Chapitre 2

Nombres réels et suites

What is so wrong with thinking of real numbers as infinite decimals? [1]

1 Développement décimal des rationnels

1.1 Nombres rationnels et décimaux

Définition 1 (nombres rationnels)
L'ensemble $\mathbb{Q}$ est l'ensemble des fractions $\frac{a}{b}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$. Les éléments de $\mathbb{Q}$ s'appellent les ***nombres rationnels****.*

L'écriture d'un nombre rationnel comme fraction n'est pas unique : $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{5}{10} = ...$
Deux fractions $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ sont *équivalentes* (c'est-à-dire représentent le même nombre rationnel) si

$$ad - bc = 0$$

auquel cas on peut écrire que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Parmi les différentes fractions équivalentes représentant un même rationnel, il en existe une, et une seule, qui est *irréductible*, c'est-à-dire avec un numérateur et un dénominateur premiers entre eux.

L'ensemble $\mathbb{Q}$ est muni d'un ordre que l'on peut caractériser de la façon suivante :

$$\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad \leq bc$$

(rappelons que les dénominateurs b et d sont des entiers > 0, *cf.* Définition 1).
Remarque : l'ensemble $\mathbb{Q}$, muni de cette relation d'ordre, possède la propriété dite "d'Archimède" ce qui signifie que pour tout couple (x, y) de nombres rationnels > 0, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $nx > y$. En effet, si $x = \frac{a}{b}$, $y = \frac{c}{d}$ et si q désigne le quotient de la division euclidienne de bc par ad, alors l'entier $n = q + 1$ convient. On se réfère à cette propriété en disant que $\mathbb{Q}$ est **archimédien**.

1. Tim Gowers, médaille Fields en 1998

Définition 2 (nombres décimaux)
Un nombre décimal est un rationnel admettant une écriture fractionnaire de la forme $\dfrac{a}{10^n}$, *avec* $a \in \mathbb{Z}$ *et* $n \in \mathbb{N}$. *L'ensemble des nombres décimaux est noté* $\mathbb{D}$.

Exemples : $\frac{1}{5} = \frac{2}{10}$, $\frac{3}{8} = \frac{375}{1000}$, $\frac{7}{20} = \frac{35}{100}$ sont des nombres décimaux, mais pas $\frac{2}{7}$.

Proposition 1
Pour qu'un nombre rationnel soit décimal, il faut et il suffit que le dénominateur de son écriture sous forme d'une fraction irréductible soit le produit d'une puissance de 2 *et d'une puissance de* 5.

1.2 Approximation décimale des rationnels

Les nombres décimaux permettent d'approcher n'importe quel rationnel avec une précision arbitrairement grande :

Théorème 1
Soit $x = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$. *Il existe une unique suite* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *vérifiant :*

1) $a_0 \in \mathbb{Z}$.

2) $a_n \in \{0, \cdots, 9\}$ *pour* $n \geq 1$.

3) *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *on a :*

$$a_0 + \frac{a_1}{10} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} \leq x < a_0 + \frac{a_1}{10} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} + \frac{1}{10^n}. \qquad (2.1)$$

La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est appelée le développement décimal de* x. *Si* x *est un nombre rationnel* ***positif***, *on utilise l'écriture :*

$$x = a_0, a_1 a_2 \cdots .$$

Preuve. On construit récursivement deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la façon suivante : a_0 et r_0 sont respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de a par b, autrement dit

$$a = ba_0 + r_0, \quad 0 \leq r_0 < b$$

puis pour tout $n \geq 1$, a_n et r_n sont respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de $10r_{n-1}$ par b, autrement dit

$$10r_{n-1} = ba_n + r_n, \quad 0 \leq r_n < b.$$

En particulier puisque, pour tout $n \geq 1$, on a l'encadrement $0 \leq 10r_{n-1} < 10b$, le quotient a_n de la division euclidienne de $10r_{n-1}$ par b est compris entre 0 et 9.

On vérifie (récurrence), que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'entier r_n est le reste de la division euclidienne de $10^n a$ par b, et que le quotient de cette division est l'entier $q_n := \sum_{i=0}^{n} a_i 10^{n-i}$. Ainsi, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$10^n a = b \left(\sum_{i=0}^{n} a_i 10^{n-i} \right) + r_n, \quad 0 \leq r_n < b$$

autrement dit

$$0 \leq r_n = 10^n a - b \left(\sum_{i=0}^{n} a_i 10^{n-i} \right) < b$$

soit, en divisant par $10^n b$

$$0 \leq \frac{a}{b} - \left(\sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{10^i} \right) < \frac{1}{10^n} \tag{2.2}$$

ce qui équivaut à (2.1). Clairement, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi construite vérifie donc (1)), (2)) et (3)).
L'unicité du développement décimal se justifie de la façon suivante : si $(a'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une deuxième suite vérifiant (1)), (2)) et (3)), alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'entier $q'_n := \sum_{i=0}^{n} a'_i 10^{n-i}$ est le quotient de la division euclidienne de $10^n a$ par b, ce qui permet (unicité du quotient de la division euclidienne) de conclure récursivement que $a'_n = a_n$ pour tout n.

