# Neizrazito, evolucijsko i neuroračunarstvo
# Neizraziti skupovi (2).

prof.dr.sc. Bojana Dalbelo Bašić prof.dr.sc. Marin Golub
dr.sc. Marko Čupić

Fakultet elektrotehnike i računarstva
Sveučilište u Zagrebu
Akademska godina 2013./2014.

10. listopada 2013.

# Klasični skup

Klasični skup (u Cantorovom smislu, engl. *crisp set*) $A \subseteq X$ možemo definirati na mnogo načina; primjerice:

- nabrajanjem elemenata od $A$, ako je $|A| < \infty$
- navođenjem svojstava koja jednoznačno određuju elemente od $X$ koji pripadaju skupu $A$
- pomoću karakteristične funkcije $\mu_A(x) : X \to \{0, 1\}$:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{ako je } x \in A \\ 0, & \text{ako je } x \notin A \end{cases}$$

# Klasični skup

Klasičan skup $A$ zapisujemo kao:

- $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ ili
- $A = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$

pri čemu simbol + tumačimo kao operator unije, sa sljedećim svojstvima:

- $x_i + x_j = x_j + x_i$ te
- $x_i + x_i = x_i$.

# Neizraziti skup

Ako kodomenu karakteristične funkcije, $\{0, 1\}$, zamijenimo s intervalom $[0, 1]$, dobivamo mogućnost modeliranja *stupnjevite* pripadnosti elementa $x$ skupu $A$.

**Definition (Neizraziti skup)**

Neka je $U$ univerzalni skup. Neizraziti skup $A$ definiran nad univerzalnim skupom $U$ je skup uređenih parova $A = \{(x; \mu_A(x)) \mid x \in U, \ \mu_A(x) \in [0, 1]\}$, gdje je $\mu_A(x)$ funkcija pripadnosti (engl. *membership function*), i ona određuje stupanj pripadnosti elemenata $x \in U$ neizrazitom skupu $A$.

Univarzalni skup $U$ je i dalje klasičan skup.

# Zapisivanje neizrazitog skupa

Kako je neizrazit skup skup uređenih parova $(x; \mu_A(x))$, uvest ćemo drugačiji način zapisivanja: $\frac{\mu_A(x)}{x}$, što čitamo "$x$ neizrazitom skupu $A$ pripada sa stupnjem pripadnosti $\mu_A(x)$".

- Zadeh je predložio da se konačni ili prebrojivi neizraziti skupovi zapisuju kao:

$$A = \sum_X \frac{\mu_A(x)}{x}.$$

- Za neprebrojive neizrazite skupove koristi se zapis:

$$\int_X \frac{\mu_A(x)}{x}.$$

# Zapisivanje neizrazitog skupa

U takvom zapisu:

- $\sum$ označava konačno ili prebrojivo nabrajanje a
- $\int$ označava neprebrojivo nabrajanje.

U oba slučaja, takvo nabrajanje ima sljedeće svojstvo:

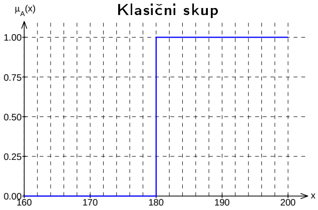
$$\frac{a}{x} + \frac{b}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{\max(a, b)}{x}$$

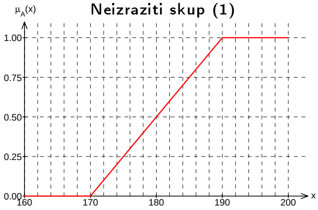
odnosno element $x$ skupu pripada s većim od danih stupnjeva.

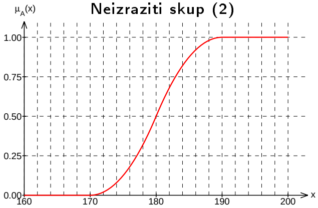
U mnogim primjenama stupanj pripadnosti elementa $x$ neizrazitom skupu $A$ tumači se kao *stupanj slaganja* s konceptom koji predstavlja neizraziti skup $A$ (npr. $x =$"Ivan" i $A =$"Skup visokih ljudi").

# Neizraziti skup: primjer 1

Pogledajmo kao primjer modeliranje $A =$"*skup visokih ljudi*".



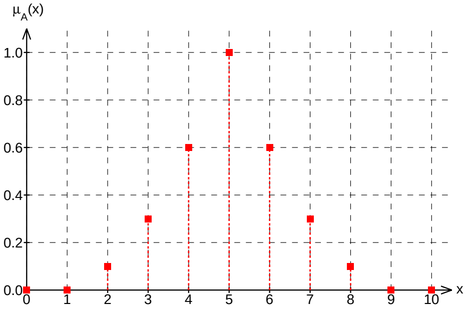




Definiranje funkcije pripadnosti neizrazitog skupa je subjektivno i kontekstno zavisno.

