Chương 7

KIỂM TRA CHẤT LƯỢNG SẢN PHẨM

Trong mỗi quá trình sản xuất thường có sự thay đổi giữa các sản phẩm gây ra tác động xấu lên chất lượng của sản phẩm. Sự thay đổi này có thể được gây nên bởi sự sư hư hỏng của máy móc, chất lượng xấu của nguyên liệu thô cung cấp cho sản xuất, phần mềm quản lý không chính xác hoặc do sai lầm của con người khi điều khiển quá trình.

Việc nhận biết khi nào thì quá trình đi ra ngoài sự kiểm soát được xác định bởi *biểu đồ kiểm soát*. Biểu đồ này được xác định bởi hai giá trị: giới hạn kiểm soát dưới LCL (*lower control limit*) và giới hạn kiểm soát trên UCL (*upper control limit*). Dữ liệu sản xuất được chia thành những nhóm con và thống kê của nhóm con, như trung bình nhóm con và độ lệch tiêu chuẩn nhóm con. Khi thống kê nhóm con không rơi vào giữa giới hạn kiểm soát dưới và giới hạn kiểm soát trên thì ta kết luận *quá trình đi ra ngoài kiểm soát*.

1. BIỂU ĐỒ KIỂM SOÁT CHO GIÁ TRỊ TRUNG BÌNH

1.1 Trường hợp biết μ và σ

Giả sử khi quá trình trong sự kiểm soát các sản phẩm liên tiếp được sản xuất ra có các đặc trưng số đo được là đại lượng ngẫu nhiên chuẩn, độc lập với trung bình μ và phương sai σ^2. Tuy nhiên, vì một tình huống đặc biệt nào đó quá trình đi ra ngoài sự kiểm soát và bắt đầu sản xuất ra sản phẩm có phân phối khác. Ta cần nhận biết khi nào thì điều này xảy ra để ngừng quá trình, tìm ra sự cố và khắc phục nó.

Giả sử $X_1, X_2, \ldots$ là các đặc trưng đo được của các sản phẩm liên tiếp. Ta chia dữ liệu ra thành các nhóm con có kích thước n xác định. Giá trị n được chọn sao cho trong mỗi nhóm con sản phẩm cótính chất như nhau. Chẳng hạn, n có thể được chọn sao cho tất cả sản phẩm bên trong một nhóm con được sản xuất trong cùng một ngày, hoặc cùng một ca, hoặc cùng một cách sắp đặt,...Các giá trị tiêu biểu của n là $4, 5$ hoặc 6.

Gọi $\overline{X}_i$, $i = 1, 2, \ldots$ là giá trị trung bình của nhóm thứ i. Tức là

$$\overline{X}_1 = \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}$$

$$\overline{X}_2 = \frac{X_{n+1} + \ldots + X_{2n}}{n}$$

$$\overline{X}_3 = \frac{X_{2n+1} + \ldots + X_{3n}}{n}$$

Vì khi trong sự kiểm soát, mỗi X_i có trung bình μ và phương sai σ^2 nên

$$E(\overline{X}_i) = \mu, \qquad Var(\overline{X}_i) = \frac{\sigma^2}{n}$$

Do đó $\dfrac{\overline{X}_i - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}$ có phân phối chuẩn hóa.

Ta biết một đại lượng ngẫu nhiên Z có phân phối chuẩn hóa hầu như nhận giá trị giữa -3 và 3 (vì $P(-3 < Z < 3) = 0,9973$).

Do đó

$$-3 < \sqrt{n}\frac{\overline{X}_i - \mu}{\sigma} < 3$$

hay

$$\mu - \frac{3\sigma}{\sqrt{n}} < \overline{X}_i < \mu + \frac{3\sigma}{\sqrt{n}}$$

Giá trị

$$LCL \equiv \mu - \frac{3\sigma}{\sqrt{n}} \qquad \text{và} \qquad UCL \equiv \mu + \frac{3\sigma}{\sqrt{n}}$$

được gọi là *giới hạn kiểm soát dưới và giới hạn kiểm soát trên.*

Biểu đồ *kiểm soát*$-\overline{X}$ được tạo nên để nhận biết sự thay đổi của hàng hóa được sản xuất, và nhận được bằng cách đưa vào các trung bình nhóm con liên tiếp $\overline{X}_i$. Biểu đồ cho biết quá trình đi ra ngoài sự kiểm soát ở lần đầu tiên X_i không rơi vào giữa LCL và UCL.

