Université de Bordeaux
Nom: Priscilla TISSOT
Numéro: 21703561

Licence Informatique, 3e année
14/03/2022

Techniques Algorithmiques et Programmation

Devoir Maison

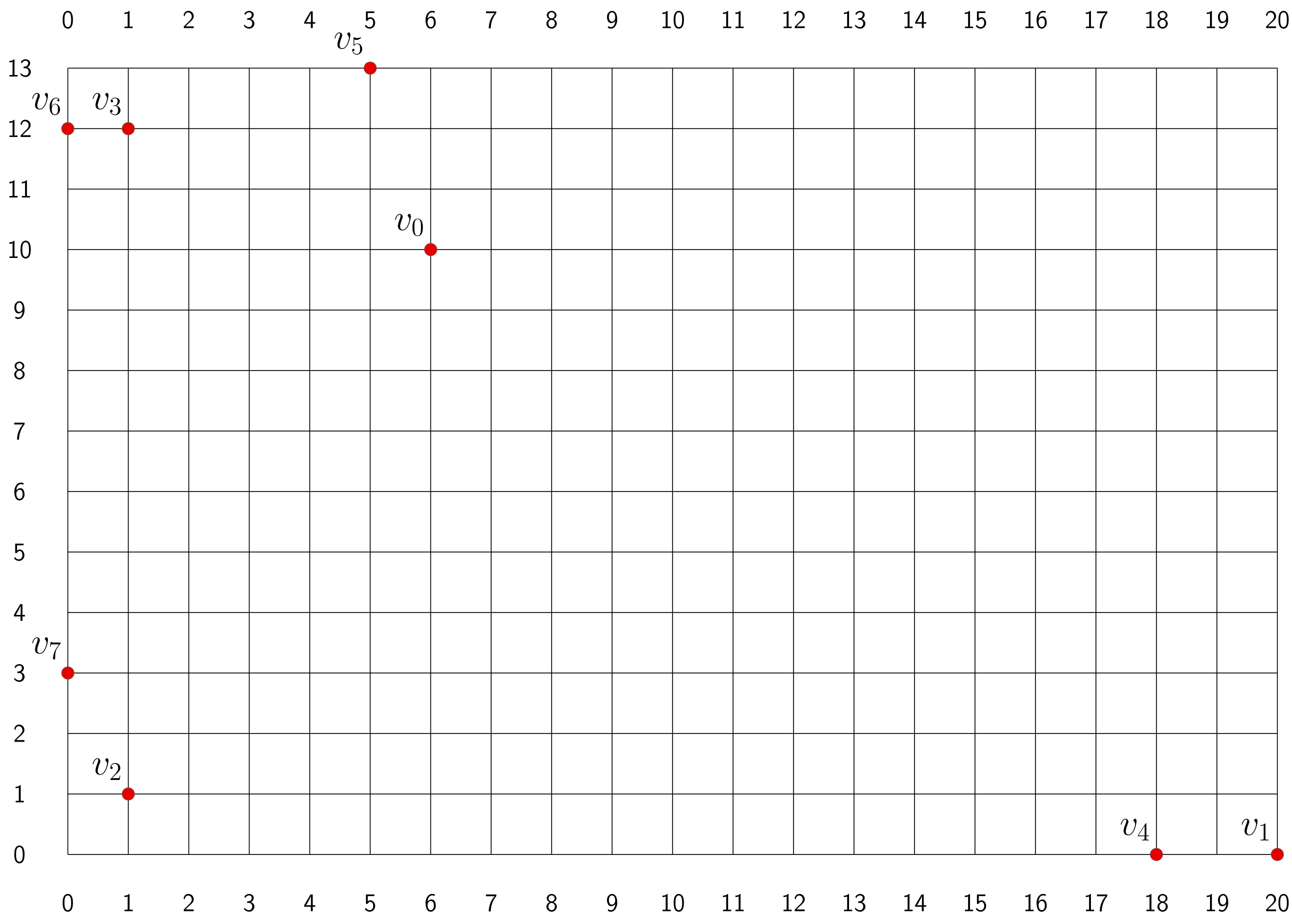
[17h – 20h]

Toutes vos réponses sont à saisir dans le fichier `reponses.txt` qui une fois rempli sera à déposer sur la page Moodle du cours. Il est impératif de ne pas renommer ce fichier de réponses, ni de le compresser ou de changer son format. Vous pouvez mettre des commentaires directement dans `reponses.txt` si cela vous semble nécessaire.

Le sujet comporte **4** pages. Vous avez le droit d'utiliser les documents accessibles sur la page de l'UE, en particulier les notes de cours, ainsi que vos propres documents. Il s'agit d'un devoir **individuel**. Tout constat de manquement à cette consigne sera sanctionné.

Voyageur de commerce

On considère un ensemble de 8 points $V = \{v_0, v_1, \ldots, v_7\}$ placés sur une grille rectangulaire comme ci-dessous. La distance entre deux points de V est la distance dite de Manhattan, c'est-à-dire la longueur d'un plus court chemin qui suit la grille, chaque pas de la grille valant 1. Plus précisément, la distance entre les points $A = (x_A, y_A)$ et $B = (x_B, y_B)$ est $d(A, B) = |x_A - x_B| + |y_A - y_B|$. Notez bien que la grille ne comporte pas de diagonale et que toutes les distances sont entières.



Q1a. *Calculez* $d(v_0, v_1)$.

Q1b. *Calculez* $d(v_0, v_2)$.

