USTC 2019-2020 Fall 6th seminar

December 23rd 9:45—11:20

2019 年 12 月 19 日

1. （广义 n 阶导数）
设 $f(x)$ 在 x_0 附近 $n-1$ 阶连续可微，且在 x_0 处有 n 阶导数。证明：
$f^{(n)}(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^n}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}C_n^k f(x_0+kh)$，并且举例子：$f$ 在 x_0 处没有 2 阶导数，但如上定义的极限存在；对函数 g 以下的两个极限存在，(m 某个非零整数) 但是
$\frac{1}{h^2}\sum_{k=0}^{2}(-1)^{2-k}C_2^k g(x_0+kh)\neq\frac{1}{h^2}\sum_{k=0}^{2}(-1)^{2-k}C_2^k g(x_0+(k+m)h)$

2. （最值原理）
定义广义的 Shwartz 二阶导数 $f^{[2]}(x)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2}$。证明：如果 $f\in C[a,b]$，且 $\forall x\in(a,b), f^{[2]}(x)=0$，那么 f 的最值只能在 a,b 处取得。

3.（Fourier 系数的衰减速度）
f 是 $[-\pi,\pi]$ 上的黎曼可积函数，定义：$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos(nx)\mathrm{d}x$,($n$ 是非负整数); $b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin(nx)\mathrm{d}x$($n$ 是正整数)。请证明：
(i) f 如上，且单调那么 $a_n,b_n=O(\frac{1}{n})$。
(ii) 设 g 是以 2π 为周期的函数。如果 g 满足 $|g(x+h)-g(x)|\leq C|h|^{\alpha}$, C 为大于零的常数，α 为 $(0,1]$ 间的一个常数，那么 $a_n,b_n=O(\frac{1}{n^{\alpha}})$; 如果 $g\in C^k$ 那么 $a_n,b_n=o(\frac{1}{n^k})$。

4. （这道题解释了课本 p264 第六题不等式的构造）
请回顾 Exercise3 的最后一小问：如果 g 是连续函数那么 $\int_{-1}^{1}g^2\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{+\infty}(g,L_n)^2$。设 f 如书上的定义，令 $g(x)=f(\frac{x+1}{2})$，那么原题等价于证明：$g(-1)=g(1)=g'(-1)=0, g'(1)=\frac{1}{2}$，那么 $\int_{-1}^{1}(g''(x))^2\mathrm{d}x\geq\frac{1}{2}$。
若 $g(x)$ 满足上述的等价条件，计算 $(L_0,g''),(L_1,g'')$，并且求 $(L_0,g'')^2+(L_1,g'')^2$ 由此说明书后答案中的 x^3-x^2 的构造过程。
Rmk：感兴趣的同学可以搜一下 Wirtinger's 不等式的构造方法，思路与此题的类似。进一

步我们能由此证明等周不等式。

5. （定积分的应用）
(i) 请计算 $I(r) = \int_0^{2\pi} \frac{2r-2\cos(x)}{1-2r\cos(x)+r^2}(r > 0, r \neq 1)$, 如果有可能请简要解释这个积分在电磁学中的意义。
(ii) 设 $f \in C[a,b]$，且处处大于 0，$h_n = \frac{b-a}{n}$, $f_{kn} = f(a+kh_n)$, 证明
$\lim_{n\to+\infty}(f_{1n}f_{2n}\dots f_{nn})^{\frac{1}{n}} = exp(\frac{1}{b-a}\int_a^b ln(f(x))\mathrm{d}x)$ 并且用此求 Poisson 积分
$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} ln(1-2r\cos(x)+r^2)\mathrm{d}x(r>1)$。如有可能，参照 (i) 简要解释这个积分的物理意义。

6 (Tschebyscheff 不等式)
设 $f, g, p \in R[a,b]$，并且 $p(x) \geq 0$，任意 $x, y \in [a,b], x < y$，$(f(x)-f(y))(g(x)-g(y)) \geq 0$，证明：
$\int_a^b p(x)f(x)\mathrm{d}x \int_a^b p(x)g(x)\mathrm{d}x \leq \int_a^b p(x)\mathrm{d}x \int_a^b p(x)f(x)g(x)\mathrm{d}x$。
Rmk：这是排序不等式的一种推广。