Neizrazito, evolucijsko i neuroračunarstvo
Neizrazita logika.

prof.dr.sc. Bojana Dalbelo Bašić prof.dr.sc. Marin Golub
dr.sc. Marko Čupić

Fakultet elektrotehnike i računarstva
Sveučilište u Zagrebu
Akademska godina 2013./2014.

24. listopada 2013.

Osnovne operacije

U neizrazitoj logici, veznike interpretiramo djelovanjem na mjeru istinitosti propozicija nad kojima djeluju:

- Negacija: $\neg a = 1 - a$
- Konjunkcija: $a \wedge b = \min(a, b)$
- Disjunkcija: $a \vee b = \max(a, b)$
- Implikacija: $a \rightarrow b = \min(1, 1 + b - a)$

Osnovne operacije

Vrijede uobičajeni zakoni:

- involutivnost
- komutativnost
- asocijativnost
- distributivnost
- idempotencija
- rubni uvjeti
- DeMorganovi zakoni

Osnovne operacije

Ne vrijede:

- zakon kontradikcije: $a \wedge \neg a = 0$
- zakon isključenja trećega: $a \vee \neg a = 1$

$$a \wedge \neg a = \min(a, 1 - a) \neq 0 \text{ ako je } a \notin \{0, 1\}$$

$$a \vee \neg a = \max(a, 1 - a) \neq 1 \text{ ako je } a \notin \{0, 1\}$$

Primjerice, provjerite za $a = 0.5$ te $a = 0.8$.

Predikati

U klasičnoj logici, predikati su funkcije koje preslikavaju jedan ili više elemenata domene u jednu od vrijednosti istinitosti: *istinu* (1) ili *laž* (0).

- U neizrazitoj logici, neizraziti predikati su funkcije koji preslikavaju vrijednost iz intervala $[0, 1]$.
- Opisuju svojstvo objekata domene.
- Neizraziti predikat je oblika "x je P", primjerice: "z je *skup*.", "w je *mlad*."
  - Izrazi *skup* i *mlad* su neizraziti izrazi.
  - *Skup(z)* i *Mlad(w)* su neizraziti skupovi tj. neizraziti predikati.

Predikati

Predikat oblika "x je P" može se interpretirati na dva načina:

1. $P(x)$ je neizraziti skup. Funkcija pripadnosti nekog x u P definirana je s $\mu_P(x)$.
2. $\mu_P(x)$ predstavlja mjeru u kojoj element domene x zadovoljava svojstvo P. Vrijednost istintosti predikata P definirana je funkcijom $\mu_P(x)$.
3. Vrijednost istinitosti $= \mu_P(x)$.

Općenito "zaključivanje" je postupak izvođenja novog znanja iz već postojećeg.

Pravila tipa "Ako-Onda" su najvažniji oblik predstavljanja znanja

- "Ako x je A onda y je B."

Modus ponens

U klasičnoj logici, *modus-ponens* je sljedeće pravilo zaključivanja:

- Činjenica: x je A
- Pravilo: Ako x je A tada y je B

- Zaključak: y je B

Primjer.

- Činjenica: *pada kiša*
- Pravilo: Ako *pada kiša* tada *ceste su mokre*

- Zaključak: *ceste su mokre*

Kako se zove pravilo zaključivanja koje iz *ceste su mokre* i prethodnog pravila zaključuje *pada kiša*?

Neizrazito pravilo

Općenit oblik neizrazitog pravila je:

- Ako $A(x)$ tada $B(y)$
- Uočiti: pravilo se može interpretirati kao binarna relacija $R(x, y)$:
  - $R(x, y) = A(x) \rightarrow B(y)$

Generalizirani modus ponens

U neizrazitoj logici, klasični modus-ponens može se dati u nešto slobodnijem obliku:

- Činjenica: x je A'
- Pravilo: Ako x je A tada y je B

- Zaključak: y je B'

Pri tome:

- činjenicu "x je A'" možemo promatrati kao unarnu relaciju $R(x)$ nad U,
- pravilo "Ako x je A tada y je B" možemo promatrati kao binarnu relaciju $R(x, y) \subseteq U \times V$,
- zaključak "y je B'" izvodimo kao kompoziciju $R(y) = R(x) \circ R(x, y)$ što je unarna relacija nad V (odnosno neizraziti skup).

Generalizirani modus ponens

Uočiti: zaključak kod generaliziranog modus ponensa može biti različit od konsekventa.

Primjerice: neka je $U = \{1, 2, 3, 4\}$, neka imamo pravilo "*ako x je 3, tada y je 2*" te neka imamo činjenicu "x je približno 3": očekujemo zaključak "*y je približno 2*".

Što je "približno zaključivanje"

Osnovna razlika od viševrijednosne logike:

- Zaključak u približnom zaključivanju zavisi od značenja koje je pridruženo neizrazitim propozicijama.
- Približno zaključivanje je računanje s neizrazitim skupovima koji predstavljaju značenja neizrazitih propozicija.
- Približno zaključivanje služi za predstavljanje znanja i zaključivanje kada je znanje izraženo prirodnim jezikom.

Osnovni pojam vezan uz približno zaključivanje: jezična varijabla (još se koristi pojam *lingvistička varijabla*).
Primjeri: visina, brzina, temperatura, pogreška...