# Neizraziti skup: primjer 2-1

Neka je zadan univerzalni skup $X = N_0$ (nenegativni cijeli brojevi). Neka neizraziti skup $A$ predstavlja koncept "brojevi oko 5". Jedna moguća definicija skupa $A$ je:

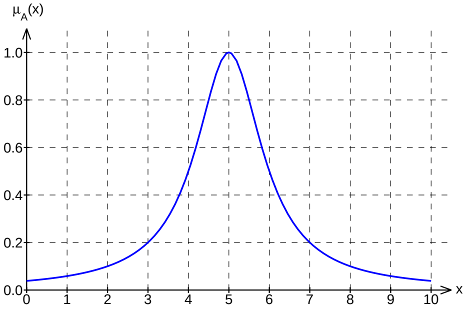
$$A = \frac{0.1}{2} + \frac{0.3}{3} + \frac{0.6}{4} + \frac{1}{5} + \frac{0.6}{6} + \frac{0.3}{7} + \frac{0.1}{8}$$



# Neizraziti skup: primjer 2-2

Neka je sada univerzalni skup $X = R$ (realni brojevi).
Koncept "brojevi oko 5" mogli bismo predstaviti neizrazitim skupom:

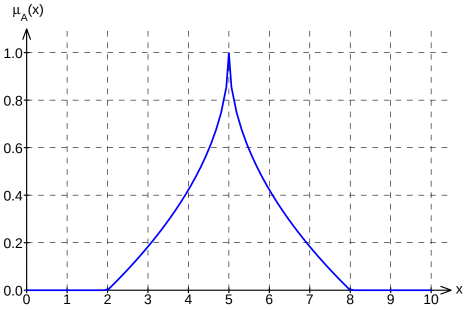
$$A = \int_R \frac{\frac{1}{1+(x-5)^2}}{x}$$



# Neizraziti skup: primjer 2-3

I sljedeća definicija je podjednako dobra:

$$A = \int_R \frac{\begin{cases} 1 - \sqrt{\frac{|x-5|}{3}}, & \text{za } 2 \leq x \leq 8 \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}}{x}$$



# Pravi opis

Koji je pravi opis koncepta "broj oko 5"? U tri prikazana slučaja, imali smo, primjerice:

- $\mu_{\text{"oko 5"}}(6) = 0.6$,
- $\mu_{\text{"oko 5"}}(6) = 0.5$,
- $\mu_{\text{"oko 5"}}(6) = 0.42$.

Značenje koje se pridaje numeričkoj vrijednosti funkcije pripadnosti je subjektivne prirode (zavisno o primjeni!).

# Pravi opis

*Nisu važne točne vrijednosti funkcija pripadnosti u određenom kontekstu već su važni međusobni odnosi funkcija pripadnosti neizrazitih skupova jednih prema drugima.*

*Zadeh*, 1977.

# Osnovne definicije

## Definition (Jednakost neizrazitih skupova)

Neka su $A$ i $B$ dva neizrazita skupa definirana nad univerzalnim skupom $U$, i neka je $\mu_A, \mu_B : U \rightarrow [0,1]$. Neizraziti skupovi $A$ i $B$ su jednaki, $A = B$, ako je $\mu_A(x) = \mu_B(x)$, $\forall x \in U$.

## Definition (Podskup neizrazitog skupa)

Neka su $A$ i $B$ dva neizrazita skupa definirana nad univerzalnim skupom $U$, i neka je $\mu_A, \mu_B : U \rightarrow [0,1]$. Neizraziti skup $A$ je podskup od neizrazitog skupa $B$, tj. $A \subseteq B$, ako je $\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$, $\forall x \in U$.

# Osnovne definicije

## Definition (Univerzalni neizraziti skup)

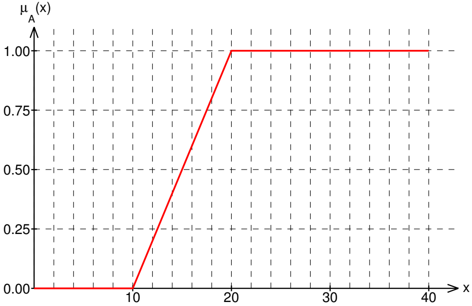
Univerzalni neizraziti skup $X$ je skup sa svojstvom $\mu_X(x) = 1,\ \forall x \in U$.

## Definition (Prazan skup)

Prazan skup $\emptyset$ je skup sa svojstvom $\mu_\emptyset(x) = 0,\ \forall x \in U$.

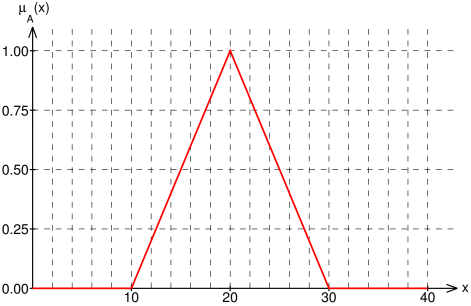
# Najčešće funkcije pripadnosti: Γ

$$\Gamma(x;\alpha,\beta) = \begin{cases} 0, & x < \alpha, \\ \frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}, & \alpha \leq x < \beta, \\ 1, & x \geq \beta. \end{cases} \quad (1)$$



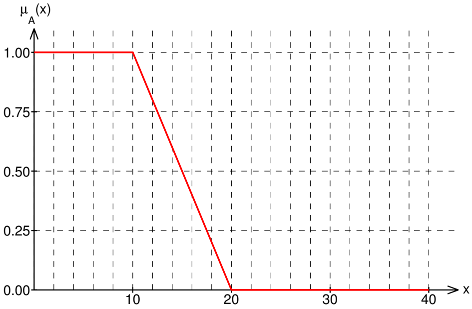
# Najčešće funkcije pripadnosti: Λ

$$\Lambda(x;\alpha,\beta,\gamma) = \begin{cases} 0, & x < \alpha, \\ \frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}, & \alpha \leq x < \beta, \\ \frac{\gamma-x}{\gamma-\beta}, & \beta \leq x < \gamma, \\ 0, & x \geq \gamma. \end{cases} \tag{2}$$



