UMONS
Université de Mons

Cours préparatoires Été 2017

MODULE MATHÉMATIQUE I

Algèbre, analyse, statistiques & trigonométrie

Cours donné par : K. Barbé
F. Ost

SAP

Service d'Appui Pédagogique

Table des matières

1 Calcul algébrique élémentaire **1**
1.1 Équations et inéquations 1
1.1.1 Monômes et polynômes 2
1.1.2 Factorisation 3
1.2 Premier degré 4
1.2.1 Représentation graphique 4
1.2.2 Résolution de l'équation du premier degré 5
1.2.3 Résolution de l'inéquation du premier degré 5
1.2.4 Analyse du signe 5
1.3 Deuxième degré 6
1.3.1 Représentation graphique 6
1.3.2 Factorisation par les racines des polynômes 7
1.3.3 Résolution de l'équation du second degré 8
1.3.4 Résolution de l'inéquation du second degré 8
1.3.5 Règle du signe 9
1.4 Degré supérieur ou égal à trois 9
1.4.1 Grille de HORNER 10
1.4.2 Division Euclidienne 11
1.5 Fractions rationnelles 12
1.5.1 Définition et vocabulaire 12
1.5.2 Résolution d'équation rationnelle 13
1.6 Exercices 14
1.7 Systèmes d'équations linéaires 15
1.7.1 Définitions, vocabulaire 15
1.7.2 Résolution de systèmes linéaires 16
1.7.2.1 Résolution graphique 16
1.7.2.2 La substitution 16
1.7.2.3 Pivot de GAUSS 17
1.7.3 Exercices 17

2 Fonctions **18**
2.1 Définitions, vocabulaire et caractéristiques 18
2.2 Fonctions usuelles 20
2.2.1 Fonction identité 20
2.2.2 Fonction carrée 20
2.2.3 Fonction cube 21
2.2.4 Fonction racine carrée 22
2.2.5 Fonction racine cubique 23
2.2.6 Fonction inverse 23
2.2.7 Fonction valeur absolue 24
2.2.8 Fonction sinus 25
2.2.9 Fonction cosinus 25
2.2.10 Fonction tangente 26
2.3 Fonctions cyclométriques 27
2.3.1 La fonction arcsinus 27
2.3.2 La fonction arcosinus 28
2.3.3 La fonction arctangente 29
2.4 Fonctions logarithme et exponentielle 30
2.4.1 Exponentielle 30
2.4.2 Logarithme 31

2.5 Exercices . . . 32

3 Analyse de fonctions **32**
3.1 Limite et continuité . . . 32
3.1.1 Les $\boldsymbol{FI}$ du type « $\frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}$ » . . . 33
3.1.2 Les $\boldsymbol{FI}$ des autres types que « $\frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}$ » . . . 35
3.2 Continuité . . . 36
3.3 Dérivée . . . 36
3.3.1 Définition et interprétation . . . 36
3.3.2 Formulaire . . . 37
3.3.3 Variations . . . 37
3.3.4 Retour sur le calcul de limite . . . 38
3.4 Exercices . . . 38

4 Exponentielles et logarithmes **39**
4.1 Propriétés . . . 39
4.2 Exercices . . . 40

5 Trigonométrie **40**
5.1 Trigonométrie du cercle . . . 40
5.2 Angles associés . . . 42
5.2.1 Angles supplémentaires . . . 43
5.2.2 Angles opposés . . . 43
5.2.3 Angles complémentaires . . . 44
5.3 Formules de trigonométrie . . . 45
5.3.1 Relation dans un triangle . . . 45
5.3.2 Formules d'addition . . . 46
5.4 Exercices . . . 46

6 Calcul intégral et primitivation **47**
6.1 Intégrales . . . 47
6.1.1 Définition . . . 47
6.1.2 Propriétés . . . 47
6.2 Primitive . . . 48
6.2.1 Définition . . . 48
6.2.2 Lien avec le calcul intégral . . . 48
6.2.3 Méthode de primitivation . . . 49
6.2.3.1 Formulaire de primitives directes . . . 49
6.2.3.2 Primitivation par substitution ou changement de variable . . . 50
6.2.3.3 Intégration par partie . . . 51
6.3 Exercices . . . 51

7 Statistique **51**
7.1 Approche théorique . . . 51
7.1.1 Quantitatif discret . . . 51
7.1.2 Quantitatif continu . . . 53
7.2 Exercices . . . 54

A Exercices supplémentaires **55**

Module de Mathématique I
Algèbre, analyse, statistiques & trigonométrie

1 Calcul algébrique élémentaire

1.1 Équations et inéquations

En algèbre, on est souvent confronté aux (in)équations. Ces (in)équations peuvent être de différents types, revêtir différentes formes et être résolues de différentes manières. Mais qu'est-ce qu'une équation et de quoi est-elle composée ?

Équation

On appelle équation une égalité mathématique contenant une ou plusieurs *inconnues*.

`Exemples :`

- $2x + 4 = 0$ est une équation à une inconnue qui est représentée par la lettre x ;
- $2x - \frac{2}{y} = 4$ est une équation à deux inconnues qui sont représentées par les lettres x et y ;
- $8k - 5m^3 = 7\sqrt{c} - o$ est une équation à 4 inconnues qui sont représentées par les lettres $c; k; m; o$.

Une équation est donc une expression mathématique littérale (qui contient au moins une lettre). Chaque partie de l'égalité est appelée *membre de l'équation*. Une équation est la traduction d'une question que l'on se pose. Pour y répondre, il faut résoudre l'équation, *ie* chercher les valeurs que l'on peut donner à l'inconnue afin que l'égalité soit vraie. Ces valeurs particulières qui vérifient l'équation sont appelées *solutions* de l'équation.

Inéquation

On appelle inéquation une inégalité mathématique contenant une ou plusieurs *inconnues*.

`Exemples :`

- $2x < 4$ et $3y > 9$ sont des inéquations strictes à une inconnue ;
- $2x \leq 4y$ et $10a - 10b \geq 0$ sont des inéquations larges à deux inconnues ;
- $4x \neq 2$ N'est PAS une inéquation ! Le symbole « $\neq$ » est la négation du symbole d'égalité mais n'est pas un symbole d'inégalité (que sont $<$, $\leq$, $\geq$ ou $>$). $4x \neq 2$ est assimilable à une équation où le symbole d'égalité a été remplacé par le symbole de différence.

En particulier, résoudre une inéquation peut toujours se ramener à répondre à la question « quel est le signe de l'expression ? »
Par exemple, $2x < 4$ est équivalent à $2x - 4 < 0$ et donc demander les valeurs de x pour lesquelles $2x - 4$ est strictement négatif.

Solution

Si une valeur est solution d'une (in)équation, cela signifie qu'en remplaçant l'inconnue par la solution, l'(in)égalité est vraie.

`Exemples :`

- -2 est une solution de l'équation $2x+4=0$ car, si l'on remplace x par -2, on a $2\times(-2)+4=0$ qui est vrai ;
- $(3;1)$ est une solution de l'équation $2x-\frac{2}{y}=4$ car si l'on remplace x par 3 et y par 1, on obtient $2\times3-\frac{2}{1}=4$ qui est vrai ;
- $(4;2;1;3)$ est une solution de l'équation $8k-5m^3=7\sqrt{c}-o$ car si l'on remplace c par 4, k par 2, m par 1 et o par 3, on obtient $8\times2-5\times(1)^3=7\sqrt{4}-1$ qui est vrai ;
- 0 est une solution de l'inéquation $2x<4$ car en remplaçant x par 0, on obtient $2\times0<4$ qui est vrai.

Résoudre une (in)équation, c'est donc déterminer *l'ensemble de* ***toutes*** *les solutions* de l'(in)équation. Il convient, à la fin de la résolution d'une (in)équation, de donner l'ensemble des solutions $\mathbb{S}$.

1.1.1 Monômes et polynômes

Les (in)équations que l'on rencontre peuvent être de différents types : une ou plusieurs inconnues, ne contenant que des puissances naturelles de l'inconnue ou non, liée(s) à d'autres équations ou non, ...
Nous allons nous concentrer sur un certain type d'équations : les *équations polynomiales à une variable*.

Monôme

On appelle monôme une expression mathématique composée d'un nombre appelé *coefficient* et d'une lettre, appelée *variable*, élevée à une puissance naturelle appelée *degré*.

`Exemples :`

- $3x^2$ est un monôme dont le coefficient vaut 3, la variable est x et le degré vaut 2 ;
- 7 est un monôme dont le coefficient vaut 7, la variable n'est pas donnée et son degré est assimilé à 0 ;
- a^{42} est un monôme dont le coefficient vaut 1, la variable est a et le degré vaut 42 ;
- $\frac{1}{x}$ ou $\sqrt{x}$ NE sont PAS des monômes car l'exposant associé à la variable est soit négatif (x^{-1}) soit fractionnaire ($x^{1/2}$) ;
- $\frac{x}{2}$ ou $\sqrt{3}x$ sont eux des monômes car l'exposant associé à la variable x vaut 1. La fraction ou la racine ne portent que sur le coefficient.

Polynôme

On appelle polynôme une somme de monômes.
Le degré d'un polynôme sera le degré de son monôme dominant, *ie* du monôme dont le degré est le plus élevé.

Notation

Un polynôme à une variable x de degré n sera noté $P_n[x]$.

Exemples :

- $P_2[x] = 2x^2 - 4x + 1$ est un polynôme du deuxième degré ;
- $P_3[x] = 7x - 4 + x^3$ est un polynôme du troisième degré ;
- $P_{42}[x] = -5 + 4x^{17} - 11x^{42}$ est un polynôme du quarante-deuxième degré ;
- $f(x) = x^2 - 5x + 3\sqrt{x}$ N'est PAS un polynôme à cause de $\sqrt{x}$;
- $P_2[x] = x^2 - \sqrt{5}x + 1$ est un polynôme du second degré, la racine ne portant que sur le coefficient.

Un polynôme est donc une expression mathématique à part entière qui n'est pas la traduction d'une question. Il ne contient pas d'égalité et les lettres représentent des *variables* et non des *inconnues* comme c'est le cas pour les équations.
Sauf spécification propre à un énoncé, les variables peuvent prendre n'importe quelle valeur réelle, à la différence des solutions d'une (in)équation qui ne peuvent prendre que certaines valeurs, valeurs satisfaisant l'(in)égalité.

Racine

On appelle racine d'un polynôme $P_n[x]$ une valeur x_0 telle que $P_n[x_0] = 0$, *ie* x_0 est racine d'un polynôme s'il annule ce polynôme.

Exemples :

- 1 est racine du polynôme $4x^2 - 3x - 1$ car en remplaçant x par 1, on obtient $4 \times (1)^2 - 3 \times 1 - 1 = 0$;
- $\sqrt{5}$ est racine du polynôme $x^2 - 5$ car en remplaçant x par $\sqrt{5}$, on obtient $\left(\sqrt{5}\right)^2 - 5 = 0$.

Comme un polynôme à une variable est une fonction d'un type particulier, on peut toujours représenter un polynôme dans un repère cartésien (pour autant que le polynôme n'ait qu'une seule variable) en représentant la relation $y = P_n[x]$ avec y représentant les ordonnées et x les abscisses.
Les racines x_0 seront les abscisses des intersections du graphe de $P_n[x]$ avec l'axe des abscisses.

1.1.2 Factorisation

Factoriser

Factoriser une expression mathématique consiste à transformer une somme (ou une différence) de termes en un produit de facteurs.

Exemples :

- ▷ on peut factoriser l'expression $x^2 - x$ par mise en évidence, ce qui donne $x(x-1)$;
- ▷ on peut factoriser l'expression $x^2 - 4$ en utilisant les binômes conjugués, ce qui donne $(x-2)(x+2)$;
- ▷ on peut factoriser l'expression $x^2 - 4x + 4$ en remarquant que c'est un trinôme carré parfait, ce qui donne l'expression $(x-2)^2$;
- ▷ on peut factoriser l'expression $x^2 - 5x + 6$ en déterminant ses racines (qui sont 2 et 3), ce qui donne l'expression $(x-2)(x-3)$.

Factoriser une expression mathématique permet un traitement simplifié dans la très grande majorité des cas. Il est bien plus évident de manipuler des produits que des sommes/différences, surtout dans la recherche de racines de l'expression que l'on considère.
Pour y arriver, on peut utiliser la mise en évidence, les binômes conjugués, les trinômes carrés parfaits ou encore déterminer l'ensemble des racines de l'expression. On sera alors amené à résoudre des équations de type $f = 0$ où f est l'expression à factoriser.

1.2 Premier degré

1.2.1 Représentation graphique

Avant de s'attaquer à la résolution des (in)équations du premier degré, nous allons représenter un polynôme du premier degré.
Pour ce faire, considérons le polynôme $2x - 4$. Il existe plusieurs manières de représenter une courbe (la connaître, utiliser un tableau de valeurs, représenter ces valeurs en couples dans un repère et relier les différents couples de points, ...)
C'est ici un cas simple et représenter ce polynôme revient à tracer la courbe $y = 2x - 4$ et donc tracer une droite oblique dont la pente vaut 2 et l'ordonnée à l'origine vaut -4, comme l'illustre la FIGURE 1.

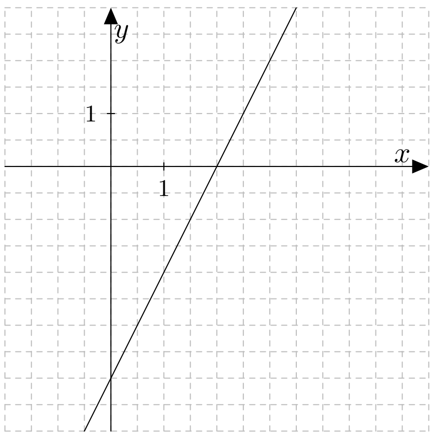

FIGURE 1 – Le polynôme $P_1[x] = 2x - 4$

On remarque plusieurs choses :

- ▷ ce polynôme possède une unique racine en $x_0 = 2$ et donc s'annule en 2 ;
- ▷ ce polynôme est strictement négatif pour $x < 2$ et strictement positif pour $x > 2$.

1.2.2 Résolution de l'équation du premier degré

Une équation du premier degré est une équation du type $Ax + B = 0$ où A et B sont des réels et A est non nul. La résolution de ce genre d'équation est évidente :

$$Ax + B = 0 \Leftrightarrow Ax = -B \Leftrightarrow x = \frac{-B}{A}$$

D'où $\mathbb{S} = \left\{\frac{-B}{A}\right\}$, quelles que soient les valeurs de A et B.
Une équation du premier degré a donc toujours une unique solution.

1.2.3 Résolution de l'inéquation du premier degré

Une inéquation stricte du premier degré est une inéquation du type $Ax + B < 0$ où A et B sont des réels et A est non nul. On définit de manière similaire l'inéquation large.

La résolution de ce genre d'inéquation n'est pas tout à fait triviale :

$$Ax + B < 0 \Leftrightarrow Ax < -B \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{-B}{A} & \text{si } A > 0; \\ x > \frac{-B}{A} & \text{si } A < 0. \end{cases}$$

D'où $\mathbb{S} = \left]-\infty; \frac{-B}{A}\right[$ si $A > 0$ et $\mathbb{S} = \left]\frac{-B}{A}; +\infty\right[$ si $A < 0$.

En effet, il ne faut pas oublier que multiplier une inéquation par un nombre négatif renverse le sens de l'inégalité ! La résolution de l'inéquation large se fait de manière similaire.

1.2.4 Analyse du signe

On se souvient que pour notre exemple introductif $(2x - 4)$, la racine de ce polynôme vaut 2.
Or $2x - 4 = 0 \Leftrightarrow 2x = 4 \Leftrightarrow x = 2$.

De plus, on a bien que $2x - 4 < 0 \Leftrightarrow 2x < 4 \Leftrightarrow 2x < 2$ et inversement.

On en déduit la règle du signe d'un polynôme du premier degré :

Règle du signe

Considérons $Ax + B$ un polynôme du premier degré dont la racine est x_0. Le signe de ce polynôme est donné par le signe de A pour $x > x_0$ l'opposé du signe de A pour $x < x_0$.

Le signe du polynôme $Ax + B$ peut-être encodé dans le tableau de signe suivant :

x		$\frac{-B}{A}$	
$Ax + B$	opposé du signe de A	0	signe de A

TABLEAU 1

Exemples :

- le tableau de signe de $2x - 4$ est donné par

x		2	
$2x - 4$	$-$	0	$+$

▷ le tableau de signe de $-2x-4$ est donné par

x		-2	
$-2x-4$	$+$	0	$-$

1.3 Deuxième degré

1.3.1 Représentation graphique

Représentons un polynôme du second degré. Pour ce faire, considérons le polynôme $P_2[x] = x^2 - 4x + 3$.

On sait qu'un polynôme du second degré Ax^2+Bx+C est l'expression analytique d'une parabole dont le sommet se trouve en $\frac{-B}{2A}$.
Dès lors, le sommet de la parabole représentant le polynôme $P_2[x]$ que l'on s'est choisi est en $(2,-1)$, comme le représente la FIGURE 2.

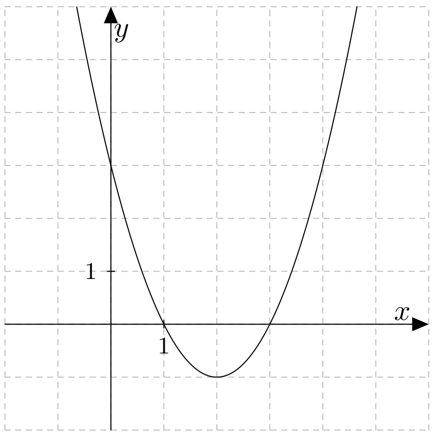

FIGURE 2 – Le polynôme $P_2[x] = x^2 - 4x + 3$

On remarque plusieurs choses :

▷ ce polynôme possède deux racines en $x_1 = 1$ et $x_2 = 3$ et donc s'annule en ces deux valeurs ;

▷ ce polynôme est strictement négatif entre 1 et 3, strictement positif pour $x < 1$ et $x > 3$;

▷ la parabole que nous venons de représenter a la forme d'un « U ». On dit que sa **concavité** est tournée vers le haut.

