Correction de l'exercice n° 91 p 125

91 À propos de positions relatives

Soit f la fonction définie sur $I =]0\,;+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{x}$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

1. Déterminer l'équation réduite de la tangente $\mathscr{T}$ à la courbe $\mathscr{C}$ en son point d'abscisse 1.

2. On considère la fonction d définie sur I par :

$$d(x)=f(x)-\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\right)$$

a. Montrer que, pour tout réel x appartenant à I :

$$d'(x)=\frac{1-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$$

b. Étudier les variations de d sur I. Calculer $d(1)$.

c. Déterminer le signe de $d(x)$ sur I.

d. Interpréter ce résultat en termes de positions relatives entre $\mathscr{C}$ et la tangente $\mathscr{T}$.

<u>Correction</u> :

1. L'équation réduite de $\mathcal{T}$ est donnée par la formule :

$$y = f(1) + f'(1)(x-1)$$
$$\Leftrightarrow y = \sqrt{1} + \frac{1}{2\sqrt{1}}(x-1)$$
$$\Leftrightarrow y = 1 + \frac{1}{2}(x-1) = \frac{1}{2}(x+1)$$

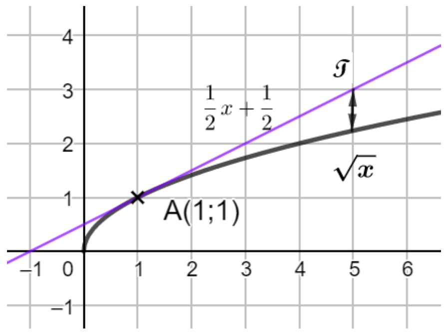
2. a) $\forall\ x\ \in I$, on a :

$$d'(x) = f'(x) - \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow d'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} = \frac{1-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$$

b) Pour étudier les variations de d sur I, on étudie le signe de d' sur I.
$\forall\ x\ \in I,\ 2\sqrt{x} > 0$. Le signe de $d'(x)$ est donc le signe de $1-\sqrt{x}$
On a $d'(x) = 0 \Leftrightarrow 1-\sqrt{x} = 0 \ \Leftrightarrow\ \sqrt{x} = 1\ \Leftrightarrow x = 1$
Si $x \geq 1$, alors $\sqrt{x} \geq 1$ et $1-\sqrt{x} \leq 0$ car la fonction $\sqrt{x}$ est croissante, donc $d'(x) \leq 0$
Si $x \leq 1$, alors $\sqrt{x} \leq 1$ et $1-\sqrt{x} \geq 0$ donc $d'(x) \geq 0$
Par ailleurs $d(1) = f(1) - \left(\frac{1}{2}\times 1 + \frac{1}{2}\right) = \sqrt{1} - 1 = 0$.
On en déduit le tableau de variation de d sur I.

$d'(0)$ n'est
Pas défini

x	0		1		$+\infty$
$d'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$d(x)$	$-\frac{1}{2}$	↗	0	↘	



c) $]0;+\infty[$ est un <u>intervalle ouvert</u> et donc 0 est un maximum de la fonction f sur I.
On en déduit que $\forall x \in I\ d(x) \leq 0$ (et même $d(x) < 0$ si $x \neq 1$).

3. Cela signifie que

$$\forall x\ \in I, \text{on a }\ f(x) - \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right) \leq 0 \Leftrightarrow f(x) \leq \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

La courbe de la fonction f est donc toujours « sous la tangente » $\mathcal{T}$ de f en 1.
L'écart est nul pour $x = 1$, au point $A(1;1)$.

Correction de l’exercice n° 92 p 125

92 « Distance » entre deux courbes

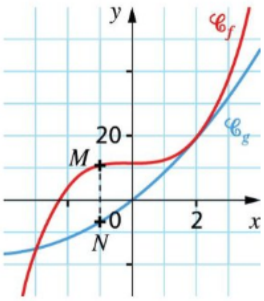
On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3+12$ et $g(x)=x^2+8x$, et $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ leurs courbes représentatives dans un repère orthogonal.