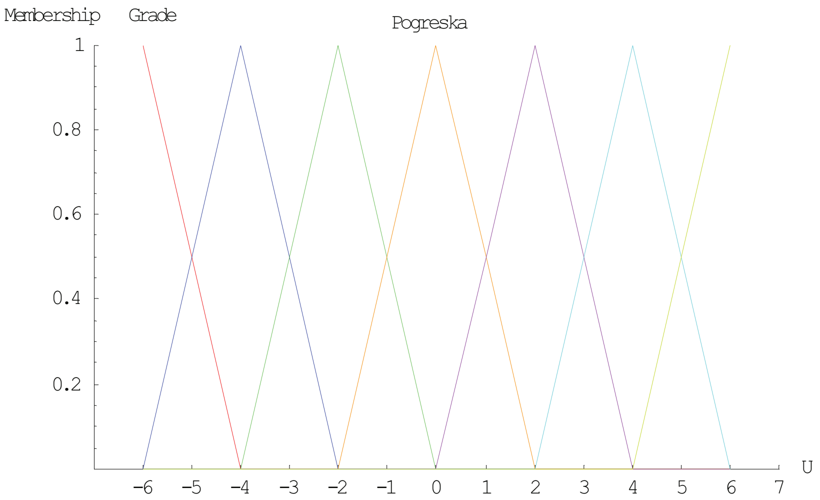
Primjer jezične varijable "Pogreška"

Neka jezična varijabla *Pogreška* opisuje kakva može biti pogreška u izmjerenim podatcima (u smislu *odstupanja* od stvarne vrijednosti).

- $x = POGREŠKA$
- $T_x = \{NB, NM, NS, ZO, PS, PM, PB\}$
- $U = [-6, 6]$

- $NB = \int_{-6}^{6} \frac{L(x;-6,-4)}{x}$
- $NM = \int_{-6}^{6} \frac{\Lambda(x;-6,-4,-2)}{x}$
- $NS = \int_{-6}^{6} \frac{\Lambda(x;-4,-2,0)}{x}$
- $ZO = \int_{-6}^{6} \frac{\Lambda(x;-2,0,2)}{x}$
- $PS = \int_{-6}^{6} \frac{\Lambda(x;0,2,4)}{x}$
- $PM = \int_{-6}^{6} \frac{\Lambda(x;2,4,6)}{x}$
- $PB = \int_{-6}^{6} \frac{\Gamma(x;4,6)}{x}$

Primjer jezične varijable



Neizrazite propozicije

Atomarne (primitivne) propozicije su oblika:

"Pogreška je negativna-velika"

- *Pogreška* je fizička varijabla
- *negativna-velika* je vrijednost varijable *Pogreška*

Simbolički, ovo zapisujemo: $\boldsymbol{E}$ **je** $\boldsymbol{NB}$.
Općenito, zapis **atomarne neizrazite propozicije** je:

$$x \text{ je } \boldsymbol{A}$$

Neizrazite propozicije

- Značenje propozicije "E je NB" (engl. *Error is Negative Big*) definirano je neizrazitim skupom NB tj. njegovom funkcijom pripadnosti $\mu_{NB}(x)$ definiranom na $[-6, 6]$.
- $\mu_{NB}(x)$ definira u kojoj mjeri određena kvantitativna vrijednost (engl. *crisp*) numeričke varijable *pogreška* pripada skupu *negativna velika pogreška*.
- Određena numerička vrijednost pridružuje se varijabli E. (engl. *variable assignment* ili *VA*).
- Ako je dana određena numerička vrijednost , "značenje" određuje u kojoj je mjeri zadovoljen izraz "E je NB".

Primjer: $VA(E) = -5.4$ tj. varijabli je pridružena vrijednost -5.4. Ako je $\mu_{NB}(-5.4) = 0.7$ onda je 0.7 stupanj valjanosti propozicije "E je NB".

Neizrazite propozicije

Složene neizrazite propozicije grade se pomoću veznika "i", "ili", "ne", "ako-onda" (i sl.) iz atomarnih neizrazitih propozicija.
Neka je varijabla X definirana nad univerzalnim skupom U.
Primjeri složenih neizrazitih propozicija su:

- x je A **i** x je B
- x **nije** A
- **Ako** x je A **onda** x je B

Značenje složenih neizrazitih propozicija dano je interpretacijom "i", "ili", "ne", "ako-onda".

Neizrazite propozicije

KONJUNKCIJA

x je A

x je B

---

x je $A \cap B$

Značenje $A \cap B$ određeno je s $\mu_{A \cap B}(x)$, primjerice, neka t-norma.

Primjer propozicije *Pritisak nije jako visok* i *Pritisak nije jako nizak* daje zaključak *Pritisak nije jako visok i nije jako nizak*, a njegovo značenje određeno je funkcijom pripadnosti:

$$\mu_{(\text{nije vrlo visok}) \cap (\text{nije vrlo nizak})}.$$

Neizrazite propozicije

DISJUNKCIJA
x je A
x je B

---

x je $A \cup B$

Značenje $A \cup B$ određeno je s $\mu_{A \cup B}(x)$, primjerice, neka s-norma.

Primjer propozicije *Pritisak nije jako visok* ili *Pritisak nije jako nizak* daje zaključak *Pritisak nije jako visok ili nije jako nizak*, a njegovo značenje određeno je funkcijom pripadnosti:

$$\mu_{(\text{nije vrlo visok}) \cup (\text{nije vrlo nizak})}.$$

Proširenje neizrazitih propozicija

Na prethodnim primjerima slagali smo složene propozicije od atomarnih u kojima su varijable bile definirane nad istim univerzalnim skupom. Pogledajmo sada složeniji slučaj.

Neka je varijabla x definirana nad univerzalnim skupom U a varijabla y nad univerzalnim skupom V.

