Neizrazite relacije

Zadaci za vježbu

Rješenja pripremio: Goran Glavaš

Zadaci

1. Neka je skup $A = \{1, 2, 3, 4\}$ klasični skup i neka je na njemu dana relacija $R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$. Napravite refleksivno, simetrično i tranzitivno zatvaranje relacije R na skupu A.

2. Svaka neizrazita relacija R na univerzalnom skupu X koja posjeduje svojstvo refleksivnosti i simetričnosti (tzv. relacija bliskosti, *proximity relation, fuzzy tolerance relation*) može se pretvoriti u relaciju ekvivalencije uzastopnom *max-min* kompozicijom same sa sobom i to najviše $n-1$ puta, gdje je $n = |X|$.

   U biotehnološkom eksperimentu otkriveno je pet potencijalno novih vrsta bakterija koje uzrokuju biokoroziju. Jedan način klasificiranja novih vrsta je usporedba sličnosti parova bakterija. Pridruživanjem svakom paru bakterija vrijednost iz intervala $[0, 1]$ *kao mjeru njihove sličnosti (veća sličnost opisuje se većim brojem) definirat ćemo zapravo neizrazitu relaciju R koja ima svojstva refleksivnosti i simetričnosti*:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0.8 & 0 & 0.1 & 0.2 \\ 0.8 & 1 & 0.4 & 0 & 0.9 \\ 0 & 0.4 & 1 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0 & 0 & 1 & 0.5 \\ 0.2 & 0.9 & 0 & 0.5 & 1 \end{bmatrix}$$

   (a) Je li zadana neizrazita relacija tranzitivna? Objasnite zašto!

   (b) Od zadane relacije bliskosti načini relaciju ekvivalencije (Pomoć: dovoljno je napraviti dvije iteracije tj. izračunati R^3).

   (c) Nađite α-presjeke relacije ekvivalencije R^3 za sve α vrijednosti iz skupa $\{0.4, 0.5, 0.8, 0.9, 1\}$. Jesu li dobivene relacije klasične relacije ekvivalencije? Objasnite zašto! Odredite klase ekvivalencije za svaki α-presjek.

3. Zadana je relacija R sa skupa $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ na skup $W = \{1, 2, 3, 4, 5\}$:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0.8 & 0 & 0.1 & 0.2 \\ 0.8 & 1 & 0.4 & 0 & 0.9 \\ 0 & 0.4 & 1 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0 & 0 & 1 & 0.5 \\ 0.2 & 0.9 & 0 & 0.5 & 1 \end{bmatrix}$$

Odaberite jednu t-normu (i njenu odgovarajuću s-normu) po vlastitom izboru. Odredite R^2, tj. kompoziciju relacije R sa samom sobom.

4. Neka su zadana dva neizrazita skupa X i Y:

$$X = \frac{1}{x_1} + \frac{0.4}{x_2} + \frac{0.7}{x_3}; \qquad Y = \frac{0.9}{y_1} + \frac{0.8}{y_2} + \frac{1}{y_3} + \frac{0.3}{y_4}.$$

   Odredite neizrazitu relaciju Z koja je *spoj* neizrazitih skupova X i Y ($Z = c(X) \cap c(Y)$).

5. Neizrazita relacija ekvivalencije je neizrazita relacija koja zadovoljava sljedeće uvjete:

   (a) refleksivna je, tj. $R(u,u) = 1 \;\; \forall u \in U$

   (b) simetrična je, tj. $R(u,v) = R(v,u) \;\; \forall u, v \in U$

   (c) tranzitivna je, tj. $R(u,w) \geq R(u,v) \wedge R(v,w) \;\; \forall u, v, w \in U$ (pri čemu $\wedge$ predstavlja operator minimuma).

   Ukoliko operator minimuma zamijenimo proizvoljno definiranom t-normom Δ, definira se pojam Δ-neizrazita relacija ekvivalencije kao neizrazita relacija koja je refleksivna, simetrična i Δ-tranzitivna. Ako kao Δ uzmemo upravo operator minimuma, govorimo o uobičajenoj neizrazitoj relaciji ekvivalencije.