□

Remarques :

1) L'énoncé précédent, et sa démonstration, ne sont rien d'autre qu'une reformulation de l'algorithme de division appris à l'école primaire...

2) ⚠ Pour les nombres *négatifs*, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne coïncide pas avec le développement décimal au sens usuel. Par exemple, pour $\frac{a}{b} = -\frac{1}{4}$ on obtient $a_0 = -1$, $a_1 = 7$, $a_2 = 5$, $a_3 = 0$, etc., ce que l'on serait tenté d'écrire, comme pour les nombres positifs, sous la forme

$$'' -\frac{1}{4} = -1,75 \;'' \;!$$

Cette écriture est très dérangeante, car on souhaiterait évidemment plutôt écrire

$$-\frac{1}{4} = -0,25$$

En réalité, le développement obtenu via l'algorithme expliqué dans la preuve du théorème traduit l'égalité

$$'' -\frac{1}{4} = -1 + 0,75 = -0,25''$$

ce qui fait le lien entre les deux écritures, qui ne sont donc pas contradictoires, même si la seconde est évidemment plus classique que la première...

Définition 3
Soit $x = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$. En gardant les notations de l'énoncé précédent, les nombres décimaux

$$x_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{10^i} \qquad et \qquad x'_n = x_n + \frac{1}{10^n}$$

sont appelées valeurs décimales approchées de x à 10^{-n} près, par défaut et par excès.

Le développement décimal d'un rationnel jouit de la propriété remarquable suivante :

Proposition 2
Soit $x = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, avec $b > 0$, de développement décimal $x = a_0, a_1 a_2 \cdots$. Alors, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est ultimement périodique, *ce qui signifie qu'il existe $N \geq 1$ et $T \geq 1$ tel que*

$$\forall n \geq N, a_{n+T} = a_n.$$

De plus, les nombres décimaux sont caractérisés par le fait que leur développement décimal est fini, c'est-à-dire $\exists N \in \mathbb{N} \mid n \geq N \Rightarrow a_n = 0$.

Preuve. En reprenant les notations de la démonstration précédente, et en constatant qu'il y a b restes possibles pour la division euclidienne d'un entier par b, on conclut qu'il existe deux entiers distincts s et t, mettons $s > t$, tels que $r_s = r_t$. Par définition même de la suite r_n, il suit que $r_{s+k} = r_{t+k}$ pour tout $k \geq 0$, puis que $a_{s+k} = a_{t+k}$ pour tout $k \geq 0$. La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc périodique à partir du rang t, et sa période est au plus égale à b.
La caractérisation des décimaux par la finitude de leur développement décimal se démontre de la façon suivante : tout d'abord, si $x = \frac{a}{b}$ est décimal, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $10^n \frac{a}{b}$ soit entier pour tout $n \geq N$. Par conséquent, r_n est nul pour $n \geq N$, puisque c'est le reste de la division euclidienne de $10^n a$ par b, et a_n également, pour $n \geq N+1$. Inversement, si le développement décimal d'un rationnel x vérifie le propriété qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que a_n soit nul pour tout $n \geq N$, alors on conclut grâce à la relation (2.1) que

$$0 \leq x - \left(a_0 + \frac{a_1}{10} + \cdots + \frac{a_N}{10^N}\right) < \frac{1}{10^n}$$

pour tout $n \geq N$. Ceci n'est possible que si $x - \left(a_0 + \frac{a_1}{10} + \cdots + \frac{a_N}{10^N}\right) = 0$, car le membre de droite de l'inégalité ci-dessus peut être rendu arbitrairement petit si l'on choisit n assez grand [2]. Ainsi $x = a_0 + \frac{a_1}{10} + \cdots + \frac{a_N}{10^N}$ est décimal. □

1.3 Est-ce que 0.9999... = 1 ?

Si l'on prend au pied de la lettre les définitions du paragraphe précédent, alors on est obligé d'admettre que 0.9999... **n'est pas** le développement décimal d'un rationnel. En effet, on a la proposition suivante :

