Probabilités, Statistiques, Combinatoire : TD4

Probabilités : définitions

Exercice 4.1

Soit un univers Ω et une loi de probabilité $\mathbb{P}$. Montrer les propriétés suivantes :

1. $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.
   Indication : chercher un argument permettant d'affirmer que si $p = \mathbb{P}(\emptyset)$, alors $p = p + p$.
2. Pour n'importe quels événements A et B, $\mathbb{P}(A \backslash B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B)$.
   Indication : montrer, par un calcul d'événements, que l'on a $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \backslash B)$.
3. Pour n'importe quels événements A et B, $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.
   Indication : se ramener à l'identité précédente.
4. Pour n'importe quel événement A, $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$ (ici $\overline{A}$ désigne le complémentaire de A : $\overline{A} = \Omega \backslash A$).
   Indication : se ramener à une des identités précédentes.
5. Pour n'importe quels événements A et B, si $A \subset B$ alors $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$.
   Indication : utiliser une des identités précédentes (et utiliser $A \subset B$).
6. Pour n'importe quels événements A, B et C,
   $$\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(B \cap C) - \mathbb{P}(A \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C)$$
   Indication : écrire $A \cup B \cup C = (A \cup B) \cup C$, et utiliser de manière répétée la formule sur la probabilité d'une union.

Toutes ces propriétés sont importantes, il est important de les retenir et de savoir les utiliser (sauf la dernière).

Exercice 4.2

On suppose qu'on dispose d'un univers de probabilités Ω, sur lequel sont définis des événements A, B et C. Exprimer, au moyen des opérations d'union, d'intersection, et d'exclusion ($\backslash$), les événements suivants ; puis, si possible, exprimer ces mêmes événements comme *unions disjointes* (unions d'ensembles qui sont garantis être deux à deux disjoints). On pourra aussi utiliser la notation $\overline{A}$ pour le complémentaire de A, *i.e.* $\Omega \backslash A$.

1. D : A et B se produisent.
2. E : A se produit, mais pas B.
3. F : A et B se produisent, mais pas C.
4. G : Au moins deux événements parmi A, B et C se produisent.
5. H : Exactement un des trois événements A, B, C se produit.

Pour chacun de ces événements, exprimer sa probabilité en fonction des probabilités des trois événements A, B et C, et des probabilités de leurs intersections (deux à deux ou trois à trois, si besoin).

Exercice 4.3

Dans cet exercice, on demande de définir pour diverses expériences, des univers de probabilités appropriés. À chaque fois, cela veut dire décrire à la fois un univers, et la fonction de probabilités correspondante. La réponse n'est pas unique, même s'il existe un choix plus naturel que d'autres.

La notation Parties(A) désigne, comme déjà vu en cours, l'ensemble de tous les sous-ensembles de l'ensemble A.

1. On tire avec une pièce non-biaisée, une fois, à pile ou face. Décrire un univers de probabilités $(\Omega_1, \mathbb{P}_1)$ approprié pour ce problème.
2. On tire deux fois à pile ou face avec la même pièce non biaisée. Décrire un univers de probabilités $(\Omega_2, \mathbb{P}_2)$ approprié.
3. Que vaut l'ensemble Parties(Ω_1) ? Combien Parties(Ω_2) a-t-il d'éléments ?
4. Dans Ω_2, comment décrire de façon ensembliste l'événement E_1 : "on a tiré Pile la première fois" ? Quelle est la probabilité de cet événement ? (Rappelez-vous qu'un événement est défini comme un élément de Parties(Ω_2))
5. Toujours dans Ω_2, comment décrire de façon ensembliste l'événement E_2 "on a tiré Pile au moins une fois" ? Quelle est la probabilité de cet événement ?
6. Soit n un entier strictement positif. On tire à pile ou face n fois avec la même pièce équilibrée. On choisit de représenter cette expérience par l'univers $\Omega_n = \{P, F\}^n$. Quelle est la loi de probabilités qu'on utilise ?
7. Dans Ω_n, écrire de façon ensembliste l'événement F : "Pile n'a pas été obtenu lors des 2 premiers lancers".
8. Soit $i \in [[1, n]]$. Toujours dans Ω_n, décrire l'événement G_i : "le résultat du i-ième lancer est Pile".
9. Écrire à l'aide des événements G_i, l'événement F.
10. Écrire à l'aide des événements G_i, l'événement H : "la pièce est tombée au moins une fois sur Pile".
11. Écrire à l'aide des ensembles G_i, l'événement J : "la pièce est tombée au moins deux fois sur Pile".
12. Calculer la probabilité de chacun de ces événements.

Exercice 4.4

1. Rappeler la formule donnant, en fonction de n, le nombre de mots de longueur n sur l'alphabet $\{a, b\}$; et la formule donnant, en fonction de n, le nombre de mots *équilibrés*, de longueur $2n$ sur le même alphabet (un mot est **équilibré** s'il contient autant d'occurrences de a que de b).

   On notera B_n l'ensemble des mots équilibrés de longueur $2n$, et D_n 'ensemble des mots de Dyck de longueur $2n$.
2. On modélise ainsi l'expérience consistant à choisir aléatoirement un mot de longueur $2n$ sur l'alphabet $\{a, b\}$, de telle sorte que chaque mot ait la même probabilité d'être choisi : l'univers est $\Omega = \{a, b\}^{2n}$, et la fonction de probabilités est la loi uniforme sur Ω. Dans ce modèle, pour chaque mot $w \in \Omega$, l'événement $\{w\}$ correspond à "le mot tiré est w".

   Dans cet univers, comment peut-on décrire l'événement A "le mot choisi commence par a" ? L'événement B "le mot choisi a pour dernière lettre b" ? Quelles sont leurs cardinaux ? leurs probabilités ?

3. Dans cet univers, comment peut-on décrire l'événement "le mot choisi commence par a et finit par b ? Quel est son cardinal ? Quelle est sa probabilité ? (le dernier résultat, au moins, ne devrait pas vous surprendre)
4. Les événements A et B sont-ils indépendants ?
5. Dans cet univers, comment peut-on décrire l'événement "le mot choisi est équilibré ?" ? Quelle est sa probabilité ?
6. Toujours dans le même univers, quelle est, en fonction de k et n, la probabilité de l'événement "le mot choisi contient exactement k fois la lettre a" ? De l'événement "le mot choisi contient au moins 2 fois la lettre a" ? (essayez d'exprimer le résultat de la manière la plus simple possible)
7. On modélise maintenant l'expérience consistant à choisir aléatoirement un mot équilibré de longueur $2n$, de telle sorte que chaque mot ait la même probabilité d'être choisi [1]. On prend comme univers Ω, l'ensemble B_{2n} avec comme fonction de probabilités, la loi uniforme.

   Quelle est alors la probabilité de l'événement "le mot choisi est un mot de Dyck" ? de l'événement "le mot choisi commence par ab" ?
8. Dans cet univers, on définit l'événement A' "le mot choisi commence par a" et l'événement B' "le mot choisi finit par b". Déterminer les cardinaux de ces deux événements, et leurs probabilités.
9. Toujours dans cet univers, déterminer le cardinal et la probabilité de l'événement C "le mot choisit commence par a et finit par b". Les événements A' et B' sont-ils indépendants ?

1. On ne s'interroge pas sur *comment* on pourrait s'organiser pour faire un tel choix aléatoire