La fonction exponentielle

I) La fonction exponentielle

Propriété et définition :

Il existe une unique fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$.
Cette fonction est appelée **fonction exponentielle** et est notée exp.

Démonstration :

On admet l'existence de la fonction.
On va montrer qu'une telle fonction est unique.

1ère étape : on montre que la fonction f ne s'annule jamais.

Posons $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \to f(x) \times f(-x)$

φ est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables et on a
$\forall\, x \in \mathbb{R}\ \ \varphi'(x) = f'(x) \times f(-x) + f(x) \times (-1) \times f'(-x)$ car $(f(-x))' = (-1) \times f'(-x)$
$= f'(x) \times f(-x) - f(x) \times f'(-x)$
$= 0$

La fonction dérivée φ' étant la fonction nulle, la fonction φ est constante
et $\forall\, x \in \mathbb{R}\ \ \varphi(x) = f(x) \times f(-x) = \varphi(0) = 1$ car $f(0) = 1$
On a ainsi montré que $\forall\, x \in \mathbb{R}\ \ f(x) \times f(-x) = 1$ et on en déduit que la fonction f ne s'annule jamais (on en déduit que $f(x) > 0$ car $f(0) = 1 > 0$).

2ème étape : on montre que la fonction f est unique.

Supposons qu'il existe une autre fonction g qui vérifie $g' = g$ et $g(0) = 1$.
Posons $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \to \dfrac{f(x)}{g(x)}$

Cette fonction est bien définie sur $\mathbb{R}$ car f et g ne s'annulent pas. Elle est dérivable comme quotient de fonctions dérivables.

$\forall\, x \in \mathbb{R}\ \ h'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} = 0$ car $f'(x) = f(x)$ et $g'(x) = g(x)$

La fonction h est donc constante et $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = h(1) = \frac{f(1)}{g(1)} = 1 \Leftrightarrow f(x) = g(x)$

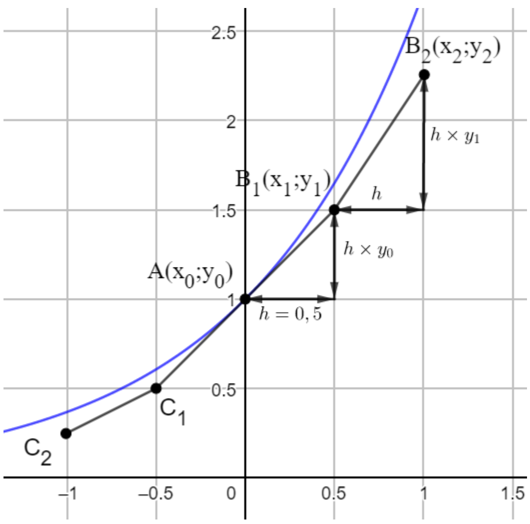
On a bien montré l'unicité de la fonction f.

II) Représentation graphique par la méthode d'Euler

La méthode d'Euler est un algorithme permettant de calculer les valeurs approchées de la fonction exponentielle sur un intervalle $[-a\,;a]$ à partir de la définition qui a été donnée : $f' = f$ et $f(0) = 1$.

Le principe :

L'idée générale de la méthode est que la courbe d'une fonction est proche de sa tangente en un point donné pour des valeurs d'abscisses proches de celle du point.
Plus on se rapproche du point, meilleure sera l'approximation de la fonction par sa tangente.



On part du point $A(0\,;1)$ qui est sur la courbe de f car $f(0) = 1$.
A partir de ce point, on va construire successivement les points $B_1(x_1; y_1), B_2(x_2; y_2), \dots, B_n(x_n; y_n)$ pour lesquels y_n sera une approximation de $f(x_n)$.

Comment déterminer les coordonnées du point $B_{n+1}(x_{n+1}; y_{n+1})$ à partir des coordonnées du point $B_n(x_n; y_n)$?