D'autres polynômes du second degré peuvent avoir une racine (double) ou pas de racine (réelle), comme illustré par la FIGURE 3. Le signe de ces polynômes doit être adapté à la situation.

Concavité

La concavité d'une parabole est tournée vers le haut (resp. vers le bas) si lorsque l'on relie deux points quelconques de son graphe, le segment ainsi tracé est situé au dessus (resp. au dessous) du sommet de la parabole.

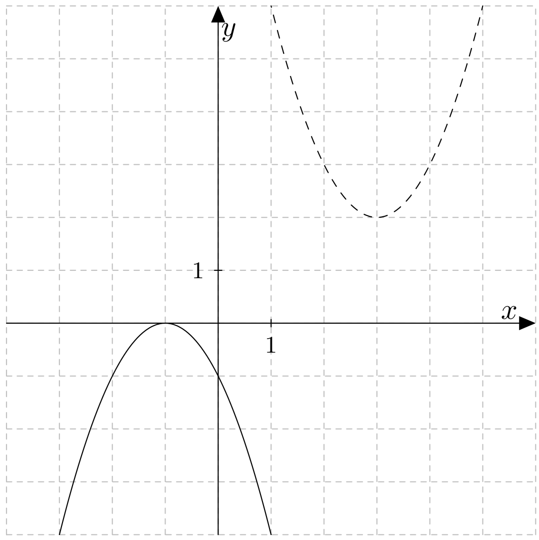

FIGURE 3 – En trait continu, $P_2[x] = -x^2 - 2x - 1$ possède une racine double en $x_0 = -1$.
En pointillés, $P_2[x] = x^2 - 6x + 11$, ne possède pas de racine réelle.

Il y a un lien entre la concavité d'une parabole et le signe du coefficient du terme du second degré de son équation.

Concavité et coefficient du second degré

Soit $P_2[x] = Ax^2 + Bx + C$ un polynôme du second degré. La concavité de la parabole associée à ce polynôme est tournée vers :

▶le haut si $A > 0$; ▶le bas si $A < 0$.

Exemples liés à la FIGURE 3 :

- le polynôme $P_2[x] = -x^2 - 3x - 1$ a sa concavité vers le bas car le coefficient du terme du second degré vaut $-1 < 0$;
- le polynôme $P_2[x] = x^2 - 6x + 11$ a sa concavité vers le haut car le coefficient du terme du second degré vaut $1 > 0$.

1.3.2 Factorisation par les racines des polynômes

On rappelle que factoriser signifie « transformer une somme/différence de termes en un produit de facteurs ». Il est possible de factoriser de plusieurs manières, mais quand on est confronté à un polynôme de degré supérieur ou égal à 2, la meilleure technique nous est donnée par le théorème de factorisation par les racines.

Factorisation par les racines d'un polynôme

Considérons $P_n[x]$ un polynôme à une variable de degré n et x_0 une racine de ce polynôme. Alors on a l'égalité suivante

$$P_n[x] = (x - x_0) \times Q_{n-1}[x]$$

où $Q_{n-1}[x]$ est un polynôme de degré $n - 1$.

Autrement dit, lorsqu'un polynôme de degré n admet une racine, on peut le factoriser en le produit d'un polynôme du premier degré (« x moins la racine ») par un polynôme de degré $n-1$.

Exemples :

- soit $P_1[x] = 4x - 8$. On a que 2 est une racine de ce polynôme.
  D'où $4x - 8 = (x-2) \times 4$ où 4 est un polynôme de degré 0 ;
- soit $P_2[x] = x^2 - 9$. On a que 3 est une racine de ce polynôme .
  D'où $x^2 - 9 = (x-3)(x+3)$ où $x+3$ est un polynôme de degré 1.
- soit $P_5[x] = x^5 - 5x^2 + 4x$. On a que 0 est une racine de ce polynôme.
  D'où $x^5 - 5x^3 + 4x = (x-0)(x^4 - 5x^2 + 4) = x(x^4 - 5x^2 + 4)$ où $(x^4 - 5x^2 + 4)$ est un polynôme de degré 4.
  Bien entendu, il est parfois possible de continuer à factoriser l'expression.
  Ici, $x(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)$ est la factorisation complète du polynôme $x^5 - 5x^3 + 4x$ en polynômes irréductibles.

Somme et produit des racines

Soit $Ax^2 + By + C$ un polynôme du second degré dont le réalisant est positif. Alors la somme de ses racines est donnée par $\frac{-B}{A}$ et le produit de ses racines est donné par $\frac{C}{A}$.

1.3.3 Résolution de l'équation du second degré

Une équation du second degré ne se résout pas comme une équation du premier degré. Il y a une étape préliminaire (le calcul du discriminant).

CQFD Résolution de l'équation du second degré

Pour résoudre une équation du second degré $Ax^2 + Bx + C = 0$, on calcule le discriminant, noté Δ, de l'équation par la formule $\Delta = B^2 - 4AC$. Ensuite, on analyse son signe :

(i) s'il est strictement positif, alors on a deux solutions distinctes de la forme $\dfrac{-B \pm \sqrt{\Delta}}{2A}$;

(ii) s'il est nul, alors on a une solution double de la forme $\dfrac{-B}{2A}$;

(iii) s'il est strictement négatif, on n'a pas de solution réelle (mais des solutions dites complexes).

1.3.4 Résolution de l'inéquation du second degré

Une inéquation stricte du second degré est une inéquation du type $Ax^2 + Bx + C < 0$ où A, B et C sont des réels et A est non nul.
On définit de manière similaire l'inéquation large.
Pour résoudre une inéquation du second degré, il est impératif de NE PAS utiliser la méthode développée pour le premier degré !
En effet, on court droit à la catastrophe. Par exemple, pour résoudre $x^2 - 4 < 0$, nous aurions ceci :

$$\begin{aligned} x^2 - 4 < 0 &\Leftrightarrow x^2 < 4 \text{ qui est tout à fait correct} \\ &\not\Leftrightarrow x < \pm 2 \text{ qui est tout à fait FAUX !} \end{aligned}$$

On en déduirait que les solutions acceptables seraient les réels strictement plus petits que 2. Or, -3 respecte cette condition mais $(-3)^2 - 4 = 5 > 0$ n'est pas solution de l'inéquation ! ! !

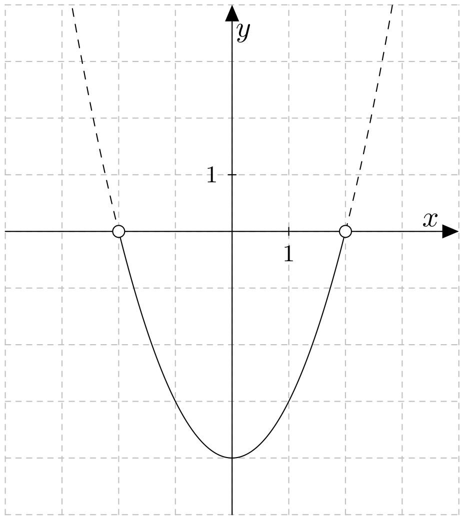

FIGURE 4 – Le polynôme $P_2[x] = x^2 - 4$.
En trait continu se trouve la partie satisfaisant l'inéquation.

Graphiquement, grâce à la FIGURE 4, on remarque que $P_2[x] = x^2 - 4$ est strictement inférieur à 0 si on prend des valeurs de x comprises strictement entre -2 et $+2$.

Résoudre l'inéquation $P_2[x] = Ax^2 + Bx + C < 0$ peut se traduire par « donnez les valeurs de x telles que l'expression $P_2[x]$ est négative ». Autrement dit, en analysant le signe du polynôme, on sera capable de déterminer les solutions demandées.
Pour déterminer le signe du polynôme, il suffit de connaître ses racines, ce que l'on est capable de faire en résolvant l'**équation** du second degré associée.

1.3.5 Règle du signe

Le signe d'un second degré est lié au signe de son monôme dominant. La règle est assez simple et se traduit par l'expression suivante :

Le signe du monôme dominant partout, sauf entre les racines.

On peut traduire cela via le tableau de signe donné par le TABLEAU 2 où x_1 et x_2 sont les deux racines du polynôme $Ax^2 + Bx + C$:

x		x_1		x_2	
$Ax^2 + Bx + C$	signe de A	0	opposé du signe de A	0	signe de A

TABLEAU 2

Évidemment, en l'absence de racine ou s'il n'y a qu'une racine, le signe du polynôme est donné par le signe de son monôme dominant.

1.4 Degré supérieur ou égal à trois

Pour déterminer les racines d'un polynôme de degré supérieur ou égal à trois, il n'existe pas de méthode générale *simple* similaire à celle construite pour les polynômes du second degré.

La technique la plus simple consiste à trouver « à la main » une racine du polynôme et de cette manière parvenir à le factoriser jusqu'à retrouver un polynôme du deuxième degré. Évidemment, ce genre de technique ne fonctionnera que pour des cas simples, ce qui sera le cas de le cadre du cours de mathématiques qui vous sera donné ici.

Pour trouver une racine, si celle-ci est entière, l'astuce consiste à tester les diviseurs entiers du terme indépendant. Nous allons considérer pour la suite le polynôme du troisième degré suivant :

$$P_3[x] = x^3 - 2x^2 - 29x - 42.$$

Les diviseurs entiers de 42 sont donnés par $\{\pm1; \pm2; \pm3; \pm6; \pm7; \pm21; \pm42\}$.

Il faut essayer :

- ▷ $+1$ n'est pas racine : $1^3 - 2 \times 1^2 - 29 \times 1 - 42 = -72 \neq 0$;
- ▷ -1 n'est pas racine : $(-1)^3 - 2 \times (-1)^2 - 29 \times (-1) - 42 = -16 \neq 0$;
- ▷ $+2$ n'est pas racine : $(2)^3 - 2 \times (2)^2 - 29 \times 2 - 42 = -100 \neq 0$;
- ▷ -2 est racine : $(-2)^3 - 2 \times (-2)^2 - 29 \times (-2) - 42 = 0$.

Lorsqu'une racine est trouvée, deux techniques permettent la factorisation : **la grille de Horner** ou la **division euclidienne**.

1.4.1 Grille de Horner

Principe de fonctionnement

Soit $P[x] = A_n x^n + A_{n-1}x^{n-1} + \ldots A_1 x + A_0$ un polynôme de degré n tel que x_0 est une racine de ce polynôme. Alors on a :

	A_n	A_{n-1}	$\ldots$	A_1	A_0
x_0		$\underbrace{x_0 \times C_n}_{B_{n-1}}$	$\ldots$	$\underbrace{x_0 \times C_2}_{B_1}$	$\underbrace{x_0 \times C_1}_{B_0=A_0}$
	$\underbrace{A_n - 0}_{C_n}$	$\underbrace{A_{n-1} - B_{n-1}}_{C_{n-1}}$	$\ldots$	$\underbrace{A_1 - B_1}_{C_1}$	0

Les coefficients $C_n, \ldots, C_1$ sont les coefficients du polynôme $Q_{n-1}[x]$ de degré $n-1$ tels que l'on ait $P_n[x] = (x - x_0) \times Q_{n-1}[x]$.

On sait que $B_0 = A_0$ car R est racine de $P_n[x]$.

Après cet encadré théorique, voyons comment cela se comporte sur notre exemple. On rappelle que $P_3[x] = x^3 - 2x^2 - 29x - 42$ avec « -2 » comme racine :

(i) on rapporte les coefficients du polynôme du troisième degré dans la première ligne et on laisse la première cellule vide ;

(ii) on place la racine dans la première cellule de la deuxième ligne ;

(iii) la première cellule de la troisième ligne reste vide ;

(iv) on complète les cellules restantes en respectant les deux règles suivantes :

- ▷ le résultat d'une cellule de la deuxième ligne est le produit entre la racine et le contenu de la cellule de la troisième ligne de la colonne précédente.
- ▷ le résultat d'une cellule de la troisième ligne est la somme entre le contenu de la cellule de la première ligne et le contenu de la cellule de la seconde ligne (de la même colonne);

Ce qui donne la grille suivante :

	1	-2	-29	-42
-2		$\mathbf{-2}$	$\mathbf{8}$	$\mathbf{42}$
	$\mathbf{1}$	$\mathbf{-4}$	$\mathbf{-21}$	$\mathbf{0}$

(v) les valeurs de la troisième ligne sont les coefficients du polynôme du second degré permettant de factoriser notre polynôme initial, *ie*

$$x^3 - 2x^2 - 29x - 42 = \big(x - (-2)\big)\big(x^2 - 4x - 21\big) = (x+2)(x^2 - 4x - 21)$$

(vi) on peut facilement trouver les racines de $x^2 - 4x - 21$ par la méthode du discriminant qui nous donne -3 et 7;

(vii) on peut écrire que $P_3[x] = (x+2)(x+3)(x-7)$.

1.4.2 Division Euclidienne

CQFD Égalité de la division euclidienne

Soient $P_n[x]$ et $D_m[x]$ deux polynômes tels que $D_m[x] \neq 0$. Alors il existe un unique polynôme $Q_k[x]$ et un unique polynôme $R_l[x]$ avec $l < k$ tels que

$$P_n[x] = D_m[x] \times Q_k[x] + R_l[x]$$

Ce théorème est la généralisation de la division écrite vue en primaire pour les nombres, mais adaptée aux polynômes.
En effet, si on prend l'opération $7 : 3$, le calcul va nous donner $7 = 3 \times 2 + 1$ où « 2 » est le quotient et « 1 » le reste.

Principe de fonctionnement

Soit $P_n[x] = A_n x^n + A_{n-1}x^{n-1} + \ldots A_1 x + A_0$ un polynôme de degré n tel que x_0 est une racine de ce polynôme. Alors on va pouvoir diviser $P_n[x]$ par $(x - x_0)$ exactement (*ie* le reste sera nul).

(i) On écrit la division sous le schéma de la division écrite;

(ii) on regarde « combien de fois $x - x_0$ peut rentrer dans $A_n x^n$ » : ce sera « $A_n x^{n-1}$ fois »;

(iii) on multiplie $x - x_0$ par $A_n x^{n-1}$ et on note le résultat en dessous du polynôme de départ;

(iv) on soustrait ledit résultat au polynôme de départ pour obtenir un nouveau polynôme de degré $n-1$ et on réitère le raisonnement jusqu'à atteindre une soustraction nulle.

Revenons à notre exemple utilisé pour illustrer la grille de HORNER et voyons comment cela se passe avec la division euclidienne :

$$\begin{array}{rrrr|l}
x^3 - & 2x^2 & -29x & -42 & x+2 \\ \cline{5-5}
-(x^3 + & 2x^2) & & & x^2-4x-21 \\ \cline{1-2}
- & 4x^2 & -29x & -42 & \\
-(& -4x^2 & -8x) & & \\ \cline{2-3}
 & & -21x & -42 & \\
 & & -(-21x & -42) & \\ \cline{3-4}
 & & & 0 &
\end{array}$$

Or, on sait par l'égalité de la division euclidienne que $P_n[x] = D_m[x] \times Q_k[x] + R_l[x]$. D'où on a trivialement :

$$x^3 - 2x^2 - 29x - 42 = (x+2) \times (x^2 - 4x - 21) + 0$$

On remarque que le polynôme issu du quotient est exactement le même que celui obtenu par la grille de HORNER. Encore heureux !

1.5 Fractions rationnelles

1.5.1 Définition et vocabulaire

Nous avons revu jusqu'à présent les équations « de base », sans parler des équations fractionnaires qui sont incontournables ! Nous allons donc rectifier tout de suite le tir !

Fraction rationnelle

Un quotient entre deux polynômes est appelé fraction rationnelle.

Pour avoir le droit de s'appeler « fraction rationnelle », il faut que le dénominateur fasse apparaître au moins une variable. Si ce n'est pas le cas, on parle alors de fraction (tout court).

Exemples :

- ▷ $\dfrac{2}{3y}$ est une fraction rationnelle et ses CE sont $y \neq 0$;
- ▷ $\dfrac{2x^2 - 2x}{4x - 4}$ est une fraction rationnelle et ses CE sont $x \neq 1$.
  Cette fraction rationnelle **N'**est **PAS** égale à $\frac{x}{2}$ en simplifiant par l'expression $(x-1)$! ! ! La FIGURE 5 illustre ce propos ;
- ▷ $\dfrac{5x - 10}{7}$ n'est pas une fraction rationnelle, le degré du polynôme du dénominateur valant 0. D'ailleurs, il n'y a pas de CE.

Conditions d'existence

Lorsque l'on est confronté à une fraction rationnelle du type $\frac{P_n[x]}{Q_m[x]}$, la **première** chose à faire **avant** de commencer à la manipuler est d'établir ses **conditions d'existence** qui obéissent à l'équation $Q_m[x] \neq 0$

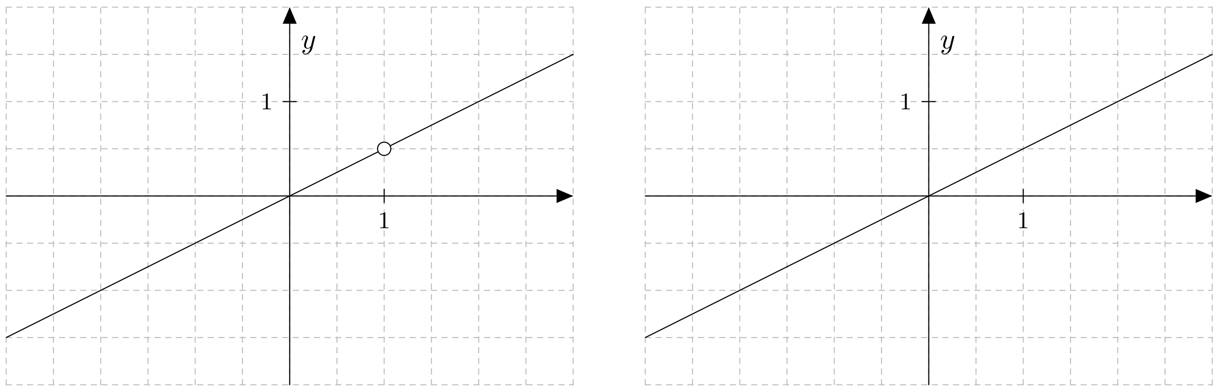

FIGURE 5 – Le graphe de gauche est celui de l'expression $\frac{2x^2-2x}{4x-4}$.
Le graphe de droite est celui de l'expression $\frac{x}{2}$.