Značenje "x je A **i** y je B" određeno je s $\int\limits_{U \times V} \frac{\min(\mu_A(x),\mu_B(y))}{(x,y)}$

Značenje "x je A **ili** y je B" određeno je s $\int\limits_{U \times V} \frac{\max(\mu_A(x),\mu_B(y))}{(x,y)}$

NEGACIJA

Negacija propozicije "x je A" je propozicija "x nije A", a značenje je dano s $\mu_{\neg A}(x)$.

Neizrazita produkcijska pravila

Ako - onda neizrazita pravila opisuju uzročno posljedičnu vezu između varijabli (npr. stanja procesa i upravljačkih varijabli) i oblika su:

AKO *(neizrazita propozicija)* **ONDA** *(neizrazita propozicija)*

pri čemu neizrazite propozicije mogu biti atomarne ili složene.

Neizrazita produkcijska pravila

Primjer.

Neka je dana jezična varijabla X na univerzalnom skupu U s vrijednostima $T_x = \{Z, S, M, B\}$ i neka je dana druga jezična varijabla Y na univerzalnom skupu V s vrijednostima $T_y = \{Z, S, M, B\}$. Neka su dane interpretacije jezičnih vrijednosti funkcijama pripadnosti.

Pretpostavimo da postoji injektivna *funkcijska zavisnost* f između diskretnih vrijednosti X i diskretnih vrijednosti Y. Ta zavisnost tada nije kauzalne prirode već je dvosmjerna:

- ako je dana vrijednost x tada y možemo odrediti prema $y = f(x)$;
- ako je dana vrijednost y tada x možemo odrediti prema $x = f^{-1}(y)$.

Neizrazita produkcijska pravila

Primjer (nastavak).
Pretpostavimo da analitičku funkciju f možemo aproksimirati pravilima:

- Ako x je Z tada y je Z,
- Ako x je S tada y je S,
- Ako x je M tada y je M,
- Ako x je B tada y je B.

Ova pravila eksplicitno daju kako se računaju vrijednosti y za dane vrijednosti x. Ako su dane vrijednosti y, ne mogu se odrediti vrijednosti x. Uzročnost je samo u smjeru x prema y što je važna razlika naspram definiranja injektivne funkcijske zavisnosti.

Neizrazita produkcijska pravila

U pravilu:

Ako x je A onda y je B

lijevi dio ("x je A"; uzrok) nazivamo antecedent a desni dio ("y je B"; posljedicu) konzekvens.

Značenje ovog pravila predstavljeno je neizrazitom relacijom definiranom na $U \times V$ čije je značenje dano s:

$$\mu_R(x, y) = \mu_A(x) * \mu_B(y)$$

gdje * može biti Kartezijev produkt ili neki drugi operator implikacije.

Pravilo: Generalizirani modus ponens

Generalizirani modus ponens

Činjenica: x je A
Pravilo: Ako x je B onda y je C

Zaključak: x je D

A, B, C i D su neizraziti skupovi. D može biti dano kao kompozicija $A \circ (\neg B \oplus C)$, gdje $\oplus$ predstavlja ograničenu sumu, odnosno gdje je $\mu_{\neg B \oplus C}(x, y) = min(1, 1 - \mu_B(x) + \mu_C(y))$.

Pravilo: Pravilo kompozicije

Pravilo kompozicije

Činjenica: x je A
Dana relacija: (X, Y) je R (x je u relaciji R s y)

Zaključak: y je B

Umjesto *ako-onda* pravila dana je ekspicitna relacija između X i Y.
Prema Zadehu $B = proj[A \circ R]$ na Y tj.
$\mu_B(y) = \max(\min(\mu_A(x), \mu_R(x, y))$.

Primjeri

Činjenica: x je *mali broj*
Pravilo: x *je nešto manji od* y

Zaključak: y je *dovoljno mali broj*

Činjenica: x je *mali broj*
Pravilo: x *je približno jednak kao* y

Zaključak: y je *manje-više mali broj*

Primjeri

Činjenica: x je *mali broj*
Pravilo: x *je približno jednak kao* y

Zaključak: y je *manje-više mali broj*

Neka je $U = V = \{1, 2, 3, 4\}$. Neka je značenje "x je *mali broj*" dano funkcijom pripadnosti $\mu_{\text{mali}} = \{1/1 + 0.6/2 + 0.2/3 + 0/4\}$. Relacija R *približno jednako* neka je:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 & 1 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0.5 & 1 \end{bmatrix}.$$

Primjeri

$$\text{mali} \circ \text{približno jednako} = \begin{bmatrix} 1 & 0.6 & 0.2 & 0 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 & 1 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0.5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0.6 & 0.5 & 0.2 \end{bmatrix}$$

Rezultat $Y = \{1/1 + 0.6/2 + 0.5/3 + 0.2/4\}$ može se jezično aproksimirati kao *manje-više mali*.

Predstavljanje AKO-ONDA pravila

- veliki broj relacija može se koristiti za predstavljanje značenja ako-onda pravila
- većina je izvedena iz viševrijednosne logike
- implikacija $p \to q$ je u binarnoj logici dana s:
  1. $\neg p \vee q$ ili
  2. $(p \wedge q) \vee \neg p$
- za proširenje na neizrazitu logiku mogu se, primjerice, koristiti ograničena suma u slučaju (1) ili max i min u slučaju (2), odnosno vrijednost istinitosti implikacije $p \to q$ interpretira se kao:

$$\min(1, 1 - p + q) \text{ ili } \max(\min(p, q), 1 - q).$$

Primjer

Neka imamo pravilo:

$$\text{Ako } (x \text{ je } A) \text{ onda } (y \text{ je } B)$$

Neka su značenja (x je A) i (y je B) dana neizrazitim skupovima:

$$\mu_A = \{0.1/x1 + 0.4/x2 + 0.7/x3 + 1/x4\}$$

$$\mu_B = \{0.2/y1 + 0.5/y2 + 0.9/y3\}$$

"Ako A onda B" interpretirat ćemo kao "**not** A **ili** B" gdje je **ili** operacija *max*, a **ne** operacija $1-$ (Zadehov komplement).