On choisit un pas $h > 0$ entre x_n et x_{n+1}.
On a donc $x_{n+1} = x_n + h$ et $x_0 = 0$. La suite (x_n) est une suite arithmétique et $x_n = x_0 + nh = nh$.

Le point $B_n(x_n; y_n)$ est supposé être proche de la courbe et y_n est donc une approximation de $f(x_n)$.
Or on cherche f telle que $f' = f$: y_n est donc aussi une approximation de $f'(x_n)$, c'est-à-dire du coefficient directeur de la tangente à la courbe au point B_n.

On choisit de placer le point B_{n+1} sur la tangente à la courbe au point B_n :

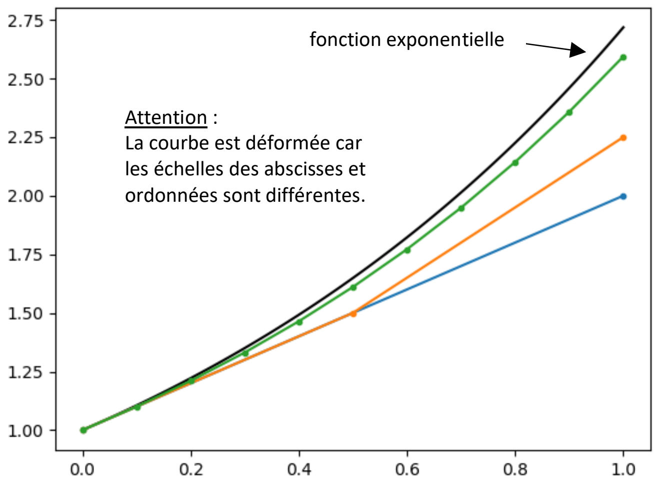
- son abscisse est $x_{n+1} = x_n + h$
- son ordonnée est $y_{n+1} = \underbrace{y_n}_{\text{Ordonnée de } B_n} + h \times \underbrace{y_n}_{\text{Coefficient directeur de la tangente en } B_n} = (1+h) \times y_n$.

La suite (y_n) est donc une suite géométrique, avec $y_0 = 1$ et $y_{n+1} = (1+h) \times y_n$.
On a alors $y_n = y_0 \times (1+h)^n = (1+h)^n$.

On peut ainsi construire la suite des points $B_n(nh; (1+h)^n)$.
Ces points seront d'autant plus proches de la courbe de la fonction f recherchée que h est petit.

On construit de la même façon la suite des points $C_n(-nh; (1-h)^n)$.

A l'aide d'un programme Python, on peut tracer les courbes obtenues pour différentes valeurs du pas h.
Comme attendu, l'approximation de la fonction exponentielle s'améliore quand h diminue.



<u>Remarque</u> :

Ici on a choisi de tracer les courbes associées aux points B_n en utilisant dans le programme Python la définition explicite des suites (x_n) et (y_n).
On peut aussi le faire avec la définition par récurrence.

```python
import matplotlib.pyplot as plt
from math import exp
b = 1
# tracé de la courbe exponentielle
# avec un pas de h
def exponentielle(h) :
    ListeX = []
    ListeY = []
    nbIter = int(b/h)
    for i in range(0,nbIter+1):
        x = i*h
        y = exp(x)
        ListeX.append(x);
        ListeY.append(y);
    plt.plot(ListeX, ListeY, color="black")

# tracé de la courbe par la méthode d'Euler
# avec un pas de h
def methodeEuler(h):
    ListeX = []
    ListeY = []
    nbIter = int(b/h)
    for i in range(0,nbIter+1):
        x = i*h
        y = (1+h)**i
        ListeX.append(x);
        ListeY.append(y);
    plt.plot(ListeX, ListeY, marker=".")

exponentielle(0.01)
methodeEuler(1)
methodeEuler(0.5)
methodeEuler(0.1)
plt.show()
```

III) Propriétés algébriques

Propriétés :

$\forall\, x \in \mathbb{R}, \forall\, y \in \mathbb{R}$

$\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$ (1) $\qquad \exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y)$ (2)