2. Pour être tout à fait rigoureux, il faut utiliser le fait que $\mathbb{Q}$ est *archimédien* , voir plus haut

Proposition 3
Soit $x = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, avec $b > 0$, de développement décimal $x = a_0, a_1 a_2 \cdots$.
Alors, ***il est impossible que les termes de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soient tous égaux à 9 à partir d'un certain rang****. Autrement dit*

$$\forall N \geq 1, \exists n \geq N \mid a_n \neq 9. \tag{2.3}$$

Preuve. Par l'absurde : on suppose qu'il existe N tel que $\forall n \geq N, a_n = 9$. Pour tout $n \geq N$, les inégalites (2.1) s'écrivent :

$$\sum_{i=0}^{N-1} a_i 10^{-i} + 9 \sum_{i=N}^{n} 10^{-i} \leq x < \sum_{i=0}^{N-1} a_i 10^{-i} + 9 \sum_{i=N}^{n} 10^{-i} + 10^{-n}$$

ce qui, après calcul, peut se réécrire

$$1 - 10^{-n+N-1} \leq 10^{1-N}(x - \sum_{i=0}^{N-1} a_i 10^{-i}) < 1$$

ou bien encore

$$0 < 1 - 10^{1-N}(x - \sum_{i=0}^{N-1} a_i 10^{-i}) \leq 10^{-n+N-1}$$

ce qui est absurde : il n'existe pas de nombre rationnel *strictement* positif qui soit inférieur à $10^{-n+N-1} = \dfrac{1}{10^{n-N+1}}$ **pour tout** $n \geq N$, puisque $\dfrac{1}{10^{n-N+1}}$ peut être rendu arbitrairement petit en choisissant n assez grand (c'est le même argument que dans la preuve de la proposition 2). □

Cela ne clôt pas complètement le débat : certes l'écriture 0.99999... n'est pas le développement décimal d'un nombre rationnel, au sens du théorème 1, mais pour autant, on ne peut pas empêcher que cette écriture "interdite" surgisse au détour d'un calcul : par exemple si l'on additionne les rationnels $\dfrac{2}{9} = "0,222..."$ et $\dfrac{7}{9} = "0,777..."$, on trouve, à gauche, $\dfrac{2}{9} + \dfrac{7}{9} = 1$ et à droite $"0,222... + 0,777... = 0,999..."$.
On peut dénouer cet apparent paradoxe en affaiblissant légèrement les conditions définissant le développement décimal dans la Proposition 2 : si le développement décimal $a_0, a_1 a_2 \cdots$ d'un rationnel x est seulement assujetti aux inégalités **larges**

$$a_0 + \frac{a_1}{10} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} \leq \ x \leq a_0 + \frac{a_1}{10} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} + \frac{1}{10^n}. \tag{2.4}$$

ce qui est plus faible que (2.1) (inégalité large à droite), alors **on n'a plus unicité du développement décimal** en général. Certains rationnels ont **deux développements décimaux** : ce sont précisément les nombres décimaux, qui ont un développement *propre* (c'est-à-dire qui vérifie (2.1)) et un développement *impropre* (c'est-à-dire qui se termine par une infinité de 9).

Exemples :

- 1 est un nombre entier, donc décimal, de développement *propre* $1 = 1,00\cdots$ et de développement *impropre* $1 = 0,9999\cdots$
- $\frac{1}{4}$ est un nombre décimal, de développement *propre* $0,25$ et de développement *impropre* $0,2499999\cdots$
- $\frac{3}{11}$ est un rationnel *non décimal*, et ne possède donc qu'un seul développement décimal, nécessairement *propre*, et périodique : $\frac{3}{11} = 0,272727\cdots$.

2 Les nombres réels

2.1 Définition des nombres réels

Le paragraphe précédent, et notamment la proposition 2, met à jour les lacunes de l'ensemble $\mathbb{Q}$: seuls des développements décimaux *ultimement périodiques* y apparaissent. On aurait naturellement envie d'autoriser des développements décimaux ne respectant pas cette contrainte. Par exemple, on aimerait donner un sens au "nombre"

$$x = 0,101001\underbrace{000}_{3}1\underbrace{0000}_{4}1\underbrace{00000}_{5}1\underbrace{000000}_{6}1\ldots$$

obtenu en intercalant après la virgule successivement un 0, puis deux 0, puis trois 0, etc. entre des chiffres 1. Or, ce développement ne peut pas correspondre à un nombre rationnel, puisqu'il n'est pas ultimement périodique...

Au vu de ce qui précède, et de ce qui a été développé au paragraphe précédent, on est conduit à proposer la définition suivante :

> **Définition 4**
> *On note $\mathbb{R}$ l'ensemble des développement décimaux, éventuellement illimités, de la forme*
>
> $$a_0, a_1a_2\ldots a_n\ldots$$
>
> *vérifiant les 3 propriétés suivantes :*
>
> ***1)*** *$a_0 \in \mathbb{Z}$.*
>
> ***2)*** *Pour $i \geq 1$, les a_i sont des entiers entre 0 et 9.*
>
> ***3)*** *Les a_i ne sont* ***pas tous égaux à 9 à partir d'un certain rang****.*

Comme au paragraphe précédent, on se réfère à la propriété 3) en disant que l'on ne considère que des développements *propres*.