Primjer

Tada imamo:

$$\begin{aligned}\mu_{\text{not } A \text{ ili } B}(x, y) &= \max(\mu_{cil(\neg A)}(x, y), \mu_{cil(B)}(x, y)) \\ &= \max(1 - \mu_{cil(A)}(x, y), \mu_{cil(B)}(x, y))\end{aligned}$$

$cil(\neg A)$ je cilindrično proširenje od $\neg A$ na univerzalni skup nad kojim je definiran B. $cil(B)$ je cilindrično proširenje od B na univerzalni skup nad kojim je definiran A.

Primjer

Relacija koja tada odgovara implikaciji (odnosno našem *ako-onda* pravilu) je:

$$\begin{bmatrix} 0.9 & 0.9 & 0.9 \\ 0.6 & 0.6 & 0.6 \\ 0.3 & 0.3 & 0.3 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 \end{bmatrix} \cup \begin{bmatrix} 0.2 & 0.5 & 0.9 \\ 0.2 & 0.5 & 0.9 \\ 0.2 & 0.5 & 0.9 \\ 0.2 & 0.5 & 0.9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.9 & 0.9 \\ 0.6 & 0.6 & 0.9 \\ 0.3 & 0.5 & 0.9 \\ 0.2 & 0.5 & 0.9 \end{bmatrix}$$

Primjer

Pogledajmo što daje kompozicija antecedenta i dobivene relacije (očekujemo li konsekvent?).

$$\begin{bmatrix} 0.1 & 0.4 & 0.7 & 1.0 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0.9 & 0.9 & 0.9 \\ 0.6 & 0.6 & 0.9 \\ 0.3 & 0.5 & 0.9 \\ 0.2 & 0.5 & 0.9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.5 & 0.9 \end{bmatrix}$$

Zaključak dakle nije jednak konsekventu!

Kompozicija A i R ne daje B. To je pojava kod svih definicija implikacije i zove se interakcija.

Druge implikacije

Kleene-Diens implikacija

Dobije se iz binarne logike za $\neg p \vee q$ uz interpretaciju $\vee$ kao *max*.
Relaciju gradimo kao: $R_b = cil(\neg A) \cup cil(B)$.
Funkcija pripadnosti je: $\mu_R(x, y) = \max(1 - \mu_A(x), \mu_B(y))$.
To je implikacija iz prethodnog primjera.

Lukasiewicz-eva implikacija

Dobije se iz binarne logike za $\neg p \vee q$ uz interpretaciju $\vee$ kao ograničene sume.
Relaciju gradimo kao: $R_a = cil(\neg A) \oplus cil(B)$.
Funkcija pripadnosti je: $\mu_R(x, y) = \min(1, 1 - \mu_A(x) + \mu_B(y))$.

Vrijedi $R_b \subseteq R_a$ tj. R_b je jača implikacija.

Druge implikacije

Računamo li implikaciju prema Lukasiewiczu, rezultat je:

$$\begin{bmatrix} 0.9 & 0.9 & 0.9 \\ 0.6 & 0.6 & 0.6 \\ 0.3 & 0.3 & 0.3 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 0.2 & 0.5 & 0.9 \\ 0.2 & 0.5 & 0.9 \\ 0.2 & 0.5 & 0.9 \\ 0.2 & 0.5 & 0.9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0 & 1.0 & 1.0 \\ 0.8 & 1.0 & 1.0 \\ 0.5 & 0.8 & 1.0 \\ 0.2 & 0.5 & 1.0 \end{bmatrix}$$

Druge implikacije

Zadehova implikacija

Dobije se iz binarne logike za $(p \wedge q) \vee \neg p$ uz interpretaciju preko *min* i *max*.
Relaciju gradimo kao: $R_z = (cil(A) \cap cil(B)) \cup cil(\neg A)$.
Funkcija pripadnosti je:
$\mu_R(x, y) = \max(\min(\mu_A(x), \mu_B(y)), 1 - \mu_A(x))$.

Gödelova implikacija

Najpoznatija u viševrijednosnoj logici. Vrijednosti istinitosti $p \to q$ definirane su sa:

$$\begin{cases} 1, & \text{za } p \leq q, \\ q, & \text{inače.} \end{cases}$$

Druge implikacije

Računamo li implikaciju prema Gödelu, rezultat je:

$$\begin{bmatrix} 1.0 & 1.0 & 1.0 \\ 0.2 & 1.0 & 1.0 \\ 0.2 & 0.5 & 1.0 \\ 0.2 & 0.5 & 0.9 \end{bmatrix}$$

Druge implikacije

Mamdani implikacija

Koristi se izraz $p \wedge q$ uz interpretaciju $\wedge$ kao *min*.
Relaciju gradimo kao: $R_c = cil(A) \cap cil(B)$.
Funkcija pripadnosti je: $\mu_R(x, y) = \min(\mu_A(x), \mu_B(y))$.