Démonstration :

(1) On a déjà montré que $\forall\, x \in \mathbb{R}$ $exp(x) \times exp(-x) = 1$.
On a donc bien $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$

(2) Soit $y \in \mathbb{R}$.
Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \to \varphi(x) = \exp(x+y) \times \exp(-x)$
φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= (\exp(x+y))' \times \exp(-x) + \exp(x+y) \times (\exp(-x))' \\ &= exp'(x+y) \times \exp(-x) + \exp(x+y) \times (-1) \times exp'(-x) \\ &= \exp(x+y) \times \exp(-x) - \exp(x+y) \times \exp(-x) \text{ car } exp' = exp \\ &= 0\end{aligned}$$

La fonction φ est donc constante sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$ $\varphi(x) = \exp(x+y) \times \exp(-x) = \varphi(0) = \exp(y)$ car $\exp(0) = 1$.
On a donc $\exp(x+y) \times \exp(-x) = \exp(y) \Leftrightarrow \exp(x+y) = \frac{\exp(y)}{\exp(-x)} \Leftrightarrow \exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y)$
car $\frac{1}{\exp(-x)} = \exp(x)$ d'après (1). L'égalité est bien démontrée.

Corollaire :

$\forall\, x \in \mathbb{R}, \forall\, y \in \mathbb{R}$

$\exp(x-y) = \dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$

Démonstration :

On a $\exp(x-y) = \exp\big(x+(-y)\big) = \exp(x) \times \exp(-y) = \exp(x) \times \frac{1}{\exp(y)}$ car $\exp(-y) = \frac{1}{\exp(y)}$
L'égalité est bien démontrée.

Propriété :

$\forall\, x \in \mathbb{R}$ et $\forall\, n \in \mathbb{Z}$, on a $\exp(nx) = (\exp(x))^n$

Démonstration :

a) L'égalité est vérifiée pour $n = 0$. En effet $\exp(0) = 1 = (\exp(x))^0$.
b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\exp(nx) = \exp\big((n-1) \times x + x\big) = \exp\big((n-1) \times x\big) \times \exp(x)$
Posons $u_n = \exp(nx)$. D'après ce qui précède, on a $u_n = \exp(x) \times u_{n-1}$ et $u_0 = 1$.
La suite (u_n) est une suite géométrique de raison $exp(x)$ et de premier terme $u_0 = 1$.
On a donc bien $u_n = (\exp(x))^n$.
c) Si $n \in \mathbb{Z}$ et $n < 0$
Dans ce cas, $-n \in \mathbb{N}^*$ et $\exp\big((-n) \times x\big) = (\exp(x))^{-n}$ d'après ce qui précède.
Or $\exp(-nx) = \frac{1}{\exp(nx)}$ et $(\exp(x))^{-n} = \frac{1}{(\exp(x))^n}$
On a donc $\frac{1}{\exp(nx)} = \frac{1}{(\exp(x))^n} \Leftrightarrow \exp(nx) = (\exp(x))^n$ et le résultat est établi.

IV) La notation e^x

D'après ce qui précède, $\forall\, n \in \mathbb{Z}$, on a $\exp(\mathrm{n}) = \exp(n \times 1) = (\exp(1))^n = e^n$ si on pose $e = \exp(1)$.
En reprenant cette nouvelle écriture, $\forall\, n \in \mathbb{Z}$ et $\forall\, m \in \mathbb{Z}$, on a les égalités $e^{n+m} = e^n e^m$ et $e^{n-m} = \frac{e^n}{e^m}$.