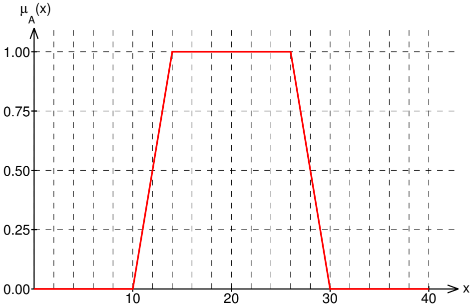
# Najčešće funkcije pripadnosti: $L$

$$L(x;\alpha,\beta) = \begin{cases} 1, & x < \alpha, \\ \frac{\beta - x}{\beta - \alpha}, & \alpha \le x < \beta, \\ 0, & x \ge \beta. \end{cases} \tag{3}$$



# Najčešće funkcije pripadnosti: Π

$$L(x;\alpha,\beta,\gamma,\delta)=\begin{cases}0, & x<\alpha,\\ \frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}, & \alpha\leq x<\beta,\\ 1, & \beta\leq x<\gamma,\\ \frac{\delta-x}{\delta-\gamma}, & \gamma\leq x<\delta,\\ 0, & x\geq\delta.\end{cases} \tag{4}$$



# Najčešće funkcije pripadnosti

- Sve prethodno navedene funkcije su po dijelovima linearne.
- Postoje i inačice koje su glatke – detaljnije pogledati u knjizi.

# Svojstva neizrazitih skupova

## Definition (Jezgra neizrazitog skupa)

Jezgra neizrazitog skupa $A$ (engl. *core*) je podskup univerzalnog skupa (dakle klasični skup) sa svojstvom $\mu_A(x) = 1$, tj. $core(A) = \{x \in U \mid \mu_A(x) = 1\}$.

## Definition (Potpora neizrazitog skupa)

Potpora neizrazitog skupa $A$ (engl. *support*) je podskup univerzalnog skupa (dakle klasični skup) sa svojstvom $\mu_A(x) > 0$, tj. $support(A) = \{x \in U \mid \mu_A(x) > 0\}$.

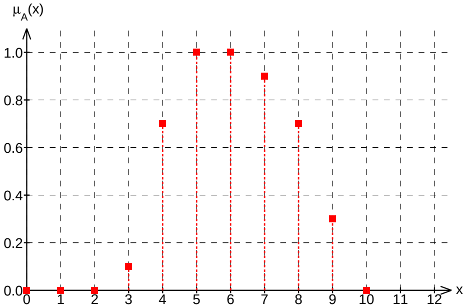
## Definition (Visina neizrazitog skupa)

Visina neizrazitog skupa $A$ je maksimalna vrijednost funkcije pripadnosti $\mu_A(x)$, tj. $hgt(A) = \max_{x \in U} \mu_A(x)$.

# Svojstva neizrazitih skupova - primjer

Nad univerzalnim skupom $X = \{1, 2, \ldots, 12\}$ (elementi su sati prve polovice dana) zadan je neizrazit skup $A$ koji opisuje koncept "Rano ujutro":

$$A = \frac{0}{1} + \frac{0}{2} + \frac{0.1}{3} + \frac{0.7}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{0.9}{7} + \frac{0.7}{8} + \frac{0.3}{9} + \frac{0}{10} + \frac{0}{11} + \frac{0}{12}$$




- $core(A) = ?$
- $supp(A) = ?$
- $hgt(A) = ?$

# Svojstva neizrazitih skupova - primjer

- $core(A) = \{5, 6\}$
- $supp(A) = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
- $hgt(A) = 1$

**Definition (Normalan neizrazitog skupa)**

Neizrazit skup $A$ čija je visina $hgt(A) = 1$ naziva se *normalan neizraziti skup*.

# Svojstva neizrazitih skupova

## Definition ($\alpha$-presjek)

$\alpha$-presjek neizrazitog skupa $A$ je klasični skup $A_\alpha$ koji sadrži sve one elemente iz $A$ koji neizrazitom skupu $A$ pripadaju barem sa stupnjem pripadnosti $\alpha$.

## Definition (Produkt $\alpha A$)

Neka je $\alpha \in [0, 1]$ i neka je $A$ običan skup. Produkt $\alpha A$ je neizraziti skup u kojem svaki element ima stupanj pripadnosti jednak $\alpha$.

## Definition (Teorem predstavljanja)

Svaki se neizraziti skup $A$ može prikazati kao $A = \sum_\alpha \alpha A_\alpha$ ili $A = \int_{[0,1]} \alpha A_\alpha$.

# Svojstva neizrazitih skupova

Neizraziti skup $A$:

$$A = \frac{0}{1} + \frac{0}{2} + \frac{0.1}{3} + \frac{0.7}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{0.9}{7} + \frac{0.7}{8} + \frac{0.3}{9} + \frac{0}{10} + \frac{0}{11} + \frac{0}{12}$$

ima sljedeće (zanimljivije) $\alpha$-presjeke (oznaka $A_\alpha$):

- $A_0 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$
- $A_{(0,0.1]} = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
- $A_{(0.1,0.3]} = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
- $A_{(0.3,0.7]} = \{4, 5, 6, 7, 8\}$
- $A_{(0.7,0.9]} = \{5, 6, 7\}$
- $A_{(0.9,1]} = \{5, 6\}$

# Svojstva neizrazitih skupova

Prema *teoremu predstavljanja*, sada možemo originalni neizraziti skup rekonstruirati iz njegovih $\alpha$-presjeka.

