Chapitre 3

Compléments sur les applications

Dans ce chapitre, E et F sont des ensembles et f est une application de E dans F.

1 Applications injectives

Proposition 1
Les assertions suivantes sont équivalents.

1) $\forall (x, x') \in E^2, (x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x'))$.

2) $\forall (x, x') \in E^2, (f(x) = f(x') \Rightarrow x = x')$.

3) *Pour tout y dans F, l'équation $f(x) = y$ d'inconnue x dans E admet au plus une solution.*

Preuve. La deuxième assertion est la contraposée de la première donc les deux premières assertions sont équivalentes.
Montrons que la deuxième assertion implique la troisième assertion. Soit y dans F. Montrons que l'équation $f(x) = y$ d'inconnue x dans E admet au plus une solution. Par l'absurde, supposons que cette équation admet au moins deux solutions notées $x \neq x'$. Ainsi, $y = f(x) = f(x')$ ce qui implique que $x = x'$ selon la deuxième assertion. Contradiction et résultat.
Montrons que la troisième assertion implique la deuxième assertion. Soient x et x' dans E tels que $f(x) = f(x')$. Montrons que $x = x'$. Posons $y = f(x) \in F$. L'équation $f(t) = y$ d'inconnue t dans E admet x et x' comme solutions donc la troisème assertion implique que $x = x'$. $\square$

Définition 1
Une application f vérifiant l'une des assertions équivalentes de la proposition précédente est dit injective et s'appelle une injection.

Remarque : La première assertion signifie qu'une application injective sépare les points. Moralement, l'ensemble E est injecté dans l'ensemble F via l'application f

quite à identifier les objets x et $f(x)$. La troisième assertion signifie que tout élément de l'ensemble d'arrivée admet au plus un antécédent. Les deuxième et troisième assertion sont utilisées pour démontrer de façon pratique qu'une application explicite est injective.

Exemples.

- L'application logarithme népérien $\ln : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ est une application injective. En effet, soient x et x' dans $\mathbb{R}_+^*$ tels que $\ln(x) = \ln(x')$. Montrons que $x = x'$. L'hypothèse implique que $\exp(\ln(x)) = \exp(\ln(x'))$ c'est-à-dire que $x = x'$.

- De même, l'application exponentielle $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ est une application injective.

- Si E est un sous-ensemble de F alors l'injection canonique $i : E \to F$ définie par

$$\forall x \in E, \quad i(x) = x$$

  est par définition injective. En particulier, l'application identité de E notée $id_E : E \to E$ définie par

$$\forall x \in E, \quad id_E(x) = x$$

  est une injection.

- Soit f l'application de $\mathbb{N}^2$ dans $\mathbb{N}$ définie par

$$\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2, \quad f(p,q) = 2^p(2q+1).$$

  Montrons que f est injective. Soient (p,q) et (p',q') dans $\mathbb{N}^2$ tels que $f(p,q) = f(p',q')$. Montrons que $(p,q) = (p',q')$ c'est-à-dire montrons que $p = p'$ et $q = q'$. Supposons par exemple que $p \geqslant p'$. L'hypothèse implique que

$$2^{p-p'}(2q+1) = 2q'+1.$$

  Le membre de droite est un entier impair donc le membre de gauche aussi ce qui implique que $p - p' = 0$ puis que $q = q'$.

- L'application valeur absolue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ n'est pas une application injective car $|-1| = |1|$.

- Par contre, l'application f de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = |x|$ pour tout x dans $\mathbb{R}_+$ est injective.

- L'application carrée de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ n'est pas une application injective car $(-1)^2 = 1^2$.

- Par contre, l'application f de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$ pour tout x dans $\mathbb{R}_+$ est injective.

Le théorème suivant est une caractérisation efficace mais théorique de la notion d'injectivité.