La fonction exponentielle est similaire à une fonction puissance. Par convention, on décide de généraliser l'écriture $exp(x) = e^x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Définition et propriétés :

On pose $\boldsymbol{e = \exp(1)}$. Le nombre e est appelé la **constante d'Euler**.
$\forall x \in \mathbb{R}$, on pose $\exp(x) = e^x$
$\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\forall\, y \in \mathbb{R}$ et $\forall\, n \in \mathbb{Z}$ on a les propriétés :

$$e^0 = 1 \qquad e^1 = e \qquad e^{-x} = \frac{1}{e^x} \qquad e^{x+y} = e^x e^y \qquad e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y} \qquad e^{nx} = (e^x)^n$$

De plus $(e^x)' = e^x$ et $\left(e^{ax+b}\right)' = ae^x$

Dans la partie II) on a construit une suite de points $B_n(nh; (1+h)^n)$ pour un pas donné h. Plus h est petit, plus la suite des points se rapproche de la courbe de la fonction exponentielle.
Pour $x \in \mathbb{R}$ donné, si on choisit un pas $h = \frac{x}{n}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$, le point B_n d'indice n aura pour abscisse $n \times \frac{x}{n} = x$. Son ordonnée $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ sera donc une approximation de $\exp(x) = e^x$, d'autant meilleure que $h = \frac{x}{n}$ est petit, c'est-à-dire que n est grand.

Ainsi, on peut écrire $\boxed{e^x = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \text{ et } e = e^1 = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}$

e est un nombre irrationnel
et on a $\boldsymbol{e \approx 2,718}2818284590\ldots$

Exercices :

a) Simplifier les écritures

$$A = \frac{e^{-2x}}{e^x} = e^{-2x-x} = e^{-3x}$$

$$B = \frac{e^2(e^7)^2}{e^{15}} = \frac{e^2 e^{7\times 2}}{e^{15}} = e^{2+14-15} = e$$

$$C = e^{-x}e^x - 1 = e^{-x+x} - 1 = e^0 - 1 = 1 - 1 = 0$$

$$D = e^{3x}(e^{-x} + e^{-3x}) = e^{3x-x} + e^{3x-3x} = e^{2x} + e^0 = 1 + e^{2x}$$

b) Dériver les fonctions

$$f(x) = (1+x)e^x$$
$$f'(x) = 1 \times e^x + (1+x)e^x = e^x + (1+x)e^x = (2+x)e^x$$

$$g(x) = \frac{e^x + e^{3x}}{1 + e^x}$$
$$g'(x) = \frac{(e^x + 3e^{3x})(1+e^x) - (e^x + e^{3x})e^x}{(1+e^x)^2} = \frac{e^x + e^{2x} + 3e^{3x} + 3e^{4x} - e^{2x} - e^{4x}}{(1+e^x)^2} = \frac{e^x + 3e^{3x} + 2e^{4x}}{(1+e^x)^2}$$

V) Etude de la fonction exponentielle

Propriété :

$\forall\, x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$

Démonstration :

$\forall\, x \in \mathbb{R}$, $e^x = e^{2\times\frac{x}{2}} = \left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2 > 0$ car un carré est toujours positif et la fonction exponentielle ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.
Autre démonstration possible : e^x ne s'annule pas et $e^0 = 1 > 0$ donc $e^x > 0\ \forall\, x \in \mathbb{R}$.

Propriété :

La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Démonstration :

$\forall\, x \in \mathbb{R}$, $(e^x)' = e^x > 0$.
La dérivée de e^x étant strictement positive, la fonction e^x est strictement croissante.
On en déduit les propriétés suivantes.

Propriété :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \forall\, y \in \mathbb{R} \quad e^x = e^y \Leftrightarrow x = y$$
$$e^x < e^y \Leftrightarrow x < y$$
$$e^x > e^y \Leftrightarrow x > y$$

Si u et v sont des fonctions définies sur $\mathbb{R}$, on a donc :

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \quad e^{u(x)} = e^{v(x)} \Leftrightarrow u(x) = v(x)$$
$$e^{u(x)} < e^{v(x)} \Leftrightarrow u(x) < v(x)$$
$$e^{u(x)} > e^{v(x)} \Leftrightarrow u(x) > v(x)$$

