Neizraziti skupovi

Zadaci za vježbu

Rješenja pripremio: Goran Glavaš

Zadaci

1. Neka je A neizraziti skup definiran nad nenegativnim realnim brojevima definiran na sljedeći način:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{za } 0 < x < 1 \\ x-1 & \text{za } 1 \leq x < 2 \\ 1 & \text{za } 2 \leq x < 3 \\ 4-x & \text{za } 3 \leq x < 4 \\ 0 & \text{za } 4 \leq x \end{cases} \tag{1}$$

Neka je neizraziti skup B neizraziti skup definiran nad nenegativnim realnim brojevima definiran na sljedeći način:

$$\mu_B(x) = \begin{cases} 0 & \text{za } 0 < x < 3 \\ x-3 & \text{za } 3 \leq x < 4 \\ 1 & \text{za } 4 \leq x < 5 \\ 6-x & \text{za } 5 \leq x < 6 \\ 0 & \text{za } 6 \leq x \end{cases} \tag{2}$$

   (a) Odredite jezgru, potporu i visinu neizrazitog skupa A
   (b) Odredite sve α-presjeke neizrazitog skupa A
   (c) Odredite komplement A^c neizrazitog skupa A
   (d) Odredite neizrazite skupove $A \cup A^c$ i $A \cap A^c$. Uočavate li kakvu razliku u odnosu na klasične skupove?
   (e) Odredite neizraziti skup $A \cup B$. Je li taj neizraziti skup konveksan?
   (f) Odredite neizraziti skup $A \cap B$. Je li taj neizraziti skup konveksan?
   (g) Odredite sve α-presjeke od $A \cup B$

2. Einsteinova t-norma definirana je na sljedeći način:

$$t_E(a,b) = \frac{ab}{2-(a+b-ab)}. \tag{3}$$

Koristeći DeMorganov zakon za neizrazite skupove pokažite da je uz korištenje funkcije komplementa $\mu_{A^c}(x) = 1 - \mu_A(x)$ odgovarajuća Einsteinova s-norma (odnosno t-konorma) dana s

$$S_E = \frac{a+b}{1+ab}. \tag{4}$$

3. Parametrizirana Hamacherova t-norma definirana je na sljedeći način:

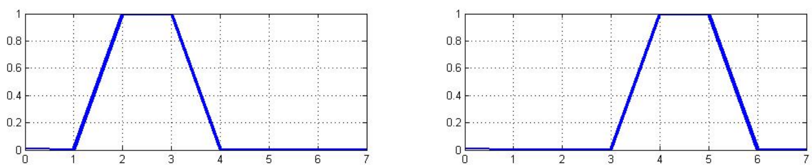
$$t_{H_\nu}(a,b) = \frac{ab}{\nu + (1-\nu)(a+b-ab)}. \tag{5}$$

Koristeći DeMorganov zakon za neizrazite skupove pokažite da je uz korištenje funkcije komplementa $\mu_{A^c}(x) = 1 - \mu_A(x)$ odgovarajuća Hamacherova parametrizirana s-norma (odnosno t-konorma) dana s

$$S_{H_\nu}(a,b) = \frac{a+b-(2-\nu)ab}{1-(1-\nu)ab}. \tag{6}$$

Rješenja

1. Primijetimo kako su neizraziti skupovi A i B zadani tipičnom π-funkcijom pripadnosti. Neizraziti skupovi A i B prikazani su grafički na slici 1



(a) Neizraziti skup A (b) Neizraziti skup B

Figure 1: Neizraziti skupovi A (gornja slika) i B (donja slika)

(a) Jezgru neizrazitog skupa čine oni elementi x za koje da imaju stupanj pripadnosti skupu jednak 1 (tj. $\mu_A(x) = 1$). Potporu čine oni elementi koji neizrazitom skupu pripadaju sa stupnjem pripadnosti većim od 0. Visina neizrazitog skupa je najveći stupanj pripadnosti s kojim neki element iz univerzalnog skupa pripada neizrazitom skupu. Za neizrazite skupove A i B vrijedi:

$$\begin{array}{lll} Core(A) = [2,3] & Support(A) = \langle 1,4\rangle & Hgt(A) = 1 \\ Core(B) = [4,5] & Support(B) = \langle 3,6\rangle & Hgt(B) = 1 \end{array}$$