   Za neizrazitu relaciju kažemo da je Δ-tranzitivna ako vrijedi:

$$R(u,w) \geq R(u,v) \Delta R(v,w) \forall u, v, w \in U.$$

   Pokažite da vrijedi sljedeća tvrdnja: Ako je R klasična (*crisp*) relacija ekvivalencije tada je ona ujedno i Δ-neizrazita relacija ekvivalencije za svaku t-normu Δ.

6. Dokažite sljedeći teorem: Ako je R neizrazita relacija na skupu U, tada je R neizrazita relacija ekvivalencije ako i samo ako je svaki α-presjek relacije R, (oznaka R_α), klasična relacija ekvivalencije na skupu U.

Rješenja

1. Skup $A = \{1,2,3,4\}$ je klasični skup i na njemu je dana relacija $R = \{(1,2),(2,3),(3,4)\}$

   (a) *Refleksivno zatvaranje.*
   Po definiciji refleksivnosti mora vrijediti $(x,x) \in R \;\; \forall x \in A$. Stoga je skup $R^{'}$ koji refleksivno zatvara R s obzirom na A dan s
   $R^{'} = R \cup \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$
   tj. $R^{'} = \{(1,1),(1,2),(2,2),(2,3),(3,3),(3,4),(4,4)\}$

   (b) *Simetrično zatvaranje.* Po definiciji simetričnosti mora vrijediti $(x,y) \in R \rightarrow (y,x) \in R \;\; \forall x, y \in A$. Stoga je skup $R^{'}$ koji simetrično zatvara R s obzirom na A dan s
   $R^{'} = R \cup \{(2,1),(3,2),(4,3)\}$
   tj. $R^{'} = \{(1,2),(2,1),(2,3),(3,2),(3,4),(4,3)\}$

(c) *Tranzitivno zatvaranje.* Relacija je tranzitivna ako za $\forall a, b, c \in A$ vrijedi $(a,b) \in R \wedge (b,c) \in R \rightarrow (a,c) \in R$. Tranzitivni zatvarač relacije R gradimo iterativno:

i. iteracija
$(1,2) \in R \wedge (2,3) \in R$ pa trebamo dodati u R i $(1,3)$
$(2,3) \in R \wedge (3,4) \in R$ pa trebamo dodati u R i $(2,4)$
Nakon prve iteracije imamo skup $R_1^{'} = \{(1,2),(1,3),(2,3),(2,4),(3,4)\}$

ii. iteracija
$(1,3) \in R_1^{'} \wedge (3,4) \in R_1^{'}$ pa trebamo dodati u R i $(1,4)$
$(1,2) \in R_1^{'} \wedge (2,3) \in R_1^{'}$, ali je $(1,3)$ već u $R_1^{'}$
$(1,2) \in R_1^{'} \wedge (2,4) \in R_1^{'}$, ali je $(1,4)$ već u $R_1^{'}$
$(1,3) \in R_1^{'} \wedge (3,4) \in R_1^{'}$, ali je $(1,4)$ već u $R_1^{'}$
$(2,3) \in R_1^{'} \wedge (3,4) \in R_1^{'}$, ali je $(2,4)$ već u $R_1^{'}$
Nakon druge iteracije imamo skup $R_2^{'} = \{(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4)\}$

iii. iteracija
U 3. iteraciji putem tranzitivnosti ne možemo više dodati u "graf" niti jedan "brid" koji već nije unutra. Stoga je $R_3^{'} = R_2^{'}$ i pronašli smo tranzitivni zatvarač relacije R na skupu A.

2. Zadana je relacija bliskosti R:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0.8 & 0 & 0.1 & 0.2 \\ 0.8 & 1 & 0.4 & 0 & 0.9 \\ 0 & 0.4 & 1 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0 & 0 & 1 & 0.5 \\ 0.2 & 0.9 & 0 & 0.5 & 1 \end{bmatrix}$$

(a) Zadana relacija R nije tranzitivna jer uvjet neizrazite tranzitivnosti $R(u,w) \geq R(u,v) \wedge R(v,w)\ \forall u,v,w \in U$ ne vrijedi za $\forall u,v,w \in \{1,2,3,4,5\}$. Primjerice, $R(1,2) = 0.8, R(2,3) = 0.4$, ali $R(1,3) = 0 < min(R(1,2), R(2,3)) = 0.4$.