Q2a. *Donnez les indices des deux points les plus proches.*

Q2b. *Calculez la distance correspondante.*

Q2c. *Donnez trois points d'un triangle de* V *ayant le plus petit périmètre, c'est-à-dire trois points distincts* v_i, v_j, v_k *tels que* $d(v_i, v_j) + d(v_j, v_k) + d(v_k, v_i)$ *soit minimum.*

On dit qu'une suite $u_1, \ldots, u_t$ de t points de la grille sont « alignés » s'il existe un plus court chemin de u_1 à u_t dans la grille passant par tous les points de la suite dans l'ordre $u_1, \ldots, u_t$.

Q3a. *Dans* V*, donnez une suite de trois points alignés.*

Q3b. *Dans* V*, donnez une suite de* t *points alignés avec le plus grand* t *possible. Pour simplifier la recherche, remarquez que tout plus court chemin sur la grille utilise, sur chaque dimension, des coordonnées toutes croissantes ou toutes décroissantes.*

Q3c. *Dans une grille de dimension suffisamment grande, trouver deux points* A, B *(pas forcément dans* V*) tels que l'ensemble de points* $\{(8,6), (3,7), A, B\}$ *ne possède pas trois points alignés. Dit* *autrement, quels que soient les trois points pris dans l'ensemble, ils ne sont jamais alignés. Si les points A et B n'existent pas, indiquez le.*

On considère l'algorithme « du point le plus proche », un algorithme glouton vu en cours.

Q4a. *Donnez la tournée produite par cet algorithme depuis v_0, c'est-à-dire les indices des points rencontrés dans l'ordre de visite de la tournée.*

Q4b. *Calculez la longueur de la tournée ainsi produite.*

La matrice des distances pour V est la matrice carrée 8×8, $M = (M_{i,j})$ où $M_{i,j} = d(v_j, v_i)$, donnant la distance entre chaque couple de points (v_j, v_i) de V. Il s'agit de calculer cette matrice. Mais comme la matrice est symétrique et que $M_{i,i} = 0$, seules certaines valeurs sont « utiles ». On notera L_i la i-ème ligne de la matrice M pour les valeurs $M_{i,j}$ avec $j < i$. On a donc :

	v_0	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6
L_1	$d(v_0, v_1)$						
L_2	$d(v_0, v_2)$	$d(v_1, v_2)$					
L_3	$d(v_0, v_3)$	$d(v_1, v_3)$	$d(v_2, v_3)$				
L_4	$d(v_0, v_4)$	$d(v_1, v_4)$	$d(v_2, v_4)$	$d(v_3, v_4)$			
L_5	$d(v_0, v_5)$	$d(v_1, v_5)$	$d(v_2, v_5)$	$d(v_3, v_5)$	$d(v_4, v_5)$		
L_6	$d(v_0, v_6)$	$d(v_1, v_6)$	$d(v_2, v_6)$	$d(v_3, v_6)$	$d(v_4, v_6)$	$d(v_5, v_6)$	
L_7	$d(v_0, v_7)$	$d(v_1, v_7)$	$d(v_2, v_7)$	$d(v_3, v_7)$	$d(v_4, v_7)$	$d(v_5, v_7)$	$d(v_6, v_7)$

Q5. *Calculez chacune des lignes $L_1, \ldots, L_7$.*

Il s'agit maintenant de construire un arbre couvrant de poids minimum pour V, plus précisément du graphe complet induit par V. Vous pouvez pour cela appliquer la méthode que vous souhaitez, en vous appuyant sur la matrice des distances que vous venez de calculer.

Q6a. *Donnez la liste des arêtes d'un arbre couvrant de poids minimum.*

Q6b. *Calculez le poids de cet arbre.*

Q6c. *Parmi les arêtes du graphe complet induit par V, combien n'appartiennent pas à l'arbre ?*

Q6d. *Donnez l'arête de poids minimum du graphe complet à ne pas être dans l'arbre. (En choisir une s'il y en a plusieurs.) Notez que lorsqu'on applique l'algorithme de Kruskal, c'est la première arête à former un cycle.*

On s'intéresse maintenant aux tournées produites par l'algorithme de 2-approximation vu en cours.

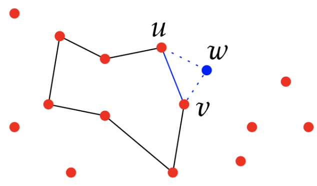
Q7a. *Donnez la tournée obtenue en effectuant un parcours en profondeur (DFS) en choisissant v_0 comme racine de l'arbre. Important : s'il y a un choix, votre parcours devra choisir le point voisin ayant le plus petit indice.*

Q7b. *Calculez la longueur de cette tournée.*

On s'intéresse maintenant à un autre algorithme produisant une tournée pour V. Il s'agit de la variante de l'heuristique dite d'« insertion aléatoire » présentée brièvement dans la section 3.4.3 des notes de cours (d'où a été copiée l'illustration ci-après).

Le principe est le suivant : on démarre avec la tournée initiale $P = u^* - v^*$, définie sur deux points les plus proches possibles (par exemple, pour V, ceux de la question Q2a). Puis, pour chacun des points extérieurs à la tournée courante P, on « insère » le point w entre deux points consécutifs $u - v$ de P (voir la figure ci-après). Cela crée ainsi une nouvelle tournée avec un point de plus où l'arête $u - v$ de P a été remplacée par les arêtes $u - w$ et $w - v$.

Le point important, pour cette variante qu'on nommera « insertion minimum », est que le point w et l'arête $u - v$ de P sont choisis de façon à minimiser l'accroissement de la longueur de la tournée. On s'arrête bien évidemment lorsque tous les points ont été ainsi insérés.



Q8a. *Donnez l'ordre d'insertion des points de la tournée pour V obtenue par insertion minimum.*

Q8b. *Donnez la tournée résultante pour V.*

Q8c. *Calculez la longueur de cette tournée.*

FIN.