> **Théorème 1**
> *Si E et F sont des ensembles non-vides alors f est une application injective si et seulemeent si il existe une application $g : F \to E$ vérifiant $g \circ f = id_E$.*

Preuve. Supposons l'existence d'une telle application g que l'on appelle un inverse à gauche de l'application f et montrons que f est injective. Soient x et x' dans E tels que $f(x) = f(x')$. Montrons que $x = x'$. En particulier, $g(f(x)) = g(f(x'))$ c'est-à-dire $id_E(x) = id_E(x')$ par hypothèse d'où $x = x'$.
Supposons que f est injective et construisons un inverse à gauche $g : F \to E$ de l'application f de la façon suivante. Soit y dans F. Si y est dans l'image de f alors il existe un unique x_y dans E vérifiant $f(x_y) = y$. On pose alors $g(y) = x_y$. Si y n'est pas dans l'image de f alors on fixe un élément x_0 de l'ensemble non-vide E et on pose $g(y) = x_0$. Vérifions que $g \circ f = id_E$. Soit x dans E. Montrons que $(g \circ f)(x) = id_E(x)$ c'est-à-dire montrons que $g(f(x)) = x$. L'élément $y = f(x)$ est dans l'image de f donc nous sommes dans le premier cas. L'élément x_y vaut x car $f(x) = y$. Ainsi, $g(f(x)) = g(y) = x$. □

Exemples.

- L'application logarithme népérien $\ln : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ est une application injective car $\exp \circ \ln = id_{\mathbb{R}_+^*}$.
- L'application exponentielle $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ est une application injective car $\ln \circ \exp = id_{\mathbb{R}}$.

2 Applications surjectives

> **Proposition 2**
> *Les assertions suivantes sont équivalents.*
>
> **1)** *L'image de f est F.*
>
> **2)** $\forall y \in F, f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset$.
>
> **3)** *Pour tout y dans F, l'équation $f(x) = y$ d'inconnue x dans E admet au moins une solution.*

Preuve. Les trois assertions sont équivalentes puisque

$$f^{-1}(\{y\}) = \{x \in E, f(x) \in \{y\}\} = \{x \in E, f(x) = y\}$$

pour tout y dans F et que l'image de f est

$$f(E) = Im(f) = \{f(x), x \in E\}.$$

$\square$

Définition 2
Une application f vérifiant l'une des assertions équivalentes de la proposition précédente est dit surjective et s'appelle une surjection.

Remarque : Toutes ces assertions sont des formulations équivalentes du fait que tout élément de l'ensembe d'arrivée admet au moins un antécédent. La troisième assertion est utilisée pour démontrer de façon pratique qu'une application explicite est surjective.

Exemples.

- L'application logarithme népérien $\ln : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ est une application surjective. En effet, soit y dans $\mathbb{R}$. Montrons que l'équation $\ln(x) = y$ d'inconnue x dans $\mathbb{R}_+$ admet au moins une solution. On constate que $x = \exp(y)$ en est une.

- De même, l'application exponentielle $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ est une application surjective.

- Si E est un sous-ensemble de F alors l'injection canonique $i : E \to F$ est surjective si et seuement si $E = F$. En particulier, l'application identité de E notée $id_E : E \to E$ est une surjection.

- Soit f l'application de $\mathbb{N}^2$ dans $\mathbb{N}$ définie par

$$\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2, \quad f(p,q) = 2^p(2q+1).$$

  L'application f n'est pas surjective puisque l'équation $f(p,q) = 0$ d'inconnue (p,q) dans $\mathbb{N}^2$ n'admet pas de solution.

- Par contre, l'application f de $\mathbb{N}^2$ dans $\mathbb{N}^*$ définie par

$$\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2, \quad f(p,q) = 2^p(2q+1)$$

  est surjective. En effet, soit n dans $\mathbb{N}^*$. Montrons que l'équation $f(p,q) = n$ d'inconnue (p,q) dans $\mathbb{N}^2$ admet au moins une solution. Soit p la plus grande puissance de 2 divisant n et notons $n' = n/2^p$. Cet entier non-nul n' est par construction un entier impaire donc il peut s'écrire $2q+1$ pour un certain entier q. Ce couple (p,q) est donc une solution de cette équation.

- L'application valeur absolue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ n'est pas une application surjective car l'équation $|x| = -2$ d'inconnue x dans $\mathbb{R}$ n'admet pas de solution.

- Par contre, l'application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+$ définie par $f(x) = |x|$ pour tout x dans $\mathbb{R}_+$ est surjective. En effet, soit y dans $\mathbb{R}_+$. L'équation $f(x) = y$ admet $x = y$ comme solution.

- L'application carrée de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ n'est pas une application surjective car l'équaation $x^2 = -4$ d'inconnue x dans $\mathbb{R}$ n'admet pas de solution.