Applications :

a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $e^{2x^2-1} \geq 1$

$e^{2x^2-1} \geq 1 \Leftrightarrow e^{2x^2-1} \geq e^0$

$\Leftrightarrow 2x^2 - 1 \geq 0$

$\Leftrightarrow x^2 \geq \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x \in]-\infty; -\frac{1}{\sqrt{2}}] \cup [\frac{1}{\sqrt{2}}; +\infty[$

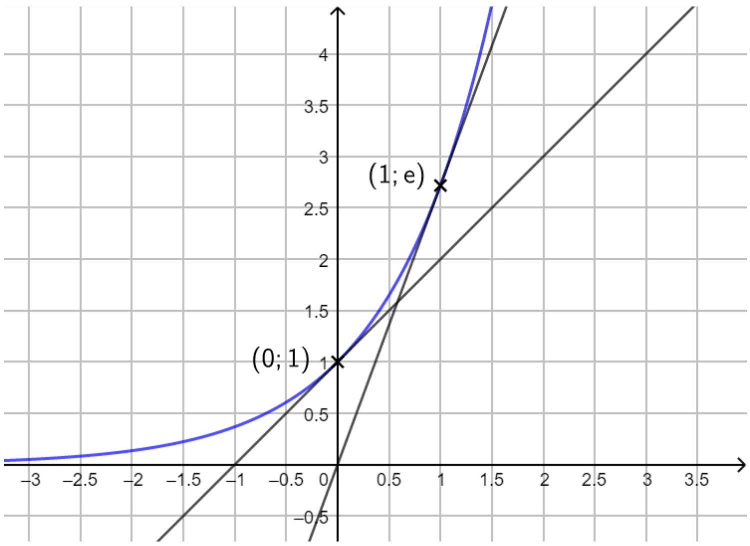
b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $e^{-x+2} = e^{3x}$

$e^{-x+2} = e^{3x} \Leftrightarrow -x + 2 = 3x$

$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

Courbe représentative

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$+$		$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	1	$\nearrow$	e	$\nearrow$	



Tangente au point d'abscisse 0 :

$y = e^0 + e^0 x = 1 + x$

Tangente au point d'abscisse 1 :

$y = e^1 + e^1(x-1) = ex$

La tangente à la courbe au point d'abscisse 1 passe par l'origine.

VI) Etude de la suite (e^{na})

Soit $a \in \mathbb{R}$. On définit la suite (u_n) par $u_n = e^{na}$, $n \in \mathbb{N}$.

On a $u_0 = e^0 = 1$.
Pour $n \geq 1$, on a $u_n = e^{na} = e^{(n-1)a+a} = e^{(n-1)a} \times e^a = u_{n-1} \times e^a$

La suite (u_n) est donc une suite géométrique de raison $q = e^a$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 \times q^n = 1 \times (e^a)^n = (e^a)^n$.

Par ailleurs, la fonction e^x est strictement croissante et $e^0 = 1$.
Ainsi :

- si $a < 0$ alors la raison $q = e^a$ est telle que $0 < q < 1$ et la suite est strictement décroissante ;
- si $a = 0$, $u_n = 1\ \forall\, n \in \mathbb{N}$ et la suite est une suite constante ;
- si $a > 0$ alors la raison $q = e^a$ est telle que $q > 1$ et la suite est strictement croissante.

Cas particulier avec $a = 1$: $e^n = (e^1)^n = (e)^n$

La fonction e^x peut être considérée comme une fonction puissance de la constante d'Euler e pour les valeurs entières $n \in \mathbb{N}$. Comme $e \approx 2{,}7$, c'est une fonction à la croissance très rapide !