(b) Računamo prvo $R^2 = R \circ R$, a potom u drugom koraku $R^3 = R^2 \circ R$. Općenito se kod računanja kompozicije neizrazitih relacija može koristiti proizvoljan par s-norme i t-norme, a u ovom ćemo primjeru pokazati kako se to radi sa Zadehovim operatorima *min* i *max*. Računanje kompozicije neizrazitih relacija izvedbeno je vrlo slično množenju matrica, samo što su operacije množenja i zbrajanja zamijenjene operacijama *min* i *max*.

Pokažimo to na primjeru. Računamo neizrazitu relaciju $R^2 = R \circ R$ element po element.

$$\begin{aligned} R^2(i,j) &= R_{redak_i} \ \vee \ R_{stupac_j} \\ &= \vee((R(i,1) \wedge R(1,j)), \\ &\quad (R(i,2) \wedge R(2,j), \\ &\quad ..., \\ &\quad (R(i,n) \wedge R(n,j))) \end{aligned}$$

gdje je $\vee$ odabrana s-norma, a $\wedge$ odabrana t-norma. Odaberimo operator *min* kao t-normu i operator *max* kao s-normu. Pogledajmo kako se sad računa jedan element kompozicijske matrice R^2:

$$\begin{aligned}
R^2(i,j) &= max(min(R(1,1),R(1,2)), min(R(1,2),R(2,2)),\\
&\qquad min(R(1,3),R(3,2)), min(R(1,4),R(4,2)),\\
&\qquad min(R(1,5),R(5,2)))\\
&= max(min(1,0.8), min(0.8,1), min(0,0.4,),\\
&\qquad min(0.1,0), min(0.2,0.9))\\
&= max(0.8,0.8,0,0,0.2)\\
&= 0.8
\end{aligned}$$

Analogno se izračunaju i ostali elementi relacije R^2 i dobije se:

$$R^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0.8 & 0.4 & 0.4 & 0.8 \\ 0.8 & 1 & 0.4 & 0.5 & 0.9 \\ 0.4 & 0.4 & 1 & 0 & 0.4 \\ 0.2 & 0.5 & 0 & 1 & 0.5 \\ 0.8 & 0.9 & 0.4 & 0.5 & 1 \end{bmatrix}$$

Na isti način računa se i $R^3 = R^2 \circ R$ te se dobiva:

$$R^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0.8 & 0.4 & 0.5 & 0.8 \\ 0.8 & 1 & 0.4 & 0.5 & 0.9 \\ 0.4 & 0.4 & 1 & 0.4 & 0.4 \\ 0.5 & 0.5 & 0.4 & 1 & 0.5 \\ 0.8 & 0.9 & 0.4 & 0.5 & 1 \end{bmatrix}$$

Kada bismo izračunali $R^4 = R^3 \circ R$ vidjeli bismo da vrijedi $R^4 = R^3$. Zaključujemo da je R^3 tranzitivni zatvarač relacije bliskosti R.

(c) Označimo s R_α α-presjek neizrazite relacije R. Taj α presjek je klasična relacija čiji se elementi računaju na sljedeći način:

$$R_\alpha(i,j) = \begin{cases} 1 & \text{ako } R(i,j) \geq \alpha \\ 0 & \text{inače} \end{cases} \tag{1}$$

U skladu s tim, dobivaju se sljedeći α-presjeci neizrazite relacije R^3:

$$R^3_{0.4} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Samo je jedna klasa ekvivalencije u koju spadaju svi elementi: {1,2,3,4,5}.

$$R^3_{0.5} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Dvije su klase ekvivalencije: {1,2,4,5} i {3}.

$$R^3_{0.8} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tri su klase ekvivalencije: {1,2,5}, {3}, {4}.

$$R^3_{0.9} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Četiri su klase ekvivalencije: {2,5}, {1}, {3}, {4}.

$$R^3_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Pet je klasa ekvivalencije, svaki je element u zasebnoj klasi: {1}, {2}, {3}, {4}, {5}.

Svi dobiveni α-presjeci klasične su relacije ekvivalencije jer zadovoljavaju uvjete refleksivnosti, simetričnosti i tranzitivnosti (uvjerite se da je to istina).

