MATRITSANING RANGI VA UNI HISOBLASH TESKARI MATRITSA VA UNI TOPISH

Jamolov Shahboz Jamil o'g'li
Toshkent kimyo-texnologiya instituti
Shahrisabz filiali o'qituvchisi
Xurramov Temur Alijon o'g'li
Toshkent kimyo-texnologiya instituti
Shahrisabz filiali 6-22 guruh talabasi
https://doi.org/10.5281/zenodo.8006586

Annotatsiya: ushbu maqolada sistemalarni modellashtirishda matritsalar algebrasi, matritsa rangini, uni bevosita hisoblashda ko'p sondagi determinantlarni hisoblash,elementar almashtirishlar,teskari matritsa A kvadrat matritsa teskari matritsaga ega bo'lishi uchun A matritsaning determinant noldan farqli bo'lishi zarurligi hamda mavzuga oid misollar tadbiqi haqida so'z boradi**.**

Kalit so'zlar: modellashtirish, matritsalar algebrasi, matritsa rangi, determinantlar, elementlar almashtirishlar, teskari matritsa.

Sistemalarni modellashtirihda *matritsalar algebrasi* degan tushuncha muhim ahamiyatga ega. Rejalashtirish muammolari, yalpi mahsulot, jami mehnat sarfi, narxni aniqlash va boshqa masalalar hamda ularda kompyuterlarni qo'llash matritsalar algebrasini qarashga olib keladi.

A $m\times n$ o'lchovli matritsa k satr va k ta ustunini ajratamiz, bunda, k,m va n sonlardan kichik yoki ularning kichigiga teng bo'lishi mumkun. Ajratilgan satr va ustunlarning kesishuvida hosil bo'lgan k-tartibli determinantga A *matritsaning* k *-tartibli minori deyiadi.*

Tarif: A matritsaning 0 dan farqi minorlarining eng yuqori tartibiga A *matritsaning rangi* deyiladi. A matritsaning rangi $rangA$ yoki $r(A)$ bilan belgilanadi.

Matritsa rangini bevosita hisoblashda ko'p sondagi determinantlarni hisoblashga tug'ri keladi. Quyidagi amallardan foydalanib matritsa rangini hisoblash qulayroq. Matritsada:

1) faqat 0 lardan iborat satri (ustuni)ni uchirishdan;
2) ikkita satr (ustun)ning o'rinlarini almashtirishdan;
3) biror satr (ustun)ning elemntlarini biror $\lambda \neq 0$ songa ko'paytirib, boshqa satr (ustun) mos elementlariga qushish;
4) matritsani transponirlashdan, uning rangi o'zgarmaydi.

Bu amallarga odatda *elementlar almashtirishlar* deyiladi.

1-misol. $$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & -3 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 2 & -6 & -5 \\ 1 & -4 & -2 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

Matritsaning rangini hisoblang.

Yechish. A matritsaning rangini hisoblash uchun elementar almashtirishlardan foydalanamiz. Birinchi satr elementlarini ikkinchi satr elememtlariga, birinchi satr elementlarini (-2)ga ko'paytirib, uchunchi satr elementlariga, hamda uchinchi satr elementlarini to'rtinchi satr elementlariga qo'shib quyidagi matritsani hosil qilamiz:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & -3 & -1 \\ 5 & 1 & 0 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ 5 & 1 & 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Keyingi matritsada 2-satrini (-1) ga ko'paytirib to'rtinchi satirga qo'shsak

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & -3 & -1 \\ 5 & 1 & 0 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

matritsa hosil bo'ladi. Bu matritsada

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 5+2=7 \neq 0$$

bo'lib, to'rtinchi tartibli minorlar 0 ga teng. Shunday qilb, berilgan matritsaning rangi 3 ga teng.

Yuqoridagilardan kelib chiqqan holda teskari matritsa va uni topishga etiborimizni qaratsak. A kvadrat matritsa uchun $AB = BA = E$ birlik matritsa bo'lsa, B kvadrat matritsa A matritsaga *teskari matritsa* deyilad. Odada, A matritsaga teskari matritsa A^{-1} bilan belgilanadi.