<u>Exercice</u> :

Déterminer la raison et le premier terme des suites géométriques

a) $u_n = -e^{-n}$

$u_n = -e^{-1\times n}$

$= (-1) \times (e^{-1})^n$

$u_0 = -1$ et $q = e^{-1}$

b) $u_n = 4e^{3n-1}$

$u_n = 4e^{3\times n}e^{-1}$

$= (4e^{-1}) \times (e^3)^n$

$u_0 = 4e^{-1}$ et $q = e^3$

c) $u_n = e^{\frac{n}{2}}$

$u_n = e^{\frac{1}{2}\times n}$

$= 1 \times \left(e^{\frac{1}{2}}\right)^n$

$u_0 = 1$ et $q = e^{\frac{1}{2}}$

d) $u_n = \frac{3}{e^{2n}}$

$u_n = 3e^{-2n}$

$= 3 \times (e^{-2})^n$

$u_0 = 3$ et $q = e^{-2}$

VII) <u>Etude des fonctions de la forme $x \to e^{kx}$</u>

Soit k un réel strictement positif. On définit les fonctions :

$f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to e^{kx}$ et $g_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to e^{-kx}$

Les fonctions f_k sont strictement croissantes sur $\mathbb{R}$ et correspondent à une croissance dite exponentielle.
Les fonctions g_k sont strictement décroissantes sur $\mathbb{R}$ et correspondent à une décroissance dite exponentielle.

<u>Démonstration</u> :

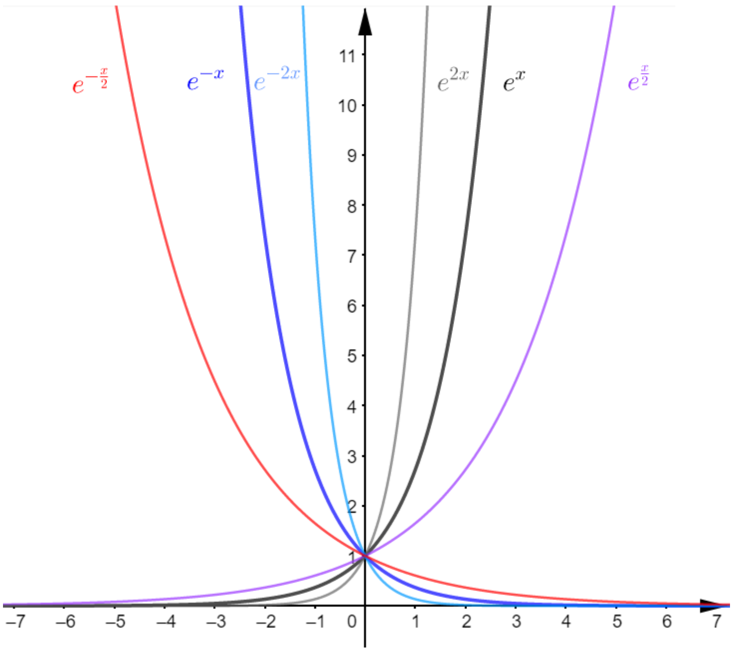
$\forall\, x \in \mathbb{R}\ f_k'(x) = ke^{kx} > 0$ et $g_k'(x) = -ke^{-kx} < 0$.
Plus k est grand, plus la croissance ou la décroissance est rapide.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f_k'(x)$		$-$	
$f_k(x)$	$\nearrow$	1	

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g_k'(x)$		$-$	
$g_k(x)$	$\searrow$	1	

On remarque :

- Que toutes les courbes passent par le point $(0; 1)$
- Que les courbes f_k et g_k sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées
  (en effet $f_k(-x) = e^{k(-x)} = e^{-kx} = g_k(x)$)



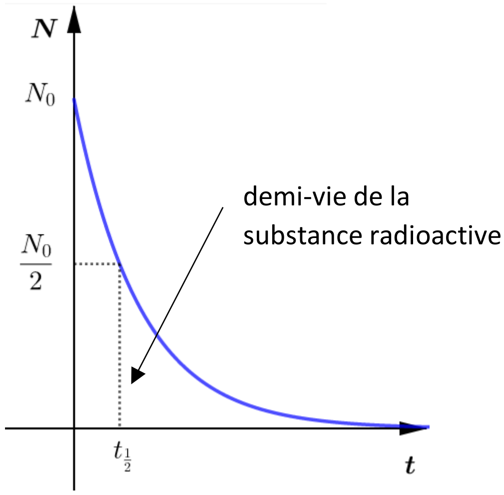
VIII) Exemples d’utilisation de la fonction exponentielle

