1, a+b]]$ qui sont de cardinal a, soit $\binom{a+b}{a}$.

   Pour le cas $a = b = 10$, on obtient $\binom{20}{10}$ mots (ou chemins) ; soit 184756 chemins.
6. En appliquant la formule précédente, on voit qu'il y a $\binom{9}{4} = 126$ chemins de $(0,0)$ à $(4,5)$. Les chemins de $(4,5)$ à $(10,10)$ sont simplement obtenus à partir des chemins de $(0,0)$ à $(6,5)$ par une translation (un changement de point d'origine), ils sont codés par les mêmes mots et il y en a le même nombre, $\binom{11}{6} = 462$.

   Les plus courts chemins de $(0,0)$ à $(10,10)$ qui passent par le point $(4,5)$ sont obtenus en concaténant n'importe quel plus court chemin de $(0,0)$ à $(4,5)$ et n'importe quel plus court chemin de $(4,5)$ à $(10,10)$. Leur nombre est donc obtenu par produit : il y a $\binom{9}{4} \cdot \binom{11}{6} = 48212$ tels chemins (soit environ 32% des plus courts chemins de $(0,0)$ à $(10,10)$).
7. La bande horizontale entre les lignes d'ordonnée 3 et 4 représente une rivière (bien droite), et les pas Nord-Sud entre qui la traversent sont donc des ponts ; le pont i est celui qui traverse au niveau de la colonne i. Un plus court chemin de $(0,0)$ à $(10,10)$ doit donc traverser un pont i, entre $(i,3)$ et $(i,4)$ pour un certain entier i (entre 0 et 10).

Un plus court chemin de $(0,0)$ à $(10,10)$ qui traverse le pont i peut donc être décomposé en trois parties : un plus court chemin de $(0,0)$ à $(i,3)$, un pas Nord, et un plus court chemin de $(i,4)$ à $(10,10)$. En déduire une formule pour le nombre de plus courts chemins de $(0,0)$ à $(10,10)$ qui traversent le pont i.

Pour former un plus court chemin de $(0,0)$ à $(10,10)$ qui emprunte le pont i, on concatène un plus court chemin arbitraire de $(0,0)$ à $(i,3)$ (pris parmi les $\binom{i+3}{3}$ possibles), un pas N (un seul choix), et un plus court chemin arbitraire de $(i,4)$ à $(10,10)$ (pris parmi les $\binom{16-i}{6}$ possibles). Tous les chemins ainsi formés sont distincts ; on a donc le nombre de tels chemins :

$$\binom{i+3}{3} \cdot \binom{16-i}{6}.$$

Comme les $\binom{20}{10}$ chemins de $(0,0)$ à $(10,10)$ traversent tous la rivière en un seul point, le nombre total de chemins est la somme (sur i, de 0 à 10) des nombres de chemins qui traversent la rivière au pont i :

$$\binom{20}{10} = \sum_{i=0}^{10} \binom{i+3}{3} \cdot \binom{16-i}{6}.$$

8. Si la rivière se trouve entre les lignes j et $j+1$, on décompose selon le même principe en un chemin de $(0,0)$ à (i,j) ($\binom{i+j}{i}$ chemins), un pas Nord (un chemin), et un chemin de $(i,j+1)$ à (a,b) ($\binom{a+b-i-j-1}{a-i}$ chemins). Il y a alors

$$\binom{i+j}{i} \cdot \binom{a+b-i-j-1}{a-i}$$

chemins empruntant le pont i.

9. En appliquant le même raisonnement, on obtient la formule sommatoire (en sommant sur la position possible du "pont", soit les entiers de 0 à a) :

$$\binom{a+b}{a} = \sum_{i=0}^{a} \binom{i+j}{i}\binom{a+b-i-j-1}{a-i}.$$

10. La ligne de séparation entre les deux "quartiers" va du point $(0,10)$ au point $(10,0)$: elle contient tous les points de la forme (i,j) avec $i+j=10$, soit $j=10-i$ (c'est la droite d'équation $y=10-x$).

    Par conséquent, le passage du premier quartier au second se fait après 10 pas : le chemin fait donc 10 pas dans le quartier central, et 10 pas dans le quartier Nord-Est.

11. On a vu que les coordonnés du point "frontière" (i,j) devaient satisfaire $j=10-i$.

12. On raisonne comme précédemment, mais en "coupant" le chemin au bout de 10 pas (au lieu de "couper" au i-ème pas Nord) : il y a $\binom{10}{5}\binom{10}{5} = 63504$ chemins qui passent par $(5,5)$, et $\binom{10}{3} \cdot \binom{10}{7} = \binom{10}{3}^2 = 14400$ chemins passant par $(7,3)$.

