USTC 2019-2020 Fall 3rd seminar

December 16th 9:45—11:20

2019 年 12 月 12 日

1. （连续性方法）

(i) 请按照以下思路给出有限覆盖定理的另一种证明:

记 $[a,b]$ 为有界闭区间, O 为 $[a,b]$ 的开覆盖, 取集合 $E=\{x\in[a,b]|\forall t\in[a,x],\ [a,t]$ 有 O 的有限子覆盖

证明 $supE=b$ 从而说明 E 有有限的子覆盖。(hint: 说明 $supE\in E$)

(ii) 请仿照上面的步骤证明弱化的 $Gronwall$ 不等式 (给出相应的集合 E，并说明 $supE=b$):

设 $M\geq 0$ 是常数，$f(x)$,$r(x)$ 是连续函数，且 $r(x)\geq 0$, 若对 $\forall t\in[a,b]$ 均有 $y(t)\leq M+\int_a^t r(s)y(s)\mathrm{d}x$, 证明在 $[a,b]$，$y(t)\leq M(1+\int_a^t r(s)e^{\int_s^t r(u)\mathrm{d}u}\mathrm{d}s)$，（hints: 证明 $M(1+\int_a^t r(s)e^{\int_s^t r(u)\mathrm{d}u}\mathrm{d}s)$ 满足积分方程）请用上述结果证明: 若 $y_i=M+\int_a^t r(s)y_i(s)\mathrm{d}x$, $i=1,2$ 且 $y_1(a)=y_2(a)$, 那么 $y_1(t)=y_2(t)$。于是我们求出了这个积分方程的唯一的解。

2. (Taylor 展开)

(i) 令 $f(x)=\frac{x}{e^x-1}$（在 0 点出补充定义）记 $f^{(n)}(0)=B_n$，求证 $\sum_{k=1}^n C_{n-k}^n B_{n-k}=0$。$C_{n-k}^n$ 是组合数。并且求 B_0,B_1,B_2,B_3。

(ii) 我们知道 $arctan(x)'=\frac{1}{1+x^2}$。而当 $|x|<1$（请注意这一点）时，$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+\ldots$，请用 N-L 公式计算极限 $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$。这里请注意极限能不能交换次序。

3. (单位近似)

一列连续函数被称为单位近似是指他们满足:

1. $K_n(x)\geq 0$;
2. $\int_{-\infty}^{+\infty}K_n(x)\mathrm{d}x=1$;
3. $\forall\delta>0$, $\lim_{n\to+\infty}\int_{|x|>\delta}K_n(x)\mathrm{d}x=0$

我们可以定义两个函数的卷积：$f * g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)g(x-y)\mathrm{d}x$, 如果 $f \in C_c(\mathbf{R})$, (即 f, 是一个连续函数并且在一个有界区间外 $f(x) = 0$)。
请证明若 $f \in C_c(\mathbf{R})$：
(i)

1. $\forall x \in \mathbf{R}$, $f(y)K_n(x-y)$ 是关于 y 广义黎曼可积的。
2. $f * K_n(x) = K_n * f(x)$。
3. $f * K_n(x)$ 是连续函数。
4. $\forall \epsilon > 0, \exists N, \forall n > N, \forall x \in \mathbf{R}$ 使得 $|f * K_n(x) - f(x)| < \epsilon$。（hint：利用 f 是一致连续的）

(ii) 证明 $K_n(x) = (1-x^2)^n/c_n, |x| \leq 1; K_n(x) = 0, |x| > 1$, $c_n = \int_{-1}^{1}(1-x^2)^n\mathrm{d}x$ 是单位近似，并用 (i) 说明在有界闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数，存在一族多项式函数 $p_n(x)$ 使得 $\forall \epsilon > 0, \exists N, \forall n > N, \forall x \in [a,b]$ 使得 $|p_n(x) - f(x)| < \epsilon$, 由此证明若 f 是 $[a,b]$ 上的连续函数，并且对任意非负整数 k 均有 $\int_a^b f(x)x^k\mathrm{d}x = 0$, 证明 $f(x) = 0$.

(iii) 定义 $P_n(x) = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n$, $P_0(x) = 1$, 定义 $[-1,1]$ 上可积函数空间的内积 $(f,g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\mathrm{d}x$。说明如果 f 是光滑函数 $(P_n, f) = (-1)^n((x^2-1)^n, f^{(n)})$, 并且计算 (P_n, P_m)。

(iv) 证明：如果一个 n 次多项式 $p(x)$ 满足 $(p, x^k) = 0$, $k = 0, \ldots, n-1$, 那么 $p(x) = cP_n(x)$, c 为常数。

(v) 取 $L_n(x) = P_n(x)/\sqrt{(P_n, P_n)}$ 证明：对任意次数不大于 n 的多项式 $p(x)$ 以下不等式成立 $(f-p, f-p) \geq (f - \sum_{k=0}^{n}(f, L_k)L_k, f - \sum_{k=0}^{n}(f, L_k,)L_k)$。并且利用 (ii)(iii) 证明 $lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n}(f, L_k)^2 = \int_{-1}^{1} f^2(x)\mathrm{d}x$