Mamdani implikacija je najvažnija implikacija u neizrazitom upravljanju!
Računamo li implikaciju prema Mamdaniju, rezultat je:

$$\begin{bmatrix} 0.1 & 0.1 & 0.1 \\ 0.4 & 0.4 & 0.4 \\ 0.7 & 0.7 & 0.7 \\ 1.0 & 1.0 & 1.0 \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} 0.2 & 0.5 & 0.9 \\ 0.2 & 0.5 & 0.9 \\ 0.2 & 0.5 & 0.9 \\ 0.2 & 0.5 & 0.9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.1 & 0.1 \\ 0.2 & 0.4 & 0.4 \\ 0.2 & 0.5 & 0.7 \\ 0.2 & 0.5 & 0.9 \end{bmatrix}$$

Druge implikacije

Mamdani imlikacija na prvi pogled može izgledati vrlo čudno: nema jasnog uporišta u klasičnoj logici.

- Pogledajmo stoga još jedan primjer.
- Neka je dan univerzalni skup $U = \{1, 2, 3, 4\}$.
- Neka su definirana dva neizrazita skupa nad U:
  - $\textit{mali broj} = \{\frac{1}{1} + \frac{0.5}{2} + \frac{0.1}{3} + \frac{0}{4}\}$
  - $\textit{veliki broj} = \{\frac{0}{1} + \frac{0.1}{2} + \frac{0.5}{3} + \frac{1}{4}\}$

Pretpostavimo da ovisnost varijable $y \in U$ o varijabli $x \in U$ definiramo uporabom *ako-onda* pravila:

AKO x je *mali broj* ONDA y je *veliki broj*
AKO x je *veliki broj* ONDA y je *mali broj*

Druge implikacije

Izračunajmo relaciju $R_1 \subseteq U \times U$ koja odgovara pravilu:

AKO x je *mali broj* ONDA y je *veliki broj*

uporabom Kleene-Diens implikacije $(\neg p \lor q)$.

$$R_1 = \begin{bmatrix} 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 0.9 & 0.9 & 0.9 & 0.9 \\ 1.0 & 1.0 & 1.0 & 1.0 \end{bmatrix} \cup \begin{bmatrix} 0.0 & 0.1 & 0.5 & 1.0 \\ 0.0 & 0.1 & 0.5 & 1.0 \\ 0.0 & 0.1 & 0.5 & 1.0 \\ 0.0 & 0.1 & 0.5 & 1.0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.0 & 0.1 & 0.5 & 1.0 \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 & 1.0 \\ 0.9 & 0.9 & 0.9 & 1.0 \\ 1.0 & 1.0 & 1.0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

Druge implikacije

Izračunajmo relaciju $R_2 \subseteq U \times U$ koja odgovara pravilu:

AKO x je *veliki broj* ONDA y je *mali broj*

uporabom Kleene-Diens implikacije $(\neg p \vee q)$.

$$R_2 = \begin{bmatrix} 1.0 & 1.0 & 1.0 & 1.0 \\ 0.9 & 0.9 & 0.9 & 0.9 \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \end{bmatrix} \cup \begin{bmatrix} 1.0 & 0.5 & 0.1 & 0.0 \\ 1.0 & 0.5 & 0.1 & 0.0 \\ 1.0 & 0.5 & 0.1 & 0.0 \\ 1.0 & 0.5 & 0.1 & 0.0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1.0 & 1.0 & 1.0 & 1.0 \\ 1.0 & 0.9 & 0.9 & 0.9 \\ 1.0 & 0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 1.0 & 0.5 & 0.1 & 0.0 \end{bmatrix}$$

Druge implikacije

Usporedimo pravila i dobivene relacije.

1. AKO x je *mali broj* ONDA y je *veliki broj*
2. AKO x je *veliki broj* ONDA y je *mali broj*

$$R_1 = \begin{bmatrix} 0.0 & 0.1 & 0.5 & 1.0 \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 & 1.0 \\ 0.9 & 0.9 & 0.9 & 1.0 \\ 1.0 & 1.0 & 1.0 & 1.0 \end{bmatrix} \qquad R_2 = \begin{bmatrix} 1.0 & 1.0 & 1.0 & 1.0 \\ 1.0 & 0.9 & 0.9 & 0.9 \\ 1.0 & 0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 1.0 & 0.5 & 0.1 & 0.0 \end{bmatrix}$$

Možemo li razaznati kakvu strukturu u relacijama?

- R_1 kao da kaže: "nije istina da je x mali i da je y mali"; sve ostalo je OK.
- R_2 kao da kaže: "nije istina da je x veliki i da je y veliki"; sve ostalo je OK.

Druge implikacije

Implikacije koje dolaze iz klasične logike u određenom smislu imaju globalno djelovanje.

- Krenemo od univerzalnog neizrazitog skupa (tj. relacije koja tvrdi da je svaki element u maksimalnoj relaciji sa svakim drugim elementom).
- Potom iz te relacije isključimo dio koji prva relacija (prvo pravilo) isključuje.
- Potom iz te relacije isključimo dio koji druga relacija (drugo pravilo) isključuje.
- ...

Druge implikacije

Konačnu relaciju stoga ćemo dobiti kao:

$$R = (U \times U) \cap R_1 \cap R_2 \cap \ldots$$

Ideja je slična načinu kako se u Booleovoj algebri gradi zapis funkcije u obliku produkta suma: krećemo od pretpostavke da je $f = 1$, i potom to korigiramo množeći izraz sa sumama koje za odgovarajuće kombinacije varijabli "ruše" vrijednost funkcije u 0.

U određenom smislu, s ako-onda pravilima postupamo kao da sva moraju vrijediti *istovremeno*.

