# Neizrazito, evolucijsko i neuroračunarstvo
# Neizraziti skupovi.

prof.dr.sc. Bojana Dalbelo Bašić prof.dr.sc. Marin Golub
dr.sc. Marko Čupić

Fakultet elektrotehnike i računarstva
Sveučilište u Zagrebu
Akademska godina 2013./2014.

03. listopada 2013.

# Univerzalni skup

- Bilo da govorimo o klasičnim skupovima ili o neizrazitim skupovima, najprije trebamo domenu: sve elemente koji *mogu* pripadati razmatranom skupu.
- Taj skup nazivamo Univerzalni skup, oznaka $U$ ili ponekad $X$.
- On određuje *problemsku* domenu.
- Primjerice: želimo definirati skup studenata FER-a viših od 180 cm.
    - Univerzalni skup bi mogao biti diskretni skup *svih* studenata FER-a.
    - Univerzalni skup bi mogao biti kontinuirani skup mogućih visina studenata (primjerice neki podskup od $\mathbb{R}^+$).
- Univerzalni skup je klasični skup.

# Klasični skup

Klasični skup (u Cantorovom smislu, engl. *crisp set*) $A \subseteq X$ možemo definirati na mnogo načina; primjerice:

- nabrajanjem elemenata od $A$, ako je $|A| < \infty$
- navođenjem svojstava koja jednoznačno određuju elemente od $X$ koji pripadaju skupu $A$
- pomoću karakteristične funkcije $\mu_A(x) : X \rightarrow \{0, 1\}$:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{ako je } x \in A \\ 0, & \text{ako je } x \notin A \end{cases}$$

# Klasični skup

Primjerice, neki klasični skup $A$ možemo definirati na sljedeće (ekvivalentne) načine:

- nabrajanjem:

$$A = \{2, 4, 6, 8\},$$

- navođenjem svojstava:

$$A = (x \mid x \in \mathbb{N} \ \wedge \ x \ mod \ 2 = 0 \ \wedge \ 2 \leq x \leq 8),$$

- pomoću karakteristične funkcije $\mu_A(x) : \mathbb{N} \to \{0, 1\}$:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{ako je } x \in \{2, 4, 6, 8\} \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

# Klasična logika

Klasična logika potiče od Aristotela. Aksiomatski utemeljio u 19. stoljeću George Boole: *Booleova logika*. Logika dviju krajnosti: *istina – laž*.

Karakteristična su sljedeća svojstva:

- zakon isključenja trećega: $\models p \vee \neg p$,
- zakon kontradikcije: $\models \neg(p \wedge \neg p)$,
- iz kontradikcije je sve dokazivo: $p, \neg p \models q$,
- eliminacija dvostruke negacije: $\neg\neg p \iff p$,
- monotonost izvođenja: ako $p \models r$ tada i $p, q \models r$,
- idempotentnost izvođenja: ako $p, q, q \models r$ tada i $p, q \models r$,
- komutativnost $\wedge$: $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$,
- DeMorganovi zakoni: $\neg(p \wedge q) \iff \neg p \vee \neg q$ i $\neg(p \vee q) \iff \neg p \wedge \neg q$.

# Klasična logika

Što oblikujemo pomoću klasične logike?

- *Sklopovsku razinu* računalnih sustava:
  komponente računala su logički sklopovi.
- *Programsku razinu* računalnih sustava:
  programski jezici, sustavi za zaključivanje pomoću računala, ...

Možemo li ljudsko znanje i zaključivanje oblikovati klasičnom logikom?

# Propozicijska i predikatna logika

- *Propozicijska logika* – vrlo koristan alat za zaključivanje. Jednostavnost propozicijske logike – prednost i ograničenje – ne zanima je unutrašnja struktura propozicije.
- *Predikatna logika* – prevladavanje ograničenja propozicijske logike. Uvodi pojam predikata: $x$ je $P$ ili $P(x)$ te kvantifikatore $\exists$, $\forall$.

Međutim, postoje ograničenja.

# Ograničenja klasične logike

Paradoksi:

- (Brijačev paradoks) "Brijač brije *sve one* i *samo one* mještane koji se ne briju sami. Tko brije brijača?"

  Ako se ne brije sam, onda ga brije brijač (dakle on sam, što je paradoks).

  Ako se brije sam, onda ga ne brije brijač (ali on je brijač, pa je to opet paradoks).

- (Paradoks lažljivca) "Ja lažem!"

  Ako je to istina, onda ne lažem pa imamo paradoks.

