Université de Bordeaux — **2021-22**
4PTU102-103 — **Mathématiques Générales**

Devoir Maison N° 1

A rendre la semaine 43 selon groupe.

Exercice 1.

1. Soient

$$(a)\ \exists x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}, x+y>0; \quad (b)\ \forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}, x+y>0;$$
$$(c)\ \forall x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}, x+y>0; \quad (d)\ \exists x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}, y^2>x.$$

   les quatre propositions. Les propositions *(a)-(d)* sont-elles vraies ou fausses? Justifiez votre réponse. Donnez leur négation.

2. Considérons la proposition:

   “Tous les habitants de l'avenue de la Libération qui ont des yeux bleus gagneront au loto et prendront leur retraite avant 50 ans”.

   Donner sa négation.

Exercice 2. La question 1. et les questions 2., 3. de cet exercice sont indépendantes.

1. Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite définie par les relations

$$u_0 = 2, \quad u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n}.$$

   Montrer que $u_n = \frac{2}{2n+1},\ n \geqslant 1$.

2. Dans la suite de cet exercice $a \geqslant 0$. En utilisant la récurrence, montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, on a

$$(1+a)^n \geqslant 1+na.$$

3. * Peut-on montrer la même inégalité sans utiliser la récurrence?

Exercice 3. Soit $X = \{1,2,3,4\}$ et soit $f\colon X \to X$ l'application définie par $f(1) = 1$ et $f(k) = k-1$ pour $k \in \{2,3,4\}$.

1. Faites un schéma (ou un dessin) explicitant la définition de l'application f.

2. Donnez l'image de f (*i.e.,* $\mathrm{Im}(f)$, ou bien $f(X)$).

3. Soit $A = \{1,2,3\}$. Calculez l'image directe $f(A)$ et l'image réciproque $f^{-1}(A)$.

4. Soit $B = \{1, 4\}$. Calculez l'image directe $f(B)$ et l'image réciproque $f^{-1}(B)$.

5. Explicitez la fonction $f^{[2]} = f \circ f$.

6. Explicitez la fonction $f^{[3]} = f \circ f \circ f$. Que peut-on dire sur cette fonction?

Exercice 4. Donner les solutions dans $\mathbb{R}$ de :

1. $|2x - 5| = |x + 2| + |x - 8| + 1$;

2. $|x - 12| \leqslant 19 - |x + 7|$.

Exercice 5.* Soit n un entier naturel.

1. Soient $p(x)$ et $q(x)$ deux polynômes de degré n,

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k, \quad q(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k.$$

   Démontrer que le produit $p(x) \cdot q(x)$ s'écrit comme

$$p(x) \cdot q(x) = \sum_{j=0}^{2n} x^j \left(\sum_{k=0}^{j} a_k b_{j-k} \right)$$

   (cela s'appelle "la formule de Cauchy pour le produit de polynômes").

2. En utilisant la formule du binôme de Newton, donner le coefficient de x^n dans le polynôme $(1 + x)^{2n}$.

3. Calculer ce même coefficient en écrivant $(1 + x)^{2n} = (1 + x)^n \cdot (1 + x)^n$ et en appliquant la formule du binôme à $(1 + x)^n$.

4. En déduire que

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2.$$