2.2 Relation d'ordre sur les nombres réels

L'ordre naturel sur l'ensemble des nombres que l'on vient de construire est défini de la façon suivante

Définition 5
Si $x = a_0, a_1a_2 \ldots a_n \ldots$ et $y = b_0, b_1b_2 \ldots b_n \ldots$ sont deux nombres réels, on dit que $x \leq y$ lorsque l'on est dans l'une des situations suivantes :

1) *$x = y$,*

2) *$x \neq y$ et pour le plus petit indice n tel que $a_n \neq b_n$, on a $a_n < b_n$.*

Si $x \leq y$ et $x \neq y$, on dit que $x < y$.

Ceci permet de définir la notion d'intervalle : si x et y sont deux réels, **l'intervalle ouvert** $]x, y[$ désigne l'ensemble des réels z tels que $x < y < z$. On définit de manière analogue les intervalles fermés à gauche et/ou à droite.

Remarque : ⚠ Là aussi il y a une petite difficulté (factice) pour les nombres négatifs, qui tient au fait que c'est leur développement décimal *au sens du théorème 1* qu'il faut considérer pour définir l'ordre et *pas le développement décimal "usuel"*. Par exemple, on a bien

$$-\frac{1}{3} < -\frac{1}{4},$$

ce qui se lit, sur les développements décimaux, au sens du théorème 1 :

$$'' \; -1,666\cdots < -1,75 \; ''$$

contrairement à ce qu'on obtiendrait en utilisant les développements décimaux "ordinaires"

$$-0,333\cdots \text{ et } -0,25$$

où les premières décimales qui distinguent les deux nombres sont rangées dans l'ordre inverse... Comme précedemment, on se contentera, dans les exemples, de considérer des nombres positifs, afin d'éviter toute difficulté inutile.

2.3 La notion de suite convergente

Cette notion sera reformulée et étudiée en détail dans la section suivante, mais on en a besoin à ce stade pour définir, aussi proprement que possible, l'addition et la multiplication des réels.

Définition 6
*On dit qu'une suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ de nombres réels converge vers un réel ℓ si, pour tout intervalle **ouvert** I contenant ℓ, les u_n sont tous dans I à partir d'un certain rang.*

Si $x = a_0, a_1 a_2 \dots$ est un nombre réel, on lui associe la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de ses approximations décimales par défaut en posant, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$x_n = a_0, a_1 a_2 \dots a_n.$$

La proposition suivante est fondamentale :

> **Proposition 4**
> *Avec les notations précédentes, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de ses approximations décimales par défaut converge vers x.*

Preuve. Soit $I =]y, z[$ un intervalle ouvert contenant x, ce qui signifie que

$$y < x < z.$$

Posons

$$y = b_0, b_1 b_2 \dots b_n \dots \quad \text{et } z = c_0, c_1 c_2 \dots c_n \dots$$

D'après la Définition 5, il existe un plus petit entier p tel que $b_p < a_p$ et un plus petit entier q tel que $a_q < c_q$. Par conséquent, dès que n dépasse à la fois p et q, on a les inégalités $y < x_n < z$; on a donc montré que tous les x_n sont dans I à partir d'un certain rang. □

2.4 Le theorème de la limite monotone

Nous allons justifier, à l'aide des développements décimaux illimités, un théorème fondamental vu en Terminale.

> **Théorème 2**
> *Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de nombres réels, que l'on suppose*
>
> - *croissante : $u_n \leq u_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$,*
> - *majorée : il existe un réel M tel que $u_n \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*
>
> *Alors la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers une limite ℓ.*

Preuve (esquisse). Puisque la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est majorée, la partie entière de u_n ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs ; comme la suite est croissante, il existe donc un rang n_0 à partir duquel la partie entière de u_n est constante, égale à un entier noté a_0. Si l'on examine alors le premier chiffre après la virgule, on peut également conclure, à cause de la croissance de $(u_n)_{n\geqslant 0}$, qu'il existe un rang $n_1 \geq n_0$ à partir duquel la première décimale de u_n stationne sur une valeur $a_1 \in \{0, \dots, 9\}$. En poursuivant de la sorte, on construit un développement décimal infini $a_0, a_1 a_2 \dots$, éventuellement *impropre*, dont on vérifie facilement qu'il est limite de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$, au sens de la Définition 6 (si jamais $a_0, a_1 a_2 \dots$ est *impropre*, cela signifie que le nombre correspondant est un décimal, et on peut lui substituer son développement *propre*). □