1) La décroissance radioactive

La radioactivité est un phénomène physique par lequel des noyaux atomiques instables se transforment en un autre élément plus stable en émettant des particules de matière et de l’énergie. La décroissance du nombre de noyaux d’un échantillon radioactif contenant initialement N_0 noyaux est régie par la loi :

$$N = N_0 \times e^{-\lambda t}$$

où N est le nombre de noyaux radioactifs restants à l’instant t
λ est une constante radioactive positive exprimée en s^{-1}



La demi-vie de la substance radioactive est le temps au bout duquel le nombre de noyaux radioactifs est divisé par deux.

Les demi-vies des noyaux radioactifs couvrent une gamme extrêmement large de valeurs :

- Uranium 238 : $4{,}5 \times 10^9$ ans
- Carbone 14 : 5730 ans
- Radon 220 : 56 secondes
- Polonium 213 : 4×10^{-6} seconde

Si N_0 est le nombre de noyaux présents dans l’échantillon à la date initiale :

- Au bout d’une demi-vie, il reste $\frac{N_0}{2}$ noyaux radioactifs dans l’échantillon ;
- Au bout de deux demi-vies, il reste $\frac{\frac{N_0}{2}}{2} = \frac{N_0}{2^2}$ noyaux radioactifs dans l’échantillon ;
- Au bout de n demi-vies, le nombre de noyaux radioactifs sera égal à $\frac{N_0}{2^n}$.

Le modèle mathématique discret qui traduit cette évolution est une suite géométrique.
Soit (u_n) la suite où le terme u_n représente le nombre de noyaux radioactifs au bout de n demi-vies.
On a $u_0 = N_0$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n$ soit $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n N_0 = \frac{N_0}{2_n}$
Cette loi de décroissance fournit une horloge qui permet de dater des événements.

2) Evolution d’un capital à taux fixe

On considère un capital K placé sur un compte à un taux d’intérêt mensuel fixe t.
Cela signifie que chaque mois le détenteur du capital perçoit des intérêts, c’est-à-dire un revenu, sur le capital placé :

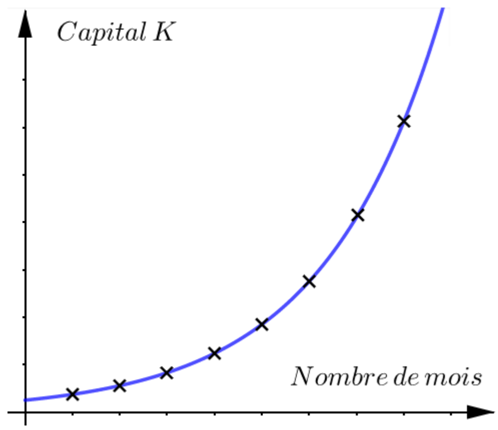
Intérêts perçus = $t \times K$

Si le détenteur du capital laisse les intérêts sur son compte, ceux-ci viennent grossir chaque mois son capital et les intérêts du mois suivant doivent donc être calculés en les intégrant au capital.

Soit K_n le capital ainsi constitué après n mois.
On a la relation $K_{n+1} = K_n + t \times K_n = (1+t) \times K_n$

On voit que le modèle mathématique qui traduit cette évolution du capital placé est une suite géométrique de raison $1+t$. On a donc la relation :

$\boxed{K_n = K_0 \times (1+t)^n \text{ où } K_0 \text{ est le montant du capital initialement placé.}}$



Si on place les points représentant cette suite, on constate qu’ils suivent une courbe exponentielle. L’expression de la fonction exponentielle sur laquelle figurent les points est :

$f(x) = K_0 \times e^{kx}$ où $k = \ln(1+t)$ est le logarithme népérien du nombre $1+t$