1. a. Montrer que, pour tout réel x, on a :

$$f(x)-g(x)=(x+3)(x-2)^2$$

b. Étudier alors les positions relatives de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

2. On considère les points M et N de même abscisse $x\in[-3;2]$, M (resp. N) appartenant à $\mathscr{C}_f$ (resp. à $\mathscr{C}_g$) comme l’illustre la figure ci-contre.



Quelle est la distance maximale MN lorsque x décrit l’intervalle $[-3;2]$? Justifier.

Correction :

1. a. On a :
   $f(x)-g(x) = x^3+12-(x^2+8x)$
   $\quad = x^3-x^2-8x+12$
   Il n’y a pas de factorisation évidente.
   Il faut donc développer l’expression de droite et comparer les résultats.
   $(x+3)(x-2)^2 = (x+3)(x^2-4x+4)$
   $\quad = x^3-4x^2+4x+3x^2-12x+12$
   $\quad = x^3-x^2-8x+12$
   L’égalité est donc bien démontrée.
2. Pour étudier les positions relatives des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$, on étudie le signe de la fonction $f-g$.
   Posons $h=f-g$. On a :
   $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$
   $\quad x\to h(x)=(x+3)(x-2)^2$
   La courbe de f est au dessus de celle de g pour les valeurs d’abscisse telles que $h(x)>\ 0$.
   La courbe de f est au dessous de celle de g pour les valeurs d’abscisse telles que $h(x)<\ 0$.

   La courbe de f est confondue avec celle de g pour les valeurs d’abscisse telles que $h(x)=\ 0$.
   On fait un tableau de signe pour la fonction h.

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
$(x+3)$		$-$	0	$+$		$+$	
$(x-2)^2$		$+$		$+$	0	$+$	
$h(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	

   On en déduit que la courbe $\mathcal{C}_f$ est au dessous de $\mathcal{C}_g$ pour $x\in]-\infty;3[$, au dessus pour $x\in]-3;2[\cup]2;+\infty[$. Pour $x\in\{-3;2\}$ les deux courbes sont confondues.
   Ce résultat s’observe bien sur la figure.
3. D’après la question précédente, les valeurs de f sont toujours supérieures ou égales à celles de g sur l’intervalle étudié. La distance entre les points $M(x;f(x)$ et $N(x;g(x))$ est donc égale à $h(x)=f(x)-g(x)$.
   Chercher la distance maximale revient donc à chercher la valeur maximale de h sur l’intervalle $]-3;2[$.
   Pour cela, il faut étudier les variations de h. On a :
   $h'(x)=(x^3)'-(x^2)'-(8x)'+(12)'=3x^2-2x-8$
   Pour étudier le signe de h', il faut calculer le discriminant et trouver les racines éventuelles.
   $\Delta=(-2)^2-4\times3\times(-8)=4+96=100$.
   On a $\Delta>0$ et $\sqrt{\Delta}=10$. Il y a donc deux racines $x_1$et x_2 :
   $x_1=\frac{2-10}{2\times3}=-\frac{8}{6}=-\frac{4}{3}$et $x_2=\frac{2+10}{2\times3}=\frac{12}{6}=2$
   Comme $a=3>0$, on sait que $h'(x)>0$ sauf entre les racines (courbe en U). De plus x_2 correspond à la borne supérieure de l’intervalle.
   On peut établir le tableau de variation de h :
   La distance maximale est $h(x_1)=h\left(-\frac{4}{3}\right)$

$$=\left(-\frac{4}{3}+3\right)\left(-\frac{4}{3}-2\right)^2=\frac{-4+9}{3}\times\left(\frac{-4-6}{3}\right)^2$$
$$=\frac{5}{3}\times\frac{100}{9}=\frac{500}{27}$$

x	-3		$x_1=-\frac{4}{3}$		2
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0
$h(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{500}{27}$	$\searrow$	0