Théorème 2-bis
Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ *une suite de nombres réels, que l'on suppose*

- *décroissante :* $u_n \geq u_{n+1}$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$*,*
- *minorée : il existe un réel* m *tel que* $u_n \geq m$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$*.*

Alors la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ *converge vers une limite* ℓ*.*

2.5 L'addition et la multiplication des nombres réels `(esquisse)`

La définition de l'addition et de la multiplication pose problème à cause de la gestion des retenues, qui peuvent se propager depuis une position située arbitrairement loin à droite... On peut contourner cette difficulté en introduisant des sommes (resp. des produits) tronquées, et en effectuant un « passage à la limite ».
Limitons-nous, pour simplifier, au cas de deux nombres réels positifs $x = a_0, a_1 a_2 \cdots$ et $y = b_0, b_1 b_2 \cdots$. On leur associe les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de leurs approximations décimales par défaut. On vérifie alors que les suites $(x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x_n y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont *croissantes* et *majorées*, donc qu'elles convergent dans $\mathbb{R}$ en vertu du Théorème 2, vers des limites que l'on note respectivement $x + y$ et xy.

3 Suites de nombres réels

Dans toute cette section, $u = (u_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite de nombres réels.

3.1 Formalisation de la convergence et de la divergence d'une suite de nombres réels

On commence par une reformulation de la notion de convergence dans $\mathbb{R}$, plus adaptée aux démonstrations des propriétés algébriques des limites.

Définition 7
La suite u *converge s'il existe un nombre réel* ℓ *tel que*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geqslant N_\varepsilon \Rightarrow |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon)\,.$$

Remarques :

- Cette définition signifie que pour tout $\varepsilon > 0$ (le rayon d'un intervalle autour de la limite ℓ), à partir d'un certain moment (l'entier N_ε), tous les termes de la suite u_n avec $n \geqslant N_\varepsilon$ appartiennent à l'intervalle $[\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon]$. En particulier, cette définition est **équivalente** à la Définition 6 de la section précédente.

- Le nombre réel ε est un nombre réel strictement positif quelconque moralement petit. De façon intuitive, en général plus $\varepsilon > 0$ est petit plus l'entier N_ε est grand.
- Lorsque l'on s'intéresse à la convergence d'une suite, seules les grandes valeurs de l'indice n jouent un rôle. Les premiers termes de la suite ne sont pas importants.
- Une définition équivalente de la converge de la suite u est donnée par il existe un nombre réel ℓ tel que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geqslant N_\varepsilon \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon)\,.$$

Exemples :

- La suite u constante de valeur c converge vers c. En effet, soit $\varepsilon > 0$. Posons $N_\epsilon = N = 0$. Pour $n \geqslant N = 0$,

$$|u_n - c| = |c - c| = 0 \leqslant \varepsilon.$$

- La suite u définie par $u_n = \dfrac{(2n^2+1)}{(n^2+2)}$ pour tout entier naturel n converge vers 2. En effet, soit $\varepsilon > 0$. Posons $N_\epsilon = \left[\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\varepsilon}}\right] + 1$. Pour $n \geqslant N_\varepsilon$,

$$|u_n - 2| = \frac{3}{n^2+2} \leqslant \frac{3}{n^2} \leqslant \frac{3}{N_\varepsilon^2} \leqslant \varepsilon.$$

- Il peut être utile de remarquer que, par définition, une suite u converge vers un nombre réel ℓ si et seulement si la suite $(|u_n - \ell|)_{n\geqslant 0}$ converge vers 0. Cela permet de se ramener au cas de la limite nulle.
- Enfin, si une suite u converge vers un nombre réel ℓ alors la suite $(|u_n|)_{n\geqslant 0}$ converge vers le nombre réel $|\ell|$. Cela découle de l'inégalité triangulaire qui permet d'écrire que

$$||u_n| - |\ell|| \leqslant |u_n - \ell|$$

pour tout entier naturel n.

Proposition 5

Si une suite u converge vers deux nombres réels ℓ et ℓ' alors $\ell = \ell'$.