Teorema: A kvadrat matritsa teskari matritsaa ega bo'lishi uchun A matritsaning determinanti 0 dan farqli bo'lishi zaur va yetarlidir. (Bu teoremani isbotsiz keltirdik, uning isbotini kengroq dasturli kurslardan topish mumkun.)

A kvadrat matritsa uchun $\det A \neq 0$ bo'lsa , unga teskari bo'lgan yagona matritsa A^{-1} mavjud.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ -\,-\,-\,- & -\,-\,-\,-\,- \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots a_{nn} \end{pmatrix}$$

matritsaga teskri A^{-1} matritsa

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \cdots A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} \cdots A_{n2} \\ -\,-\,-\,- & -\,-\,-\,-\,- \\ A_{1n} & A_{2n} \cdots A_{nn} \end{pmatrix}$$

Formula bilan topiladi. Bunda A_{ij} mos ravishda a_{ij} elementlarning algebraik to'ldiruvchilari va $\Delta = \det A$.

Teskari matritsani topishga misol qaraymiz.

2-misol. Ushbu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

matritsaga teskari matritsani toping.

Yechish. Oldin A matritsaning determinantini hisoblaymiz:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix} = 18 + 4 + 3 - 2 - 12 - 9 = 2 \neq 0.$$

Yuqoridagi teremaga asosan teskari matritsa mavjud, chunki

$$\Delta = 2 \neq 0$$

yani, berilgan matritsa maxsusmas matritsadir. A^{-1} ni toppish uchun A matritsa hamma elementarining algebraik to'ldiruvchilarini topamiz:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 6, \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} = -5, \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = -6, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} = 8,$$

$$A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -2, \quad A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 2,$$

$$A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -3, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1.$$

Teskari matritsani topish

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

Formulasiga asosan

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 6 & -6 & 2 \\ -5 & 8 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -2{,}5 & 4 & -1{,}5 \\ 0{,}5 & -1 & 0{,}5 \end{pmatrix}$$

bo'ladi. A^{-1} teskari matritsaning to'g'ri topilganligini

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E$$

tengliknng bajarilishi bilan tekshirib ko'rish mumkun, haqiqatan ham,

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -2.5 & 4 & -1.5 \\ 0.5 & -1 & 0.5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1\cdot 3 + 1\cdot(-2.5) + 1\cdot 0.5 & 1\cdot(-3) + 1\cdot 4 + 1\cdot(-1) & 1\cdot 1 + 1\cdot(-1.5) + 1\cdot 0.5 \\ 1\cdot 3 + 2\cdot(-2.5) + 4\cdot 0.5 & 1\cdot(-3) + 2\cdot 4 + 4\cdot(-1) & 1\cdot 1 + 2\cdot(-1.5) + 4\cdot 0.5 \\ 1\cdot 3 + 3\cdot(-2.5) + 9\cdot 0.5 & 1\cdot(-3) + 3\cdot 4 + 9\cdot(-1) & 1\cdot 1 + 3\cdot(-1.5) + 9\cdot 0.5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

yani, $AA^{-1} = E$ birlik matritsa hosil bo'ladi, bu A^{-1} teskari matritsaning to'g'ri topilganligini isbotlaydi.

References:

1. Д.Юнусова, А.Юнусов "Алгебра ва сонлар назарияси" Тошкент – 2007
2. Юнусов. Математик мантиқ ва алгоритмлар назарияси елементлари. Т., Янги аср авлоди, 2006.
3. Тўраев Ҳ. Математик мантиқ ва дискрет математика. Т., «Ўқитувчи», 2003.
4. Лихтарников Л.М., Сукачева Т.Г. Математическая логика. СанктПетербург, «Лан», 1999.
5. П.Е.Данко, А.Г.Попов, Т.Я.Кожевников. Высшая математика в упражнениях и задачах, М., «Высшая школа»1986.
6. https://fayllar.org/
7. https://n.ziyouz.com/