- Neka je $A_{(x,y]}$ $\alpha$-presjek neizrazitog skupa $A$ za $\alpha \in (x,y]$, $x < y$.
- Tada je umnožak $(x,y] \cdot A_{(x,y]}$ jednak neizrazitom skupu u kojem svi elementi skupa $A_{(x,y]}$ imaju stupanj pripadnosti $\max(x,y) = y$. *Zašto?*

$$
\begin{aligned}
A = & 0 \cdot A_0 + \\
& (0, 0.1] \cdot A_{(0,0.1]} + \\
& (0.1, 0.3] \cdot A_{(0.1,0.3]} + \\
& (0.3, 0.7] \cdot A_{(0.3,0.7]} + \\
& (0.7, 0.9] \cdot A_{(0.7,0.9]} + \\
& (0.9, 1] \cdot A_{(0.9,1]}
\end{aligned}
$$

# Svojstva neizrazitih skupova

$$
\begin{aligned}
A = & 0 \cdot \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\} + \\
& (0, 0.1] \cdot \{3,4,5,6,7,8,9\} + \\
& (0.1, 0.3] \cdot \{4,5,6,7,8,9\} + \\
& (0.3, 0.7] \cdot \{4,5,6,7,8\} + \\
& (0.7, 0.9] \cdot \{5,6,7\} + \\
& (0.9, 1] \cdot \{5,6\}
\end{aligned}
$$

# Svojstva neizrazitih skupova

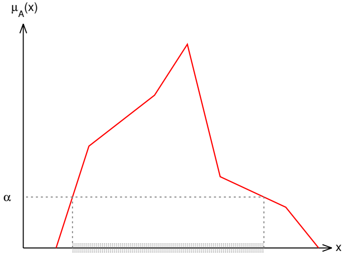
$$
\begin{aligned}
A = & \frac{0}{1} + \frac{0}{2} + \frac{0}{3} + \frac{0}{4} + \frac{0}{5} + \frac{0}{6} + \frac{0}{7} + \frac{0}{8} + \frac{0}{9} + \frac{0}{10} + \frac{0}{11} + \frac{0}{12} + \\
& \frac{0.1}{3} + \frac{0.1}{4} + \frac{0.1}{5} + \frac{0.1}{6} + \frac{0.1}{7} + \frac{0.1}{8} + \frac{0.1}{9} + \\
& \frac{0.3}{4} + \frac{0.3}{5} + \frac{0.3}{6} + \frac{0.3}{7} + \frac{0.3}{8} + \frac{0.3}{9} + \\
& \frac{0.7}{4} + \frac{0.7}{5} + \frac{0.7}{6} + \frac{0.7}{7} + \frac{0.7}{8} + \\
& \frac{0.9}{5} + \frac{0.9}{6} + \frac{0.9}{7} + \\
& \frac{1}{5} + \frac{1}{6}
\end{aligned}
$$

$$
A = \frac{0}{1} + \frac{0}{2} + \frac{0.1}{3} + \frac{0.7}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{0.9}{7} + \frac{0.7}{8} + \frac{0.3}{9} + \frac{0}{10} + \frac{0}{11} + \frac{0}{12}
$$

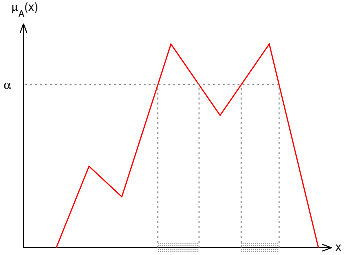
# Svojstva neizrazitih skupova

## Definition (Neizrazita konveksnost skupa)

Neka je $A$ neizraziti skup definiran nad univerzalnim skupom $U$. Neizraziti skup $A$ je neizrazito konveksan *akko* su svi njegovi $\alpha$-presjeci konveksni.




(a) Neizrazito konveksan skup – konveksan $\alpha$ presjek




(b) Skup koji nije neizrazito konveksan – $\alpha$ presjek nije konveksan

# Svojstva neizrazitih skupova

Neizrazitu konveksnost možemo definirati i na alternativan (ali istovjetan) način.

## Definition (Neizrazita konveksnost skupa)

Neka je $A$ neizraziti skup definiran nad univerzalnim skupom $U$. Neizraziti skup $A$ je neizrazito konveksan *akko* vrijedi:

$$\mu_A(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \min(\mu_A(x_1), \mu_A(x_2)).$$

Konveksnost neizrazitog skupa ne znači da je funkcija pripadnosti konveksna (u matematičkom smislu).

# Svojstva neizrazitih skupova

## Definition (Kardinalni i relativni kardinalni broj)

Neka je $A$ konačan neizraziti skup definiran nad univerzalnim skupom $U$. Kardinalni broj skupa $A$ je: $|A| = \sum_{x \in U} \mu_A(x)$.
Relativni kardinalni broj skupa $A$ je $\|A\| = \frac{|A|}{|U|}$.