Équation rationnelle

On dit qu'une équation est rationnelle si elle comporte au moins une fraction rationnelle.

1.5.2 Résolution d'équation rationnelle

Pour résoudre une équation rationnelle, il faut :

(i) dresser les conditions d'existence de toutes les fractions rationnelles de l'équation ;

(ii) mettre tous les éléments sur un dénominateur commun ;

(iii) résoudre l'équation en faisant abstraction du dénominateur commun ;

(iv) donner les solutions ainsi obtenues en éliminant celles rejetées par les conditions d'existence.

`Exemples :`

▷ Résolvons l'équation $\frac{2x-1}{x+1} + \frac{x-3}{2x+2} = 5$.

On a tout d'abord que la seule CE est donnée par $x \neq 1$. On a ensuite successivement :

$$\frac{2x-1}{x+1} + \frac{x-3}{2x+2} = 5 \Leftrightarrow \frac{4x-2+x-3}{2x+2} = \frac{10x+10}{2x+2}$$
$$\Leftrightarrow 5x-5 = 10x+10 \Leftrightarrow x = -3$$

La valeur -3 n'est pas rejetée par la CE, d'où $\mathbb{S} = \{-3\}$.

▷ Résolvons l'équation $\dfrac{2x}{x-1}+\dfrac{3}{x+1}=\dfrac{x^2-2x-3}{1-x^2}$.

Les CE sont données par $x \neq \pm 1$. On a ensuite successivement :

$$\begin{aligned}\frac{2x}{x-1}+\frac{3}{x+1}=\frac{x^2-2x-3}{1-x^2} &\Leftrightarrow \frac{2x(x+1)+3(x-1)}{x^2-1}=\frac{-x^2+2x+3}{x^2-1}\\ &\Leftrightarrow 2x^2+5x-3=-x^2+3x+3 \Leftrightarrow 3x^2+2x-6=0\\ &\Leftrightarrow 3(x^2+x-2)=0 \Leftrightarrow (x-1)(x+2)=0\\ &\Leftrightarrow x=1 \text{ ou } x=-2\end{aligned}$$

Or, la valeur 1 est rejetée par les CE, d'où $\mathbb{S}=\{-2\}$.

1.6 Exercices

Dans les exercices suivants, sauf mention contraire dans l'énoncé, les lettres x, y et z sont réservées aux inconnues des équations. Les autres lettres seront supposées être des paramètres réels.

A) Échauffement : effectuez les opérations suivantes et simplifiez les expressions au maximum sans rien oublier.

1) 13^0
2) $a^4 \times a^3 \times 2a^2 \times (3a)^3$
3) $\dfrac{7^{21}}{7^{19}} \times \dfrac{14^2}{49^3}$
4) $\left(3x^2\right)^3$
5) $\dfrac{4x^2}{(a-b)} \times \dfrac{2a-2b}{8x^3}$
6) $(5x-3)^{(-2)} \times (5x-3)^4$
7) $\dfrac{\left(5 \times 10^{-2}\right)^3 \times 10^{-2}}{\left(1,25 \times 10^{-2}\right)^2}$

B) Résolvez les équations suivantes et donnez l'ensemble des solutions. N'oubliez rien !

1) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x+1}=1$
2) $\dfrac{5}{1-x}-\dfrac{2}{x+1}=3$

C) Résolvez les inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$.

1) $2x-3 \leq 0$
2) $2-5x>0$
3) $\dfrac{3x-5}{2x+1} \geq 0$

D) Résolvez les équations suivantes et donnez l'ensemble des solutions.

1) $x^2+5x+6=0$
2) $x^2-x-2=0$
3) $-x^2-3x-10=0$
4) $(45x+9)^2=0$
5) $54x+9x^2+81=0$

E) Quel est la somme et le produit des solutions des équations suivantes (où a est un paramètre réel) :

1) $10x^2-540x+28$
2) $5x^2+10x+7=0$
3) $x^2+2x-ax-2a$

F) Résolvez les inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$:

1) $x^2-7x+12<0$
2) $-6x^2+5x<1$
3) $-2x^2+9x+5 \geq 0$

1.7 Systèmes d'équations linéaires

1.7.1 Définitions, vocabulaire

Système d'équation

Un système de n équations à p inconnues est un ensemble de n équations avec p inconnues communes tel qu'une solution du système doit satisfaire simultanément les n équations.

Le nombre n d'équations peut être différent du nombre p d'inconnues (plus petit ou plus grand).

Exemples :

(i) $\begin{cases} x+2y=4 \\ 2x+y=5 \end{cases}$ est un système de 2 équations à 2 inconnues (x et y) ;

(ii) $\begin{cases} x+y+2z=9 \\ 3z-y+x=8 \end{cases}$ est un système de 2 équations à 3 inconnues (x, y et z) ;

(iii) $\begin{cases} x+y=3 \\ y+z=5 \\ x+z=4 \\ x+y-z=0 \end{cases}$ est un système de 4 équations à 3 inconnues (x, y et z).

Déterminé/Indéterminé

On dit qu'un système S est déterminé s'il possède 0 ou 1 solution. Il sera indéterminé dans tous les autres cas. Dans le cas où il possède une infinité de solutions en raison de la présence d'au moins un paramètre dans la solution-type :

- ▷ il sera *simplement* indéterminé s'il n'y a qu'un paramètre ;
- ▷ il sera *doublement* indéterminé s'il y a deux paramètres ;
- ▷ et ainsi de suite.

Les systèmes qui vont nous intéresser sont les systèmes **linéaires**, autrement dit les systèmes d'équations pour lesquels chaque équation est linéaire [1]. Les équations linéaires à deux inconnues sont représentatives des droites (celles à trois inconnues représentent des plans) et résoudre un système linéaire reviendra à poser la question suivante :

Géométriquement, comment se comporte l'intersection des droites/plans ?

Il est évident que dans le plan, on travaillera avec des systèmes à 2 inconnues et les intersections de droites ne peuvent amener qu'à trois types de solutions :

(i) l'ensemble vide car pas d'intersection : les droites sont parallèles distinctes ;

(ii) un singleton car un point d'intersection : les droites sont sécantes en un point ;

(iii) une infinité de solution : les droites sont parallèles confondues.

Par un raisonnement similaire (quoique plus long), on peut lister l'ensemble des types de solutions et de leur interprétation pour des systèmes représentatifs d'une situation à trois dimensions (systèmes à 3 inconnues).

1. Une équation est dite linéaire s'il s'agit d'une équation du premier degré.

1.7.2 Résolution de systèmes linéaires

La résolution des systèmes linéaires peut se faire de plusieurs manières que nous allons développer sur base de l'exemple suivant :

$$S = \begin{cases} 2x + 3y = 4 & (E_1) \\ -x + 2y = 5 & (E_2) \end{cases}$$

1.7.2.1 Résolution graphique

En traçant les deux droites d_1 et d_2 dont les équations sont données par celles du système, on obtient la FIGURE 6. En analysant ce graphique, on peut en déduire que le système possède une unique solution, le couple $(-1; 2)$, coordonnées du point $I = d_1 \cap d_2$.

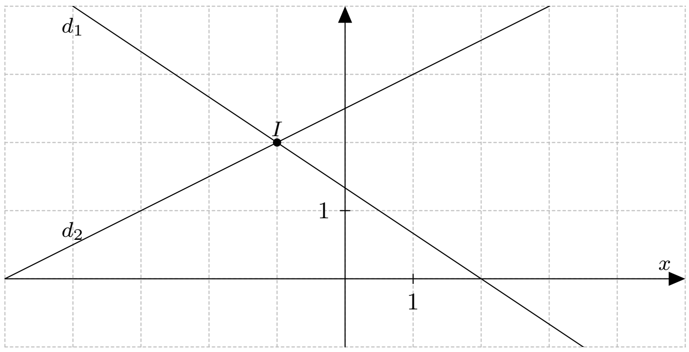

FIGURE 6 – Graphe des droites $d_1 \equiv 2x + 3y = 4$ et $d_2 \equiv -x + 2y = 5$.

1.7.2.2 La substitution

Modus Operandi

On utilise une ligne, dans laquelle on isole une inconnue qui est désormais exprimée en fonction des autres inconnues du système. Cela nous permet de la remplacer dans toutes les autres lignes et d'éliminer une inconnue.
On procède de la sorte jusqu'à n'avoir plus qu'une seule ligne ou une seule inconnue dans le système.

Pour notre exemple, cela donne successivement :

$$\begin{cases} 2x + 3y = 4 & (E_1) \\ -x + 2y = 5 & (E_2) \end{cases}$$

Or, (E_2) est équivalente à $x = 2y - 5$ que l'on appellera (E_3).
En utilisant (E_3) dans (E_1), on obtient l'égalité suivante :

$$\begin{aligned} 2x + 3y = 4 \Leftrightarrow 2(2y - 5) + 3y = 4 \Leftrightarrow 4y - 10 + 3y = 4 \\ \Leftrightarrow 7y = 14 \Leftrightarrow y = 2 \end{aligned}$$

Comme $y = 2$, (E_3) nous donne $x = 2 \times 2 - 5 = -1$.

Le système est déterminé et la solution est donnée par $\mathbb{S} = \{(-1; 2)\}$.

La méthode la plus rapide à utiliser, suffisante pour résoudre les systèmes 2×2 est la substitution. Elle reste efficace pour les systèmes 3×3 même si la méthode suivante peut l'être davantage.

1.7.2.3 Pivot de GAUSS

Modus Operandi

On exprime le système uniquement en recopiant les coefficients des inconnues (toutes classées dans le même ordre !) et les termes indépendants.
Ensuite, pour chaque ligne à partir de la deuxième, on supprime la première inconnue en soustrayant à la ligne un multiple de la première.
Lorsque c'est chose faite pour toutes les lignes, on recommence pour la deuxième inconnue à partir de la troisième ligne en se servant d'un multiple de la deuxième ligne.
On procède de la sorte jusqu'à ce que chaque ligne possède strictement moins d'inconnues que la précédente ou qu'il n'y ait plus d'inconnue.

Pour notre exemple, cela donne successivement :

$$\begin{cases} 2x + 3y = 4 & (E_1) \\ -x + 2y = 5 & (E_2) \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

En effectuant la transformation $(E_1) \leftarrow \frac{(E_1)}{2}$ suivie par $(E_2) \leftarrow (E_2) + (E_1)$, on obtient successivement :

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & \frac{7}{2} & 7 \end{pmatrix}$$

La dernière ligne indique donc que $\frac{7}{2}y = 7$, *ie* $y = 2$.
En utilisant cette information dans la première ligne, on en déduit la valeur de x qui est -1

La solution est donnée par $\mathbb{S} = \{(-1; 2)\}$.
Le système est déterminé.

1.7.3 Exercices

A) Résolvez les systèmes 2×2 suivants par la méthode de votre choix, donnez l'ensemble des solutions et précisez la nature du système (déterminé, simplement indéterminé, ...)
Ensuite, vérifiez graphiquement la solution.

1) $\begin{cases} 2x + 5y = 15 \\ 2x + y = 15 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x + 4y = 19 \\ -6x + y = -2 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 3y - 2x = -1 \\ 2y - 3x = 1 \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2x + 3y = 17 \\ -x + 5y = 11 \end{cases}$ 5) $\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 3x - 2y = 8 \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 2x + 3y = -4 \\ 5x + 7y = -9 \end{cases}$

B) Résolvez les systèmes 3×3 suivants par la méthode de votre choix, donnez l'ensemble des solutions et précisez la nature du système (déterminé, simplement indéterminé, ...)

1) $\begin{cases} x + 4y - z = 10 \\ 3x - y + 2z = -1 \\ 2y + z = 3 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + y = 6 \\ y + z = 2 \\ x + z = 4 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x - y - z = 2 \\ 3x - 6y + 2z = 4 \\ 2x - 5y + 3z = 3 \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2x + y - 3z = 1 \\ x - 2y + z = 2 \end{cases}$ 5) $\begin{cases} 2x - 3y + 4z = 1 \\ x - 2y + 2z = 3 \\ 3x - z = 1 \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x + y - 2z = 5 \\ 2x + 2y - 4z = 10 \\ 3x + 3y - 6z = 15 \end{cases}$

C) À la boulangerie, j'hésite entre des tartes aux pommes et des gâteaux au chocolat. Toutes les tartes sont au même prix, tous les gâteaux aussi. Si j'achète 4 tartes et 2 gâteaux, je paierai 50 euros. Si j'achète 2 tartes et 3 gâteaux, je paierai 49 euros. J'opte finalement pour 3 tartes et 1 gâteau. Je donne un billet de 50 euros. Combien me rend-on ?

2 Fonctions

2.1 Définitions, vocabulaire et caractéristiques

La notion de fonction est essentielle en mathématique et est un outil très puissant, permettant d'effectuer des prédictions sur l'évolution d'un phénomène, de vérifier les extrema que l'on peut rencontrer, de déterminer des surfaces, ...

Fontion

Une fonction est une relation entre deux ensembles tel que tout élément de l'ensemble de départ aura au plus une correspondance dans l'ensemble d'arrivée.

`Remarques :`

- ▷ une fonction est une relation avec un **sens** : f va de A vers B ;
- ▷ dire que la fonction f fait correspondre à un élément de départ au plus un élément d'arrivée signifie qu'un élément de départ quelconque peut être relié soit à aucun élément de l'ensemble d'arrivée, soit à un et un seul élément de l'ensemble d'arrivée.

Par exemple, la relation qui associe à tout nombre réel sa racine carré est une fonction :

- ▷ l'ensemble de départ est l'ensemble des réels $\mathbb{R}$;
- ▷ l'ensemble d'arrivée est l'ensemble des réels aussi ;
- ▷ on a que $x \in \mathbb{R}$ est envoyé sur $f(x) = \sqrt{x} \in \mathbb{R}$: l'expression « $f(x) = \sqrt{x}$ » est ce qu'on appelle la **formule algébrique** ;
- ▷ l'ensemble de départ comprend les *antécédents* et l'ensemble d'arrivée comprend les *images*.

Pour traduire « f est la fonction qui va de l'ensemble des réels dans l'ensemble des réels et qui associe à tout point de l'ensemble de départ son carré », les mathématiciens ont développé une écriture particulière.

Expression analytique

Soit f une fonction telle que

- ▶ A soit l'ensemble de départ et B l'ensemble d'arrivée ;
- ▶ $f(x) = \ldots$ soit la formule algébrique permettant de calculer l'image de toute valeur $x \in A$;

alors, l'expression analytique de la fonction f s'écrit $f : A \to B : x \mapsto f(x) = \ldots$

L'expression analytique permet donc de renseigner les ensembles de départ et d'arrivée ainsi que la formule algébrique, la « recette » permettant d'utiliser la fonction. En l'absence de l'expression analytique, on suppose que les ensembles de départ et d'arrivée sont donnés par l'ensemble des réels.

Tous les éléments de l'ensemble de départ ne sont pas forcément utiles. Il en va de même pour les éléments de l'ensemble d'arrivée. C'est pourquoi l'on a développé la notion de **domaine** et **ensemble image**.

Domaine de définition

Soit f une fonction. On appelle **domaine de définition** de la fonction f un sous-ensemble de l'ensemble de départ constitué uniquement des éléments qui admettent une image par la fonction f.
On notera cet ensemble $domf$.

Pour déterminer le domaine de définition d'une fonction, on se base sur les conditions d'existence. Par exemple, pour la fonction racine carrée, on a que $f(x) = \sqrt{x}$, ce qui implique que $x \geq 0$, d'où $domf = \mathbb{R}^+$.

Ensemble image

Soit f une fonction. On appelle **ensemble image** de la fonction f un sous-ensemble de l'ensemble d'arrivée constitué uniquement des éléments qui admettent un antécédent par la fonction f.
On notera cet ensemble Imf.

Déterminer l'ensemble image est plus compliqué en général : cela peut requérir une étude des variations de la fonction. Mais dans certains cas, un simple raisonnement permet de le déterminer. Par exemple, pour la fonction inverse, on a que $f(x) = \frac{1}{x}$. Tout nombre réel non nul possède un inverse qui est réel non nul et réciproquement, tout nombre réel non nul est l'inverse d'un réel non nul. On peut en déduire que $Imf = \mathbb{R}_0$.

Quand on représente une fonction dans un repère du plan, on trace une courbe montrant la relation entre les antécédents (sur l'axe des abscisses) et les images (sur l'axe des ordonnées) : cette courbe est appelée **graphe** de la fonction. L'ensemble « graphe + repère » est appelé graphique.

Les fonctions possèdent différentes caractéristiques élémentaires :

- les racines : comme pour les polynômes, une valeur est une racine d'une fonction si elle annule cette fonction (et fait partie du domaine de la fonction). L'ensemble des racines est noté $racf$;
- le signe : comme pour les polynômes, une fonction possède un signe que l'on encode dans un tableau de signe. On y place toutes les éventuelles racines et « trous » du domaine ainsi que le signe de la fonction par rapport à ces valeurs ;
- la variation : la croissance d'une fonction est elle aussi encodée dans un tableau (de variation) à l'aide de flèches permettant de savoir quand la fonction croît ou décroît. On y place les extrema de la fonction et les « trous » du domaine ;
- la parité : lorsque le domaine d'une fonction est symétrique, le graphe peut faire apparaître (dans un repère orthogonal) une symétrie orthogonale dont l'axe est celui des ordonnées (fonction paire) ou une symétrie centrale dont le centre est l'origine du repère (fonction impaire) ;
- la périodicité : certaines fonctions ont un graphe telles que son dessin se répète.

2.2 Fonctions usuelles

2.2.1 Fonction identité

Il s'agit de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x) = x$.

