Probabilités, Statistiques, Combinatoire, CM 8

Adrian Tanasă

Université de Bordeaux – Licence Informatique

Rappels : notions vu dans le dernier cours

- Interprétation possible de la définition d'un espace de probabilités ; exemples
- Exemples utilisations de la loi uniforme
- Quelques formules utiles
- Espace produit
- Indépendance de 2 événements
- Indépendance de plus de 2 événements : indépendance 2-à-2 et indépendance globale
- Calcul d'événements

Plan du cours d’aujourd’hui

- Retour sur la notion d’indépendance
- Probabilité conditionnelle
  - expérience composite ; exemple
  - analogie avec les proportions
  - définition de la probabilité conditionnelle
  - quelques remarques
  - formule des probabilités totales
  - formule généralisée des probabilités totales
  - conditionnement et indépendance
  - conditionnement successifs
  - formule de Bayes

Retour sur la notion d'indépendance

- Par définition, A et B sont indépendants si
$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B).$$
- Symétrie : si A est indépendant de B, alors B est indépendant de A (voir TD 5)
- Complémentarité : si A est indépendant de B, alors $\overline{A}$ est indépendant de B, A est indépendant de $\overline{B}$, $\overline{A}$ est indépendant de $\overline{B}$ (voir TD 5)
- Attention : si A est indépendant de C, et B est indépendant de C, on ne peut pas en déduire que $A \cap B$ est indépendant de C (même si A est indépendant de B !)
(exemple des deux Pile ou Face - voir dernier cours)
- (Ce serait vrai si on savait que A, B et C sont globalement indépendants)
- Un événement de probabilité 0 ou 1, est indépendant de tout événement

Probabilité conditionnelle

- **Notion fondamentale**, qui permet de décrire des situations où on n'a pas toute l'information.
- Situation typique 1 :
  - Une certaine expérience a lieu ; je calcule la probabilité d'un certain événement A ("il y a 30% de chances que...")
  - J'apprends non pas que A se produit, mais qu'un **autre** événement B se produit
  - Cela me conduit à réévaluer la probabilité que A se produise ("vu que B se produit, alors il y a 40% de chances que...")
- Situation typique 2 : expérience composite
  - Une première expérience a lieu, donnant un premier résultat (par exemple, B ou $\overline{B}$)
  - Selon que B se produise ou pas, cela change les conditions de la deuxième expérience ;
- Dans les deux cas, on est en train de décrire ou calculer une probabilité conditionnelle.

Un exemple d'expérience composite

- Un jeu avec des règles un peu complexes :
  - On tire à pile ou face
  - Si la pièce tombe côté Pile, on lance un dé - on "gagne" si le dé tombe sur 1 ou 2.
  - Si la pièce tombe côté Face, on lance le même dé - on "gagne" si le dé tombe sur 1, 2 ou 3.
- On veut calculer la probabilité de l'événement G "on gagne" ; on est dans une situation où c'est plus facile de calculer une probabilité pour G si on suppose "la pièce donne Pile" ($2/6$, soit $1/3$) ou si on suppose "la pièce donne Face" ($3/6$, soit $1/2$).
- C'est typiquement une situation où on calcule la probabilité de G en calculant d'abord des **probabilités conditionnelles**.

Analogie : proportions

Quand on considère un univers dont les éléments sont les individus d'une population, la probabilité (uniforme) d'un ensemble correspond à une **proportion**.

- Si sur une population de 200 étudiants il y a 40 gauchers, les gauchers représentent 20% de la population.
- Si dans cette population il y a 35 étudiants qui forment le groupe 1, le groupe 1 représente 17.5% de la population.
- Si je veux évaluer la proportion de gauchers dans le groupe 1, il faut compter les étudiants qui sont gauchers **et** dans le groupe 1, et diviser leur nombre par 35 (le nombre d'étudiants dans le groupe en question)
- (Les calculs de probabilités conditionnelles, c'est le même genre, mais avec des probabilités à la place des tailles de populations)

Probabilité conditionnelle : définition

- Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace de probabilités et soit B un événement, quelconque, pour lequel $\mathbb{P}(B) > 0$.

