Probabilités, Statistiques, Combinatoire : TD5

Probabilités : indépendance, probabilités conditionnelles

Exercice 5.1

On suppose donnés deux événements A et B, indépendants.

1. (Symétrie) Est-ce que B et A sont indépendants ?
2. (Complémentaire) Montrer, par le calcul, que A et $\overline{B}$ sont indépendants.
3. Qu'en est-il de $\overline{A}$ et $\overline{B}$?
4. On considère maintenant trois événements, et on s'interroge sur la notion d'indépendance globale. Montrer que la définition de "A, B et C sont globalement indépennndants" est équivalente à "A, B et C sont deux à deux indépendants, et C est indépendant de $A \cap B$".
5. Si trois événements A, B et C sont globalement indépendants, qu'en est-il de A, B et $\overline{C}$?

(si des événements sont globalement indépendants, on peut remplacer un ou plus d'entre eux par leurs complémentaires et les événements sont toujours globalement indépendants)

Exercice 5.2

On lance deux dés équilibrés, un blanc et un rouge. On modélise cette expérience par l'ensemble $[[1,6]] \times [[1,6]]$, muni de la loi de probabilités uniforme, qu'on notera $\mathbb{P}$; l'événement élémentaire (a,b) représente le résultat où le dé blanc donne a, et le dé rouge, b.

On considère les événements suivants :

- A : le dé blanc donne 1.
- B : "double", les deux dés donnent le même résultat
- C : le dé rouge donne un résultat pair.
- D : la somme des résultats des deux dés est 6.
- E : la somme des résultats des deux dés est 7.

1. Écrire chaque événement en donnant tous ses éléments. Calculer sa probabilité.
2. Pour chaque choix possible de deux des cinq événements précédents, écrire leur intersection en donnant tous ses éléments. Calculer la probabilité de chaque intersection.
3. Parmi les événements, lesquels sont indépendants deux à deux ?
4. Sur le même espace de probabilités, décrire trois événements X, Y et Z, dont aucun ne doit avoir probabilité 0 ou 1, et qui soient *globalement* indépendants.

Exercice 5.3

On dispose de trois jetons, indistinguables au toucher :

- Le jeton a a une face 1 qui est blanche, et une face 2 qui est noire ;
- le jeton b a ses deux faces blanches ;
- le jeton c a ses deux faces noires.

On tire un des trois jetons au hasard (uniforme), et on le pose sur la table, d'un côté au hasard (uniforme).

Le but de l'exercice est de répondre aux questions de deux manières différentes : d'une part, en décrivant un univers de probabilités explicite sur lequel on fera les calculs de probabilités et de probabilités conditionnelles ; d'autre part, **sans** expliciter l'univers, simplement en traduisant la situation sous forme de probabilités connues et en utilisant les propriétés des probabilités conditionnelles.

1. **Version "univers explicite"** : on prend comme univers $\Omega = \{a, b, c\} \times \{1, 2\}$, dont les éléments sont des couples dont la première composante indique le jeton tiré, et la deuxième composante, la face visible du jeton. Quelle est la loi de probabilité sur Ω suggérée par l'énoncé ?
   (a) On définit les événements B "la face visible est blanche", N "la face visible est noire", et M "la face cachée est de la même couleur que la face visible".
   Écrire de manière ensembliste les événements B, N, M et $N \cap M$.
   (b) Déterminer $\mathbb{P}(B)$, $\mathbb{P}(N)$, $\mathbb{P}(M)$, $\mathbb{P}(N \cap M)$, et $\mathbb{P}_N(M)$.
2. **Version sans univers explicite** : On définit comme précédemment les événement B, N et M, et, en plus, les trois événements J_a, J_b, et J_c correspondant au jeton qui est tiré (J_a : "le jeton tiré est le jeton a", etc).
   (a) Quelle est la relation entre les événements J_a, J_b et J_c ?
   (b) D'après l'énoncé, quelles sont les probabilités des événements J_a, J_b et J_c ?
   (c) Exprimer l'événement M en termes des événements J_a, J_b et J_c. Qu'en déduit-on pour $\mathbb{P}(M)$?
   (d) Peut-on faire de même pour B et N (les exprimer en fonction de J_a, J_b et J_c) ?
   (e) Toujours en interprétant l'énoncé, déterminer $\mathbb{P}_{J_a}(B)$, $\mathbb{P}_{J_a}(N)$, $\mathbb{P}_{J_a}(M)$; $\mathbb{P}_{J_b}(B)$, $\mathbb{P}_{J_b}(N)$, $\mathbb{P}_{J_b}(M)$; et $\mathbb{P}_{J_c}(B)$, $\mathbb{P}_{J_c}(N)$, et $\mathbb{P}_{J_c}(M)$.
   (f) En utilisant la formule des probabilités totales, en déduire $\mathbb{P}(B)$, $\mathbb{P}(N)$, et $\mathbb{P}(M)$.
   (g) Écrire l'événement $N \cap M$ en fonction de J_a, J_b et J_c. En déduire $\mathbb{P}_N(M)$.