- ▷ $domf = \mathbb{R}$: en effet, il n'y a pas de condition d'existence ;
- ▷ $Imf = \mathbb{R}$: en effet, tout réel est envoyé sur lui-même ;
- ▷ $racf = \{0\}$: en effet, $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
- ▷ la fonction est impaire et non-périodique : en effet, $f(-x) = -x = -f(x)$ et le domaine est symétrique par rapport à 0, d'où la fonction est impaire.
- ▷ graphe :

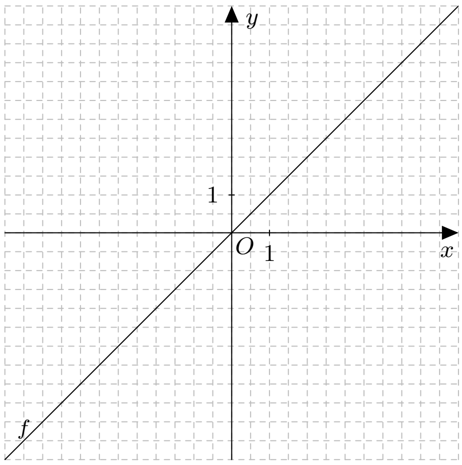

FIGURE 7

- ▷ tableau de variation :

x	
$f(x) = x$	$\nearrow$

TABLEAU 3

Les fonctions du premier degré sont de la forme $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x) = Ax + B$ avec A et B des paramètres réels et A non nul. Les caractéristiques de ces fonctions sont similaires, elles ont toujours une unique racine en $\frac{-B}{A}$ et leur graphe est une droite croissante si $A > 0$ et décroissante sinon.

2.2.2 Fonction carrée

Il s'agit de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x) = x^2$.

- ▷ $domf = \mathbb{R}$: en effet, il n'y a pas de condition d'existence ;
- ▷ $Imf = \mathbb{R}^+$: en effet, le carré de tout réel est positif ;
- ▷ $racf = \{0\}$: en effet, $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

▷ la fonction est paire et non-périodique : en effet, $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$ et le domaine est symétrique par rapport à 0, d'où la fonction est paire.

▷ graphe :

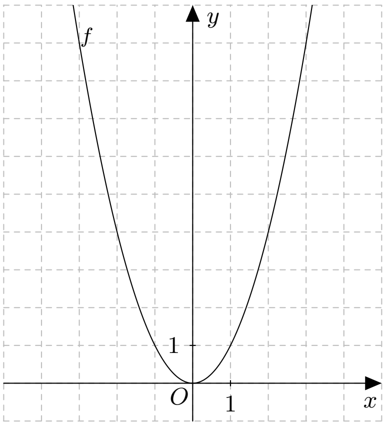

FIGURE 8

▷ tableau de variation :

x		0	
$f(x) = x^2$	$\searrow$	0	$\nearrow$

TABLEAU 4

Les fonctions du second degré sont de la forme $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x) = Ax^2 + Bx + C$. Les caractéristiques ont été étudiées en détail dans la partie traitant la résolution des (in)équations du second degré.
On peut néanmoins ajouter que le graphe d'une fonction du second degré est toujours une parabole telle que :

▷ la concavité sera vers le haut si $A > 0$ et vers le bas si $A < 0$;

▷ le sommet S est donné $S\left(\frac{-B}{2A}; \frac{-\Delta}{4A}\right)$ et se trouve être un minimum si $A > 0$ et un maximum sinon;

▷ l'axe de symétrie a pour équation $d \equiv x = \frac{-B}{2A}$.

2.2.3 Fonction cube

Il s'agit de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x) = x^3$.

▷ $dom f = \mathbb{R}$: en effet, il n'y a pas de condition d'existence;

▷ $Im f = \mathbb{R}$: en effet, tout réel est le cube d'un réel;

▷ $rac f = \{0\}$: en effet, $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

▷ la fonction est impaire et non-périodique : en effet, $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$ et le domaine est symétrique par rapport à 0, d'où la fonction est impaire.

▷ graphe :

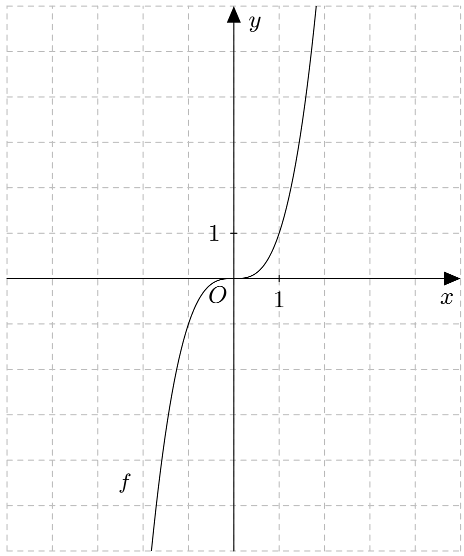

FIGURE 9

▷ tableau de variation :

x	
$f(x) = x^3$	$\nearrow$

TABLEAU 5

2.2.4 Fonction racine carrée

Il s'agit de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x) = \sqrt{x}$.

- ▷ $domf = \mathbb{R}^+$: en effet, les conditions d'existence exigent que le radicand soit positif, *ie* $x \geq 0$;
- ▷ $Imf = \mathbb{R}^+$: en effet, seuls les réels positifs admettent au moins une racine carrée réelle. ;
- ▷ $racf = \{0\}$: en effet, $f(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
- ▷ la fonction est sans parité et non-périodique : en effet, le domaine n'est pas symétrique par rapport à 0 (par exemple, $1 \in domf$ mais pas -1) ;
- ▷ graphe :

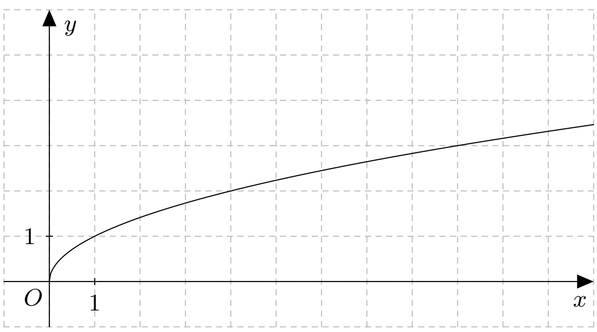

FIGURE 10

▷ tableau de variation :

x		0	
$f(x) = \sqrt{x}$	$\nexists$	0	$\nearrow$

TABLEAU 6

2.2.5 Fonction racine cubique

Il s'agit de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x) = \sqrt[3]{x}$.

▷ $domf = \mathbb{R}$: en effet, il n'y a pas de condition d'existence ;

▷ $Imf = \mathbb{R}$: en effet, tout réel admet une unique racine cubique ;

▷ $racf = \{0\}$: en effet, $f(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x} = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

▷ la fonction est impaire et non-périodique : en effet, $f(-x) = \sqrt[3]{-x} = -\sqrt[3]{x} = -f(x)$ et le domaine est symétrique par rapport à 0 ;

▷ graphe :

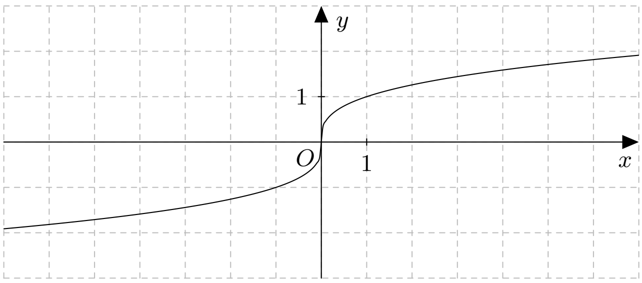

FIGURE 11

▷ tableau de variation :

x		0	
$f(x) = \sqrt[3]{x}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$

TABLEAU 7

2.2.6 Fonction inverse

Il s'agit de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x) = \frac{1}{x}$.

▷ $domf = \mathbb{R}_0$: en effet, les conditions d'existence exigent que le dénominateur soit non nul, *ie* $x \neq 0$;

▷ $Imf = \mathbb{R}_0$: en effet, 0 n'admet pas d'inverse ;

▷ $racf = \emptyset$: en effet, $f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow 1 = 0$, ce qui est impossible. :

▷ la fonction est impaire et non-périodique : en effet, $f(-x) = \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x} = -f(x)$ et le domaine est symétrique par rapport à 0 ;

▷ graphe :

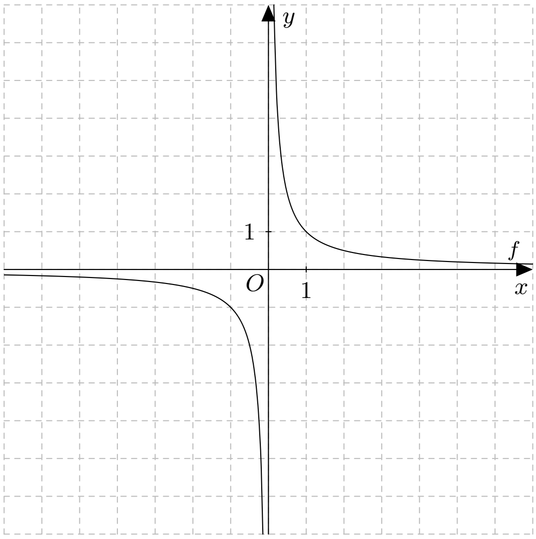

FIGURE 12

▷ tableau de variation :

x		0	
$f(x) = \frac{1}{x}$	$\searrow$	$\nexists$	$\searrow$

TABLEAU 8

2.2.7 Fonction valeur absolue

Il s'agit de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x) = |x|$.

▷ $dom f = \mathbb{R}$: en effet, il n'y a pas de condition d'existence ;

▷ $Im f = \mathbb{R}^+$: en effet, toute distance entre une abscisse et l'origine existe ;

▷ $rac f = \{0\}$: en effet, $f(x) = 0 \Leftrightarrow |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

▷ la fonction est paire et non-périodique : en effet, $f(-x) = |-x| = |-1| \times |x| = f(x)$ et le domaine est symétrique par rapport à 0 ;

▷ graphe :

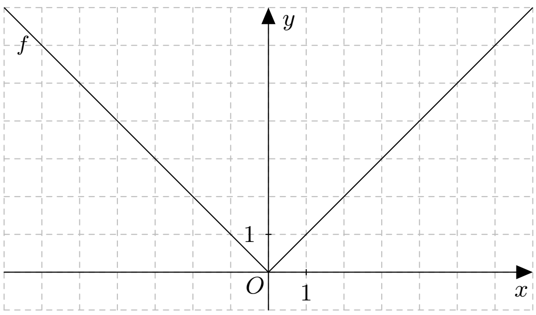

FIGURE 13

▷ tableau de variation :

x		0	
$f(x) = \|x\|$	$\searrow$	0	$\nearrow$

TABLEAU 9

2.2.8 Fonction sinus

Il s'agit de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x) = \sin x$.

▷ $domf = \mathbb{R}$: en effet, il n'y a pas de condition d'existence ;

▷ $Imf = [-1; 1]$: en effet, le sinus est définit comme l'ordonnée d'un point du cercle trigonométrique ;

▷ $racf = \{0 + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$: en effet, $f(x) = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0 \Leftrightarrow x = 0 + k\pi$;

▷ la fonction est impaire et périodique de période 2π : en effet, $f(-x) = \sin(-x) = -\sin x = -f(x)$ et le domaine est symétrique par rapport à 0. De plus, $f(x + 2\pi) = \sin(x + 2\pi) = \sin x = f(x)$;

▷ graphe :

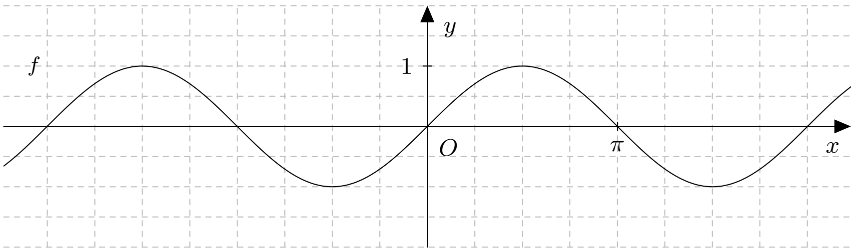

FIGURE 14

▷ tableau de variation :
On va se limiter à étudier la fonction sinus sur une période, de $-\pi$ à π. Comme la fonction est périodique, il suffit de l'étudier sur une période :

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π
$f(x) = \sin x$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

TABLEAU 10

2.2.9 Fonction cosinus

Il s'agit de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x) = \cos x$.

▷ $domf = \mathbb{R}$: en effet, il n'y a pas de condition d'existence ;

▷ $Imf = [-1; 1]$: en effet, le cosinus est définit comme l'abscisse d'un point du cercle trigonométrique ;

▷ $racf = \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$: en effet, $f(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$.

▷ la fonction est paire et périodique de période 2π : en effet, $f(-x) = \cos(-x) = \cos x = f(x)$ et le domaine est symétrique par rapport à 0. De plus, $f(x + 2\pi) = \cos(x + 2\pi) = \cos x = f(x)$;

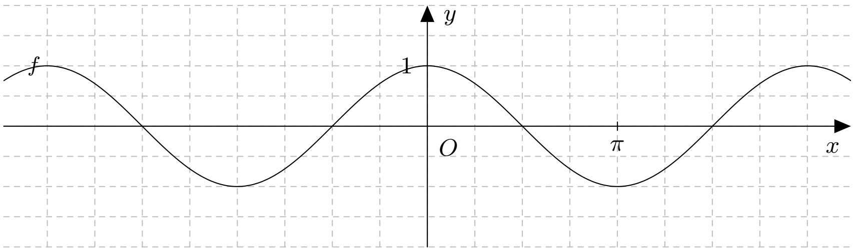

FIGURE 15

- ▷ graphe :
- ▷ tableau de variation :
  On va se limiter à étudier la fonction cosinus sur une période, de $-\pi$ à π. Comme la fonction est périodique, il suffit de l'étudier sur une période :

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π
$f(x) = \cos x$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1

TABLEAU 11

2.2.10 Fonction tangente

Il s'agit de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x) = \operatorname{tg} x$.

- ▷ $domf = \mathbb{R} \backslash \{x : x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}\}$: en effet, la tangente n'existe pas pour les angles $\frac{\pi}{2} + k\pi$;
- ▷ $Imf = \mathbb{R}$: en effet, tout réel est la tangente d'un angle ;
- ▷ $racf = \{0 + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$: en effet, $f(x) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = 0 \Leftrightarrow x = 0 + k\pi$;
- ▷ la fonction est impaire et périodique de période π : en effet, $f(-x) = \operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x = -f(x)$ et le domaine est symétrique par rapport à 0. De plus, $f(x + \pi) = \operatorname{tg}(x + \pi) = \cos x = f(x)$;
- ▷ graphe :

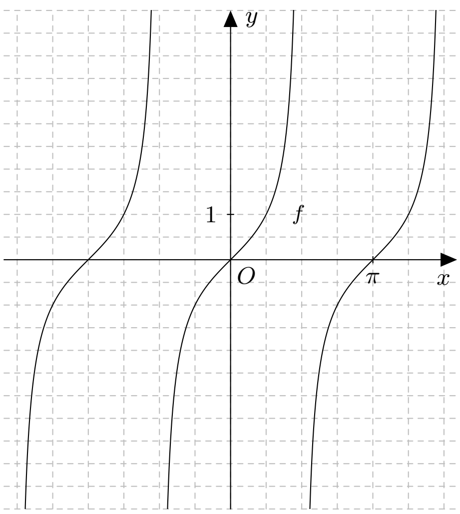

FIGURE 16

▷ tableau de variation :
On va se limiter à étudier la fonction tangente sur une période, de $-\frac{\pi}{2}$ à $\frac{\pi}{2}$. Comme la fonction est périodique, il suffit de l'étudier sur une période :

x	$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$
$f(x) = \operatorname{tg} x$	$\nexists$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\nexists$

TABLEAU 12

2.3 Fonctions cyclométriques

Il existe différentes opérations sur les fonctions. On a la somme/différence et le produit/quotient comme dans les nombres réels. Mais on a aussi la composition de fonctions, qui consiste à enchainer deux fonctions l'une à la suite de l'autre.

Composition de fonctions

Soient f et g deux fonctions telles que $Imf \subset domg$. Alors, on définit la composition de f avec g, notée $g \circ f$, la fonction suivante :

$$\forall x \in domf : \big(g \circ f\big)(x) = g\big(f(x)\big).$$

Lorsque l'on combine une fonction f avec une fonction g et que l'on revient au point de départ, et ce quel que ce soit ce point initial, les fonctions f et g ont un lien particulier : elles sont réciproques.

Fonction réciproque

Soient f et g deux fonctions. On dira que f et g sont réciproques l'une de l'autre si :

$$\begin{cases} dom\ \ f = Im\ \ g \text{ et } dom\ \ g = Im\ \ f \\ f \circ g = \mathbb{1} = g \circ f \text{ où } \mathbb{1} \text{ est la fonction Identité.} \end{cases}.$$

Les fonctions ne possèdent pas toujours une réciproque : par exemple la fonction carrée possède une réciproque partielle sur $\mathbb{R}^+$ qui est la racine carrée. Il en va de même pour la fonction valeur absolue. Cela vient du fait que la fonction initiale n'est pas injective, *ie* deux points de départs différents possèdent la même image.
Les fonctions trigonométriques étant périodiques, elles ne sont clairement pas injective. C'est pourquoi leurs réciproques (appelées fonctions cyclométriques) ne sont créées que sur une partie du domaine dont la longueur est la moitié de la période.

2.3.1 La fonction arcsinus

La fonction sinus n'est injective que sur, par exemple, l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.
On sait que l'on ne peut créer une réciproque que lorsque la fonction est bijective. Or, sur $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, sinus est bijective. On va donc se concentrer sur cet intervalle.
Sa réciproque sera donc une fonction qui sera bijective de $[-1; 1]$ sur $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ qui applique tout nombre réel compris entre -1 et 1 sur la mesure de l'angle orienté en radians comprise entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$. Cette fonction est appelée **l'arcsinus** et notée $\arcsin$.
Donc la fonction réciproque de la fonction sinus est donnée par :

$$\forall x \in [-1; 1] : f(x) = \arcsin(x).$$

Arcsinus

On définit la fonction arcsinus comme étant la fonction telle que

$$\forall x \in [-1;1] : y = \arcsin x \Leftrightarrow \left(x = \sin y \text{ et } -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}\right).$$

Pour trouver sa représentation graphique, il suffit de prendre le résultat de l'image par la symétrie orthogonale de la courbe de $\sin x$ sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. On obtient le graphe donnée par la FIGURE 17.