• **Ví dụ 1** *Một nhà máy sản xuất một chi tiết máy bằng thép có đường kính là đại lượng ngẫu nhiên có phân phối chuẩn với trung bình* $3mm$ *và độ lệch tiêu chuẩn* $0,1mm$*. Các mẫu liên tiếp của 4 chi tiết có trung bình mẫu tính bằng milimet như sau:*

Mẫu	$\overline{X}$	*Mẫu*	$\overline{X}$
1	3,01	6	3,02
2	2,97	7	3,10
3	3,12	8	3,14
4	2,99	9	3,09
5	3,03	10	3,20

Hãy kết luận về sự kiểm soát của quá trình.

Giải

Khi trong sự kiểm soát các đường kính của các chi tiết liên tiếp có trung bình $\mu = 3$ và độ lệch tiêu chuẩn $\sigma = 0,1$. Với $n = 4$ thì các giới hạn kiểm soát là

$$LCL = 3 - \frac{3.1}{4} = 2,85, \qquad UCL = 3 + \frac{3.1}{4} = 3,15$$

Từ mẫu số 6 đến mẫu số 10 cho thấy đường kính của chi tiết máy có xu hướng tăng và ở mẫu số 10 thì đường kính ở phía trên giới hạn kiểm soát trên. Điều này cho ta nhận thấy bắt đầu từ mẫu số 10 quá trình ra ngoài sự kiểm soát và đường kính trung bình của chi tiết máy bắt đầu khác $3mm$.

⊙ **Chú ý** Giả sử quá trình vừa ra ngoài sự kiểm soát bởi sự thay đổi giá trị trung bình của sản phẩm từ μ tới $\mu + a$ với $a > 0$. Phải mất bao lâu tới khi biểu đồ nhận thấy quá trình đi ra ngoài kiểm soát?

Ta thấy trung bình của nhóm con ở trong giới hạn kiểm soát nếu

$$-3 < \sqrt{n}\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma} < 3$$

$$\Longleftrightarrow \qquad -3 - \frac{a\sqrt{n}}{\sigma} < \sqrt{n}\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma} - \frac{a\sqrt{n}}{\sigma} < 3 - \frac{a\sqrt{n}}{\sigma}$$

hay

$$-3 - \frac{a\sqrt{n}}{\sigma} < \sqrt{n}\frac{\overline{X} - \mu - a}{\sigma} < 3 - \frac{a\sqrt{n}}{\sigma}$$

Vì $\overline{X}$có phân phối chuẩn với trung bình $\mu + a$ và phương sai $\dfrac{\sigma^2}{n}$ nên $\sqrt{n}\dfrac{\overline{X} - \mu - a}{\sigma}$ có phân phối chuẩn hóa. Xác suất để nó rơi và giới hạn kiểm soát là

$$P\left(-3 - \frac{a\sqrt{n}}{\sigma} < Z < 3 - \frac{a\sqrt{n}}{\sigma}\right) = \phi\left(3 - \frac{a\sqrt{n}}{\sigma}\right) - \phi\left(-3 - \frac{a\sqrt{n}}{\sigma}\right) \approx \phi\left(3 - \frac{a\sqrt{n}}{\sigma}\right)$$

Do đó xác suất để nó rơi ra ngoài xấp xỉ $1 - \phi(3 - \frac{a\sqrt{n}}{\sigma})$.

1.2 Trường hợp chưa biết μ và σ

Ta sẽ ước lượng μ và σ bằng cách chọn k nhóm con với $k \geq 20$ và $nk \geq 100$.