3. Pogledati rješenje podzadatka a) prethodnog zadatka. Izračunajte R^2 koristeći i neki drugi par t i s normi (kao alternativu *min-max* operatorima)

4. Prvo je potrebno izračunati cilindrična proširenja neizrazitih skupova X i Y na neizrazite relacije, a potom napraviti presjek tih cilindričnih proširenja.

$$c(X) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0.4 & 0.4 & 0.4 & 0.4 \\ 0.7 & 0.7 & 0.7 & 0.7 \end{bmatrix} \qquad c(Y) = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.8 & 1 & 0.3 \\ 0.9 & 0.8 & 1 & 0.3 \\ 0.9 & 0.8 & 1 & 0.3 \end{bmatrix}$$

Konačnu vrijednost *spoja* dobivamo tako da što za računanje presjeka odabiremo Zadehov operator minimuma.

$$c(X) \cap c(Y) = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.8 & 1 & 0.3 \\ 0.4 & 0.4 & 0.4 & 0.3 \\ 0.7 & 0.7 & 0.7 & 0.3 \end{bmatrix}$$

5. Da bismo pokazali da neka je klasična (*crisp*) relacija ekvivalencije ujedno i Δ-neizrazita relacija ekvivalencije za bilo koju t-normu Δ moramo pokazati da zadovoljava 3 svojstva Δ-neizrazite ekvivalencije: refleksivnost, simetričnost i Δ-tranzitivnost. Prva dva svojstva trivijalno su zadovoljena, dok ćemo detaljnije razmotriti Δ-tranzitivnost.

(a) *Refleksivnost.* Uvjet refleksivnosti jednak je i za neizrazite i za klasične relacije. Ako je klasična relacija R relacija ekvivalencije onda zadovoljava svojstvo refleksivnosti.

(b) *Simetričnost.* Uvjet simetričnosti jednak je i za neizrazite i za klasične relacije. Ako je klasična relacija R relacija ekvivalencije onda zadovoljava svojstvo simetričnosti.

(c) Δ-*tranzitivnost.* Tražimo da za $\forall u, v, w \in U$ vrijedi $R(u, w) \geq R(u, v)\Delta R(v, w)$. Elementi klasične relacije ekvivalencije mogu poprimiti samo binarne vrijednosti $\{0, 1\}$. Stoga postoje samo 4 moguće kombinacije vrijednosti za par $(R(u, v), R(v, w))$. U tablici 1 prikazane su sve mogućnosti: Vidimo da je uvjet Δ-tranzitivnosti

Table 1: Δ-tranzitivnost

$R(u,v)$	$R(v,w)$	$R(u,v)\Delta R(v,w)$	$R(u,w)$	Δ-tranz. uvjet?
0	0	0	0 ili 1	zadovoljen
0	1	0	0 ili 1	zadovoljen
1	0	0	0 ili 1	zadovoljen
1	1	1	1	zadovoljen

uvijek zadovoljen. Kako je Δ zapravo t-norma njena vrijednost biti će jednaka 0 čim je jedan od argumenata 0. Ukoliko vrijedi i $R(u, v) = 1$ i $R(v, w) = 1$ tada mora vrijediti i $R(u, w) = 1$ jer je R klasična relacija ekvivalencije i zadovoljava klasičnu tranzitivnost. Sada je jasno da uvijek vrijedi $R(u, w) \geq R(u, v)\Delta R(v, w)$ pa R zadovoljava i uvjet Δ-tranzitivnosti. Budući da R zadovoljava uvjete refleksivnosti, simetričnosti i Δ-tranzitivnosti zaključujemo da je svaka klasična relacija ekvivalencije ujedno i Δ-neizrazita relacija ekvivalencije.