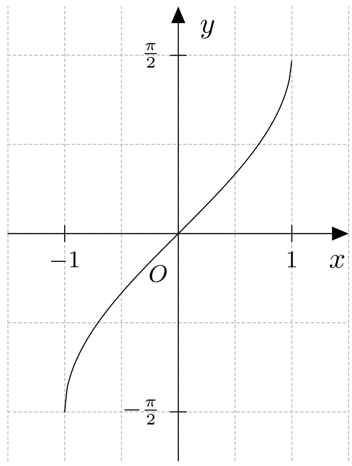

FIGURE 17

2.3.2 La fonction arcosinus

La fonction cosinus n'est injective que sur, par exemple, l'intervalle $[0;\pi]$. On sait que l'on ne peut créer une réciproque que lorsque la fonction est bijective. Or, sur $[0;\pi]$, cosinus est bijective. On va donc se concentrer sur cet intervalle. Sa réciproque sera donc une fonction qui sera bijective de $[-1;1]$ sur $[0;\pi]$ qui applique tout nombre réel compris entre -1 et 1 sur la mesure en radians comprise entre 0 et π. Cette fonction est appelée l'arccosinus et notée $\arccos$.
Donc la fonction réciproque de la fonction cosinus est donnée par :

$$\forall x \in [-1;1] : f(x) = \arccos(x).$$

Arccosinus

On définit la fonction arccosinus comme étant la fonction telle que

$$\forall x \in [-1;1] : y = \arccos x \Leftrightarrow (x = \cos y \text{ et } 0 \leq y \leq \pi).$$

Pour trouver sa représentation graphique, il suffit de prendre le résultat de l'image par la symétrie orthogonale de la courbe de $\cos x$ sur l'intervalle $[0; \pi]$.

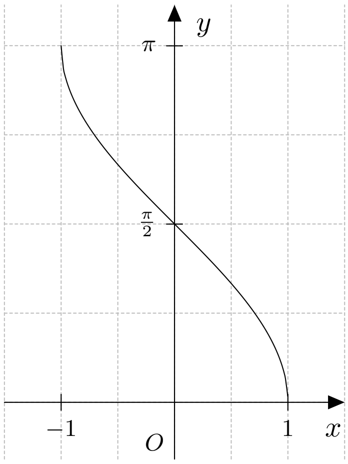

FIGURE 18

2.3.3 La fonction arctangente

La fonction tangente n'est injective que sur, par exemple, l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. On sait que l'on ne peut créer une réciproque que lorsque la fonction est bijective. Or, sur $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, tangente est bijective.
On va donc se concentrer sur cet intervalle. Sa réciproque sera donc une fonction qui sera bijective de l'ensemble des réels sur $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ qui applique tout nombre réel sur la mesure en radians comprise entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$. Cette fonction est appelée la tangente et notée arctg.
Donc la fonction réciproque de la fonction tangente est donnée par :

$$\forall x \in [-1; 1] : f(x) = \operatorname{arctg}(x).$$

Arctangente

On définit la fonction arctangente comme étant la fonction telle que

$$y = \operatorname{arctg} x \Leftrightarrow \left(x = \operatorname{tg} y \text{ et } -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\right).$$

Pour trouver sa représentation graphique, il suffit de prendre le résultat de l'image par la symétrie orthogonale de la courbe de $\operatorname{tg} x$ sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

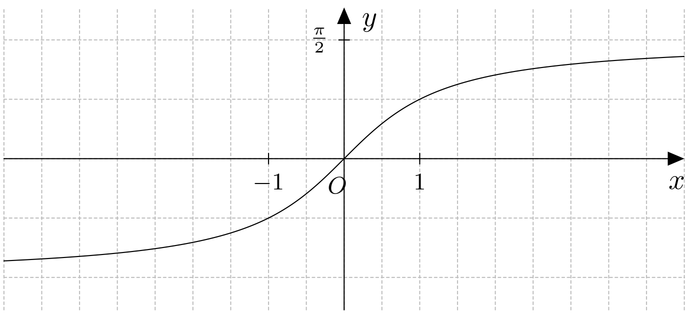

FIGURE 19

2.4 Fonctions logarithme et exponentielle

2.4.1 Exponentielle

Exponentielle de base a

Soit $a \in \mathbb{R}_0^+$. On appelle exponentielle de base $\boldsymbol{a}$ la fonction donnée par

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x) = a^x.$$

Exponentielle de base e

La fonction exponentielle de base e, dont la formule algébrique est $f(x) = \mathrm{e}^x$, est telle qu'elle est la seule fonction exponentielle égale à sa dérivée.

On peut calculer la valeur de e, qui est approximativement de $\mathrm{e} \simeq 2,718$. Bien qu'on n'ait pas parlé de dérivée jusqu'à présent, on va accepter cette définition pour pouvoir étudier la fonction exponentielle de base e.

- $dom f = \mathbb{R}$: en effet, il n'y a pas de condition d'existence ;
- $Im f = \mathbb{R}_0^+$: en effet, une puissance réelle d'un positif sera toujours strictement positive ;
- $rac f = \emptyset$: en effet, $f(x) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^x = 0$ ce qui est impossible ;
- la fonction est sans parité et non-périodique : en effet, $\mathrm{e}^{-1} = \frac{1}{\mathrm{e}} \neq \mathrm{e} = \mathrm{e}^1$;
- graphe :

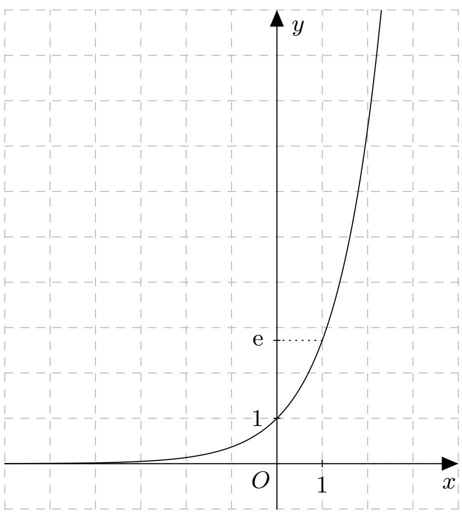

FIGURE 20

- tableau de variation :

x	
$f(x) = \mathrm{e}^x$	$\nearrow$

TABLEAU 13

2.4.2 Logarithme

Logarithme en base a

Soit $a \in \mathbb{R}_0^+ \setminus \{1\}$. On appelle logarithme en base a la fonction réciproque de la fonction exponentielle en base a.

On remarque que dans cette définition, on a exclu une valeur supplémentaire pour la base : la valeur 1. En effet, l'exponentielle de base 1 est la fonction constante 1 qui est non bijective et n'admet donc pas de réciproque. Laissons quelque peu de côté cette définition et intéressons-nous à la fonction logarithme en base e, qui est donc la réciproque de l'exponentielle de base e.

Logarithme en base e

On appelle logarithme de base e ou **logarithme népérien** ou encore logarithme naturel la fonction donnée par

$$\ln : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R} : x \mapsto \ln x$$

On a que $y = \ln x \Leftrightarrow \mathrm{e}^y = x$.

L'étude de la fonction logarithme népérien dont l'expression analytique est $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \ln x$ donne :

- $domf = \mathbb{R}_0^+$: en effet, c'est la réciproque de l'exponentielle, il y a donc comme condition d'existence $x > 0$;
- $Imf = \mathbb{R}$: en effet, c'est la réciproque de l'exponentielle ;
- $racf = \{1\}$: en effet, $f(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = \mathrm{e}^0 = 1$;
- la fonction est sans parité et non-périodique : en effet, le domaine n'est pas symétrique ;
- graphe :

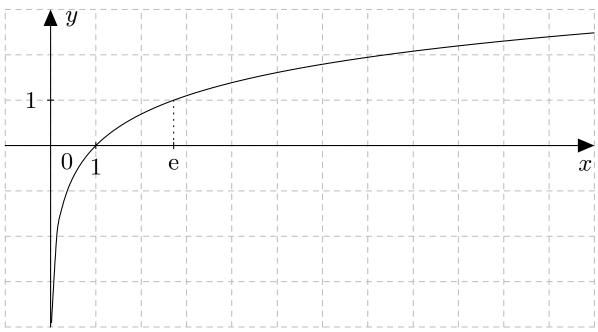

FIGURE 21

- tableau de variation :

x	
$f(x) = \ln x$	$\nearrow$

TABLEAU 14

Notation

On remarque que le logarithme népérien (qui est le logarithme en base e), possède une notation propre : « ln ».
Cette notation est équivalente à « $\log_{\mathrm{e}}$ », plus longue et jamais utilisée.
Un autre logarithme possède une notation propre : le logarithme en base 10 que l'on note simplement « log ».
Cette notation est équivalente à « $\log_{10}$ », rarement utilisée.

2.5 Exercices

A) Soit une fonction du premier degré ayant une racine valant 4 et une ordonnée à l'origine valant 1. Quelle est cette fonction ?

B) La fonction f est une fonction du premier degré telle que $f(2) = 3$ et $f(8) = -9$. Que vaut $f(25)$?

C) La fonction $f(x) = 2x^2 - 4x + 5$ possède un minimum. Quelle est la valeur de x réalisant ce minimum ?

D) Soit une fonction du second degré qui admet son maximum au point d'abscisse 2 et qui s'annule en le point d'abscisse -3. Elle s'annule également en un autre point. Quelle est l'abscisse de ce point ?

E) La fonction $f(x) = 4(x-1)^2 + 3$ possède-t-elle un minimum ou un maximum ? Quelles sont les coordonnées du sommet ?

F) On considère la fonction $f(x) = \log_2\left(\dfrac{x-1}{2-x}\right)$. Pour quelle(s) valeur(s) de x cette fonction existe-t-elle ?

3 Analyse de fonctions

3.1 Limite et continuité

La notion de limite permet d'appréhender le comportement d'une fonction à n'importe quel endroit de son domaine ainsi qu'au bord de celui-ci, même si les conditions d'existence nous empêchent de calculer l'image de la fonction sur ces bords. Par exemple, la fonction $f(x) = \frac{1}{x-2}$ est telle que $dom f = \mathbb{R}\backslash\{2\} =]-\infty; 2[\cup]2; +\infty[$. L'adhérence du domaine donne $\mathbb{R}$ et la limite pouvant être appliquée sur l'adhérence du domaine, on a le droit de voir le comportement de la fonction « aux abords » de la valeur 2. Ce calcul sera noté $\lim\limits_{x\to 2} \frac{1}{x-2}$. Pour parvenir à déterminer des limites, il y a quelques règles à suivre, que l'on va rappeler à l'aide d'exemples.

Limite trigonométrique

On a que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

Limite en l'infini de polynômes

La limite en l'infini d'un polynôme est donnée par la limite en l'infini de son monôme dominant.
De même, la limite en l'infini d'une fraction rationnelle est donnée par la limite en l'infini du quotient du monôme dominant du numérateur par le monôme dominant du dénominateur.

Limites et opérations sur les fonctions

La limite d'une somme, d'une différence, d'un produit ou d'un quotient de deux fonctions est donnée respectivement par la somme, la différence, le produit ou le quotient des limites des deux fonctions, si tant est que toutes les limites aient du sens.
La limite de la composée est elle aussi donnée par la composée des limites, sous la même réserve.

Lorsque l'on effectue des opérations, on peut se retrouver avec des formes indéterminées, *ie* des expressions pour lesquelles la théorie ne peut pas trancher et qui **doivent** être étudiées au cas par cas.

Cas	Description
« $\frac{0}{0}$ »	$\lim \frac{f}{g}$ avec $\lim f = 0 = \lim g$.
« $\frac{\infty}{\infty}$ »	$\lim \frac{f}{g}$ avec $\lim f = \infty = \lim g$.
« $0 \times \infty$ »	$\lim(f \times g)$ avec $\lim f = 0$ et $\lim g$ infinie.
« $\infty - \infty$ »	$\lim(f - g)$ avec $\lim f$ et $\lim g$ sont toutes deux soit $+\infty$, soit $-\infty$.

TABLEAU 15

3.1.1 Les FI du type « $\frac{0}{0}$ »

Nous allons voir les différentes techniques sur un exemple, qui permettra de mettre en lumière la manière dont on doit procéder.

A) Calculons la limite suivante : $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 3x + 2}$.
Le numérateur et le dénominateur s'annulent tous les deux en 1. On est dans un cas « $\frac{0}{0}$ ».

- $x^2 - 4x + 3$ se factorise par $x - 1$. En effet, résolvons $x^2 - 4x + 3 = 0$ pour trouver les racines.
On a que : $\rho = 16 - 12 = 4$ d'où $x_\pm = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 1 \end{cases}$
On a donc que $x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3)$.

- Par un raisonnement similaire, on a que $x^2 - 3x + 2$ se factorise lui aussi par $x - 1$, d'où $x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$.

Donc $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 3x + 2} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x-1)(x-3)}{(x-1)(x-2)} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x - 3}{x - 2} = \dfrac{-2}{-1} = 2$, l'indétermination est levée.
Graphiquement, le point $P(1; 2)$ est un point creux du graphe de la fonction.

B) Calculez la limite suivante : $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 2x + 1}$.
Le numérateur et le dénominateur s'annulent tous les deux en 1. On est dans un cas « $\frac{0}{0}$ ».

Par un raisonnement similaire à celui appliqué à l'exemple précédent, on obtient :

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-4x+3}{x^2-2x+1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x-3)}{(x-1)^2} = \lim_{x\to 1} \frac{x-3}{x-1}.$$

Or, en 1, seul le dénominateur s'annule de la dernière expression s'annule. La fonction va donc vers l'infini. Pour déterminez la limite, soit on utilise un tableau de signe, soit on fait quelques calculs à la main.

x		1		3	
$x-3$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x-1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$\frac{x-3}{x-1}$	$+$	$\nexists$	$-$	0	$+$

TABLEAU 16 – Tableau de signe de $\frac{x-3}{x-1}$

À la lumière de ce tableau de signe, on voit que lorsque l'on s'approche par la gauche en 1, la fonction est positive et file vers l'infini. Si l'on vient de la droite, la fonction est négative et file vers l'infini.

Par calculs : on remarque que $x-3$, quand x s'approche de 1, a une valeur négative (proche de -2).
Cependant, $x-1$ change de signe en 1. En effet, si x s'approche de 1 par des valeurs plus petites, $x-1$ sera négatif (proche de 0^-) tandis que si x s'approche de 1 par des valeurs plus grandes, $x-1$ sera positif (proche de 0^+).
D'où

$$\lim_{\substack{x\to 1\\<}} \frac{x^2-4x+3}{x^2-2x+1} = \lim_{\substack{x\to 1\\<}} \frac{x-3}{x-1} = \text{« } \frac{-2}{0^-} \text{ »} = +\infty \text{ et } \lim_{\substack{x\to 1\\>}} \frac{x^2-4x+3}{x^2-2x+1} = \lim_{\substack{x\to 1\\>}} \frac{x-3}{x-1} = \text{« } \frac{-2}{0^+} \text{ »} = -\infty.$$

Que ce soit par le tableau de signe ou par calculs, on remarque que la limite à gauche vaut $+\infty$ et à droite vaut $-\infty$. Limite à gauche et limite à droite étant différentes, la limite n'existe pas.

Graphiquement, on verra que cela correspond à la présence d'une droite verticale en abscisse 1 telle que la fonction vienne s'y « coller ». Il y a un saut de continuité pour cette fonction en 1.

C) Calculez la limite suivante $\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x-3}}$.
Le numérateur et le dénominateur s'annulent tous les deux en 3. On est dans un cas « $\frac{0}{0}$ ».
On remarque tout d'abord que 3 est bien adhérent au domaine, mais il est sur le bord. La fonction n'est pas définie pour les réels inférieurs strictement à 3.
La technique pour lever l'indétermination est de passer par les binômes conjugués :

$$\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x-3}} = \lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x-3}} \times \underbrace{\frac{\boldsymbol{\sqrt{x+1}+2}}{\boldsymbol{\sqrt{x+1}+2}}}_{\text{« 1 bien choisi »}} = \lim_{x\to 3} \frac{\left(\sqrt{x+1}\right)^2-2^2}{\sqrt{x-3}\left(\sqrt{x+1}+2\right)} = \lim_{x\to 3} \frac{x-3}{\sqrt{x-3}\left(\sqrt{x+1}+2\right)}$$

$$= \lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x-3}\sqrt{x-3}}{\sqrt{x-3}\left(\sqrt{x+1}+2\right)} = \lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x+1}+2} = \frac{0}{4} = 0$$

L'astuce est donc de se débarrasser de ce qui nous ennuie en faisant « sauter » la racine carrée.
Graphiquement, on a que le point $P(3;0)$ est un point creux du graphe de la fonction.

D) Calculez la limite suivante $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|x|}{x}$.
Le numérateur et le dénominateur s'annulent en 0 et la fraction est factorisée. La présence de la valeur absolue nous empêche de continuer, on va donc « s'en débarrasser » en utilisant sa définition :

Valeur absolue

Soit x un réel. La valeur absolue de x, notée $|x|$, est définie comme suit : $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0; \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$

Donc, on a que

$$\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x} = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} 1 = 1 \\ \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{-x}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} -1 = -1 \end{cases}$$

Comme la limite à gauche est différente de la limite à droite, on a que la limite n'existe pas.
Graphiquement, on aura un saut de continuité en 0 pour cette fonction, avec un point creux en $(0; -1)$ et un point plein en $(0; 1)$.

Résumé des techniques pour le cas « $0/0$ »

Si l'on se trouve dans un cas d'indétermination :

- ▷ vérifier si cela a du sens de calculer la limite ;
- ▷ s'il s'agit d'une fraction rationnelle, il suffit de factoriser le numérateur et le dénominateur et simplifier la fraction pour éliminer l'indétermination ;
- ▷ s'il s'agit d'une fraction irrationnelle, il suffit de multiplier par une fraction formant un « 1 bien choisi », composée par le binôme conjugué du numérateur et/ou du dénominateur où se trouve(nt) la (les) racine(s) ;
- ▷ s'il s'agit d'une fraction avec fonction(s) trigonométrique(s), il faut se ramener à un cas du type $\frac{\sin x}{x}$;
- ▷ s'il y a des valeurs absolues, il faut les enlever en utilisant la définition de valeur absolue et en différenciant les cas.