Preuve. Par l'absurde : $\ell \neq \ell'$. Posons $\varepsilon = |\ell - \ell'|/4 > 0$. Il existe un entier N_1 vérifiant

$$|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$$

pour tout entier n supérieur à N_1 car la suite u converge vers ℓ. De même, il existe un entier N_2 vérifiant

$$|u_n - \ell'| \leqslant \varepsilon$$

pour tout entier n supérieur à N_2 car la suite u converge vers ℓ'. Pour n supérieur à $\max(N_1, N_2)$,

$$|\ell - \ell'| = |(\ell - u_n) + (u_n - \ell')| \leqslant |\ell - u_n| + |u_n - \ell'| \leqslant 2\varepsilon = |\ell - \ell'|/2$$

ce qui est une contradiction. $\square$

Définition 8
Ainsi, si la suite u est une suite convergente alors il est légitime d'évoquer la limite ℓ de la suite u et d'adopter les notations

$$\ell = \lim_{n \to +\infty} u_n \quad \textit{et} \quad u_n \to_{n \to +\infty} \ell.$$

Définition 9
Une suite u qui ne converge pas est une suite divergente c'est-à-dire

$$\forall \ell \in \mathbb{R}, \exists \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}, (n \geqslant N \textit{ et } |u_n - \ell| > \varepsilon).$$

Remarques :

- Cette définition signifie que pour tout nombre réel ℓ, on peut trouver $\varepsilon > 0$ (le rayon d'un intervalle autour de ℓ) pour lequel

$$\{n \in \mathbb{N}, u_n \notin [\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon]\}$$

  est un ensemble infini.

- Moralement, il est possible de sortir de cet intervalle fermé à l'aide d'indices arbitrairement grand.

Exemples :

- La suite u définie par $u_n = n$ pour tout entier naturel n est une suite divergente. En effet, soit ℓ dans $\mathbb{R}$. Si $\ell < 0$ alors u_n n'appartient pas à l'intervalle fermé $[\ell - 1, \ell + 1]$ pour tout entier naturel non-nul n. Si $\ell \geqslant 0$ alors u_n n'appartient pas à l'intervalle fermé $[\ell - 1, \ell + 1]$ pour tout entier naturel non-nul n supérieur à $[\ell + 1] + 1$.

- La suite u définie par $u_n = (-1)^n$ pour tout entier naturel n est une suite divergente. En effet, soit ℓ dans $\mathbb{R}$. Si $\ell = -1$ alors

$$2\mathbb{N} \subset \{n \in \mathbb{N}, u_n \notin [-1 - 1/2, -1 + 1/2]\}.$$

  Si $\ell = 1$ alors

$$2\mathbb{N} + 1 \subset \{n \in \mathbb{N}, u_n \notin [1 - 1/2, 1 + 1/2]\}.$$

  Si $\ell \neq \pm 1$ alors

$$\mathbb{N} \subset \{n \in \mathbb{N}, u_n \notin [\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon]\}$$

  pour $\varepsilon = \min(|\ell - 1|, |\ell + 1|)/2 > 0$.

3.2 Quelques propriétés des suites convergentes

Proposition 6

Si une suite u converge alors elle est bornée ce qui signifie qu'il existe un nombre réel M vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leqslant M.$$

Preuve. Notons ℓ la limite de la suite convergente u. Il existe un entier N pour lequel

$$|u_n - \ell| \leqslant 1$$

pour tout entier naturel n supérieur à N. L'inégalité triangulaire implique que

$$|u_n| - |\ell| \leqslant ||u_n| - |\ell|| \leqslant |u_n - \ell| \leqslant 1$$

pour tout entier naturle n supérieur à N. Ainsi,

$$|u_n| \leqslant \max\left(|u_0|, \ldots, |u_{N-1}|, |\ell| + 1\right) = M$$

pour tout entier naturel n. $\square$

Exemple : La suite définie par $u_n = \ln(n)$ pour tout entier naturel non-nul est divergente car elle n'est pas bornée. Par l'absurde, soit M un nombre réel vérifiant $|u_n| \leqslant M$ pour tout entier $n \geqslant 1$. Ceci implique que $n \leqslant \exp(M)$ pour tout entier $n \geqslant 1$. Ceci est une contradiction en choisissant $n = [\exp(M)] + 1$.

Le résultat suivant est le théorème opératoire sur les suites convergentes qui résume la stabilité de la notion de convergence d'une suite vis-à-vis des opérations algébriques usuelles.

Proposition 7

Soient $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite convergente vers le nombre réel u et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ une suite convergente vers le nombre réel v.

- *La suite $(u_n + v_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers $u + v$.*
- *La suite $(u_n v_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers uv.*
- *Si λ et μ sont deux nombres réels alors la suite $(\lambda u_n + \mu v_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers $\lambda u + \mu v$.*
- *Si $u \neq 0$, alors la suite $(v_n / u_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers v/u.*

Preuve.
Prouvons la première assertion. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un entier N_1 et un entier N_2 vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, (n \geqslant N_1 \Rightarrow |u_n - u| \leqslant \varepsilon/2) \text{ et } (n \geqslant N_2 \Rightarrow |v_n - v| \leqslant \varepsilon/2)\,.$$