  Ako to nije istina, onda lažem, ali tada sam rekao istinu pa ne lažem, i eto paradoksa.

# Ograničenja klasične logike

Paradoksi:

- (Paradoks lažljivca) "Ova rečenica je lažna."
- (Cardov paradoks) "Sljedeća rečenica je lažna. Prethodna rečenica je istinita."
- "Ova rečenica je nedokaziva."
- (Curryjev paradoks) "Ako je ova rečenica istinita tada Njemačka graniči s Kinom."
- (Paradoks iznimke) "Ako postoji iznimka za svako pravilo, tada svako pravilo mora imati barem jednu iznimku; iznimka ovog pravila je da ono nema iznimke."

# Ograničenja klasične logike

Paradoksi:

- (Pinokijev paradoks) Što bi se dogodilo kada bi Pinokio rekao "Moj će nos rasti?"
- (Russellov paradoks) Sadrži li "skup svih skupova koji ne sadrže sebe" sebe?
- (Sokratov paradoks) "Znam da ništa ne znam!"

# Motivacija za neizrazite skupove

*Jedno zrno ne čini gomilu, ni dva zrna ne čine gomilu, ni tri... S druge strane svi će se složiti da 100 miliona zrna čini gomilu.*

*Gdje je odgovarajuća granica?*

*Možemo li reći da 325 647 zrna ne čini gomilu, a 325 648 čini?*

*Borel*, 1950.

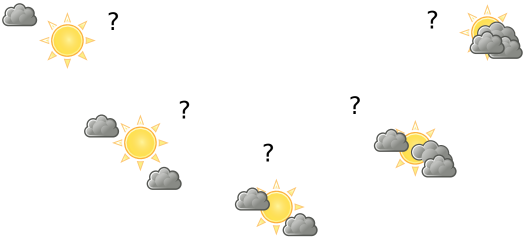
# Motivacija za neizrazite skupove

Zašto nam klasična logika nije dovoljna sa stajališta primjene u inteligentnim sustavima?

Propozicija: **P** = "danas je sunčan dan"

P je istina

P je laž



# Motivacija za neizrazite skupove

Dvije vrijednosti istinitosti nedostatne su za modeliranje zaključivanja zasnovanog na ljudskom znanju o realnom svijetu koje je često nepotpuno, nejasno, izraženo govornim jezikom i oblikovano atributima stupnjevite prirode.

# Motivacija za neizrazite skupove

Prevladavanje ograničenja klasične logike: 1920.-tih godina, viševrijednosna logika – Ian Lukasiewicsz

- $L_2$: vrijednosti istinitosti $\{0, 1\}$ – klasična logika
- $L_3$: vrijednosti istinitosti $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$
- ...
- $L_n$: vrijednosti istinitosti $\{0, \frac{1}{n-1}, \frac{2}{n-1}, \ldots, \frac{n-2}{n-1}, 1\}$
- $L_\infty$: vrijednosti istinitosti iz $[0, 1] \subset \mathbb{Q}$
- $L_1$: vrijednosti istinitosti iz $[0, 1] \subset \mathbb{R}$

# Neizraziti skup

- 1920. godine Bertrand Russell uvodi pojam **vagueness**
- 1937. godine Max Black objavljuje rad:
  "Vagueness: An Exercise in Logical Analysis", Philosophy of Science, Vol.4, 1937.
  nije zadobio pažnju šire znanstvene javnosti
- 1965. Lotfi A. Zadeh definira neizrazite skupove:
  "Fuzzy sets", Information and Control, Vol.8, No.4, pp. 338-353, June 1965.

# Neizraziti skup

- Neizrazit skup je skup s "nejasnim", "mekim" granicama.
- Ako u definiciji *karakteristične funkcije* klasičnog skupa $\{0, 1\}$ zamijenimo s $[0, 1]$, pripadnost elementa $x$ skupu $A$ postaje stupnjevita – dobivamo *funkciju pripadnosti*.

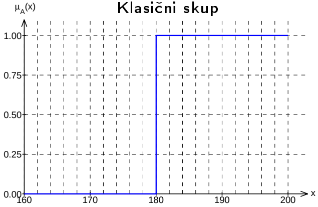
**Definition (Neizraziti skup)**

Neka je $U$ univerzalni skup. Neizraziti skup $A$ definiran nad univerzalnim skupom $U$ je skup uređenih parova $A = \{(x; \mu_A(x)) \mid x \in U,\ \mu_A(x) \in [0, 1]\}$, gdje je $\mu_A(x)$ funkcija pripadnosti (engl. *membership function*), i ona određuje stupanj pripadnosti elemenata $x \in U$ neizrazitom skupu $A$.