    Pour le point (i,j), avec $i+j=10$, le nombre de chemins est $\binom{10}{i}\binom{10}{10-i} = \binom{10}{i}^2$.

13. Si on va de $(0,0)$ à (n,n) (chemins de longueur $2n$), la séparation se fait au bout de n pas ; le même raisonnement donne le nombre de chemins qui traversent la frontière en $(i, n-i)$ comme
$$\binom{n}{i}^2.$$

14. On a vu aux questions précédentes qu'il y a $\binom{2n}{n}$ plus courts chemins de $(0,0)$ à (n,n), et que, parmi ces chemins, il y en a $\binom{n}{i}^2$ qui traversent la diagonale (d'équation $y = n - x$) au point $(i, n-i)$.

    Comme chaque chemin traverse cette ligne en un et un seul point, on obtient aussi le nombre de chemins en sommant sur i parmi toutes les valeurs possibles, soit de 0 à n, ce qui donne la formule demandée.

Exercice 2.2

Compositions d'entiers

On convient d'appeler *composition de l'entier* $n \geq 0$, toute suite (de longueur quelconque) d'entiers strictements positifs telle que la somme de tous les éléments de la suite soit égale à n. Ainsi, $(5,7,2,1,2)$ est une composition de l'entier 17, et $(2,2,1,7,5)$ en est une autre.

1. Pour dire que C est une classe combinatoire, il faut montrer que, pour tout entier $n \geq 0$, l'ensemble des compositions de n est un ensemble fini.

   Comme une composition de n est une suite d'entiers positifs, dont la somme doit faire n, il peut y avoir au plus n entiers dans la suite, et chacun est compris entre 1 et n. Pour chaque entier k de 1 à n, il y a n^k suites de k entiers compris entre 1 et n (donc au plus n^k compositions de n qui sont des suites de k entiers) ; en sommant sur les valeurs possibles de k, on obtient qu'il y a
$$\sum_{k=1}^{n} n^k = \frac{n^{n+1}-1}{n-1}$$
   suites d'au plus n entiers de 1 à n. La valeur importe peu : c'est un nombre fini, et toute composition de n est parmi ces suites, il y a donc un nombre fini de compositions de n.

2. Il y a une seule composition de 1 : (1). Il y a deux compositions de 2 : $(1,1)$ et (2). Quatre compositions de 3 : $(1,1,1)$, $(1,2)$, $(2,1)$, et (3). Huit compositions de 4 : $(1,1,1,1)$, $(1,1,2)$, $(1,2,1)$, $(2,1,1)$, $(2,2)$, $(1,3)$, $(3,1)$, et (4).

   Les permiers termes de la suite de comptage sont donc $c_1 = 1$, $c_2 = 2$, $c_3 = 4$, et $c_4 = 8$.

3. On reconnaît ce qui semble être le début de la suite des puissances de 2. On propose donc la formule : $c_n = 2^{n-1}$.

4. a Toute composition de n, soit commence par 1, soit commence par un entier plus grand que 1 : on a donc $C_n = D_n \cup E_n$ (et c'est une union disjointe).

   Par conséquent, cela se traduit sur les cardinaux des trois ensembles :
$$c_n = d_n + e_n.$$

b Un élément de D_n (une composition de n qui commence par 1) est une suite d'entiers qui commence par 1, et dont la somme fait n ; donc le reste a pour somme $n-1$. Il y a donc autant de compositions de n commençant par 1 (d'éléments de D_n) que de compositions de $n-1$ (d'éléments de C_{n-1}) :

$$d_n = c_{n-1}.$$

c Soit c un élément de E_n : une suite d'entiers ne commençant pas par 1, et dont la somme vaut n. Définissons la suite c' comme la suite d'entiers dont le premier est inférieur de 1 au premier élément de c, et les autres sont identiques. La suite c' est donc une suite d'entiers positifs (puisque le premier élément de c est au moins 2) et dont la somme vaut $n-1$: c'est un élément de C_{n-1}. Il est clair que, partant d'un élément quelconque de C_{n-1}, on obtient un élément de E_n en changeant seulement le premier élément (on l'augmente de 1) ; et les deux transformations sont inverses l'une de l'autre, il s'agit donc bien d'une bijection de E_n vers C_{n-1} et de sa réciproque.