- Pour **tout** événement A, on définit la “probabilité de A sachant B”, ou “probabilité de A conditionnellement à B”, par

$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

$\mathbb{P}_B$ est une fonction de probabilité

- $\mathbb{P}_B(A)$ est bien définie pour toute partie $A \subset \Omega$;
- On calcule facilement $\mathbb{P}_B(\Omega)$: $\Omega \cap B = B$ donc $\mathbb{P}_B(\Omega) = \mathbb{P}(B)/\mathbb{P}(B) = 1$.
- On vérifie l'additivité : si E et F sont deux événements disjoints, $(E \cup F) \cap B = (E \cap B) \cup (F \cap B)$ (union disjointe), et donc

$$\mathbb{P}_B(E \cup F) = \frac{\mathbb{P}(E \cap B) + \mathbb{P}(F \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \mathbb{P}_B(E) + \mathbb{P}_B(F)$$

- **En termes de poids**, si $\mathbb{P}$ correspond à attribuer un poids $p(x)$ à chaque $x \in \Omega$, $\mathbb{P}_B$ correspond à un changement de poids : pour tout $x \in \Omega$, on définit $p'(x)$:
  - si $x \in B$, $p'(x) = p(x)$;
  - si $x \notin B$, $p'(x) = 0$.
- Donc toutes les propriétés **générales** d'une fonction de probabilité, s'appliquent à $\mathbb{P}_B$.

Calculs sur les probabilités conditionnelles

- Dans énormément de problèmes, ce qui est décrit naturellement, ce ne sont pas des probabilités "pures", mais des probabilités conditionnelles.
- Attention : il ne faut pas confondre $\mathbb{P}(A \cap B)$ ("probabilité pure") et $\mathbb{P}_B(A)$ (probabilité conditionnelle) !
- Remarque : en particulier, si on connaît $\mathbb{P}(B)$, $\mathbb{P}_B(A)$, et $\mathbb{P}_{\overline{B}}(A)$ (par exemple), on peut déterminer toutes les probabilités ne faisant intervenir que A et B (et leurs complémentaires) – même pas besoin de décrire explicitement un espace de probabilités.

Autres remarques

- Peut-on avoir $\mathbb{P}(A \cap B) > \mathbb{P}(A)$?
  Non ! car $A \cap B \subset A$
- Peut-on avoir $\mathbb{P}_B(A) > \mathbb{P}(A)$?
  Oui ! car on divise par $\mathbb{P}(B)$ qui peut être petit
- A-t-on forcément $\mathbb{P}_B(A \cup C) = \mathbb{P}_B(A) + \mathbb{P}_B(C)$ si A et C sont incompatibles ?
  Oui ! Car $\mathbb{P}_B$ est une fonction de probabilités
- A-t-on forcément $\mathbb{P}_B(A) + \mathbb{P}_C(A) = \mathbb{P}_{B \cup C}(A)$ si B et C sont incompatibles ?
  Non !

Formule des probabilités totales

- Si on connaît $\mathbb{P}(B)$ et $\mathbb{P}_B(A)$, on peut en déduire $\mathbb{P}(A \cap B)$: $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}_B(A)$.
- On peut aussi calculer $\mathbb{P}(\overline{B}) = 1 - \mathbb{P}(B)$, et si on connaît $\mathbb{P}_{\overline{B}}(A)$, on peut en déduire $\mathbb{P}(A \cap \overline{B})$: $\mathbb{P}(A \cap \overline{B}) = \mathbb{P}(\overline{B})\mathbb{P}_{\overline{B}}(A)$.
- Or A est l'union disjointe de $A \cap B$ et $A \cap \overline{B}$, donc $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap \overline{B})$.
- On en déduit la **formule des probabilités totales :**

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}_B(A) + \mathbb{P}(\overline{B})\mathbb{P}_{\overline{B}}(A)$$

Retour sur l'expérience de la pièce et du dé

- On pourrait décrire un espace de probabilités ($\{P, F\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ avec probabilité uniforme), mais on n'en a pas besoin.
- On considère simplement deux événements : P "la pièce tombe côté Pile" ($F = \overline{P}$ c'est "la pièce tombe côté Face") ; et G "on gagne".
- Vu que la pièce est équilibrée, on a $\mathbb{P}(P) = \mathbb{P}(F) = 1/2$.
- Le lancer de dé avec règle en fonction du résultat de la pièce, décrit naturellement $\mathbb{P}_P(G) = 1/3$, et $\mathbb{P}_F(G) = 1/2$.
- La formule des probabilités totales donne alors $\mathbb{P}(G) = \mathbb{P}(P)\mathbb{P}_P(G) + \mathbb{P}(F)\mathbb{P}_F(G) = \cdots = 1/6 + 1/4 = 5/12$.
- Cela correspond à ce qu'on obtient en considérant l'univers ci-dessus, où $G = \{(P, 1), (P, 2), (F, 1), (F, 2), (F, 3)\}$, mais sur des exemples un peu plus complexes, c'est beaucoup plus simple de calculer à partir de probabilités conditionnelles.