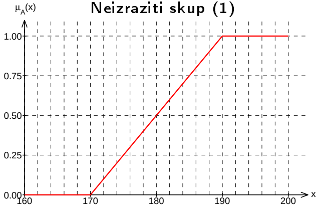
# Neizraziti skup: primjer

Pogledajmo kao primjer modeliranje $A =$"*skup visokih ljudi*".

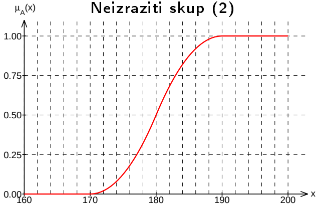
Klasični skup




Neizraziti skup (1)




Neizraziti skup (2)




Definiranje funkcije pripadnosti neizrazitog skupa je subjektivno i kontekstno zavisno.

# Neizrazitost

Neizrazitost – novi pogled na oblikovanje stvarnosti

- Ljudsko znanje o realnom svijetu: uobličeno riječima, puno nejasnih, nepreciznih izraza, subjektivno, kontekstno zavisno...
- Neizrazitost – nema jasnih (izrazitih!) granica između istine i laži te između pripadnosti nekog elementa nekom skupu.

Sve je stvar **mjere**!

# Neizrazitost

| | **klasična** | **neizrazita** |
|---|---|---|
| **logika** | 0, 1 | [0, 1] |
| **teorija skupova** | ili $x \in A$ ili $x \notin A$ | $x \in A$ i $x \notin A$ s nekom mjerom |

Neizrazite tehnike bolje uobličuju znanje o realnom svijetu!

36,7°C vs. vruće je

oštre granice vs. nejasne granice

bivalentno vs. multivalentno

# Neizrazitost

Kako su povezane:

- Klasična logika i Klasična teorija skupova,
- Lukasiewiczeva logika $L_1$ i Teorija neizrazitih skupova?

Koristimo sljedeću interpretaciju.

- Stupanj pripadnosti $\mu_A(x)$ kojim $x \in X$ pripada neizrazitom skupu $A$ može se interpretirati kao stupanj istinitosti propozicije:
  p $\equiv$ "$x$ je element od $A$" u $L_1$.
- I obrnuto, stupanj istinitosti propozicije:
  p $\equiv$ "$P(x)$" odnosno "$x$ je $P$",
  gdje je $P$ neizraziti predikat (visok, mlad, skup...), može se interpretirati kao stupanj pripadnosti $\mu_P(x)$ elementa $x$ neizrazitom skupu koji opisuje svojstvo $P$.

# Neizrazitost

**Primjer.**

Ako Pero pripada skupu visokih ljudi tako da je $\mu_{\text{visoki ljudi}}(x) = 0.7$, onda istinitost propozicije "Pero je visok" iznosi 0.7.

# Neizrazitost

Što možemo oblikovati pomoću neizrazitosti?

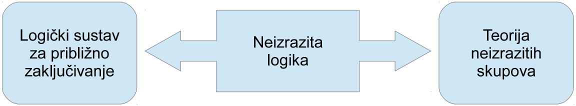
- **upravljačke sustave** (od mašine za pranje rublja do navigacijskih uređaja prekooceanskih brodova)
- **sustave temeljene na ljudskom znanju**

Neizrazitost koristimo:

- kada je znanje o sustavu/procesu teško uobličiti pomoću standardnih matematičkih modela
- kada je znanje uglavnom iskustveno, oblikovano riječima i dano u obliku ako - onda pravila

# Uporaba izraza "Neizrazila logika"

Izraz *neizrazita logika* danas ima dva značenja.




> *Izraz neizrazita logika upotrebljava se u dva različita smisla. Uži smisao je logički sustav koji je proširenje viševrijednosne logike i služi kao logika približnog zaključivanja, u širem smislu to je sinonim za teoriju neizrazitih skupova, teoriju razreda s nejasnim granicama. Danas se izraz neizrazita logika pretežno upotrebljava u ovom širem smislu.*
>
> *L. Zadeh*, 1994.

# Odnos s drugim teorijama

Kakav je odnos između vjerojatnosnih modela i neizrazitih modela?

- Neodređenost se od XVII st. izražava kao vjerojatnost.
- Polemike u znanstvenom svijetu o razlici između ta dva koncepta (postoji li uopće?).