# Zadehove definicije osnovnih operacija

## Definition (Unija neizrazitih skupova)

Neka su $A$ i $B$ neizraziti skupovi definirani nad univerzalnim skupom $U$. Unija skupova $A$ i $B$ je neizraziti skup $A \cup B$, sa svojstvom: $\forall x \in U \ \mu_{A \cup B}(x) = \max(\mu_A(x), \mu_B(x))$, odnosno

$$A \cup B = \{(x; \mu_{A \cup B}(x)) \mid x \in U, \mu_{A \cup B}(x) = \max(\mu_A(x), \mu_B(x))\}.$$

## Definition (Presjek neizrazitih skupova)

Neka su $A$ i $B$ neizraziti skupovi definirani nad univerzalnim skupom $U$. Presjek skupova $A$ i $B$ je neizraziti skup $A \cap B$, sa svojstvom: $\forall x \in U \ \mu_{A \cap B}(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x))$, odnosno

$$A \cap B = \{(x; \mu_{A \cap B}(x)) \mid x \in U, \mu_{A \cap B}(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x))\}.$$

# Zadehove definicije osnovnih operacija

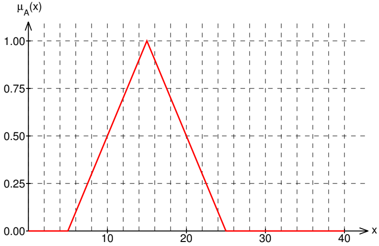
**Definition (Komplement neizrazitog skupa)**

Neka je $A$ neizraziti skup definiran nad univerzalnim skupom $U$. Komplement skupa $A$ je neizraziti skup $\neg A$, sa svojstvom: $\forall x \in U\ \mu_{\neg A}(x) = 1 - \mu_A(x)$, odnosno

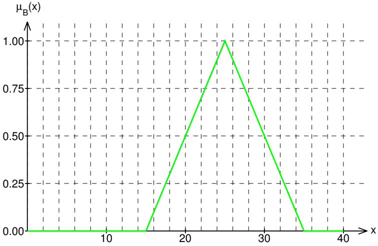
$$\neg A = \{(x; \mu_{\neg A}(x)) \mid x \in U, \mu_{\neg A}(x) = 1 - \mu_A(x)\}.$$

Komplement skupa $A$ još će se označavati i s $A^C$.

# Zadehove definicije osnovnih operacija

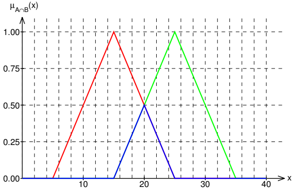



(c) Neizraziti skup *A*

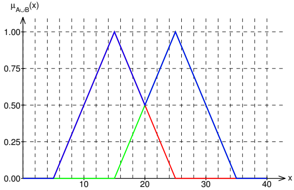



(d) Neizraziti skup *B*

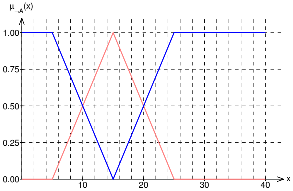
# Zadehove definicije osnovnih operacija




(e) Neizraziti skup $A \cap B$




(f) Neizraziti skup $A \cup B$




(g) Neizraziti skup $\neg A$

# Zadehove definicije osnovnih operacija – svojstva

| | |
|---|---|
| $A \cup B = B \cup A$ | Komutativnost |
| $A \cap B = B \cap A$ | Komutativnost |
| $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ | Asocijativnost |
| $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ | Asocijativnost |
| $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ | Distributivnost |
| $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ | Distributivnost |
| $A \cup A = A$ | Idempotencija |
| $A \cap A = A$ | Idempotencija |
| $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$ | DeMorganovi zakoni |
| $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$ | DeMorganovi zakoni |
| $(A^C)^C = A$ | Involutivnost |
| $A \cup \emptyset = A$, $A \cup U = U$ | Rubni uvjeti |
| $A \cap \emptyset = \emptyset$, $A \cap U = A$ | Rubni uvjeti |
| Ako je $A \subseteq B$ i $B \subseteq C$ tada je $A \subseteq C$ | Tranzitivnost |

# Zadehove definicije osnovnih operacija – svojstva

Sva prethodna svojstva vrijede kako u teoriji klasičnih skupova, tako i u teoriji neizrazitih skupova, ako su operacije definirane kako ih je definirao Zadeh.

Postoje međutim svojstva koja u teoriji klasičnih skupova vrijede a u teoriji neizrazitih skupova ne vrijede:

| | |
|---|---|
| $A \cap A^C = \emptyset$ | Zakon kontradikcije – NE VRIJEDI |
| $A \cup A^C = U$ | Zakon isključenja trećega – NE VRIJEDI |

# Druge definicije osnovnih operacija

Moguće je definirati i druge načine provođenja osnovnih operacija.

- Sve će one, ako se vrijednosti pripadnosti ograniče na $\{0, 1\}$ davati identične rezultate koje bismo dobili u klasičnoj teoriji skupova.
- Razlike postaju vidljive za vrijednosti pripadnosti iz $(0, 1)$.

# Druge definicije osnovnih operacija

- Algebarski produkt: $\mu_{A\cap B}(x) = \mu_A(x) \cdot \mu_B(x)$
- Algebarska suma: $\mu_{A\cup B}(x) = \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x) \cdot \mu_B(x)$
- Ograničen produkt: $\mu_{A\cap B}(x) = \max(0, \mu_A(x) + \mu_B(x) - 1)$
- Ograničena suma: $\mu_{A\cup B}(x) = \min(1, \mu_A(x) + \mu_B(x))$

Usporedite Zadehovu definiciju presjeka s algebarskim produktom te ograničenim produktom uz ograničenje funkcije pripadnosti na $\{0, 1\}$.