Druge implikacije

Stoga je konačna relacija R koja odgovara napisanim pravilima:

$$
\begin{aligned}
R &= R_1 \cap R_2 \\
&= \begin{bmatrix} 0.0 & 0.1 & 0.5 & 1.0 \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 & 1.0 \\ 0.9 & 0.9 & 0.9 & 1.0 \\ 1.0 & 1.0 & 1.0 & 1.0 \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} 1.0 & 1.0 & 1.0 & 1.0 \\ 1.0 & 0.9 & 0.9 & 0.9 \\ 1.0 & 0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 1.0 & 0.5 & 0.1 & 0.0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0.0 & 0.1 & 0.5 & 1.0 \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.9 \\ 0.9 & 0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 1.0 & 0.5 & 0.1 & 0.0 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Druge implikacije

Izračunajmo relaciju $R_1 \subseteq U \times U$ koja odgovara pravilu:

AKO x je *mali broj* ONDA y je *veliki broj*

uporabom Mamdani implikacije $(p \wedge q)$.

$$R_1 = \begin{bmatrix} 1.0 & 1.0 & 1.0 & 1.0 \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} 0.0 & 0.1 & 0.5 & 1.0 \\ 0.0 & 0.1 & 0.5 & 1.0 \\ 0.0 & 0.1 & 0.5 & 1.0 \\ 0.0 & 0.1 & 0.5 & 1.0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.0 & 0.1 & 0.5 & 1.0 \\ 0.0 & 0.1 & 0.5 & 0.5 \\ 0.0 & 0.1 & 0.1 & 0.1 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \end{bmatrix}$$

Druge implikacije

Izračunajmo relaciju $R_2 \subseteq U \times U$ koja odgovara pravilu:

AKO x je *veliki broj* ONDA y je *mali broj*

uporabom Mamdani implikacije $(p \wedge q)$.

$$R_2 = \begin{bmatrix} 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 1.0 & 1.0 & 1.0 & 1.0 \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} 1.0 & 0.5 & 0.1 & 0.0 \\ 1.0 & 0.5 & 0.1 & 0.0 \\ 1.0 & 0.5 & 0.1 & 0.0 \\ 1.0 & 0.5 & 0.1 & 0.0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.0 \\ 0.5 & 0.5 & 0.1 & 0.0 \\ 1.0 & 0.5 & 0.1 & 0.0 \end{bmatrix}$$

Druge implikacije

Usporedimo pravila i dobivene relacije.

1. AKO x je *mali broj* ONDA y je *veliki broj*
2. AKO x je *veliki broj* ONDA y je *mali broj*

$$R_1 = \begin{bmatrix} 0.0 & 0.1 & 0.5 & 1.0 \\ 0.0 & 0.1 & 0.5 & 0.5 \\ 0.0 & 0.1 & 0.1 & 0.1 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \end{bmatrix} \qquad R_2 = \begin{bmatrix} 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.0 \\ 0.5 & 0.5 & 0.1 & 0.0 \\ 1.0 & 0.5 & 0.1 & 0.0 \end{bmatrix}$$

Možemo li razaznati kakvu strukturu u relacijama?

- R_1 direktno postavlja elemente koji odgovaraju prvom pravilu; ostalo ne dira.
- R_2 direktno postavlja elemente koji odgovaraju prvom pravilu; ostalo ne dira.

Druge implikacije

Ova implikacija u određenom smislu imaju lokalno djelovanje.

- Krenemo od praznog neizrazitog skupa (tj. relacije koja tvrdi da niti jedan element nije u relaciji niti sa jednim drugim elementom).
- Potom u tu relaciju uključimo dio koji prva relacija (prvo pravilo) uključuje.
- Potom u tu relaciju uključimo dio koji druga relacija (drugo pravilo) uključuje.
- ...

Druge implikacije

Konačnu relaciju stoga ćemo dobiti kao:

$$R = (\emptyset \times \emptyset) \cup R_1 \cup R_2 \cup \ldots$$

Ideja je slična načinu kako se u Booleovoj algebri gradi zapis funkcije u obliku sume produkata: krećemo od pretpostavke da je $f = 0$, i potom to korigiramo zbrajanjem s produktima koji za odgovarajuće kombinacije varijabli "postavljaju" vrijednost funkcije u 1.

U određenom smislu, s ako-onda pravilima postupamo kao da svako od njih vrijedi samo lokalno.

Druge implikacije

Stoga je konačna relacija R koja odgovara napisanim pravilima:

$$
\begin{aligned}
R &= R_1 \cup R_2 \\
&= \begin{bmatrix} 0.0 & 0.1 & 0.5 & 1.0 \\ 0.0 & 0.1 & 0.5 & 0.5 \\ 0.0 & 0.1 & 0.1 & 0.1 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \end{bmatrix} \cup \begin{bmatrix} 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.0 \\ 0.5 & 0.5 & 0.1 & 0.0 \\ 1.0 & 0.5 & 0.1 & 0.0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0.0 & 0.1 & 0.5 & 1.0 \\ 0.1 & 0.1 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 & 0.1 & 0.1 \\ 1.0 & 0.5 & 0.1 & 0.0 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Tri načina izgradnje relacije implikacije

U klasičnoj logici, implikacija $x \to y$ određena je sljedećom tablicom istinitosti:

x	y	$x \to y$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Neki od načina kako ovo možemo zapisati su:

1. $x \to y \equiv \begin{cases} 1, & \text{ako je } x \leq y \\ 0, & \text{inače,} \end{cases}$
2. $x \to y \equiv (1 - x + y) \wedge 1$, gdje je $\wedge$ minimum,
3. $x \to y \equiv (1 - x) \vee y$, gdje je $\vee$ maksimum.