# Odnos s drugim teorijama

Šećete pustinjom i ostali ste bez vode. Nakon dugo vremena pronalazite u pijesku poluzakopan sanduk i u njemu dvije boce. Uz boce piše:

P(pitka tekućina) = 0.9

$\mu_{\text{pitka tekućina}} = 0.9$

P(pitka tekućina) = 0.9


Koju ćete bocu otvoriti i popiti? Zašto?

# Odnos s drugim teorijama

Gaines (1978) je napravio i usporedio aksiomatizaciju za obje teorije

- Za obje je potrebno 16 aksioma
- Razlika je samo u jednom aksiomu:
  - Ako se traži zakon isključenja trećega, dobiva se teorija vjerojatnosti
  - Teorija neizrazitih skupova nije ograničena tim zakonom već drugim

# Princip nekompatibilnosti

*Kako se povećava kompleksnost nekog sustava tako se smanjuje mogućnost da donosimo precizne, a još uvijek upotrebljive opise sustava, sve dok se ne dosegne prag iznad kojeg preciznost i upotrebljivost postaje gotovo međusobno isključivi.*

*L. Zadeh*

Cijena preciznog modeliranja i analize kompleksnih sustava previsoka je da bi bila praktična!

Primjer: Parkiranje auta na zadanu poziciju s točnošću 1 mm vs. parkiranje auta na zadanu poziciju s točnošću 20 cm.

# Poučni citati

*Precision is not truth.*

(Henri E.B. Matisse, 1869-1954)

*All traditional logic habitually assumes that precise symbols are being employed. It is therefore not applicable to this terrestrial life but only to an imagined celestial existence.*

(Bertrand Russell, 1923)

# Poučni citati

*It is the mark of an instructed mind to rest satisfied with that degree of precision which the nature of the subject admits, and not to seek exactness where only an approximation of the truth is possible.*

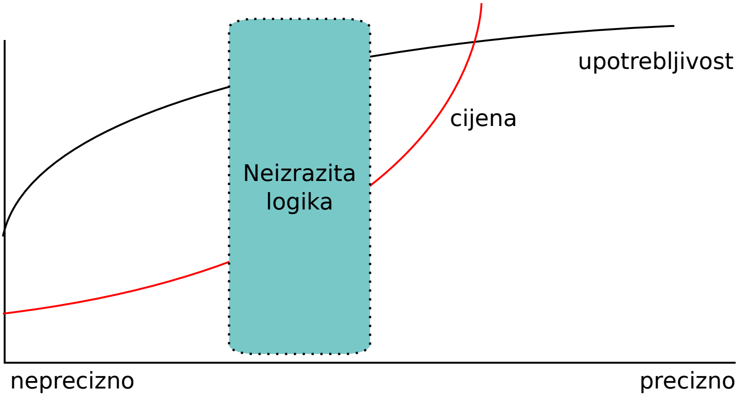
(Aristotle, 384-322 BC)

*We must exploit our tolerance for imprecision.*

(Lotfi Zadeh, 1973)

# Princip nekompatibilnosti

Trade off: cijena – upotrebljivost



# Vrste nesigurnosti

U praksi postoji više uzroka/razloga/vrsta za nesigurnost u podatke/informacije – samo neke od njih modeliramo neizrazitošću.

- *Fuzzy*: nema stroge granice, nejasan, neprecizan, približan
- *Vague*: nije specifičan
- *Ambiguous*: višeznačan, kontradiktoran
- *Ignorance*: nedostaje nam informacija
- *Natural variability*: konfliktnost, slučajnost, kaotičnost, nepredvidivost

# Vrste nesigurnosti

U praksi postoji više uzroka/razloga/vrsta za nesigurnost u podatke/informacije – samo neke od njih modeliramo neizrazitošću.

- "Vratit ću se uskoro" $\rightarrow$ *vague*
- "Vratit ću se za par minuta" $\rightarrow$ *fuzzy*
- "Kvaliteta podataka je dobra", "Prozirnost optičkog elementa je prihvatljiva." $\rightarrow$ *vague*

# Razvoj neizrazite logike

**1965.-1975. Dekada razvoja teorijskih osnova**

- 1965. Zadeh "Fuzzy sets"
- Članak izazvao puno suprotstavljanja – koncem 60.-tih Zadehovo istraživanje (sponzorirano od NSF) navedeno u Kongresu SAD-a kao primjer "bacanja državnog novca"!
- Bellman, Klir, Goguen, Sugeno, Bezdek, Tanaka, Kandel, Zimmermmen, Dubois, ...
- Uvođenje neizrazitosti u mnoge matematičke strukture: logika, relacije, funkcije, grafovi, grupe, automati, jezici, algoritmi ...
- 1974. Mamdani (UK) prvi FL kontroler!
- Prve primjene u građevinarstvu, prometu, strojarstvu ...