# Poopćenje osnovnih operacija

Najopćenitiji oblik operacije presjeka su $t$-norme a operacije unije $s$-norme (još ih zovemo $t$-konorme).

## Definition ($t$-norma)

$t$-norma označava klasu binarnih funkcija $t : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ sa svojstvima T1-T4.

| | | |
|---|---|---|
| T1 | $t(a,b) = t(b,a)$ | komutativnost |
| T2 | $t(a,t(b,c)) = t(t(a,b),c)$ | asocijativnost |
| T3 | $a \leq c \wedge b \leq d \Rightarrow t(a,b) \leq t(c,d)$ | monotonost |
| T4 | $t(a,1) = a,\ t(0,a) = 0$ | rubni uvjeti |

# Poopćenje osnovnih operacija

## Definition ($s$-norma)

$s$-norma označava klasu binarnih funkcija $s : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ sa svojstvima S1-S4.

| | | |
|---|---|---|
| S1 | $s(a,b) = s(b,a)$ | komutativnost |
| S2 | $s(a,s(b,c)) = s(s(a,b),c)$ | asocijativnost |
| S3 | $a \leq c \land b \leq d \Rightarrow s(a,b) \leq s(c,d)$ | monotonost |
| S4 | $s(a,1) = 1,\ s(0,a) = a$ | rubni uvjeti |

# Poopćenje osnovnih operacija

## Definition (Generalizirana operacija komplementa)

Generalizirana operacija komplementa označava klasu unarnih funkcija $c : [0,1] \rightarrow [0,1]$ sa svojstvima C1-C3.

| | | |
|---|---|---|
| C1 | $c(0) = 1,\ c(1) = 0$ | rubni uvjeti |
| C2 | $a < b \rightarrow c(a) > c(b)$ | |
| C3 | $c(c(a)) = a$ | involutivnost |

# Poopćenje osnovnih operacija

Bilo koja $t$-norma s gornje je strane ograničena operatorom *minimum* dok su sve $s$-norme s donje strane ograničene operatorom *maksimum*.

Za $s$-norme i $t$-norme te generaliziranu operaciju komplementa vrijede DeMorganovi zakoni, odnosno:

$$s(a,b) = c(t(c(a),c(b))),$$
$$t(a,b) = c(s(c(a),c(b))).$$

Pri tome se ne može uzeti bilo koja $t$-norma, bilo koja $s$-norma i bilo koji komplement. Umjesto toga, fiksiranjem $t$-norme (ili $s$-norme) i nekog komplementa dobiva se *dualna* norma: $s$-norma (odnosno $t$-norma); taj trojac tada čini DeMorganov sustav.

# Poopćenje osnovnih operacija

Prethodno prikazani parovi $t$- i $s$-normi izvedeni su uporabom Zadehovog komplementa.

Za vježbu: uporabom DeMorganovog zakona uz Zadehovu definiciju komplementa te presjek definiran kao algebarski produkt izvedite pripadni operator unije.

# Tipični dualni parovi $t$- i $s$-normi

| | | |
|---|---|---|
| Zadeh Minimum ($t_{\min}$), Zadeh Maksimum ($t_{\min}$) | $\min(a, b)$ | $\max(a, b)$ |
| Hamacherov produkt ($t_H$), Hamacherova suma ($s_H$) | $\frac{ab}{a+b-ab}$ | $\frac{a+b-2ab}{1-ab}$ |
| Algebarski produkt ($t_a$), Algebarska suma ($s_H$) | $ab$ | $a+b-ab$ |
| Einsteinov produkt ($t_E$), Einsteinova suma ($s_E$) | $\frac{ab}{2-(a+b-ab)}$ | $\frac{a+b}{1+ab}$ |
| Ograničeni produkt ($t_o$), Ograničena suma ($s_o$) | $\max(0, a+b-1)$ | $\min(1, a+b)$ |

# Tipični dualni parovi $t$- i $s$-normi

Drastični produkt ($t_d$): $\begin{cases} \min(a,b), & \max(a,b) = 1 \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$

Drastična suma ($t_s$): $\begin{cases} \max(a,b), & \min(a,b) = 0 \\ 1, & \text{inače} \end{cases}$

# Parametrizirane $t$- i $s$-norme

Parametrizirane $t$- i $s$-norme čine širok skup normi čije je djelovanje moguće podešavati preko slobodnog parametra koji takve norme sadrže. Evo primjera.

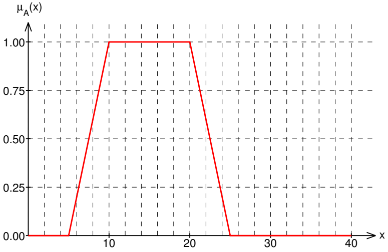
| $t$-norma | $s$-norma |
|---|---|
| Hamacherova norma, $\nu \geq 0$ | |
| $\frac{ab}{\nu+(1-\nu)(a+b-ab)}$ | $\frac{a+b-(2-\nu)ab}{1-(1-\nu)ab}$ |
| Yagerova norma, $q \geq 0$ | |
| $1 - \min(1, \sqrt[q]{(1-a)^q + (1-b)^q})$ | $\min(1, \sqrt[q]{a^q + b^q})$ |
| Frankova norma, $s > 0$, $s \neq 1$ | |
| $\log_s \left(1 + \frac{(s^a-1)(s^b-1)}{s-1}\right)$ | $1 - \log_s \left(1 + \frac{(s^{1-a}-1)(s^{1-b}-1)}{s-1}\right)$ |
| Dubois-Prade norma, $\alpha \in [0,1]$ | |
| $\frac{ab}{\max(a,b,\alpha)}$ | $\frac{a+b-ab-\min(a,b,1-\alpha)}{\max(1-a,1-b,\alpha)}$ |