- Par contre, l'application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+$ définie par $f(x) = x^2$ pour tout x dans $\mathbb{R}$ est surjective. En effet, soit y dans $\mathbb{R}_+$. L'équation $f(x) = y$ admet $x = \sqrt{y}$ comme solution.

Le théorème suivant est une caractérisation efficace mais théorique de la notion de surjectivité.

> **Théorème 2**
> *f est une application surjective si et seulemeent si il existe une application $g : F \to E$ vérifiant $f \circ g = id_F$.*

Preuve. Supposons l'existence d'une telle application g que l'on appelle un inverse à droite de l'application f et montrons que f est surjective. Soit y dans F. Par hypothèse, $f(g(y)) = y$ ce qui assure que l'équation $f(x) = y$ d'inconnue x dans E admet $x = g(y)$ comme solution.
Supposons que f est injective et construisons un inverse à droite $g : F \to E$ de l'application f de la façon suivante. Pour tout y dans F, il est "possible" de choisir un antécédent de y que l'on note $g(y)$. Par construction, $f(g(y)) = y$ ce qui assure le résultat. $\square$

Exemples.

- L'application logarithme népérien $\ln : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ est une application surjective car $\ln \circ \exp = id_{\mathbb{R}}$.

- L'application exponentielle $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ est une application surjective car $\exp \circ \ln = id_{\mathbb{R}_+^*}$.

3 Applications bijectives

> **Proposition 3**
> *Les assertions suivantes sont équivalents.*
>
> **1)** *f est surjective et injective.*
>
> **2)** *Il existe une application $g : F \to E$ vérifiant $g \circ f = id_E$ et $f \circ g = id_F$.*
>
> **3)** *Pour tout y dans F, l'équation $f(x) = y$ d'inconnue x dans E admet exactement une solution.*

Preuve. Le fait que la première et la troisième assertion sont équivalentes et le fait que la deuxième assertion implique la première assertion sont des conséquence des propositions analogues pour les applications injectives et surjectives.
Montrons que la première assertion implique la deuxième assertion. f est injective donc il existe une application $g : F \to E$ telle que $g \circ f = id_E$. Comme f est surjective il existe une application $g' : F \to E$ telle que $f \circ g' = id_F$. Montrons que $g = g'$. D'une part,

$$g \circ f \circ g' = (g \circ f) \circ g' = id_E \circ g' = g'.$$

D'autre part,

$$g \circ f \circ g' = g \circ (f \circ g') = g \circ id_F = g.$$

Les deux équations précédentes assurent que $g = g'$. $\square$

> **Définition 3**
> *Une application f vérifiant l'une des assertions équivalentes de la proposition précédente est dit bijective et s'appelle une bijection.*

Remarque : Toutes ces assertions sont des formulations équivalentes du fait que tout élément de l'ensembe d'arrivée admet exactement un antécédent. La troisième assertion est utilisée pour démontrer de façon pratique qu'une application explicite est bijective. Moralement, l'ensemble E s'identifie à l'ensemble F via l'application f quite à identifier les objets x et $f(x)$. Une bijection est donc un changement de notations.

> **Proposition 4**
> *Si f est une bijection alors l'application g dont l'existence est garantit par la proposition précédente est unique et est elle-même bijective.*

Preuve. Supposons l'existence de g et g' vérifiant $g \circ f = g' \circ f = id_E$ et $f \circ g = f \circ g' = id_F$. Montrons que $g = g'$. Il suffit de calculer de deux façons différentes $g \circ f \circ g'$ comme dans la preuve de la proposition précédente.
Le fait que g soit bijective résulte du fait que g admet un inverse à gauche et à droite donné par f. $\square$

> **Définition 4**
> *Si f est bijective alors l'application g dont l'unicité est assurée par la proposition précédente s'appelle la bijection réciproque de f et se note $g = f^{-1}$ et dont la bijection réciproque est $(f^{-1})^{-1} = f$.*

Exemples.

- L'application logarithme népérien $\ln : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ est une application bijective dont la bijection réciproque est $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$. En effet,

$$\exp \circ \ln = id_{\mathbb{R}_+^*} \quad \text{et} \quad \ln \circ \exp = id_{\mathbb{R}}.$$

- De même, l'application exponentielle exp : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ est une application bijective dont la bijection réciproque est ln : $\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$.