Tri načina izgradnje relacije implikacije

Tri su osnovna načina konstrukcije neizrazitih implikacija:

1. $(x \to y) \equiv \vee\{z \ : \ x \wedge z \leq y\}$
   odnosno $\mu_{x \to y}(x, y) = z$ gdje je z najveći element koji zadovoljava gornju nejednakost
2. $(x \to y) \equiv \neg x \vee y$
3. $(x \to y) \equiv \neg x \vee (x \wedge y)$

U nastavku ćemo za svaki od ta tri načina pogledati primjere implikacija koje tako nastaju.

Izgradnja implikacija: R-implikacije

Definition (R-implikacija)

R-implikacija je preslikavanje $[0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ oblika $(x \to y) \equiv \vee\{z \in [0,1] \ : \ x \Delta z \leq y\}$ gdje je Δ neka t-norma. Funkciju $\to$ zovemo R-implikacija povezana s Δ.

Izgradnja implikacija: R-implikacije

Uvjerimo se da je ovo doista implikacija kada se napravi restrikcija s $[0,1]$ na $\{0,1\}$.

- $(0 \to 0) = \vee\{z \in [0,1] \ : \ 0\Delta z \leq 0\} = 1$ jer je $0\Delta z = 0$ što je $\leq 0 \ \forall z \in [0,1]$ pa je maksimalni z koji ovo zadovoljava $z = 1$
- $(0 \to 1) = \vee\{z \in [0,1] \ : \ 0\Delta z \leq 1\} = 1$ jer je $0\Delta z = 0$ što je $\leq 1 \ \forall z \in [0,1]$ pa je maksimalni z koji ovo zadovoljava $z = 1$
- $(1 \to 0) = \vee\{z \in [0,1] \ : \ 1\Delta z \leq 0\} = 0$ jer je $1\Delta z = z$ što je ≤ 0 samo za $z \in [0,1] \leq 0$; jedini z koji to zadovoljava je 0
- $(1 \to 1) = \vee\{z \in [0,1] \ : \ 1\Delta z \leq 1\} = 1$ jer je $1\Delta z = z$ što je $\leq 1 \ \forall z \in [0,1]$ pa je maksimalni z upravo $z = 1$

Izgradnja implikacija: *R*-implikacije - primjeri

Primjer 1. Odaberimo $x \Delta y = x \wedge y$ (tj. min). Slijedi:

$$\begin{aligned} x \to y &= \vee\{z \;:\; x \wedge z \leq y\} \\ &= \begin{cases} 1, & \text{ako je } x \leq y \\ 0, & \text{inače} \end{cases} \end{aligned}$$

Primjer 2. Odaberimo $x \Delta y = x \cdot y$ (tj. umnožak). Slijedi:

$$\begin{aligned} x \to y &= \vee\{z \;:\; x \cdot z \leq y\} \\ &= \begin{cases} 1, & \text{ako je } x \leq y \\ \frac{y}{x}, & \text{inače} \end{cases} \end{aligned}$$

Primjer 3. Odaberimo $x \Delta y = 0 \vee (x + y - 1)$ (tj. ograničen produkt). Slijedi:

$$\begin{aligned} x \to y &= \vee\{z \;:\; 0 \vee (x + z - 1) \leq y\} \\ &= 1 \wedge (1 - x + y). \end{aligned}$$

Izgradnja implikacija: ∇-implikacije

Definition (∇-implikacija)

∇-implikacija je preslikavanje $[0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ oblika $(x \rightarrow y) \equiv \eta(x) \nabla y$ gdje je ∇ neka s-norma a η negacija.

Izgradnja implikacija: ∇-implikacije - primjeri

Primjer 1. Odaberimo $x \nabla y = x \vee y$ (tj. max) i $\eta(x) = 1 - x$. Slijedi:

$$x \to y = (1 - x) \vee y$$

Primjer 2. Odaberimo $x \nabla y = x + y - x \cdot y$ i $\eta(x) = 1 - x$. Slijedi:

$$\begin{aligned} x \to y &= \eta(x) \nabla y \\ &= (1 - x) \nabla y \\ &= (1 - x) + y - (1 - x) \cdot y \\ &= 1 - x + x \cdot y \end{aligned}$$

Primjer 3. Odaberimo $x \nabla y = 1 \wedge (x + y)$ (tj. ograničena suma) i $\eta(x) = 1 - x$. Slijedi:

$$x \to y = 1 \wedge (1 - x + y) \quad \textit{implikacija Lukasiewicz!}$$

Izgradnja implikacija: Q-implikacije

Definition (Q-implikacija)

Neka (Δ, ∇, η) čine DeMorganov sustav. To znači da su Δ i η međusobno dualni s obzirom na negaciju η, odnosno da vrijedi $x \Delta y = \eta(\eta(x) \nabla \eta(y))$. Q-implikacija je preslikavanje $[0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ oblika $(x \to y) \equiv \eta(x) \nabla (x \Delta y)$.

Izgradnja implikacija: Q-implikacije - primjeri

Primjer 1. Odaberimo DeMorganov sustav $x \Delta y = x \wedge y$ (tj. min), $x \nabla y = x \vee y$ (tj. max) i $\eta(x) = 1 - x$. Slijedi:

$$x \to y = (1 - x) \vee (x \wedge y) \quad \textit{implikacija Zadeh!}$$

Primjer 2. Odaberimo DeMorganov sustav $x \Delta y = (x + y - 1) \vee 0$ (ograničen produkt), $x \nabla y = (x + y) \wedge 1$ (ograničena suma) i $\eta(x) = 1 - x$. Slijedi:

$$\begin{aligned} x \to y &= \eta(x) \nabla (x \Delta y) \\ &= (1 - x) \nabla (x \Delta y) \\ &= ((1 - x) + (x \Delta y)) \wedge 1 \\ &= ((1 - x) + ((x + y - 1) \vee 0)) \wedge 1 \\ &= \begin{cases} y, & \text{ako je } x + y - 1 \geq 0 \\ 1 - x, & \text{inače} \end{cases} \\ &= (1 - x) \vee y. \quad \textit{implikacija Kleene-Diens!} \end{aligned}$$

Interakcija implikacije

Prilikom zaključivanja generaliziranim modus-ponensom postupak zaključivanja provodimo kompozicijom. Ako imamo činjenicu $a(x)$ te relaciju koja je izgrađena temeljem implikacije $R(x, y) = a(x) \rightarrow b(y)$, zaključak dobivamo kao $R(a)(y) = \bigvee_{x \in U} [(a(x) \rightarrow b(y)) \Delta a(x)]$ gdje je Δ neka t-norma.