# Parametrizirani komplementi

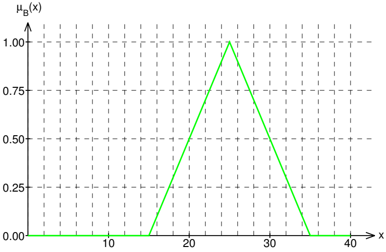
| Naziv komplementa | Izraz |
| --- | --- |
| Sugenov komplement | $\frac{1-a}{1+\alpha \cdot a}$ |
| Yagerov komplement | $\sqrt[\beta]{1-a^{\beta}}$ |

# Parametrizirane $t$- i $s$-norme

Utjecaj različitih vrijednosti parametra ilustrirat ćemo na primjeru Hamacherovih normi.



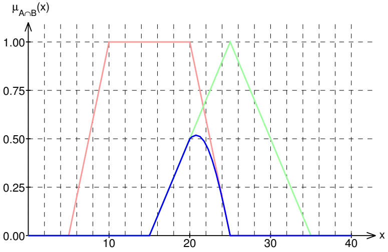

(h) Neizraziti skup $A$



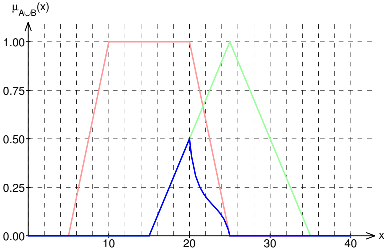

(i) Neizraziti skup $B$

# Parametrizirane $t$- i $s$-norme

Utjecaj različitih vrijednosti parametra ilustrirat ćemo na primjeru Hamacherovih normi.



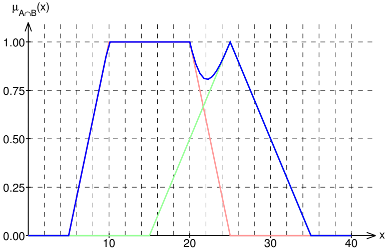

(j) Neizraziti skup $A \cap B$ uz $\nu = 0.1$



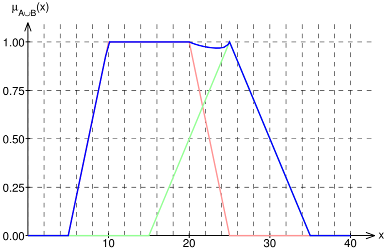

(k) Neizraziti skup $A \cap B$ uz $\nu = 10$

# Parametrizirane $t$- i $s$-norme

Utjecaj različitih vrijednosti parametra ilustrirat ćemo na primjeru Hamacherovih normi.




(l) Neizraziti skup $A \cup B$ uz $\nu = 0.1$




(m) Neizraziti skup $A \cap B$ uz $\nu = 10$

# Poopćenje neizrazitih skupova

Neizraziti skupovi koje smo do sada opisali su neizraziti skupovi tipa 1 (engl. *type-1 fuzzy sets*).

- Mjera pripadnosti kod neizrazitog skupa tipa 1 je jasan broj.
- U stvarnosti, mjera pripadnosti elementa neizrazitom skupu ne mora biti jasna – moguće je da postoji nesigurnost. Neizraziti skupovi čiji je stupanj pripadnosti elementa $x$ modeliran neizrazitim skupom tipa 1 nazivaju se neizraziti skupovi tipa 2.

**Definition (Neizraziti skup tipa $n$)**

Neizraziti skup tipa $n$ je neizraziti skup čija funkcija pripadnosti kao vrijednosti poprima neizrazite skupove tipa $n-1$.

# Gradivo

Proučiti u knjizi poglavlja 1 i 2.

# Zadatci za vježbu: 1

Definirajte neizrazite skupove za sljedeće koncepte (specificirajte i kontekst).

- $n$ je velik broj.
- Srednja vrijednost slučajne varijable je oko 5.
- $x$ je puno veći od $y$.
- $x$ je između $-3$ i 2.
- $x$ je poprilici jednak $y$.

# Zadatci za vježbu: 2

Neka je $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Zadana su dva neizrazita skupa $A$ i $B$:

$$A = \frac{0}{0} + \frac{0}{1} + \frac{0.1}{2} + \frac{0.2}{3} + \frac{0.3}{4} + \frac{0.8}{5} + \frac{0.9}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9}$$

$$B = \frac{1}{0} + \frac{1}{1} + \frac{0.9}{2} + \frac{0.8}{3} + \frac{0.7}{4} + \frac{0.5}{5} + \frac{0.4}{6} + \frac{0.2}{7} + \frac{0.2}{8} + \frac{0}{9}.$$

Odredite $A \cup B$, $A \cap B$, $\neg A$ i $\neg B$ koristeći standardne Zadehove definicije operatora.