3.1.2 Les FI des autres types que « $\dfrac{0}{0}$ »

Les formes indéterminées du type « $\frac{\infty}{\infty}$ » a déjà été partiellement traité lors des limites de fractions rationnelles. Pour les lever, il suffit d'utiliser la « règle du plus haut degré ».
Néanmoins, il se peut qu'il y ait des cas « $\frac{\infty}{\infty}$ » avec présence de fonction irrationnelle. Étudions-en un exemple : $\lim\limits_{\pm\infty} \dfrac{4x-1}{\sqrt{x^2+5x+3}}$.

- ▷ Nous allons d'abord étudier la limite en $+\infty$, en ayant remarqué que $+\infty$ est adhérent au domaine.
Si on étudie la limite avec x qui tend vers $+\infty$, alors forcément $x > 0$, d'où comme $\sqrt{x^2} = |x|$, on aura ici que $\sqrt{x^2} = x$.

$$\lim_{+\infty} \frac{4x-1}{\sqrt{x^2+5x+3}} = \lim_{+\infty} \frac{x\left(4+\frac{1}{x}\right)}{x\sqrt{1+\frac{5}{x}+\frac{3}{x^2}}} = 4$$

- ▷ Étudions maintenant la limite en $-\infty$, en ayant à nouveau remarqué que $-\infty$ est adhérent au domaine. En étudiant la limite avec x tendant vers $-\infty$, x sera négatif d'où $\sqrt{x^2} = -x$.

$$\lim_{-\infty} \frac{4x-1}{\sqrt{x^2+5x+3}} = \lim_{-\infty} \frac{x\left(4+\frac{1}{x}\right)}{-x\sqrt{1+\frac{5}{x}+\frac{3}{x^2}}} = -4$$

On remarque donc qu'il faut faire **très** attention avec les racines carrées !

Pour le cas « $0 \times \infty$ », celui-ci est souvent lié aux cas « $\frac{0}{0}$ » ou « $\frac{\infty}{\infty}$ » et se règle donc comme ceux-ci.

Enfin, le cas « $\infty - \infty$ » : il survient généralement lors de limites de différences entre des fonctions irrationnelles (racines carrées, cubiques, etc). Analysons par exemple la limite suivante : $\lim\limits_{+\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{2x-1}$.

- ▷ On remarque qu'ici, si $+\infty$ est bien adhérent au domaine, $-\infty$ **n'**est **pas** adhérent au domaine. Calculer la limite en $-\infty$ n'a donc aucun sens !
- ▷ On a successivement :

$$\begin{aligned}
\lim_{+\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{2x-1} &= \left(\sqrt{x+1} - \sqrt{2x-1}\right) \frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-1}} \\
&= \lim_{+\infty} \frac{(x+1)-(2x-1)}{\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-1}} = \lim_{+\infty} \frac{2-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-1}} \\
&= \lim_{+\infty} \frac{\sqrt{x}\left(\frac{2}{\sqrt{x}} - \sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}} + \sqrt{2-\frac{1}{x}}\right)} = -\infty
\end{aligned}$$

3.2 Continuité

Continuité en terme de limite

Soit a un point du domaine de f. La fonction f est continue en a si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = a$.

La continuité d'une fonction n'a de sens que sur le domaine. On peut donc dire que la fonction inverse est continue sur son domaine, car l'apparent « saut de continuité » a lieu en 0, valeur exclue du domaine.

3.3 Dérivée

3.3.1 Définition et interprétation

La notion de dérivée permet d'évaluer les variations d'une fonction (croissance et concavité) et de déduire les extrema potentiels de la fonction.

Nombre dérivé

Soient f une fonction et A un sous-ensemble ouvert du domaine de f. Considérons a un point du sous-ensemble A. On définit le **nombre dérivé** de la fonction f en a, noté $f'(a)$, comme étant la limite (si elle existe) quand x tend vers a du taux d'accroissement de f en a, *ie* $f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

Il existe d'autres notations pour la dérivée : $f'(a) = \partial f(a) = \frac{d}{dx} f(a)$.

Interprétation géométrique

Le nombre dérivé de la fonction f en a est la pente de la tangente au graphe de f au point d'abscisse a, si cette tangente existe.
L'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a est donnée par :

$$t \equiv y = f'(a)(x-a) + f(a).$$

3.3.2 Formulaire

Soient f et g deux fonctions dérivables de variable x et posons k une constante réelle et a un réel strictement positif différent de 1.

- ▷ somme/différence : $(f \pm g)' = f' \pm g'$
- ▷ produit : $(fg)' = f'g + fg'$
- ▷ quotient : $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$
- ▷ composée : $(g \circ f)' = (g' \circ f) \times f'$
- ▷ $(k)' = 0$
- ▷ $(x)' = 1$
- ▷ $\left(x^k\right)' = kx^{k-1}$
- ▷ $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$
- ▷ $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
- ▷ $(\sin x)' = \cos x$
- ▷ $(\cos x)' = -\sin x$
- ▷ $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
- ▷ $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- ▷ $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- ▷ $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$
- ▷ $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$
- ▷ $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$
- ▷ $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$
- ▷ $(a^x)' = a^x \ln a$

3.3.3 Variations

Voici quelques résultats importants permettant d'étudier les variations d'une fonction dérivable.

Dérivée et monotonie

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $\mathcal{I}$. On a que f est

- ► croissante sur $\mathcal{I}$ ssi $f'(x) \geq 0$ sur $\mathcal{I}$;
- ► f est constante sur $\mathcal{I}$ ssi $f'(x) = 0$ sur $\mathcal{I}$.

CNS maximum

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $\mathcal{I}$ et soit M un point de $\mathcal{I}$.
On a que M est un maximum de la fonction f sur $\mathcal{I}$ si et seulement si $f'(M) = 0$ et la dérivée change de signe en M en passant de valeurs positives à des valeurs négatives.

CNS minimum

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $\mathcal{I}$ et soit m un point de $\mathcal{I}$.
On a que m est un minimum de la fonction f sur $\mathcal{I}$ si et seulement si $f'(m) = 0$ et la dérivée change de signe en m en passant de valeurs négatives à des valeurs positives.

Dérivée seconde

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $\mathcal{I}$. La dérivée seconde de f, notée f'', est définie comme étant la fonction dérivée de la fonction dérivée, si celle-ci existe.

Concavité et dérivée

Soient f une fonction dérivable sur un intervalle $\mathcal{I}$. On a que f a sa concavité tournée vers le haut (resp. le bas) sur $\mathcal{I}$ si et seulement si la dérivée seconde de f est positive (resp. négative) sur $\mathcal{I}$.

3.3.4 Retour sur le calcul de limite

La dérivée étant définie, on revient sur un théorème permettant de lever des indéterminations :

CQFD Théorème de l'Hospital

Soient f et g deux fonctions dérivables au voisinage de a, a étant une valeur réelle ou valant $\pm\infty$. Si $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ donne une forme indéterminée du type « $0/0$ » ou « ∞/∞ » et que $g'(a) \neq 0$, alors $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Exemple :

- Considérons l'expression $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^{2x}}{4x-1}$. On a clairement un cas d'indétermination du type « ∞/∞ ». De plus, $(4x-1)' = 4$.
  On en déduit donc que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{2x}}{4x-1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2\,e^{2x}}{4} = +\infty$, l'indétermination est levée.

3.4 Exercices

A) Déterminez la dérivée des fonctions suivantes :

1) $f(x) = x^2\cos(x)$
2) $f(x) = \ln(3x-1)$
3) $f(x) = (1-x^2)\sin(x)$
4) $f(x) = \dfrac{x^2-3x}{2x-4}$
5) $f(x) = \mathrm{tg}(x^3)$
6) $f(x) = e^{2-x}$
7) $f(x) = \sqrt{\cos(x)+x^2}$
8) $f(x) = \sqrt[3]{\ln(2x)}$

B) Considérons la fonction $f(x) = x^3 - 3x + \pi$. Combien d'extrema possède-t-elle ?

C) La fonction $f(x) = \dfrac{x^2-5x+6}{4-x^2}$ n'est pas définie en ± 2. À l'aide de la notion de limite, déterminez le comportement de la fonction quand elle s'approche de ces deux valeurs.

D) Déterminez le comportement asymptotique de la fonction $f(x) = x^2\,e^{-2x}$.

4 Exponentielles et logarithmes

4.1 Propriétés

Avant de passer aux exercices, il est nécessaire de se rappeler de quelques propriétés.

Logarithme d'un produit

Soient a et b deux réels positifs. On a alors que $\ln(a \times b) = \ln a + \ln b$.

Logarithme d'un quotient

Soient a et b deux réels strictement positifs. On a alors que $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$.

Logarithme d'une puissance

Soit a un réel strictement positif et soit p un nombre rationnel. On a alors que $\ln a^p = p \times \ln a$.

Formule de changement de base

Soient $a \in \mathbb{R}_0^+ \backslash \{1\}$ une base. On a alors que $\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$.

Exponentielle d'une somme

Soient a et b deux réels. On a alors que $\mathrm{e}^{a+b} = \mathrm{e}^a \times \mathrm{e}^b$.

Exponentielle d'une différence

Soient a et b deux réels. On a alors que $\mathrm{e}^{a-b} = \dfrac{\mathrm{e}^a}{\mathrm{e}^b}$.

Formule de changement de base

Soit $a \in \mathbb{R}_0^+ \backslash \{1\}$ une base. On a alors que $a^x = e^{x \ln a}$.

Extension des propriétés précédentes

Toutes les propriétés énoncées pour l'exponentielle de base e sont valables pour l'exponentielle en base a, quelle que soit la valeur de a (strictement positive).

Conditions d'existence

Il ne faut pas oublier que l'argument d'un logarithme doit toujours être strictement positif. La base d'un logarithme doit être elle aussi strictement positive et différente de 1.

4.2 Exercices

A) Résolvez les équations logarithmiques suivantes et donnez l'ensemble des solutions.

1) $\ln x = 8$
2) $\ln(x+1) = 4$
3) $\ln(2x-3) - \ln(x-4) = 2\ln 5$
4) $\ln^2 2x + 2\ln\left((2x)^2\right) + 3 = 0$

B) Résolvez les équations exponentielles suivantes et donnez l'ensemble des solutions.

1) $\mathrm{e}^{4x-1} = 0$
2) $\mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^{x} - 2 = 0$
3) $\mathrm{e}^{2x+1} - \mathrm{e}^{x-1} - 4 = 0$
4) $9 \times 2^x = 4 \times 3^x$
5) $2\,\mathrm{e}^{2x} - 7\,\mathrm{e}^{x} + 3 = 0$

5 Trigonométrie

5.1 Trigonométrie du cercle

L'unité d'angle la plus adaptée en mathématique n'est pas le degré, mais le radian.

Radian

On dit qu'un angle a une amplitude d'un radian s'il s'agit d'un angle au centre d'un cercle qui intercepte un arc de cercle dont la longueur est égale à celle du rayon dudit cercle.
Le radian est donc l'unité telle que $\mathbf{360^\circ = 2\pi rad}$.

Lorsqu'une amplitude d'un angle est donnée à l'aide d'un multiple réel de « π », on sait par convention que la mesure a été faite en radian. Si ce n'est pas le cas, alors on doit préciser « rad » après les nombres pour préciser l'unité.

Exemple :

▷ l'angle de 60° a une amplitude de $\frac{\pi}{3}$, ou encore approximativement $1,047\mathrm{rad}$.

La trigonométrie trouve son origine dans le triangle rectangle mais a été étendue de sorte à s'en détacher et les nombres trigonométriques ont été redéfinis dans un cercle particulier : le cercle trigonométrique.

Cercle trigonométrique

On appelle cercle trigonométrique le cercle centré sur l'origine d'un repère orthonormé, orienté positivement et dont le rayon vaut 1.

Une fois le cercle trigonométrique introduit, on peut définir les nombres trigonométriques d'un angle. Il ne faut pas oublier qu'un angle possède une orientation. Dans le cercle trigonométrique, on va mesurer les angles en plaçant leur côté-origine sur l'axe des abscisses, le sommet sur l'origine et le côté-extrémité dans le premier quadrant (le quart de cercle délimité par la partie positive des axes du repère).
La mesure de l'amplitude se fait donc toujours dans le sens positif, *ie* dans le sens contraire des aiguilles d'une montre. C'est ce sens de rotation qui permet de définir que le premier quadrant est le quart de cercle en haut à droite, le deuxième quadrant le quart de cercle en haut à gauche et ainsi de suite jusqu'au quatrième quadrant.

Considérons le cercle trigonométrique dans un repère orthonormé du plan, α un angle orienté et M le point du cercle défini par l'angle α. Si l'on représente graphiquement cette situation, on obtient la FIGURE 22, où la flèche indique le sens positif mathématique.

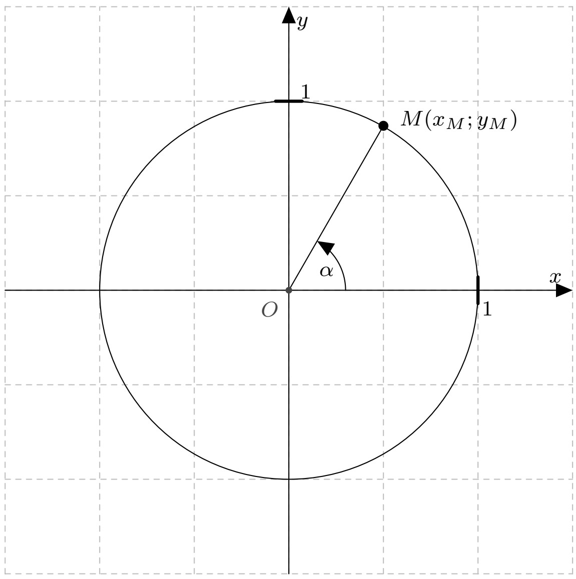

FIGURE 22

Nous allons donner créer deux notions qui vont permettre de lier l'angle α déterminé par le point M aux coordonnées de ce point M.

Sinus

Soit $M(x_M; y_M)$ un point du cercle trigonométrique déterminant un angle α. On dira que le sinus de l'angle α, noté $\sin\alpha$, est donné par l'ordonnée du point M, *ie* $\sin\alpha = y_M$.

Cosinus

Soit $M(x_M; y_M)$ un point du cercle trigonométrique déterminant un angle α. On dira que le cosinus de l'angle α, noté $\cos\alpha$, est donné par l'abscisse du point M, *ie* $\cos\alpha = x_M$.

Une fois que les sinus et cosinus sont définis, on peut définir leurs rapports, autrement dit deux quotients dont le numérateur et le dénominateur sont à tour de rôle le sinus et le cosinus.

Tangente

Soit $M(x_M; y_M)$ un point du cercle trigonométrique d'abscisse non nulle, déterminant un angle α. On dira que la tangente de l'angle α, notée $\tan\alpha$ ou $\operatorname{tg}\alpha$, est donnée par le rapport entre le sinus et le cosinus de l'angle α, *ie*

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{y_M}{x_M}.$$

Comme le sinus correspond à l'ordonnée du point déterminé par l'angle sur le cercle et le cosinus correspond à son abscisse, on peut transposer le théorème de PYTHAGORE à la trigonométrie :

CQFD Relation Fondamentale de la trigonométrie

Soit α un angle orienté. Alors, $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$.

Certains angles du premier quadrant possèdent des nombres trigonométriques particuliers. Ces valeurs sont reprises dans le TABLEAU 17 :

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sinus	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cosinus	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tangente	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\nexists$
cotangente	$\nexists$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

TABLEAU 17

5.2 Angles associés

Angles associés

On appelle **angles associés** des angles dont les nombres trigonométriques sont liés.

Par exemple, les arcs multiples sont des angles associés. En effet, soit α la mesure principale d'un angle. On a que $\alpha + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$ sont des angles déterminant le même point que α sur le cercle trigonométrique. D'où les sinus, cosinus, tangente et cotangente de tous ces angles seront identiques.

Arcs multiples

Soit α la mesure principale d'un angle et k un entier. On a alors que :

- $\sin\alpha = \sin(\alpha + 2k\pi)$
- $\cos\alpha = \cos(\alpha + 2k\pi)$
- $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(\alpha + 2k\pi)$
- $\cot\alpha = \cot(\alpha + 2k\pi)$

5.2.1 Angles supplémentaires

Angles supplémentaires

Deux angles sont dits supplémentaires si leur somme vaut l'angle plat.

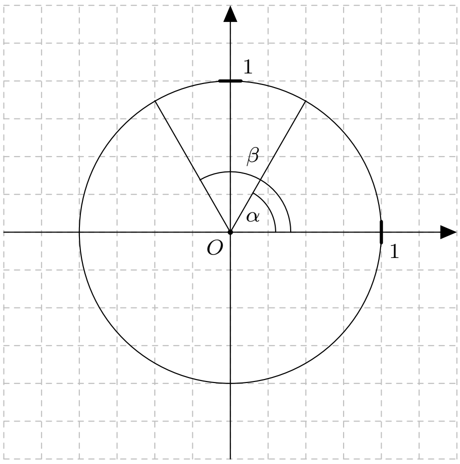

FIGURE 23 – α et β sont supplémentaires

Relations des angles supplémentaires

Soit α la mesure principale d'un angle. On a alors que :

- $\sin(\pi - \alpha) = \sin(\alpha)$
- $\cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha)$
- $\operatorname{tg}(\pi - \alpha) = -\operatorname{tg}(\alpha)$

5.2.2 Angles opposés

Angles opposés

Deux angles sont dits opposés si leur somme vaut l'angle nul.

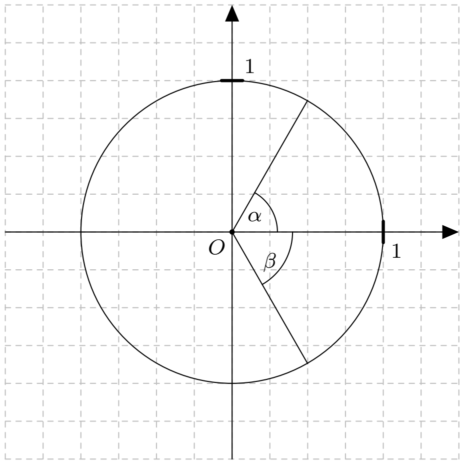

FIGURE 24 – α et β sont opposés

Relations des angles opposés

Soit α la mesure principale d'un angle. On a alors que :

- $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$
- $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$
- $\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}(\alpha)$

5.2.3 Angles complémentaires

Angles complémentaires

Deux angles sont dits complémentaires si leur somme vaut l'angle droit.