Par conséquent E_n et C_{n-1} ont le même cardinal : $e_n = c_{n-1}$.

d En remplaçant d_n et e_n par c_{n-1} dans l'équation $c_n = d_n + e_n$, on obtient la nouvelle relation : $c_n = 2c_{n-1}$.

Cette relation (valide pour tout entier $n \geq 2$) définit entièrement l'ensemble de la suite $(c_n)_{n\geq 1}$, pour peu qu'on connaisse c_1. Or on a déterminé $c_1 = 1$. Comme la suite $(2^{n-1})_{n\geq 1}$ satisfait la même relation et a le même premier terme, on a l'égalité : pour tout $n \geq 1$, $c_n = 2^{n-1}$, comme prévu.

5. On cherche une famille d'objets qui soit comptée par la même suite de comptage, à savoir les puissances de 2 (avec $c_1 = 1$). On pourrait proposer les mots de longueur $n-1$ sur l'alphabet $\{0, 1\}$, mais on peut se ramener à des mots de longueur n (sur le même alphabet) en exigeant que les mots commencent par 1.

   Un tel mot est composé d'une concaténation de sous-mots chacun composé d'un 1, suivi d'une suite (possiblement vide) de 0 : $w = 1 \cdot 0^{a_1} \cdot 1 \cdot 0^{a_2} \cdot \cdots 1 \cdot 0^{a_k}$; ici k est le nombre de 1 dans le mot, $k = |w|_1$, et les entiers $a_1 \ldots a_k$ sont tous positifs ou nuls. Pour que le mot soit de longueur n, la condition est $n = k + \sum_{i=1}^{k} a_i$, ou, de manière équivalente, $n = \sum_{i=1}^{k}(a_i + 1)$. En d'autres termes, les entiers $(a_1+1, a_2+1, \ldots, a_k+1)$ forment une partition de n.

   On vérifie facilement qu'on a là une bijection : partant d'une composition $(b_1, \ldots, b_k)$, on obtient un mot de longueur n commençant par 1 en posant $w = 10^{b_1-1}10^{b_2-1}\cdots 10^{b_k-1}$ (attention c'est une notation de mot !), et inversement. Ce qui justifie de nouveau qu'il y a 2^{n-1} compositions de n.

Exercice 2.3
Pavages par dominos d'une bande

1. **Cas $h = 1$:** Une bande $1 \times n$ ne peut être pavée que par des dominos horizontaux, et encore, seulement si n est pair. Quand n est pair, il y a une seule façon de paver la bande (un domino sur les 2 premières cases, puis un sur les cases 3 et 4, etc).

   On a donc 1 pavage si n est pair, et 0 pavage si n est impair.

2. **Cas** $h = 2$ **:** Pas de dessin, mais on trouve 3 pavages de 2×3 (un avec trois dominos verticaux, et deux avec un vertical et deux horizontaux) ; et pour 2×4, on trouve 5 pavages : un formé de 4 dominaux verticaux, un formé de 4 horizontaux, et 3 formés d'un vertical et deux horizontaux.
3. Soit $n \geq 2$. Les deux carrés de la première colonne peuvent être recouverts de deux manières différentes : soit par un seul domino vertical, soit par deux dominos horizontaux qui couvrent alors les deux premières colonnes (et les deux façons de faire sont exclusives : aucun pavage n'est obtenu des deux manières).

   Dans le premier cas, la partie non encore couverte de $2 \times n$ correspond à $2 \times (n-1)$, et il y a p^2_{n-1} façons de le paver. Dans le deuxième cas, il reste à paver $2 \times (n-2)$, et il y a donc p^2_{n-2} façons de le paver.

   On a donc la relation suivante, valable pour tout $n \geq 2$: $p^2_n = p^2_{n-1} + p^2_{n-2}$.

   Avec $p^2_1 = 1$ et $p^2_2 = 2$, cela permet de calculer de proche en proche les premiers termes de la suite de comptage : $p^2_3 = 1 + 2 = 3$, $p^2_4 = 2 + 3 = 5$ (qu'on avait déjà calculés), $p^2_5 = 3+5 = 8$, $p^2_6 = 5+8 = 13$, $p^2_7 = 8+13 = 21$, $p^2_8 = 13+21 = 34$, $p^2_9 = 21+34 = 55$, $p^2_{10} = 34+55 = 89$, $p^2_{11} = 55+89 = 144$. On reconnaît le début de la suite de Fibonacci (décalée par rapport à la suite usuelle) : ce n'est pas surprenant puisqu'on commence avec deux termes consécutifs de cette suite, et qu'on a la même relation de récurrence.
4. On vient de calculer qu'il y avait 144 pavages de 2×11. Il nous faut calculer combien parmi eux ont un domino vertical sur la colonne centrale (6e colonne).