Ainsi, pour n supérieur à $N_\epsilon = \max(N_1, N_2)$,

$$|(u_n + v_n) - (u + v)| = |(u_n - u) + (v_n - v)| \leqslant |u_n - u| + |v_n - v| \leqslant \varepsilon.$$

Prouvons la deuxième assertion. Soit $\varepsilon > 0$. La suite $(v_n)_{n\geqslant 0}$ converge donc est bornée. Il existe un nombre réel M tel que $|v_n| \leqslant M$ et il est possible de prendre $M > 0$. Il existe un entier N_1 et un entier N_2 vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, (n \geqslant N_1 \Rightarrow |u_n - u| \leqslant \varepsilon/2M) \text{ et } (n \geqslant N_2 \Rightarrow |v_n - v| \leqslant \varepsilon/(2(|u|+1)))\,.$$

Ainsi, pour n supérieur à $N_\epsilon = \max(N_1, N_2)$,

$$|u_n v_n - uv| = |(u_n - u)v_n + (v_n - v)u| \leqslant |u_n - u||v_n| + |v_n - v||u| \leqslant \varepsilon.$$

La troisième assertion est une conséquence des deux premières assertions.
Pour prouver la quatrième assertion, il suffit de le faire pour la suite $v_n = 1$ grâce à la deuxième assertion. Tout d'abord, montrons qu'il existe un entier N_1 vérifiant

$$|u_n| \geqslant |u|/2$$

pour tout entier $n \geqslant N_1$. La suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers $u \neq 0$ donc il existe un entier N_1 vérifiant

$$|u_n - u| \leqslant |u|/2$$

ce qui implique grâce à l'inégalité triangulaire que

$$|u| - |u_n| \leqslant |u - u_n| \leqslant |u|/2$$

pour tout entier naturel $n \geqslant N_1$ d'où le résultat. Ensuite, il existe un entier N_2 vérifiant

$$|u_n - u| \leqslant u^2\varepsilon/2$$

pour tout entier $n \geqslant N_1$. Ainsi,

$$|1/u_n - 1/u| = \frac{|u_n - u|}{|u||u_n|} \leqslant \varepsilon$$

pour tout entier $n \geqslant N_\epsilon = \max(N_1, N_2)$. □

3.3 Convergence dans $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$

Définition 10
La suite u tend vers $+\infty$ *si*

$$\forall A \in \mathbb{R}_+^*, \exists N_A \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geqslant N_A \Rightarrow u_n \geqslant A).$$

On écrit alors

$$u_n \to_{n \to +\infty} +\infty.$$

Exemple : La suite $u_n = n$ pour tout entier naturel tend vers $+\infty$. En effet, soit A dans $\mathbb{R}_+^*$. Posons $N_A = [A] + 1$. On a clairement $u_n \geqslant A$ si $n \geqslant N_A$.

Définition 11
La suite u tend vers $-\infty$ *si*

$$\forall A \in \mathbb{R}_-^*, \exists N_A \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geqslant N_A \Rightarrow u_n \leqslant A).$$

On écrit alors

$$u_n \to_{n \to +\infty} +\infty.$$

Étudions ce qu'il se passe lorsque l'on réalise un passage à la limite dans les inégalités.

Proposition 8
Soient $(u_n)_{n \geqslant 0}$ *une suite convergente vers le nombre réel u et* $(v_n)_{n \geqslant 0}$ *une suite convergente vers le nombre réel v.*

- *Si* $u_n \leqslant v_n$ *pour tout entier naturel n alors* $u \leqslant v$.
- *Si* $u_n < v_n$ *pour tout entier naturel n alors* $u \leqslant v$.

Preuve. La seconde assertion est impliquée par la première assertion.
Prouvons la première assertion par contraposition. Supposons que $u > v$ et montrons qu'il existe un entier naturel n vérifiant $u_n > v_n$. Soit $\varepsilon = (u - v)/2 > 0$. Il existe un entier N_1 et un entier N_2 vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, (n \geqslant N_1 \Rightarrow v - \varepsilon < v_n < v + \epsilon) \text{ et } (n \geqslant N_2 \Rightarrow u - \varepsilon < u_n < u + \varepsilon).$$

Posons $N = \max(N_1, N_2)$. Ainsi,

$$v_N < v + \varepsilon = u - \varepsilon < u_N$$

d'où le résultat. □

Remarque : Les inégalités strictes deviennent des inégalités larges dans un passage à la limite comme l'atteste l'exemple $u_n = 0$ et $v_n = 1/n$ pour tout entier naturel non-nul n.

Énonçons le théorème d'encadrement dans $\bar{R}$.