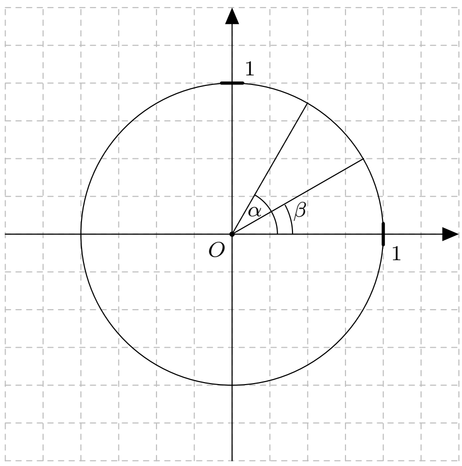

FIGURE 25 – α et β sont complémentaires

Relations des angles complémentaires

Soit α la mesure principale d'un angle. On a alors que :

- $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos(\alpha)$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin(\alpha)$
- $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cot(\alpha)$

5.3 Formules de trigonométrie

La première formule de trigonométrie est la relation fondamentale. Elle permet d'exprimer un sinus en fonction d'un cosinus (et réciproquement) pour peu que l'on ait le carré du sinus (ou du cosinus) :

$$\sin^2(\alpha)=1-\cos^2(\alpha)$$

5.3.1 Relation dans un triangle

F **Relation trigonométrique dans un triangle rectangle**

Considérons le triangle rectangle ABC rectangle en C. Posons α l'angle du sommet A.

- $\sin(\alpha)=\dfrac{\text{côté opposé à } A}{\text{hypoténuse}}$
- $\cos(\alpha)=\dfrac{\text{côté adjacent à } A}{\text{hypoténuse}}$
- $\operatorname{tg}(\alpha)=\dfrac{\text{côté opposé à } A}{\text{côté adjacent à } A}$
- $\csc(\alpha)=\dfrac{1}{\sin(\alpha)}$
- $\sec(\alpha)=\dfrac{1}{\cos(\alpha)}$
- $\cot(\alpha)=\dfrac{1}{\operatorname{tg}(\alpha)}$

CQFD **Relation aux sinus**

Soient A, B et C trois points non-alignés du plan délimitant un triangle. Appelons a le côté opposé au sommet A dont l'angle vaut α, b le côté opposé au sommet B dont l'angle vaut β et c le côté opposé au sommet C dont l'angle vaut γ. On a alors que

$$\frac{a}{\sin(\alpha)}=\frac{b}{\sin(\beta)}=\frac{c}{\sin(\gamma)}$$

CQFD **Théorème de PYTHAGORE généralisé**

Soient A, B et C trois points non-alignés du plan délimitant un rectangle. Appelons a le côté opposé au sommet A dont l'angle vaut α, b le côté opposé au sommet B dont l'angle vaut β et c le côté opposé au sommet C dont l'angle vaut γ. On a alors que

- $a^2=b^2+c^2-2bc\cos(\alpha)$
- $b^2=a^2+c^2-2ac\cos(\beta)$
- $c^2=a^2+b^2-2ab\cos(\gamma)$

Le théorème de PYTHAGORE généralisé porte aussi le nom de relation au cosinus, ou encore théorème d'AL-KASHI.

5.3.2 Formules d'addition

Cosinus d'une somme/différence

Soient α et β deux réels. Alors

- $\cos(\alpha-\beta)=\cos(\alpha)\cos(\beta)+\sin(\alpha)\sin(\beta)$
- $\cos(\alpha+\beta)=\cos(\alpha)\cos(\beta)-\sin(\alpha)\sin(\beta)$

Sinus d'une somme/différence

Soient α et β deux réels. Alors

- $\sin(\alpha-b)=\sin(\alpha)\cos(\beta)-\sin(\beta)\cos(\alpha)$
- $\sin(\alpha+\beta)=\sin(\alpha)\cos(\beta)+\sin(\beta)\cos(\alpha)$

Formule de duplication

Soit α un réel. Alors

- $\cos(2\alpha)=\cos^2(\alpha)-\sin^2(\alpha)$
- $\sin(2\alpha)=2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$

Formule de CARNOT

Soit α un réel. Alors

- $\cos^2(\alpha)=\dfrac{1+\cos(2\alpha)}{2}$
- $\sin^2(\alpha)=\dfrac{1-\cos(2\alpha)}{2}$

5.4 Exercices

A) Résolvez les équations trigonométriques suivantes :

1) $\sin x=\dfrac{\pi}{2}$
2) $\cos x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
3) $\sin x=\dfrac{-\sqrt{2}}{2}$
4) $2\cos x-1=0$
5) $\operatorname{tg} x+\dfrac{\sqrt{3}}{3}=0$
6) $\sin x-\dfrac{\sqrt{3}}{2}=0$
7) $\cos(3x)=2$

B) Résolvez les équations trigonométriques suivantes :

1) $\sin\left(3x-\dfrac{\pi}{4}\right)=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
2) $\sin 3x\cos 5x=\sin 5x\cos 3x$
3) $\cos\left(3x+\dfrac{2\pi}{3}\right)=-1$
4) $\operatorname{tg}\left(2x+\dfrac{3\pi}{5}\right)=-\sqrt{3}$
5) $2\sin\left(3x+\dfrac{4\pi}{3}\right)=-\sqrt{3}$
6) $\sin\left(3x-\dfrac{2\pi}{3}\right)=\cos\left(4x+\dfrac{3\pi}{4}\right)$
7) $3\operatorname{tg}\left(4x-\dfrac{2\pi}{3}\right)=\sqrt{3}$
8) $2\sin\left(\dfrac{\pi}{6}-2x\right)=\sqrt{3}$

C) L'ombre d'un arbre mesure 18 mètres lorsque le soleil est à $30°$ au dessus de l'horizon. Quelle est la hauteur de cet arbre ?

6 Calcul intégral et primitivation

6.1 Intégrales

6.1.1 Définition

Les intégrales sont une notion liée à la géométrie et mise au point afin de pouvoir calculer des surfaces. Une intégrale est définie par une addition de termes dont on calcule la somme en augmentant le nombre de terme à l'infini.

Somme supérieure de DARBOUX

Soit f une fonction bornée sur l'intervalle $[a;b]$. Posons σ_n une subdivision régulière de $[a;b]$ en n intervalles de taille Δx. Posons enfin M_i, pour tout $1 \leq i \leq n$, le suprémum de f sur $[x_{i-1};x_i] \subset [a;b]$. La somme supérieure de Darboux, notée $\overline{S_\sigma(f)}$, sera donnée par

$$\overline{S_\sigma(f)} = \sum_{i=1}^{n} (M_i \times \Delta x)$$

De manière similaire, on peut définir la somme inférieure de DARBOUX, que l'on notera $\underline{S_\sigma(f)}$ en utilisant les m_i, infimum de f sur $[x_{i-1};x_i]$. À l'aide de ces deux notions, on peut définir l'intégrale (de RIEMANN d'une fonction).

Intégrabilité (au sens de RIEMANN)

Soit f une fonction bornée sur un intervalle $[a;b]$.
On dit que f est intégrable (au sens de RIEMANN) sur $[a;b]$ s'il est possible de trouver des subdivisions σ_n rendant les écarts $\Delta\sigma_n$ entre les sommes supérieures et inférieures de Darboux arbitrairement petits, *ie*

$$\lim_{n\to\infty} \left(\overline{S_\sigma(f)} - \underline{S_\sigma(f)}\right) = 0$$

L'intégrale de la fonction f sur l'intervalle $[a;b]$, notée $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, est donnée par la limite de l'une des somme de DARBOUX.

L'intégrale est donc la limite d'une somme quand le nombre de terme tend vers l'infini et que chacun des termes devient de plus en plus petits. Chaque terme représente la surface d'un rectangle de largeur $\Delta x = \frac{b-a}{n}$.
L'intégrale permet donc de calculer des surfaces. Mais de part sa définition, l'intégrale $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ détermine une surface **orientée** délimitée par le graphe de f, les droites verticales d'équations $x = a$ et $x = b$ et l'axe des abscisses. Pour calculer la surface dans le sens géométrique du terme, il convient de faire en sorte que toutes les images de f soient positives.

6.1.2 Propriétés

Opposé d'une intégrale

Soit f une fonction intégrable sur $[a;b]$. On a alors que $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.

Intégrale sur un point

Soit f une fonction intégrable sur $D \subset dom f$ et soit $a \in D$. On a alors que $\int_a^a f(x)dx = 0$.

Relation de CHASLES (ou propriété d'additivité)

Soit f une fonction intégrable sur $[a;b]$ et considérons $c \in [a;b]$. Alors, on a que

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Linéarité de l'intégrale

Soient f et g deux fonctions intégrables sur $[a;b]$ et λ et μ deux constantes réels. On a alors que

$$\int_a^b \big(\lambda f(x) + \mu g(x)\big)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx + \mu \int_a^b g(x)dx.$$

6.2 Primitive

6.2.1 Définition

Primitive

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que F est **une** primitive de f si F est définie et dérivable sur l'intervalle I, telle que sa dérivée vaut f, *ie* F est une primitive de f sur l'intervalle I si $\forall x \in I, F'(x) = f(x)$.

Par exemple, si l'on considère la fonction $f(x) = 3x^2 - 2x$, on peut dire que la fonction $F(x) = x^3 - x^2$ est une primitive de $f(x)$. En effet, $F'(x) = f(x)$.
Cependant, on aurait aussi pu dire que la fonction $F_1(x) = x^3 - x^2 + 17$ est une primitive de $f(x)$. En effet, $F_1'(x) = f(x)$.
On remarque que d'avoir ajouter 17, un nombre (autrement dit une constante) ne change rien au fait d'être primitive.

Primitive à une constante près

Soient f une fonction, F une primitive de f et c une constante. Alors $F + c$ est aussi une primitive de f.

6.2.2 Lien avec le calcul intégral

Les intégrales sont très difficiles à calculer en utilisant leur définition mais sont très appréciées car elles permettent de calculer (entre autre) des surfaces. Il se trouve qu'il y a un lien entre ces deux notions.

CQFD **Théorème fondamental de l'analyse**

Soit f une fonction continue sur $[a;b]$ et posons F la fonction dont l'expression analytique est la suivante :

$$F : [a;b] \to \mathbb{R} : x \mapsto F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

On a alors que

- F est une fonction dérivable sur $[a;b]$ dont la dérivée vaut f, *ie* F est une primitive de f ;
- si G est une fonction dérivable sur $[a;b]$ sa dérivée est aussi la fonction f, alors $F - G$ est une constante.

CQFD **Formule de Newton-Leibniz**

Soit f une fonction continue sur $[a;b]$ et posons F une primitive de f sur ce même intervalle. Considérons ensuite l'intervalle $[\alpha;\beta] \subset [a;b]$. On a alors :

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x = \Big[F(x)\Big]_\alpha^\beta = F(\beta) - F(\alpha)$$

Cela signifie que pour calculer une intégrale, on va chercher une primitive de la fonction. Ensuite, on évaluera la primitive trouvée aux deux bornes de l'intégrale et on en fera la différence, le résultat nous donnant la valeur de l'intégrale recherchée.

6.2.3 Méthode de primitivation

La propriété de linéarité de l'intégrale est valable pour la primitive aussi, *ie* si f et g sont deux fonctions primitivables et k :

▷ $\displaystyle\int f(x) + g(x)\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)\,\mathrm{d}x$;

▷ $\displaystyle\int kf(x)\,\mathrm{d}x = k\int f(x)\,\mathrm{d}x$.

6.2.3.1 Formulaire de primitives directes

Supposons que k soit une constante et p un nombre réel différent de -1 :

▷ $\displaystyle\int k\,\mathrm{d}x = kx + \text{cste}$

▷ $\displaystyle\int x\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} + \text{cste}$

▷ $\displaystyle\int x^p\,\mathrm{d}x = \frac{x^{p+1}}{p+1} + \text{cste}$

▷ $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + \text{cste}$

▷ $\displaystyle\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + \text{cste}$

▷ $\displaystyle\int \sin(x)\,\mathrm{d}x = -\cos(x) + \text{cste}$

▷ $\displaystyle\int \cos(x)\,\mathrm{d}x = \sin(x) + \text{cste}$

▷ $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x = \mathrm{tg}(x) + \text{cste}$

▷ $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \arcsin(x) + \text{cste}$

▷ $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \mathrm{arctg}(x) + \text{cste}$

6.2.3.2 Primitivation par substitution ou changement de variable

Premier théorème de primitivation par substitution

Soient f et g deux fonctions telles que leur composée existe et dont F est la primitive de f. Alors on a

$$\int f\Big(g(x)\Big) \times g'(x)\ \mathrm{d}x = F\Big(g(x)\Big) + \text{cste}$$

Exemple :

▷ $\displaystyle\int \sin(x^2)2x\ \mathrm{d}x = \int \sin\big(g(x)\big) \times g'(x)\ \mathrm{d}x = \sin\big(g(x)\big) + \text{cste} = \sin(x^2) + \text{cste}.$

Nous avons passé sous silence le « $\mathrm{d}x$ » jusqu'à présent, le considérant comme un reliquat du « Δx » issu des sommes de DARBOUX. Il se trouve que ce « $\mathrm{d}x$ » possède une fonction propre.

Différentielle

Soit f une fonction dérivable et posons $y(x)$ la courbe du graphe de f.
La différentielle $\mathrm{d}y$ de la courbe de f est donnée par $\mathrm{d}y = f'(x)\ \mathrm{d}x$.

La différentielle ne doit pas être oubliée lors d'un changement de variable !

Second théorème d'intégration par substitution

Soit l'intégrale suivante $\displaystyle\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$.
Si on pose $x = \varphi(u)$, on a alors que $\mathrm{d}x = \varphi'(u)\ \mathrm{d}u$ et les bornes deviennent $\varphi(a)$ et $\varphi(b)$.
On a alors que

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f\Big(\varphi(u)\Big) \times \varphi'(u)du$$

La FIGURE 26 illustre ce second théorème de primitivation par substitution.

$$\begin{tikzcd}
\displaystyle\int f(x)\ \mathrm{d}x \arrow[d, "\substack{x = \varphi(u) \\ \mathrm{d}x = \varphi'(u)du}"'] & = & F(x) + \text{cste} \\
\displaystyle\int f(\varphi(u)) \times \varphi'(u)\ du & = & \Phi(u) + \text{cste} \arrow[u, "u = \varphi^{-1}(x)"']
\end{tikzcd}$$

FIGURE 26

6.2.3.3 Intégration par partie

La formule découle de la formule de la dérivée d'un produit.

CQFD **Théorème d'intégration par parties**

Soient f une fonction dérivable et g' une fonction continue sur $[a;b]$. Alors on a

$$\int_a^b f(x)\times g'(x)\,\mathrm{d}x = \Big[f(x)\times g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f'(x)\times g(x)$$

6.3 Exercices

A) Déterminez les primitives des fonctions suivantes :

1) $\displaystyle\int x+\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$

2) $\displaystyle\int \frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{x\sqrt{x}}{4}\,\mathrm{d}x$

3) $\displaystyle\int \mathrm{e}^{5x}\,\mathrm{d}x$

4) $\displaystyle\int \frac{1}{3x-7}\,\mathrm{d}x$

5) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x$

6) $\displaystyle\int \frac{x}{16+x^4}\,\mathrm{d}x$

7) $\displaystyle\int x^3\ln(4x)\,\mathrm{d}x$

8) $\displaystyle\int x^2\sin x\,\mathrm{d}x$

9) $\displaystyle\int (x^2+1)(x+1)^5\,\mathrm{d}x$

10) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+5}\,\mathrm{d}x$

11) $\displaystyle\int \frac{x^3}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$

B) Quelle est l'aire de la surface délimitée par le graphe de la fonction $f(x) = x^2 - 4$, les droites d'équations $d_1 \equiv x = -5$ et $d_2 \equiv x = 3$?

C) Les graphes des fonctions f et g délimitent une surface dont on cherche l'aire. Que vaut-elle en sachant que $f(x) = x^2 - 5x + 6$ et $g(x) = 5x - 4 - x^2$?

D) Quelle est la valeur moyenne du graphe de la fonction $f(x) = \ln(x)$ entre les abscisses 1 et e ?

7 Statistique

7.1 Approche théorique

La statistique permet de résumer une série de données provenant d'une observation (numériques ou non) en quelques points essentiels. Si les données de l'observation ne sont pas numériques, on parle de variable qualitative. Si les données sont numériques, on distingue le caractère quantitatif discret (peu de nombres différents, peu sensible au nombre d'observations) du caractère quantitatif continu (plusieurs nombres différents, la diversité augmentant avec le nombre d'observations).

7.1.1 Quantitatif discret

On a posé quelques questions à trente famille de la région Bruxelloise. Parmi ces questions, on demandait le nombre d'enfants. Voilà le tableau brut des réponses :

2 – 1 – 0 – 3 – 2 – 1 – 0 – 2 – 5 – 1 – 0 – 1 – 2 – 5 – 0
2 – 2 – 3 – 2 – 2 – 2 – 0 – 2 – 1 – 1 – 1 – 0 – 0 – 2 – 0

TABLEAU 18

Nous sommes en présence d'une variable quantitative discrète. Pour organiser ces données, on peut créer un tableau recensé ordonné comme le TABLEAU 19 :

Modalités x_i	Effectifs n_i	Fréquences f_i	Effectifs cumulés N_i	Fréquences cumulées F_i	Pondération $x_i \times n_i$
0	8	$26,7\%$	8	$26,7\%$	0
1	7	$23,3\%$	15	50%	7
2	11	$36,7\%$	26	$86,7\%$	22
3	2	$6,7\%$	28	$93,3\%$	6
5	2	$6,7\%$	30	100%	10
	$n = 30$	$f = 100,1\%$			$p = 45$

TABLEAU 19

Remarques :

- les modalités sont classées par ordre croissant ;
- la fréquence totale est de $100,1\%$ à cause des arrondis dans le calcul des fréquences individuelles, mais il faut considérer que la fréquence totale vaut toujours 100% ;
- la colonne « pondération » permet un calcul facilité de la moyenne.