Exercice 5.4

Dans cet exercice, on applique les deux mêmes méthodes qu'au précédent, dans une situation différente.

On dispose de trois jetons, marqués respectivement 4, 6 et 8 (cette fois, les deux faces d'un jeton portent le même nombre) ; et de trois dés, chacun supposé équilibré :
— un dé classique, cubique, aux faces marquées de 1 à 6 ;
— un dé tétraédrique, à 4 faces marquées de 1 à 4 ;
— un dé octaédrique, à 8 faces marquées de 1 à 8.

On réalise l'expérience suivante : les trois jetons sont mis dans un sac opaque, et on en tire un au hasard ; puis, on lance le dé dont le nombre de faces est indiqué sur le jeton tiré, et on note le résultat du dé.

On cherche à déterminer la probabilité de tirer 1 au dé ; la probabilité de tirer 5 ; la probabilité d'avoir lancé le dé cubique **si** on a obtenu 4 au dé.

1. **Version "univers explicite"** : on représente l'expérience par l'univers $\Omega = (\{4\} \times \{1, 2, 3, 4\}) \cup (\{6\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}) \cup (\{8\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\})$, dont les éléments sont des couples dont la première composante indique le jeton tiré, et la deuxième composante, le résultat du dé.

   Quelle loi de probabilités vous semble pertinente pour représenter l'expérience décrite ?
2. **Version "sans univers explicite"** : on considère des événements J_4, J_6 et J_8 indiquant le jeton tiré, et D_1, D_2, D_3, D_4, D_5, D_6, D_7 et D_8, correspondant au résultat du dé.

   Quelle relation y a-t-il *a priori* entre les événements J_4, J_6 et J_8 ?

(a) Interpréter l'énoncé pour donner les probabilités des événements J_4, J_6 et J_8.

(b) Interpréter comme des probabilités (éventuellement, probabilités conditionnelles) les questions posées en préambule.

(c) Toujours en interprétant l'énoncé, donner, en fonction de l'entier k (entre 1 et 8), $\mathbb{P}_{J_4}(D_k)$, $\mathbb{P}_{J_6}(D_k)$, et $\mathbb{P}_{J_8}(D_k)$.

(d) Déterminer $\mathbb{P}(D_1)$, $\mathbb{P}(D_5)$, $\mathbb{P}(D_4)$, $\mathbb{P}_{D_1}(J_4)$.

Exercice 5.5

On dispose de deux jetons, marqués respectivement 6 et 8, et de quatre dés équilibrés : deux dés (un blanc, un rouge) cubiques à 6 faces (marquées de 1 à 6), et deux dés (un blanc, un rouge) octaédriques à 8 faces (marquées de 1 à 8).

On réalise l'expérience consistant à tirer un jeton aléatoire, puis à lancer les deux dés dont le nombre de faces correspond au jeton, et à noter les résultats des deux dés (le blanc et le rouge).

On note J_6 l'événement "on tire le jeton 6", et J_8 "on tire le jeton 8".

1. Déterminer les probabilités des événements suivants : "On obtient 1 avec le dé blanc, et 3 avec le dé rouge" ; "On obtient 3 avec le dé blanc, et 7 avec le dé rouge" ; "On obtient le même résultat avec les deux dés".

   Indication : à chaque fois, on commencera par faire le calcul en conditionnant par l'événement J_6, et en conditionnant par l'événement J_8.

2. Identifier, dans cette expérience, deux événements A et B qui sont indépendants conditionnellement à J_6, indépendants conditionnellement à J_8, mais qui ne sont pas indépendants.