- L'application f de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}^*$ définie par $f(x) = 1/x$ pour tout x dans $\mathbb{R}^*$ est bijective avec $f^{-1} = f$. En effet, soit y dans $\mathbb{R}^*$. L'équation $f(x) = y$ d'inconnue x dans $\mathbb{R}^*$ admet une unique solution donnée par $x = 1/y$. La bijection réciproque de f est donc $f^{-1} : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$ définie par $f^{-1}(y) = 1/y = f(y)$.

- L'application carrée de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ est bijective de bijection l'application racine carrée de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$. En effet, soit y dans $\mathbb{R}_+$. L'équation $x^2 = y$ d'inconnue x dans $\mathbb{R}_+$ admet comme unique solution $x = \sqrt{y}$.

- L'application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = (1 - x^3)^{1/3}$ est bijective de bijection réciproque f. Montrons que $f \circ f = id_{\mathbb{R}}$ ce qui assure le résultat. Soit x dans $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
(f \circ f)(x) &= f\left((1 - x^3)^{1/3}\right) \\
&= \left(1 - \left((1 - x^3)^{1/3}\right)^3\right)^{1/3} \\
&= \left(1 - (1 - x^3)\right)^{1/3} \\
&= \left(x^3\right)^{1/3} \\
&= x
\end{aligned}$$

ce qui asssure le résultat.

- L'application f de $\mathbb{N}^2$ dans $\mathbb{N}^*$ définie par

$$\forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, \quad f(p, q) = 2^p(2q + 1)$$

est bijective car elle est à la fois injective et surjective.

4 Stabilité de ces notions vis-à-vis de la composition

Proposition 5

Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ ddeux applications.

- *Si f et g sont injectives alors $g \circ f$ est injective.*
- *Si f et g sont surjectives alors $g \circ f$ est surjective.*
- *Si f et g sont bijectives alors $g \circ f$ est bijective. De plus, $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.*

Preuve. Démontrons la première assertion. Montrons que $g \circ f$ est injective. Soient x et x' dans E tels que $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(x')$ c'est-à-dire $g(f(x)) = g(f(x'))$. Montrons que $x = x'$. L'injectivité de g asssure que $f(x) = f(x')$. L'injectivité de f assure que $x = x'$.
Démontrons la deuxième assertion. Montrons que $g \circ f$ est surjective. Soit z dans G. Montrons que l'équation $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = z$ d'inconnue x dans E admet au moins une solution. La surjectivité de g asssure qu'il existe y dans F tel que $g(y) = z$. La surjectivité de f assure qu'il existe x dans E tel que $f(x) = y$. Ainsi, $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y) = z$.
Démontrons la troisième assertion. Si f et g sont bijectives alors f et g sont injectives donc $g \circ f$ est injective par la première assertion. Si f et g sont bijectives alors f et g sont surjectives donc $g \circ f$ est surjective par la première assertion. $g \circ f$ est bijective car elle est à la fois injective et surjective. De plus,

$$(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = g \circ (f \circ f^{-1}) \circ g^{-1} = g \circ id_F \circ g^{-1} = g \circ g^{-1} = id_G$$

et de même $(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = id_E$ ce qui assure que $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$. □

Soit E un ensemble auquel est associé l'ensemble des bijections de E dans E

$$\sigma_E = \{f : E \to E \text{ bijective}\}.$$

Cet ensemble σ_E est muni de la loi de composition $\circ$ qui vérifie les propriétés suivantes.

1) La loi de composition $\circ$ est une *loi de interne* :

$$\forall (f, g) \in \sigma_E^2 \, , \; f \circ g \in \sigma_E$$

.

2) La loi de composition $\circ$ est *associative* :

$$\forall (f, g, h) \in \sigma_E^3 \, , \; f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$$

.

3) id_E est un *élément neutre* pour la loi de composition $\circ$:

$$\forall f \in \sigma_E \, , \; f \circ id_E = id_E \circ f = f$$

.

4) *Tout élément admet un symétrique* pour la loi de composition $\circ$:

$$\forall f \in \sigma_E \, , \; f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = id_E$$

.

On résume les propriétés 1) à 4) en disant que $(\sigma_E, \circ)$ est un ***groupe***.