# Razvoj neizrazite logike

**1976.-1987. Pioniri u industrijskoj primjeni**

- 1976. prva industrijska primjena u Danskoj – upravljački mehanizam temeljen na FL i "know how" iskusnog operatera za proizvodnju cementa
- 1987. potpuno automatska kontrola sustava podzemne željeznice u Japanskom gradu Sendai (tvrtka Hitachi)
- Sustav za navodnjavanje (Fuji Electric)
- Prvi FL kontroler opće namjene (Fuji Electric)

# Razvoj neizrazite logike

**1987. - "The Fuzzy Boom"**

- Japan: veliki nacionalni istraživački projekti (suradnja sveučilišta i industrije)
- Laboratory for International Fuzzy Engineering Research (LIFE) – 50 tvrtki – financijska sredstva kroz 5 godina u iznosu od \$5, 000, 000, 000.
- Matsushita Electric Industrial Co. (Panasonic) – primjena FL na proizvode široke potrošnje: mješalice za vodu, stroja za pranje rublja ("Asai-go")... Slijede ih ostale tvrtke (u proizvodnji kamera, usisavača, kuhala za rižu, hladnjaka, automobila, ...)

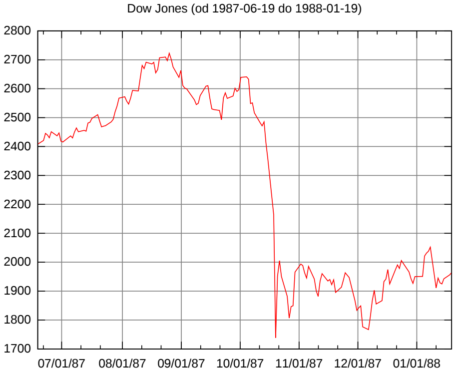
# Prvi financijski burzovni savjetodavni sustav temeljen na FL

**U Japanu: Fuzzy = Intelligence**

- Japan: Prvi financijski, trgovinski sustav temeljen na neizrazitoj logici. Odnosio se na financije 65 industrija i većinu dionica Nikkei Dow.
- Sadrži 800 pravila, oblikovala su se mjesečno na temelju znanja eksperata.
- Sustav je testiran 2 godine
- U terminima povrata sredstava i rasta sustav je prešao 20% Nikkei prosjeka

# Prvi financijski burzovni savjetodavni sustav temeljen na FL

Za vrijeme faze testiranja sustav je savjetovao "SELL" 18 dana prije sloma burze tzv. “crnog ponedjeljka” 19.10.1987.



# Zastupljenost u istraživačkoj zajednici

Niz znanstvenih časopisa:

- *Fuzzy Sets and Systems*
- *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*
- *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*
- ...

# Literatura


- Ross J. T.: Fuzzy Logic with Engineering Applications; Third Edition, A John Wiley and Sons, Ltd., 2010.
- Nguyen, Hung T.; Walker, Elbert A.: A First Course in Fuzzy Logic; Third Edition, Chapman and Hall/CRC, 2006.
- Terramanzi, A.; Tomassini, M.: Soft Computing: Integrating Evolutionary, Neural and Fuzzy Systems, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2001.

# Literatura


- Yen, J.; Langari, R.: Fuzzy Logic, Intelligence, Control, and Information, Prentice Hall, New Jersey, 1999.
- Zimmermann, H.J.: Fuzzy Sets Theory and Its Applications, Second Edition, Kluwer Academic Publishers, 1991.
- Driankov, D.; Hellendoorn, H.; Reinfrank, M.: An Introduction to Fuzzy Control, Springer-Verlag, Berlin Heilderberg, 1993.
- Klir, G. J.; Fogler, T. A.: Fuzzy Sets, Uncertainty and Information, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1988.
- Dubois, D.; Prade, H.: Fuzzy Sets and Systems, Theory and Applications, Academic Press, 1980.

# Razvoj neizrazite logike

**Umjesto zaključka**

*So far as the laws of mathematics refer to reality, they are not certain. And so far as they are certain, they do not refer to reality.*

Albert Einstein, "Geometry and Expirience"