Ako napravimo kompoziciju antecedenta i relacije dobivene uporabom implikacije, općenito, rezultat može biti različit od konzekventa – pojava koju smo nazvali *interakcija* implikacije. U posebnim slučajevima moguće je osigurati da je zaključak jednak konzekventu. Evo dva primjera.

Interakcija implikacije

Primjer 1. Neka se implikacija računa prema:

$$u \to v \equiv \begin{cases} 1, & \text{ako je } u \leq v \\ \frac{v}{u} & \text{ako je } u > v \end{cases}$$

te neka je $u \Delta v = u \cdot v$, odnosno radimo *max-produkt* kompoziciju. Tada je:

$$R(x,y) = a(x) \to b(y) = \begin{cases} 1, & \text{ako je } a(x) \leq b(y) \\ \frac{b(y)}{a(x)} & \text{ako je } a(x) > b(y) \end{cases}$$

Interakcija implikacije

Slijedi:

$$\begin{aligned}
R(x,y)\Delta a(x) &= R(x,y)\cdot a(x)\\
&= \left\{\begin{array}{ll} 1, & \text{ako je } a(x)\le b(y)\\ \frac{b(y)}{a(x)} & \text{ako je } a(x)> b(y)\end{array}\right. \cdot a(x)\\
&= \left\{\begin{array}{ll} a(x), & \text{ako je } a(x)\le b(y)\\ b(y) & \text{ako je } a(x)> b(y)\end{array}\right.\\
&= \min(a(x),b(y))
\end{aligned}$$

$$R(a)(y)=\bigvee_{x\in U}[R(x,y)\Delta a(x)]=\bigvee_{x\in U}\min(a(x),b(y))=b(y)$$

(vrijedi uz pretpostavku da je a normalan).

Interakcija implikacije

Primjer 2. Neka se implikacija računa prema:

$$u \to v \equiv 1 \wedge (1 - u + v)$$

te neka je $u \Delta v = (u + v - 1) \vee 0$, odnosno radimo *max-ograničeni_produkt* kompoziciju. Tada je:

$$R(x, y) = a(x) \to b(y) = 1 \wedge (1 - a(x) + b(y))$$

Slijedi:

$$\begin{aligned} R(x, y) \Delta a(x) &= (R(x, y) + a(x) - 1) \vee 0 \\ &= ((1 \wedge (1 - a(x) + b(y))) + a(x) - 1) \vee 0 \\ &= \max(\min(1, 1 - a(x) + b(x)) + a(x) - 1, 0) \end{aligned}$$

Interakcija implikacije

Pogledajmo ovo po slučajevima.

- ako je $1 - a(x) + b(y) \leq 1$ odnosno $b(y) \leq a(x)$, tada je $\min(1, 1 - a(x) + b(y)) = 1 - a(x) + b(y)$ pa imamo:

$$\begin{aligned} R(x,y)\Delta a(x) &= \max(1 - a(x) + b(y) + a(x) - 1, 0) \\ &= \max(b(y), 0) \\ &= b(y) \end{aligned}$$

- ako je $1 - a(x) + b(y) > 1$ odnosno $a(x) < b(y)$, tada je $\min(1, 1 - a(x) + b(y)) = 1$ pa imamo:

$$\begin{aligned} R(x,y)\Delta a(x) &= \max(1 + a(x) - 1, 0) \\ &= \max(a(x), 0) \\ &= a(x) \end{aligned}$$

Interakcija implikacije

Zaključujemo da je $R(x,y)\Delta a(x) = \min(a(x), b(y))$.
Tada je:

$$\begin{aligned} R(a)(y) &= \bigvee_{x\in U} [R(x,y)\Delta a(x)] \\ &= \bigvee_{x\in U} \min(a(x), b(y)) \\ &= b(y) \end{aligned}$$

(vrijedi uz pretpostavku da je a normalan).
Time smo pokazali da iz pravila $a(x) \to b(y)$ i činjenice $a(x)$ doista dobivamo $b(y)$.

Zadatak 1

Provjerite je li sljedeće korektno definirana neizrazita implikacija:

$$(u \to v) \equiv (u \wedge v) \vee (1 - v)$$

gdje je $\wedge$ maksimum a $\vee$ minimum.

Zadatak 2

Razmatramo interakciju implikacije. Je li $b = R(a)$, gdje je $R(x, y) = a(x) \to b(y)$ u sljedećim slučajevima ($\wedge$ označava min, $\vee$ max):

1. $u \Delta v = (u + v - 1) \vee 0,\ u \to v = \begin{cases} 1, & \text{ako je } u \leq v \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$
2. $u \Delta v = (u + v - 1) \vee 0,\ u \to v = 1 - u + u \cdot v$
3. $u \Delta v = (u + v - 1) \vee 0,\ u \to v = (1 - u) \vee v$