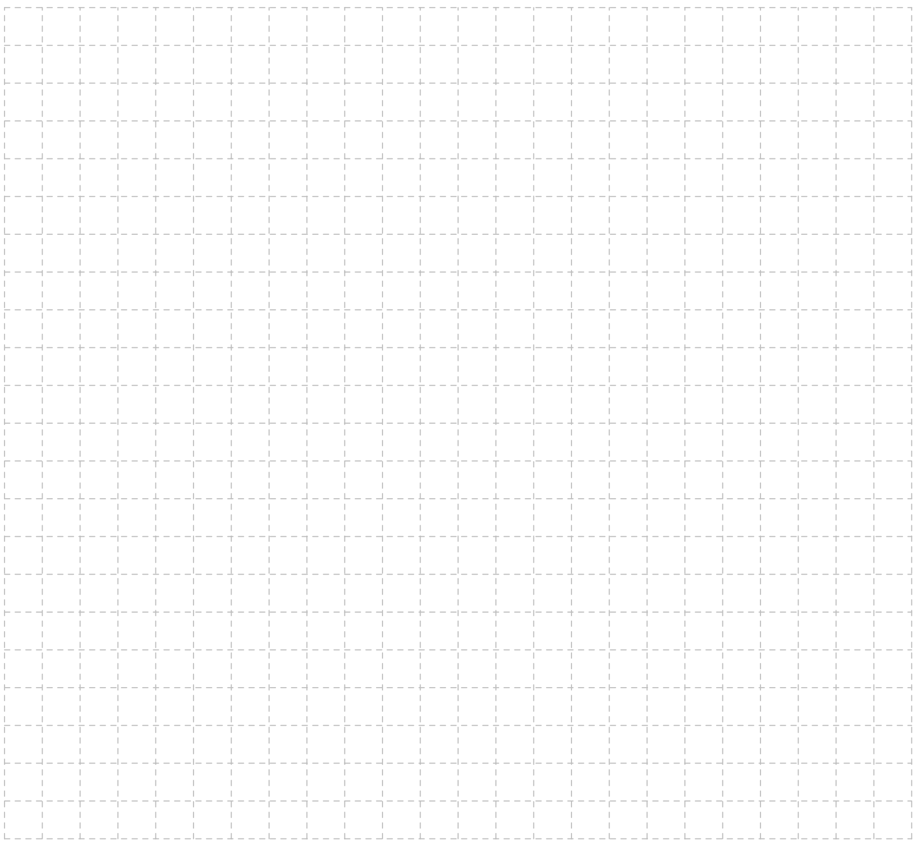

FIGURE 27 – Graphe des fréquences cumulées

7.1.2 Quantitatif continu

On analyse des résultats obtenus par des étudiants à un examen de type QCM. Le total était sur 100, mais les points ont été ramenés sur 20. Voici les résultats bruts, classés par ordre croissant :

13,2 – 13,3 – 13,4 – 13,5 – 13,7 – 13,9 – 14,0 – 14,1 – 14,1 – 14,2 - 14,2 – 14,3 – 14,4 – 14,6 – 14,7 – 14,9 – 15,0
15,0 – 15,1 – 15,1 15,1 – 15,2 – 15,2 – 15,3 – 15,3 – 15,3 – 15,5 – 15,5 – 15,7 – 15,7 - 15,8 – 15,9 – 16,1 – 16,1
16,2 – 16,3 – 16,5 – 16,5 – 16,6 – 16,6 - 16,7 – 16,8 – 16,9 – 17,1 – 17,2 – 17,2 – 17,5 – 17,5 – 17,6 – 17,6

TABLEAU 20

Nous sommes en présence d'une variable quantitative discrète. Pour organiser ces données, on peut créer un tableau recensé ordonné comme le TABLEAU 21 :

Classes (de modalités)	Centres des classes x_i	Effectifs n_i	Fréquences f_i	Effectifs cumulés N_i	Fréquences cumulées F_i	Pondération $x_i \times n_i$
$[13; 14[$	$13,5$	6	12%	6	12%	81
$[14; 15[$	$14,5$	10	20%	16	32%	145
$[15; 16[$	$15,5$	16	32%	32	64%	248
$[16; 17[$	$16,5$	11	22%	43	86%	$181,5$
$[17; 18]$	$17,5$	7	14%	50	100%	$122,5$
		$n = 50$	$f = 100\%$			$p = 778$

TABLEAU 21

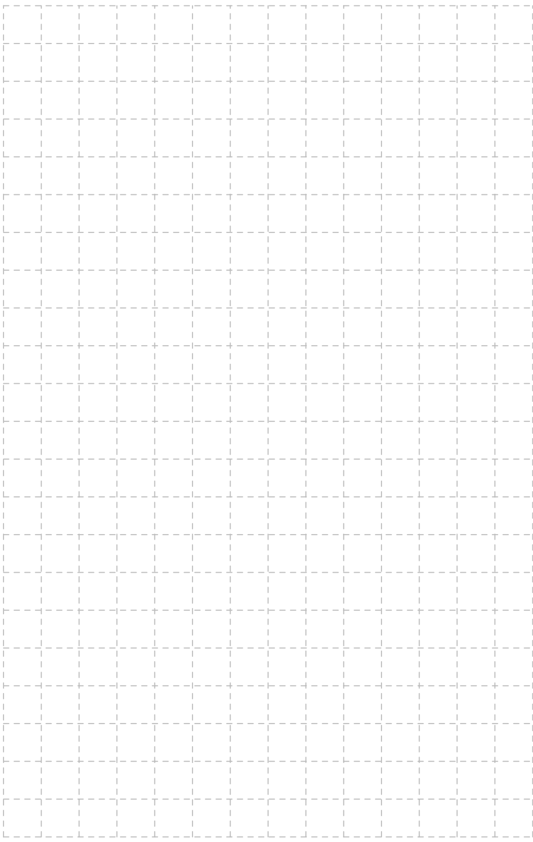

FIGURE 28

Pour les données quantitatives, on peut résumer les séries statistiques à l'aide de trois valeurs centrales et d'un paramètre de dispersion :

- la moyenne d'une série statistique composée de k modalités différentes x_i d'effectifs n_i, usuellement notée $\overline{x}$, est donnée par l'expression $\overline{x} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{k} x_i \times n_i$ où n représente l'effectif total ;
- le mode d'une série statistique est la modalité dont l'effectif est le plus important ;
- la médiane d'une série statistique est une valeur M qui permet de couper la série statistique en deux sous-ensembles de taille égale.

Exemples :

- pour l'exemple avec le nombre d'enfants par ménage :
  - la moyenne est de $\frac{45}{30} = 1,5$ et donc chaque famille a en moyenne entre 1 et 2 enfants ;
  - le mode est de 2 car c'est cette observation qui est la plus nombreuse ;
  - la médiane est de 2 car c'est ce nombre qui permet d'atteindre la moitié de la population ;
- pour l'exemple avec le QCM :
  - la moyenne est de $\frac{778}{50} = 15,56$;
  - le mode est de $15,5$ car c'est cette observation qui est la plus nombreuse ;
  - la médiane est de $15,5$ car c'est ce nombre qui permet d'atteindre la moitié de la population ;

Un critère de dispersion permet de voir comment la série s'articule autour des valeurs centrales que l'on vient de citer. Celui qui nous intéresse est l'écart-type.

Variance

La variance est un critère de dispersion d'une série statistique, calculée comme suit :

$$V = \frac{1}{n}\sum_{i=1}(\overline{x} - x_i)^2 \times n_i$$

Écart-type

L'écart-type est un critère de dispersion d'une série statistique, qui est défini comme étant la racine carrée de la variance. Il est représenté par la la lettre grecque σ.

Un écart-type « petit » par rapport à la moyenne a tendance à indiquer une dispersion faible des valeurs autour de cette moyenne. Il permet, si la série statistique suit une loi normale, de déterminer un intervalle autour de la moyenne reprenant $68,2\%$ de la population.

7.2 Exercices

A) Une entreprise dispose de 60 camions et désire étudier le taux de panne. Pour cela, le chef mécanicien note, jour après jour, pendant le mois d'avril, le nombre de camions en panne. Ses observations sont les suivantes :

5 - 4 - 6 - 3 - 6 - 5 - 7 - 0 - 2 - 2 - 2 - 4 - 1 - 1 - 1
2 - 5 - 5 - 7 - 6 - 7 - 5 - 4 - 3 - 5 - 6 - 5 - 3 - 5 - 0

En moyenne, combien de camions sont en panne quotidiennement ?

B) **TOSS 2015** On a réalisé une étude sur le dentifrice utilisé par les clients d'un magasin et on a ensuite réalisé un tableau de fréquences donné par le TABLEAU 22. Malheureusement, une donnée est manquante.

Modalité	Fréquence
Beau Chicot	...
Chicotine	$0,12$
Jaune Doré	$0,28$
Senteur d'ail	$0,25$
Super tartre	$0,15$

TABLEAU 22

Sachant que 30 individus ont déclaré utiliser le dentifrice Chicotine, combien d'individus ont déclaré utiliser "Beau Chicot" ?

C) On relève l'âge des élèves de quatrième d'une école. On obtient comme résultats que douze élèves ont 14 ans, cent-soixante-trois ont 15 ans, quarante-deux en ont 16, onze en ont 17 et deux élèves ont 18 ans.

1) Dressez un tableau recensé adapté à la variable.
2) Déterminez la moyenne, le mode et la médiane de cette série statistique.
3) Déterminez l'écart-type de cette série.

A Exercices supplémentaires

A) Résolvez les équations suivantes dans l'ensemble des réels :

1) $x^3 + 2x^2 + x = 0$
2) $-9x^2 = 0$
3) $x^2 + 64 = 20x$
4) $4x^2 - 4\sqrt{2}x = -2$
5) $(x+4)^2 = 3x + 10$
6) $x^2 - 2(1+\sqrt{2})x - 6 + 2\sqrt{2} = 0$
7) $(x-3)(x+3) = 7x - 21$
8) $x - x^2 + 42 = 0$
9) $x - 5x^2 + 1 = 0$

B) D'une plate-forme, un objet est projeté verticalement vers le haut à une vitesse initiale de 128m/s. Sa distance d par rapport au sol (exprimée en mètres) après t secondes est donnée par la loi $d(t) = -5t^2 + 128t + 3$.

1) De quelle hauteur l'objet est-il lancé ?
2) Après combien de temps l'objet retombera-t-il sur la plate-forme ?
3) Pendant combien de temps l'objet reste-t-il à plus de 210m de haut ?

C) Pour chacune des fonctions ci-dessous, quelle est l'équation de la tangente à la fonction f qui respecte la condition donnée si :

1) $f(x) = x^2 + x - 2$, au point d'abscisse 1 ;
2) $f(x) = x^2 + 5x - 2$, au point d'abscisse -2 ;
3) $f(x) = x^2 + 3x - 2$, parallèle à $d \equiv y = x + 1$;
4) $f(x) = x^2 - x - 6$, tangente comprenant $(0,0)$;
5) $f(x) = \dfrac{1+\sin x}{1-\cos x}$, au point d'abscisse $\frac{\pi}{2}$;
6) $f(x) = \dfrac{\sqrt{5x+1}}{x}$, au point d'abscisse 3.

D) Déterminez la dérivée des fonctions suivantes :

1) $f(x) = \sin^5 3x$
2) $f(x) = \cos^4 2x$
3) $f(x) = \sin^4(2x+3)$
4) $f(x) = \dfrac{3\cos x}{1-\sin x}$
5) $f(x) = 4\,\mathrm{tg}^4\,4x$
6) $f(x) = \cos(x) \times \left(\cos^2(x+1)\right)$
7) $f(x) = x - \sin x \cos x$
8) $f(x) = \dfrac{\cos x}{1+\cos^2 x}$
9) $f(x) = 2x\cos x + (x^2-2)\sin x$
10) $f(x) = \dfrac{\sin x + \cos x}{\sin x}$
11) $f(x) = \dfrac{\cos x}{1+\cos^2 x}$
12) $f(x) = \cos(x) \times (\sin^2(x)+2)$
13) $f(x) = \dfrac{2}{\tan x}$
14) $f(x) = \dfrac{\cos(x)-1}{\sin(x-1)}$
15) $f(x) = (2\tan 2x)^2$
16) $f(x) = \tan^2 \dfrac{x}{2}$
17) $f(x) = \sqrt{\sin 3x}$
18) $f(x) = \sqrt[3]{\cos(x^2+1)}$
19) $f(x) = \sin\sqrt{x}$
20) $f(x) = (1+\mathrm{tg}\,3x)^3$
21) $f(x) = \sqrt{\sin(x^2+5x+3)}$
22) $f(x) = \cos(x^2-x+1)^4$
23) $f(x) = \cos^4(x^2-x+1)$
24) $f(x) = \sin\sqrt{x-1}$
25) $f(x) = \sqrt{1+\mathrm{tg}\,2x}$
26) $f(x) = \mathrm{tg}\sqrt{x^2+2}$
27) $f(x) = \mathrm{tg}^2\,\dfrac{x}{2} - \mathrm{tg}^3\,\dfrac{x}{3}$
28) $f(x) = \sin 2x + \cos^2 x$
29) $f(x) = \sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}$
30) $f(x) = \sqrt[3]{\sin^2 5x}$
31) $f(x) = \sin\left(\dfrac{x}{2}\right)\cos\left(\dfrac{x}{3}\right)$
32) $f(x) = \sin(x) \times \sqrt{4x}$
33) $f(x) = 2x\cos 5x$
34) $f(x) = \sqrt{x^2+x} \times \sqrt[3]{x}$
35) $f(x) = \sqrt{2x}\cos 5x$
36) $f(x) = \sin^2(3x) \times \sqrt{\cos 4x}$
37) $f(x) = (x+1)^3\sqrt{x^2+2}$
38) $f(x) = \dfrac{1-\mathrm{tg}\,x}{1+\tan x}$
39) $f(x) = \cos^2(2x) \times \mathrm{tg}\left(\dfrac{2x}{3}\right)$

E) Déterminez les primitives des fonctions suivantes :

1) $\displaystyle\int 2x(x^2+1)^4\,\mathrm{d}x$
2) $\displaystyle\int \mathrm{tg}(5x)\,\mathrm{d}x$
3) $\displaystyle\int \cot\frac{x}{3}\,\mathrm{d}x$
4) $\displaystyle\int x^3\ln(4x)\,\mathrm{d}x$
5) $\displaystyle\int x^2\sin x\,\mathrm{d}x$
6) $\displaystyle\int \mathrm{tg}^3\,x\,\mathrm{d}x$
7) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{tg}\,x}{\ln(\cos x)}\,\mathrm{d}x$
8) $\displaystyle\int (3x^2+6x+2)\ln(x+1)\,\mathrm{d}x$
9) $\displaystyle\int \cos^2(4x)\,\mathrm{d}x$
10) $\displaystyle\int \sqrt{(x-4)^3}\,\mathrm{d}x$
11) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$
12) $\displaystyle\int 2^x\,\mathrm{d}x$
13) $\displaystyle\int (x^2+1)(x+1)^5\,\mathrm{d}x$
14) $\displaystyle\int \frac{1}{1-\sin x}\,\mathrm{d}x$
15) $\displaystyle\int \sin^3 x\,\mathrm{d}x$

F) Un capital est placé au taux annuel de 10% à intérêts composés. Après combien de temps le capital aura-t-il doublé ? Triplé ?

G) **L'origami infini**
La distance entre la Terre et la Lune est en moyenne de $384\,400$km. J'ai devant moi une feuille de papier d'une épaisseur d'un millimètre. Si je peux la plier en deux autant de fois que je le souhaite, de sorte que l'une des moitiés de la feuille recouvre exactement l'autre moitié de la feuille, combien de pliages successifs minimum dois-je faire afin que l'épaisseur de la feuille pliée dépasse la distance séparant notre planète de son satellite naturel ?

H) Déterminez les domaines de définition des fonctions suivantes :

1) $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1}$ 2) $f(x) = \sqrt{1 - \mathrm{e}^{4x}}$ 3) $f(x) = \ln(x - x^2)$

4) $f(x) = \dfrac{1 - \mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^x}$ 5) $f(x) = \log_x \dfrac{2x - 1}{1 + x}$ 6) $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x$

7) $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^2\, x - 1}{\sqrt{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}}$ 8) $f(x) = \ln \dfrac{x^2 - 2x}{1 - 2x}$ 9) $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x$

10) $f(x) = \dfrac{\ln(x - 1)}{\ln(x + 1)}$

I) On a demandé à cinquante employés d'une entreprise de préciser le nombre de kilomètres parcourus pour se rendre de leur domicile à leur lieu de travail. Voici les résultats de cette enquête :

30 - 6 - 15 - 29 - 43 - 15 - 23 - 12 - 26 - 28 - 10 - 29 - 56 - 17 - 9 - 45 - 18 - 50 - 42 - 11 - 25 - 35 - 24 - 36 - 28
5 - 12 - 25 - 7 - 16 - 21 - 32 - 3 - 34 - 21 - 37 - 40 - 40 - 13 - 38 - 23 - 41 - 59 - 23 - 37 - 27 - 28 - 38 - 27 - 45

1) En ayant pris soin de grouper les résultats en classes de $10\mathrm{km}$, établissez le tableau recensé approprié. Faites-y également figurer le centre de la classe et toutes les autres données dont vous pourriez avoir besoin pour les calculs demandés dans les autres questions.
2) Dressez le graphe des fréquences cumulées.
3) Calculez le mode, la médiane, la moyenne, et l'écart-type.

J) Déterminez l'angle que fait le soleil avec l'horizon si une personne d'un mètre quatre-vingts remarque que son ombre est d'un mètre quarante sur le sol.

K) Les côtés parallèles d'un trapèze isocèle mesurent respectivement 8 et $20\mathrm{cm}$ alors que la hauteur est de $7\mathrm{cm}$. Déterminez la longueur des deux autres côtés, ainsi que l'amplitude des angles du trapèze.