Nếu $\overline{X}_i,\ i = 1, 2, \ldots, k$ là trung bình của nhóm con thứ i thì ta ước lượng μ bởi

$$\overline{\overline{X}} = \frac{\overline{X}_1 + \ldots + \overline{X}_k}{k}$$

Để ước lượng σ ta gọi S_i là độ lệch tiêu chuẩn mẫu của nhóm thứ i $(i = 1, 2, \ldots, k)$, tức là

$$S_1 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i - \overline{X}_1)^2}{n-1}}$$

$$S_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \frac{(X_{n+i} - \overline{X}_2)^2}{n-1}}$$

$$\vdots$$

$$S_k = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \frac{(X_{(k-1)n+i} - \overline{X}_k)^2}{n-1}}$$

Đặt

$$\overline{S} = \frac{S_1 + \ldots + S_k}{k}$$

Thống kê $\overline{S}$ không là ước lượng không chệch của σ vì $E(\overline{S}) \neq \sigma$. Để chuyển nó thành ước lượng không chệch cần phải tính $E(\overline{S})$. Ta có

$$E(\overline{S}) = \frac{E(S_1) + \ldots + E(S_k)}{k} = E(S_1) \tag{7.1}$$

(do $S_1, \ldots, S_k$ độc lập và có phân phối đồng nhất nên có cùng giá trị trung bình).

Để tính $E(S_1)$ ta dùng các kết quả sau:

* *Kết quả 1:*

$$\frac{(n-1)S_1^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i - \overline{X})^2}{\sigma^2} \in \chi^2_{n-1} \tag{7.2}$$

* *Kết quả 2:* Với $Y \in \chi^2_{n-1}$ thì

$$E(Y) = \sqrt{2}\frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma\frac{n-1}{2}} \tag{7.3}$$

Ta có

$$E(Y) = \int_0^{+\infty} \sqrt{y} f_{\chi^2_{n-1}}(y)dy = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{y}{2}}.y^{\frac{n-1}{2}-1}}{2^{\frac{n-1}{2}}\Gamma(\frac{n-1}{2})}dy = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{y}{2}}.y^{\frac{n}{2}-1}}{2^{\frac{n-1}{2}}.\Gamma(\frac{n-1}{2})}dy$$

Đặt $x = \dfrac{y}{2}$ thì $E(Y) = \sqrt{2}\frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma\frac{n-1}{2}}$.

Vì $\left(\sqrt{\dfrac{(n-1)S_1^2}{\sigma^2}}\right) = \sqrt{n-1}\dfrac{E(S_1)}{\sigma}$ nên từ (7.2) và (7.3) ta có

$$E(S_1) = \frac{\sqrt{2}\Gamma(\frac{n}{2})\sigma}{\sqrt{n-1}\Gamma(\frac{n-1}{2})}$$

Đặt

$$c(n) = \frac{\sqrt{2}\Gamma(\frac{n}{2})}{\sqrt{n-1}\Gamma(\frac{n-1}{2})}$$

Bảng giá trị của $c(n)$
c(2)=0,7978849
c(3)=0,8862266
c(4)=0,9213181
c(5)=0,9399851
c(6)=0,9515332
c(7)=0,9593684
c(8)=0,9650309
c(9)=0,9693103
c(10)=0,9726596

thì theo (7.1) ta thấy $\dfrac{\overline{S}}{c(n)}$ là ước lượng không chệch của σ.

Ước lượng cho μ và σ ở trên chỉ hợp lý nếu quá trình trong sự kiểm soát.

Các giới hạn kiểm soát trong trường hợp này là

$$LCL = \overline{\overline{X}} - \frac{3\overline{S}}{\sqrt{n}c(n)} \qquad UCL = \overline{\overline{X}} + \frac{3\overline{S}}{\sqrt{n}c(n)}$$

Ta sẽ thực hiện việc kiểm tra trung bình của các nhóm con. Nếu nhóm con nào mà giá trị trung bình không rơi vào giữa các giới hạn kiểm soát thì ta loại ra và thực hiện ước lượng lại. Tiếp tục kiểm tra lần nữa sao cho giá trị trung bình của các nhóm con rơi vào giữa các giới hạn kiểm soát. Nếu có quá nhiều giá trị trung bình của các nhóm con rơi ra ngoài các giới hạn kiểm soát thì rõ ràng sự kiểm soát không được thiết lập.