6. Da bismo dokazali ekvivalenciju dviju tvrdnji, moramo dokazati implikaciju u oba smjera.

(a) Pretpostavimo da je R neizrazita relacija ekvivalencije. Neka je R_α neki α-presjek relacije R. Moramo pokazati da svaki α-presjek R_α zadovoljava tri uvjeta klasične relacije ekvivalencije: refleksivnost, simetričnost i tranzitivnost.

i. *Refleksivnost.* Neizrazita relacija ekvivalencije R zadovoljava svojstvo neizrazite refleksivnosti $R(a, a) = 1 \ , \forall a \in U$. Kako vrijedi $1 \geq \alpha \quad \text{za } \alpha \in [0, 1]$ onda je i $R_\alpha(a, a) = 1 \quad \text{za } \alpha \in [0, 1] \ , \forall a \in U$. Zaključujemo da je svaki α-presjek R_α refleksivna klasična relacija.

ii. *Simetričnost.* Neizrazita relacija ekvivalencije R zadovoljava svojstvo neizrazite simetričnosti $R(a, b) = R(b, a) \ , \forall a, b \in U$. Za neki α stoga vrijedi ili $R(a, b) \geq \alpha \wedge R(b, a) \geq \alpha$ ili $R(a, b) < \alpha \wedge R(b, a) < \alpha$, a iz toga prema definiciji α-presjeka vrijedi $R_\alpha(a, b) = 1 \wedge R_\alpha(b, a) = 1$ ili $R_\alpha(a, b) = 0 \wedge R_\alpha(b, a) = 0$ tj. $R_\alpha(a, b) = R_\alpha(b, a)$ pa zaključujemo da je α-presjek R_α simetrična klasična relacija.

iii. *Tranzitivnost.* Ako vrijedi $R_\alpha(u,v) = 1$ i $R_\alpha(v,w) = 1$ tada mora vrijediti $R(u,v) \geq \alpha$ i $R(v,w) \geq \alpha$. Kako je R neizrazita relacija ekvivalencije tada mora vrijediti $R(u,w) \geq min(R(u,v), R(v,w))$ $\geq min(\alpha, \alpha) = \alpha$. Zbog $R(u,w) \geq \alpha$ slijedi $R_\alpha(u,w) = 1$ pa zaključujemo da je R_α i tranzitivna čime je prvi smjer dokaza završen.

(b) Pretpostavimo da je svaki α-presjek R_α neke neizrazite relacije R klasična relacija ekvivalencije. Za ovaj smjer dokaza koristit ćemo teorem predstavljanja. Podsjetimo se, teorem predstavljanja kaže da se svaki neizraziti skup (a neizrazita relacija nije ništa drugo do neizraziti skup) može zapisati kao suma svojih α-presjeka: $R = \sum_\alpha \alpha R_\alpha$. Trebamo pokazati da R zadovoljava sva tri uvjeta relacije neizrazite ekvivalencije: refleksivnost, simetričnost i neizrazitu tranzitivnost.

i. *Refeksivnost.* Prema pretpostavci ovog smjera, svaki je α-presjek R_α klasična relacija ekvivalencije koja zadovoljava svojstvo refleksivnosti. Prema teoremu predstavljanja vrijedi: $R(a,a) = \sum_\alpha \alpha R_\alpha(a,a) = 1 * R_{\alpha=1}(a,a) = 1, \;\; \forall a \in U$.

ii. *Simetričnost.* Prema pretpostavci, svaki je α-presjek R_α simetrična relacija, tj. $R_\alpha(a,b) = R_\alpha(b,a)$. Prema teoremu predstavljanja onda vrijedi
$R(a,b) = \sum_\alpha \alpha R_\alpha(a,b) = \sum_\alpha \alpha R_\alpha(b,a) = R(b,a), \;\; \forall a,b \in U$ i R je simetrična neizrazita relacija.

iii. *Tranzitivnost.* Neka je $a = R(u,v)$ i neka je $b = R(v,w)$ za neke $u,v,w \in U$. Tada za $0 \leq \alpha \leq min(a,b)$ vrijedi $R_\alpha(u,v) = 1$ i $R_\alpha(v,w) = 1$, a time i $R_\alpha(u,w) = 1$ zbog pretpostavke tranzitivnosti svih α-presjeka R_α. Prema teoremu predstavljanja sada vrijedi $R(u,w) = \sum_\alpha \alpha R_\alpha(u,w) \geq \sum_{\alpha=0}^{\alpha=min(a,b)} \alpha R_\alpha(u,w)$ $= min(a,b) * R_{min(a,b)}(u,w) = min(a,b)$. Time smo pokazali da vrijedi $R(u,w) \geq min(R(u,v), R(v,w)) \; \forall u,v,w \in U$ što je upravo uvjet neizrazite tranzitivnosti. Ovime je i drugi smjer dokaza završen.