(b) Budući da α može poprimiti bilo koju realnu vrijednost iz $[0,1]$ postoji beskonačno mnogo α-presjeka neizrazitog skupa. Kako ih zbog toga očito ne možemo pojedinačno sve popisati, grupirati ćemo ih prema intervalima. Za neizraziti skup A imamo sljedeće α-presjeke:

i. $A_{\alpha=0} = \mathbf{R}_\mathbf{0}^+$ – kad je $\alpha = 0$ cijeli univerzalni skup nad kojim je neizraziti skup definiran je obuhvaćen

ii. za $0 < \alpha < 1$ pravac $y = \alpha$ (usporedan s apscisom) siječe pravce $y = x - 1$ i $y = 4 - x$. Koordinate x tih dviju točaka računaju se redom iz $\alpha = x_1 - 1$ i $\alpha = 4 - x_2$ te dobivamo $x_1 = \alpha + 1$ i $x_2 = 4 - \alpha$. Stoga je $A_{\alpha\in\langle 0,1\rangle} = [\alpha + 1, 4 - \alpha]$

iii. za $\alpha = 1$ lako se vidi da je $A_{\alpha=1} = [2,3]$

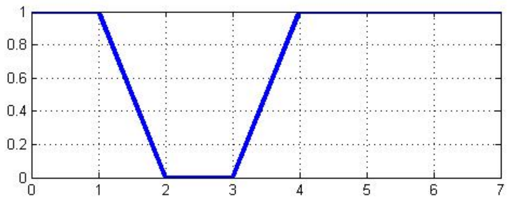


Figure 2: Neizraziti skup A^c

(c) Funkcija pripadnosti komplementarnog skupa A^c određuje se ne temelju funkcije pripadnosti skupa A kao $\mu_{A^c}(x) = 1 - \mu_A(x)$.

$$\mu_{A^c}(x) = \begin{cases} 1 & \text{za } 0 < x < 1 \\ 2 - x & \text{za } 1 \leq x < 2 \\ 0 & \text{za } 2 \leq x < 3 \\ x - 3 & \text{za } 3 \leq x < 4 \\ 1 & \text{za } 4 \leq x \end{cases} \tag{7}$$

(d) Pretpostavljajući Zadehove operatore unije i presjeka (*max* i *min*), funkcije pripadnosti unije i presjeka dvaju neizrazitih skupova A i B definiraju se kao $\mu_{A\cup B}(x) = max(\mu_A(x), \mu_B(x))$ i $\mu_{A\cap B}(x) = min(\mu_A(x), \mu_B(x))$.

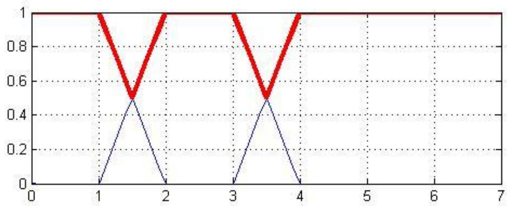


Figure 3: Neizraziti skup $A \cup A^c$ (crvenom bojom)

$$\mu_{A\cup A^c}(x) = \begin{cases} 1 & \text{za } 0 < x < 1 \\ 2 - x & \text{za } 1 \leq x < \frac{3}{2} \\ x - 1 & \text{za } \frac{3}{2} \leq x < 2 \\ 1 & \text{za } 2 \leq x < 3 \\ 4 - x & \text{za } 3 \leq x < \frac{7}{2} \\ x - 3 & \text{za } \frac{7}{2} \leq x < 4 \\ 1 & \text{za } 4 \leq x \end{cases} \tag{8}$$

$$\mu_{A\cap A^c}(x) = \begin{cases} 1 & \text{za } 0 < x < 1 \\ x - 1 & \text{za } 1 \leq x < \frac{3}{2} \\ 2 - x & \text{za } \frac{3}{2} \leq x < 2 \\ 0 & \text{za } 2 \leq x < 3 \\ x - 3 & \text{za } 3 \leq x < \frac{7}{2} \\ 4 - x & \text{za } \frac{7}{2} \leq x < 4 \\ 0 & \text{za } 4 \leq x \end{cases} \tag{9}$$

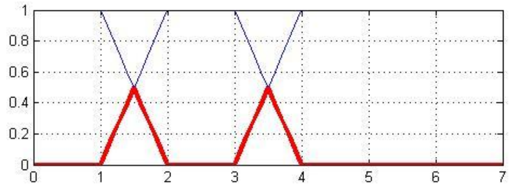


Figure 4: Neizraziti skup $A \cap A^c$ (crvenom bojom)

(e) Neizraziti skup $A \cup B$ prikazan je na slici 5. Taj skup nije konveksan budući da postoje njegovi α-presjeci koji nisu zatvoreni intervali. Takvi su svi α-presjeci za $\alpha \in \langle \frac{1}{2}, 1]$