   Un domino vertical en 6-ème colonne "coupe" le rectangle 2×11 en deux parties qui restent à paver, et toutes les deux sont des rectangles 2×5. Pour paver 2×11 avec un domino vertical en colonne centrale, il faut donc choisir un pavage de 2×5 pour la partie gauche, et un pavage (le même un un autre) pour la partie droite. On a $p^2_5 = 8$ choix pour la partie gauche, et aussi 8 choix pour la partie droite, donc $8 \times 8 = 64$ pavages différents de 2×11 avec un domino vertical en colonne central.

   Donc la proportion des pavages de 2×11 qui ont un domino vertical en colonne centrale est de $64/144$, soit $4/9$.
5. Le même raisonnement permet de compter les pavages de $2 \times n$ qui ont un domino vertical en colonne k, pour n'importe quel $k \leq n$ et n'importe quel k : une fois placé un domino vertical en colonne k, il reste une partie gauche qui correspond à $2 \times (k-1)$ (pavable de p^2_{k-1} façons différentes), et une partie gauche qui correspond à $2 \times (n-k)$ (pavable de p^2_{n-k} façons différentes). Il y a donc $p^2_{k-1} \cdot p^2_{n-k}$ pavages différents de $2 \times n$ qui ont un domino vertical en colonne k, soit une proportion de
$$\frac{p^2_{k-1} \cdot p^2_{n-k}}{p^2_n}.$$
6. **Plus compliqué : cas** $h = 3$**.** On note p^3_n, le nombre de pavages par dominos d'un rectangle $3 \times n$.

   De manière générale, $h \times n$ contient $n \cdot h$ cases. Si $h = 3$ et que n est impair, c'est un nombre impair. Comme chaque domino couvre exactement 2 cases, une zone contenant un nombre impair de cases ne peut pas être pavée par des dominos.

   Donc, pour n impair, $p^3_n = 0$.
7. p^3_2 est le nombre de pavages de 3×2, qui est la même forme (à rotation près) que 2×3 et a donc le même nombre de pavages : $p^3_2 = p^2_3 = 3$.

On trouve 11 pavages de 3×4 : 9 sont obtenus en “collant” deux pavages de 3×2, les deux autres en mettant deux dominos horizontaux à cheval sur les colonnes 2 et 3 (soit en première et deuxième ligne, soit en deuxième et troisième ligne ; à chaque fois, il n'y a qu'une façon de compléter en un pavage de 3×4).

8. Parmi les p^3_{2n} pavages de $3 \times (2n)$, il y en a $p^3_n \cdot p^3_n = (p^3_n)^2$ qui sont obtenus en pavant séparément les n premières colonnes et les n dernières (soit, sans domino horizontaux à cheval sur les n-ème et $(n+1)$-ème colonnes). Donc on a bien $p^3_{2n} \geq (p^3_n)^2$.
9. $B_{4,\emptyset}$ c'est le rectangle 3×4 ; $B_{4,\{1\}}$ c'est le rectanble 3×4 sans la case du coin supérieur gauche ; $B_{4,\{1,2\}}$, c'est le rectangle 3×4 sans les deux premières cases de la première colonne ; $B_{4,\{1,3\}}$, c'est 3×4 sans les deux coins supérieur et inférieur gauche. $B_{n,\{1,2,3\}}$, c'est $3 \times n$ sans sa première colonne, c'est-à-dire $3 \times (n-1)$.
10. $3 \times n$ a $3n$ cases, et $B_{n,I}$ a, en général, $3n - \#I$ cases. Si ce nombre est impair, la forme $B_{n,I}$ n'a aucun pavage.

    Or la parité de $3n - \#I$ est la même que celle de $n + \#I$. Par conséquent, si $n + \#I$ est impair, $p(B_{n,I}) = 0$.
11. D'après la question précédente, si n est impair, $p(B_{n,\{1,3\}}) = 0$; et, si n est pair, $p_{n,\{2\}} = 0$. Reste à montrer que $p(B_{n,\{1,3\}}) = 0$ lorsque n est pair, et que $p_{n,\{2\}} = 0$ lorsque n est impair – les deux formes ont pourtant un nombre pair de cases.

    La remarque clé est la suivante : si l'on colore les cases alternativement en blanc et noir, comme dans un échiquier, on constate aisément qu'un domino, où qu'il soit placé, couvrera exactement une case blanche et une case noire. Par conséquent, une zone doit avoir autant de cases noires que de cases blanches pour avoir une chance d'être pavable.