Formule généralisée

formule avec un nombre quelconque d'événements $B_1, B_2, \dots B_k$ qui **partitionnent** l'univers Ω :

Si les B_i sont deux à deux disjoints, **et** que leur union est $\bigcup_{i=1}^k B_i = \Omega$, **alors** on a pour tout événement A,

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}(B_i)\mathbb{P}_{B_i}(A).$$

Conditionnement et indépendance

- (Pour $\mathbb{P}(B) > 0$) les conditions $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$ et $\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A)$ sont équivalentes.

  signification de l'indépendance : le fait que B se produise, n'influence pas les chances que A se produise.

Autres remarques

$(\Omega, \mathbb{P})$ un espace de probas, A un événement de proba > 0.

1. $\mathbb{P}_A$ est une probabilité comme une autre
2. deux événements B et C peuvent être indépendants **pour la probabilité** $\mathbb{P}_A$, c'est une notion différente de l'indépendance **pour la probabilité** $\mathbb{P}$!
3. Pire ! B et C peuvent être indépendants **conditionnellement à** A, indépendants **conditionnellement à** $\overline{A}$, tout en n'étant pas indépendants pour $\mathbb{P}$

Exercice

On applique deux tests de dépistage, le test t_1 et le test t_2, pour une même maladie à une personne. Chaque test, qu'il soit appliqué à une personne malade ou saine, a deux résultats possible : “Positif” ou “Négatif”.

- S'ils sont appliqués à une personne malade, les deux tests donnent des résultats indépendants ; le test t_1 a 90% de chances de donner un résultat “Positif” (10% de “Négatif”), le test t_2 a 80% de chances de donner un résultat “Positif” (et 20% de “Négatif”).
- S'ils sont appliqués à une personne saine, les deux tests donnent des résultats indépendants ; chaque test a 90% de chances de donner un résultat “Négatif”.
- La personne testée a 1% de chances d'être porteuse de la maladie.

Les événements “le test t_1 donne un résultat positif” et “le test t_2 donne un résultat positif” sont-ils indépendants ?

Conditionnements successifs

$(\Omega, \mathbb{P})$ un espace de probabilités fixé ; A, B, C... des événements

- On a vu que $\mathbb{P}_B$ désigne une vraie fonction de probabilité sur Ω, a priori différente de $\mathbb{P}$: $(\Omega, \mathbb{P}_B)$ représente l'expérience de départ **si on suppose que** B **se produit**.
- Dans $(\Omega, \mathbb{P}_B)$, on peut aussi conditionner par un événement C... pour obtenir encore une nouvelle probabilité, qu'on peut noter temporairement $(\mathbb{P}_B)_C$
- Calculons : comment s'exprime $(\mathbb{P}_B)_C(A)$?

$$\begin{aligned}
(\mathbb{P}_B)_C(A) &= \frac{\mathbb{P}_B(A \cap C)}{\mathbb{P}_B(C)} \\
&= \frac{\mathbb{P}((A \cap C) \cap B)/\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(C \cap B)/\mathbb{P}(B)} \\
&= \mathbb{P}_{B \cap C}(A)
\end{aligned}$$

- **Conséquence :** conditionner par B, puis par C, c'est équivalent à conditionner par $B \cap C$; et c'est donc équivalent à conditionner par C, puis par B.

Formule de Bayes

- Il ne faut surtout pas confondre $\mathbb{P}_A(B)$ et $\mathbb{P}_B(A)$: dans la première la "référence" est $\mathbb{P}(A)$, dans la deuxième c'est $\mathbb{P}(B)$.
- Toutefois, il y a un lien entre les deux : en effet on a

$$\mathbb{P}(A)\mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}_B(A).$$

- On en déduit la formule de Bayes :

$$\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}_A(B)\frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}.$$