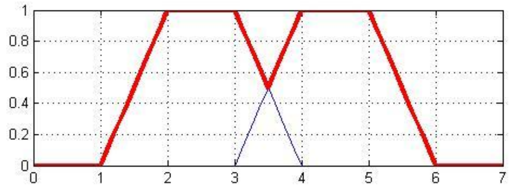


Figure 5: Neizraziti skup $A \cup B$ (crvenom bojom)

$$\mu_{A \cup B}(x) = \begin{cases} 0 & \text{za } 0 < x < 1 \\ x-1 & \text{za } 1 \leq x < 2 \\ 1 & \text{za } 2 \leq x < 3 \\ 4-x & \text{za } 3 \leq x < \frac{7}{2} \\ x-3 & \text{za } \frac{7}{2} \leq x < 41 \quad \text{za } 4 \leq x < 5 \\ 6-x & \text{za } 5 \leq x < 6 \\ 0 & \text{za } 6 \leq x \end{cases} \tag{10}$$

(f) Neizraziti skup $A \cap B$ prikazan je na slici 6. Taj je skup konveksan jer su mu svi α-presjeci zatvoreni intervali.

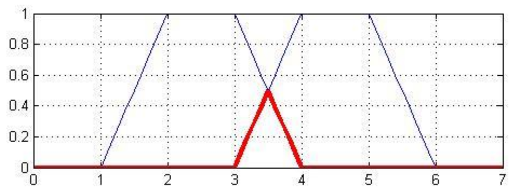


Figure 6: Neizraziti skup $A \cap B$ (crvenom bojom)

$$\mu_{A \cap B}(x) = \begin{cases} 0 & \text{za } 0 < x < 3 \\ x-3 & \text{za } 3 \leq x < \frac{7}{2} \\ 4-x & \text{za } \frac{7}{2} \leq x < 4 \\ 0 & \text{za } 4 \leq x \end{cases} \tag{11}$$

(g) Analogno podzadatku b) računamo sve α-presjeke skupa $A \cup B$.

$$(A \cup B)_\alpha (x) = \begin{cases} \mathbf{R_0^+} & \text{za } \alpha = 0 \\ [\alpha + 1, 6 - \alpha] & \text{za } 0 < \alpha \leq \frac{1}{2} \\ [\alpha + 1, 4 - \alpha\rangle \cup \langle \alpha + 3, 6 - \alpha] & \text{za } \frac{1}{2} < \alpha \leq 1 \end{cases} \tag{12}$$

2. Prema DeMorganovom zakonu za s i t norme vrijedi

$$sNorma(a, b) = (tNorma(a^c, b^c))^c$$

pa uz Zadehov operator komplementiranja ($a^c = 1 - a$) imamo

$$sNorma(a, b) = 1 - tNorma(1 - a, 1 - b).$$

Koristeći ovo računamo Einsteinovu s-normu na sljedeći način:

$$\begin{aligned} S_E(a, b) &= 1 - t_E(1 - a, 1 - b) \\ &= 1 - \frac{(1 - a)(1 - b)}{2 - [1 - a + 1 - b - (1 - a)(1 - b)]} \\ &= 1 - \frac{1 - a - b + ab}{2 - (1 - a + 1 - b - 1 + a + b - ab)} \\ &= 1 - \frac{1 - a - b + ab}{2 - (1 - ab)} \\ &= \frac{1 + ab}{1 + ab} - \frac{1 - a - b + ab}{1 + ab} \\ &= \frac{1 + ab - 1 + a + b - ab}{1 + ab} \\ &= \frac{a + b}{1 + ab} \qquad q.e.d. \end{aligned}$$

3. Analogno kao i u prethodnom zadatku računamo:

$$\begin{aligned} S_{H_\nu}(a, b) &= 1 - t_{H_\nu}(1 - a, 1 - b) \\ &= 1 - \frac{(1 - a)(1 - b)}{\nu + (1 - \nu)[1 - a + 1 - b - (1 - a)(1 - b)]} \\ &= 1 - \frac{1 - a - b + ab}{\nu + (1 - \nu)(2 - a - b - 1 + a + b + -ab)} \\ &= 1 - \frac{1 - a - b + ab}{\nu + (1 - \nu)(1 - ab)} \\ &= 1 - \frac{1 - a - b + ab}{\nu + 1 - \nu - ab + \nu ab} \\ &= \frac{1 - (1 - \nu)ab}{1 - (1 - \nu)ab} - \frac{1 - a - b + ab}{1 - (1 - \nu)ab} \\ &= \frac{\nu + 1 - \nu - ab + \nu ab - 1 + a + b - ab}{1 - (1 - \nu)ab} \\ &= \frac{\nu ab - 2ab + a + b}{1 - (1 - \nu)ab} \\ &= \frac{a + b - (2 - \nu)ab}{1 - (1 - \nu)ab} \qquad q.e.d. \end{aligned} \tag{13}$$