# Zadatci za vježbu: 3

Neka su $C$ i $D$ neizraziti skupovi definirani nad nenegativnim realnim brojevima. Neka su:

$$A(x) = \begin{cases} 0 & \text{ako je } 0 < x < 1 \\ x - 1 & \text{ako je } 1 \leq x < 2 \\ 1 & \text{ako je } 2 \leq x < 3 \\ 4 - x & \text{ako je } 3 \leq x < 4 \\ 0 & \text{ako je } 4 \leq x \end{cases}$$

$$B(x) = \begin{cases} e^{x-3} & \text{ako je } 0 < x < 3 \\ 1 & \text{ako je } 3 \leq x < 5 \\ 1 - \frac{x-5}{2} & \text{ako je } 5 \leq x < 10 \\ 0 & \text{ako je } 10 \leq x \end{cases}$$

Nacrtajte funkciju pripadnosti neizrazitog skupa $C \cap \neg D$.

# Zadatci za vježbu: 4

Neka su $A$ i $B$ neizraziti skupovi definirani nad nenegativnim realnim brojevima. Neka su:

$$A(x) = \begin{cases} 1 & \text{ako je } x < 20 \\ \frac{40-x}{20} & \text{ako je } 20 \leq x < 40 \\ 0 & \text{ako je } 40 \leq x \end{cases}$$

$$B(x) = \begin{cases} 1 & \text{ako je } x \leq 25 \\ \left(1 + \left(\frac{x-25}{5}\right)^2\right)^{-1} & \text{ako je } 25 < x \end{cases}$$

Odredite $A \cup B$, $A \cap B$, $\neg A$ i $\neg B$ koristeći standardne Zadehove definicije operatora.

# Zadatci za vježbu: 5

Označimo s $A^{-1}(\alpha)$ skup $\{x \ : \ \mu_A(x) = \alpha\}$ (dakle, skup svih elemenata koji neizrazitom skupu pripadaju upravo sa stupnjem $\alpha$). $A_\alpha$ je oznaka za $\alpha$-presjek neizrazitog skupa $A$. Dokažite da vrijedi:

$$A^{-1}(\alpha) = A_\alpha \bigcap \left( \bigcup_{\beta > \alpha} A_\beta \right)'$$

gdje $(.)'$ označava komplement skupa s obzirom na univerzalni skup. Kako su na desnoj strani samo $\alpha$-presjeci, izraz nam pokazuje da poznavanjem svih $\alpha$-presjeka ujedno znamo sve i o samom skupu $A$. To je posljedica kojeg teorema?

# Zadatci za vježbu: 6

Neka su $A$ i $B$ neizraziti skupovi definirani nad univerzalnim skupom $U$ i neka je $\alpha \in [0,1]$. Dokažite sljedeće.

- $(A \cup B)_\alpha = A_\alpha \cup B_\alpha$
- $(A \cap B)_\alpha = A_\alpha \cap B_\alpha$
- Provjerite je li $(\neg A)_\alpha = \neg(A_\alpha)$
- Neka je $S$ skup neizrazitih skupova definiranih nad univerzalnim skupom $U$. Pokažite da vrijedi:

$$\left( \bigcap_{A \in S} A \right)_\alpha = \bigcap_{A \in S} A_\alpha$$

- Vrijedi li:

$$\left( \bigcup_{A \in S} A \right)_\alpha = \bigcup_{A \in S} A_\alpha$$

# Zadatci za vježbu: 7

Neka je $a$ formula u neizrazitoj logici te neka $t(a)$ označava mjeru istinitosti te formule (koja je općenito iz $[0,1]$). Pokažite da, ako je $t(a \vee \neg a) = 1$, tada je nužno $t(a) \in \{0,1\}$.

# Zadatci za vježbu: 8

Definirajmo dvije $t$-norme $\nabla_0$ i $\nabla_1$:

$$x \nabla_0 y = \begin{cases} x \wedge y & \text{ako je } x \vee y = 1 \\ 0 & \text{inače} \end{cases}$$

$$x \nabla_1 y = x \wedge y$$

gdje se $\vee$ i $\wedge$ računaju prema Zadehu. Pokažite da za svaku $t$-normu $\nabla$ vrijedi:

$$x \nabla_0 y \leq x \nabla y \leq x \nabla_1 y.$$

# Zadatci za vježbu: 9

Idempotentnost $t$ norme $\nabla$ znači da vrijedi $x \nabla x = x \ \forall x \in [0,1]$. Pokažite da je $\wedge$ (Zadehova definicija) jedina idempotentna $t$-norma. Poslužite se činjenicom da za svaku $t$ normu $x \nabla x$ nikada nije veće od $x$ (što, dakako, najprije dokažite).

# Zadatci za vježbu: 10

Pokažite da je:

$$\eta(x) = \frac{1 - x}{1 + \lambda x} \text{ za } \lambda > -1$$

operator negacije.

# Zadatci za vježbu: 11

Zadana su dva neizrazita skupa $A$ i $B$ definirana nad realnim brojevima.

$$\mu_A(x) = \Lambda(x; 4, 10, 16)$$

$$\mu_B(x) = \Lambda(x; 14, 20, 26)$$

Odredite sve $\alpha$-presjeke od $A \cup B$ te od $A \cap B$.

Naputak: traženih presjeka ima beskonačno. Međutim, svaki se presjek može prikazati ili kao jedan interval realnih brojeva ili kao unija takvih intervala čije granice ovise o vrijednosti $\alpha$. Pronađite rješenje u takvom obliku.