    Or, si l'on convient de colorer en blanc le coin supérieur gauche de la première colonne de $3 \times n$, on constate que le coin inférieur gauche est également blanc. Si n est pair, $3 \times n$ a autant de cases blanches que de noires, mais $B_{n,\{1,3\}}$ a deux cases blanches de moins que de noires et n'est donc pas pavable. De même, pour n impair, $3 \times n$ a une case blanche de plus que de noires ; mais en retirant la deuxième case de la première colonne, on retire une case noire et on se retrouve avec deux cases blanches de plus que de noires, ce qui implique que $B_{n,\{2\}}$ n'est pas pavable non plus.
12. Soit $n \geq 2$. Dans un pavage de $3 \times n$, la deuxième case de la première colonne peut être pavée de trois manières potentielles : soit par un domino horizontal à cheval sur les colonnes 1 et 2, soit par un domino vertical qui peut être à cheval sur les lignes 1 et 2, ou 2 et 3.

    Dans le premier cas, il n'est possible de recouvrir les cases 1 et 3 de la première colonne que par des dominos également horizontaux, et il reste alors une forme $3 \times (n-2)$; il existe donc p^3_{n-2} façons de finir le pavage de $3 \times n$.

    Dans les deuxième cas (dont le troisième cas est symétrique, et correspond donc au même nombre de pavages), la case restante de la première ligne ne peut être pavée que par un domino horizontal, et il reste à paver la forme $B_{n-1,\{3\}}$, et donc ce cas correspond à $p(B_{n-1,\{3\}})$ pavages. Au final, on obtient la récurrence suivante (pour $n \geq 2$) :

    $$p^3_n = p^3_{n-2} + p(B_{n-1,\{1\}}) + p(B_{n-1,\{3\}}).$$

    Mais les deux formes $B_{n-1,\{1\}}$ et $B_{n-1,\{3\}}$ sont l'image l'une de l'autre par une symétrie, et ont donc le même nombre de pavages. On obtient donc la relation demandée,

    $$p^3_n = p^3_{n-2} + 2p(B_{n-1,\{1\}}).$$

13. Un raisonnement similaire permet d'obtenir une relation de récurrence sur $p(B_{n,\{1\}})$. Raisonnons sur la façon de couvrir la deuxième case de la première colonne : soit par un domino vertical (il reste alors à paver $3 \times (n-1)$, cela correspond donc à p^3_{n-1} pavages), soit par un domino horizontal, ce qui oblige alors à couvrir également les cases 3 des colonnes 1 et 2 par un domino horizontal, et laisse $B_{n-1,\{2,3\}}$ à paver, donc $p(B_{n-1,\{2,3\}}$ pavages. On obtient ainsi la relation, pour $n \geq 2$,

$$p(B_{n,\{1\}}) = p^2_{n-1} + p(B_{n-1,\{2,3\}}).$$

Notons encore que dans $B_{n-1,\{2,3\}}$, la première case de la première colonne ne peut être couverte que par un domino horizontal, ce qui laisse $p(B_{n-2,\{1\}})$ pavages.

14. On peut poser $q_n = p(B_{n,\{1\}})$ (non nul seulement pour n impair) et $p_n = p^3_n$ (non nul selement pour n pair). En reprenant les relations de récurrences précédentes, on obtient pour n pair,

$$p^3_n = p^3_{n-2} + 2q_{n-1},$$

et pour n impair,

$$q_n = p^3_{n-1} + q_{n-2}.$$

Ces relations permettent de calculer de proche en proche q_3, p_4, q_5, p_6, etc, à partir de $q_1 = 1$ et $p_2 = 3$:

$$\begin{aligned}
q_3 &= p_2 + q_1 = 4 \\
p_4 &= p_2 + 2q_3 = 11 \\
q_5 &= p_4 + q_3 = 15 \\
p_6 &= p_4 + 2q_5 = 41 \\
q_7 &= p_6 + q_5 = 56 \\
p_8 &= p_6 + 2q_7 = 153 \\
q_9 &= p_8 + q_7 = 209 \\
p_{10} &= p_8 + 2q_7 = 571 \\
q_{11} &= p_{10} + q_9 = 780 \\
p_{12} &= p_{10} + 2q_{11} = 2131 \\
q_{13} &= p_{12} + q_{11} = 2911 \\
p_{14} &= p_{12} + 2q_{11} = 7953 \\
q_{15} &= p_{14} + q_{13} = 10864
\end{aligned}$$

(les termes manquants intermédiaires sont nuls)