> **Proposition 9**
> *Soient $(u_n)_{n\geqslant 0}$, $(v_n)_{n\geqslant 0}$ et $(w_n)_{n\geqslant 0}$ trois suites de nombres réels vérifiant*
>
> $$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$$
>
> *et*
>
> $$u_n \to_{n\to+\infty} \ell, \quad w_n \to_{n\to+\infty} \ell$$
>
> *avec ℓ dans $\bar{R}$. Alors*
>
> $$v_n \to_{n\to+\infty} \ell.$$

Preuve. Supposons que $\ell \in \mathbb{R}$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe deux entiers N_1 et N_2 vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, (n \geqslant N_1 \Rightarrow u_n \in [\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon]) \text{ et } (n \geqslant N_2 \Rightarrow w_n \in [\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon])$$

Pour $n \geqslant N_\varepsilon = \max(N_1, N_2)$, $v_n \in [u_n, w_n] \subset [\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon]$ d'où le résultat.
Considérons le cas $\ell = +\infty$ (le cas $\ell = -\infty$ est analogue). Soit A dans $\mathbb{R}_+^*$. Il existe un entier N_A vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, (n \geqslant N_A \Rightarrow u_n \geqslant A).$$

Ainsi, pour $n \geqslant N_A$, $v_n \geqslant u_n \geqslant A$ d'où le résultat. □

Exemples :

- Soit a dans $\mathbb{R}_+^*$. La suite u définie par $u_n = [na]/na$ pour tout entier naturel non-nul n converge vers 1. En effet, l'encadrement

  $$[na] \leqslant na < [na] + 1$$

  implique que

  $$1 - 1/na < u_n \leqslant 1$$

  pour tout entier naturel non-nul n. Le théorème d'encadrement permet de conclure.

- Soit $a > 1$. La suite u définie par $u_n = a^n$ pour tout entier naturel n tend vers $+\infty$. En effet, $a > 1$ donc $a = 1 + h$ avec $h > 0$ donc

  $$u_n = 1 + nh + \ldots$$

  où le terme omis est positif par la formule du binôme de Newton d'où $u_n \geqslant 1 + nh$ pour tout entier naturel n. Le théorème d'encadrement permet de conclure.

3.4 Le théorème de la limite monotone et ses conséquences

Dans cette section, on reformule le théorème de la limite monotone déjà rencontré au paragraphe 2.4, pour en analyser plus précisément les conséquences. En particulier, on établit le théorème des suites adjacentes, qui met en évidence une supériorité fondamentale de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{Q}$: dans $\mathbb{R}$ il n'y a pas de "trous".

3.5 Théorème de la limite monotone

Théorème 3
Soit u une suite croissante de nombre réels.

- *Si la suite u est majorée par un nombre réel M ce qui signifie que*

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant M$$

alors la suite u converge vers une limite finie $\ell \leqslant M$.

- *Si la suite u n'est pas majorée alors la suite u tend vers $+\infty$.*

Remarques :

1) Il ne faut surtout pas croire qu'une suite qui n'est pas majorée tend vers $+\infty$. Par exemple, les suites $u_n = (-1)^n n$ et

$$v_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair,} \\ n & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

ne sont pas majorées mais ne tendent pas vers $+\infty$.

2) À l'aide de ce théorème, on peut montrer que la propriété d'Archimède s'étend à $\mathbb{R}$: pour tout couple (x, y) de nombres réels > 0, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $nx > y$ (considérer la suite croissante $u_n = nx$ et montrer par l'absurde qu'elle n'est pas majorée).

Théorème 3-bis
Soit u une suite décroissante de nombre réels.

- *Si la suite u est minorée par un nombre réel m ce qui signifie que*

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant m$$

alors la suite u converge vers une limite finie $\ell \geqslant m$.

- *Si la suite u n'est pas minorée alors la suite u tend vers $-\infty$.*

Terminons avec le théorème des suites adjacentes.

> **Définition 12**
> *Deux suites u et v sont dites adjacentes si*
>
> - *u est croissante et v est décroissante,*
> - *La suite $v-u$ converge vers 0.*

Remarque : Si u et v sont adjacentes alors elles vérifient

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant v_n.$$

En effet, la suite $v-u$ est une suite décroissante qui converge vers 0 donc elle est positive.

> **Théorème 4**
> *Deux suites adjacentes de nombres réels convergent vers un même nombre réel ℓ. De plus, ℓ est l'unique nombre réel vérifiant*
>
> $$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant \ell \leqslant v_n.$$

Preuve. C'est une conséquence du théorème de la limite monotone. □

Remarque : c'est une différence fondamentale entre $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$. En effet, on peut assez facilement construire dessuites adjacentes de nombres rationnels *qui ne convergent pas dans* $\mathbb{Q}$. Par exemple, les suites

$$u_n = 1 + + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

et

$$v_n = u_n + \frac{1}{n!}$$