• **Ví dụ 2** *Xét lại ví dụ (1) dưới giả thiết mới rằng quá trình mới bắt đầu với μ và σ chưa biết. Giả sử độ lệch tiêu chuẩn được cho:*

	$\overline{X}$	S		$\overline{X}$	S
1	3,01	0,12	6	3,02	0,08
2	2,97	0,14	7	3,10	0,15
3	3,12	0,08	8	3,14	0,16
4	2,99	0,11	9	3,09	0,13
5	3,03	0,09	10	3,20	0,16

Vì $\overline{\overline{X}} = 3,067,\ S = 0,122,\ c(4) = 0,9213$ nên các giới hạn kiểm soát là

$$LCL = 3,067 - \frac{3 \times 0,122}{2 \times 0,9213} = 2,868$$

$$UCL = 3,067 + \frac{3 \times 0,122}{2 \times 0,9213} = 3,266$$

Ta thấy tất cả $\overline{X}_i$ đều rơi vào giữa các giới hạn kiểm soát nên có thể xem quá trình trong sự kiểm soát với $\mu = 3,067$ và $\sigma = \frac{\overline{S}}{c(4)} = 0,1324$.

Bây giờ giả sử quá trình vẫn duy trì trong sự kiểm soát và các ước lượng của μ và σ là đúng. Vấn đề đặt ra là xác định tỷ lệ sản phẩm rơi vào $3 \pm 0,1$.

Khi $\mu = 3,067$ và $\sigma = 0,1324$ ta có

$$\begin{aligned} P(2,9 \leq X \leq 3,1) &= P(\frac{2,9-3,067}{0,1324} \leq \frac{X-3,067}{0,1324} \leq \frac{3,1-3,067}{0,1324}) \\ &= \Phi(0,2492) - \Phi(-1,2613) \\ &= \text{0,5984 -(1-0,8964)} \\ &= \text{0,4948} \end{aligned}$$

Vậy 49% các sản phẩm rơi vào $3 \pm 0,1$.

2. BIỂU ĐỒ KIỂM SOÁT S

Trong phần này ta xây dựng biểu đồ kiểm soát sự thay đổi phương sai của tổng thể.

Giả sử khi trong sự kiểm soát, các sản phẩm được tạo ra có đặc trưng đo được là đại lượng ngẫu nhiên có phân phối chuẩn với trung bình μ và phương sai σ^2. Nếu S_i là độ lệch tiêu chuẩn mẫu của nhóm con thứ i thì

$$S_i = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \frac{(X_{(i-1)n+j} - \overline{X}_i)^2}{n-1}}$$

thì theo mục **1.** ta có

$$E(S_i) = c(n)\sigma \tag{7.4}$$

và

$$\begin{aligned} Var(S_i) &= E(S_i^2) - [E(S_i)]^2 &(7.5)\\ &= \sigma^2 - c^2(n)\sigma^2 &(7.6)\\ &= \sigma^2[1 - c^2(n)] &(7.7) \end{aligned}$$

(7.7) có từ (7.2) và dựa vào tính chất kỳ vọng của đại lượng ngẫu nhiên có phân phối "khi−bình phương" thì bằng với bậc tự do của nó.

Khi trong sự điều khiển S_i có phân phối của một hằng (bằng $\frac{\sigma}{\sqrt{n-1}}$) nhân với căn bậc hai của đại lượng ngẫu nhiên có phân phối "khi−bình phương" với $n-1$ bậc tự do. Có thể thấy S_i ở trong độ lệch tiêu chuẩn 3 của kỳ vọng của nó với xác suất gần bằng 1.

$$P\left(E(S_i) - 3\sqrt{Var(S_i)} < S_i < E(S_i) + 3\sqrt{Var(S_i)}\right) \approx 0,99$$

Dùng công thức (7.4) và (7.5) cho $E(S_i)$ và $Var(S_i)$ thì ta có giới hạn kiểm soát dưới và giới hạn kiểm soát trên của biểu đồ S là

$$LCL = \sigma[c(n) - 3\sqrt{1 - c^2(n)}]$$

$$UCL = \sigma[c(n) + 3\sqrt{1 - c^2(n)}]$$

Các gía trị liên tiếp của S_i được đưa vào đảm bảo chúng rơi vào giữa giới hạn kiểm soát dưới và giới hạn kiểm soát trên. Khi một giá trị rơi ra ngoài, quá trình phải dừng và được khai báo ra ngoài sự kiểm soát.

⊙ **Chú ý** Khi σ chưa biết, ta có thể ước lượng σ từ $\frac{\overline{S}}{c(n)}$. Tương tự như trên, ta có thể ước lượng các giới các giới hạn kiểm soát

$$LCL = \overline{S}\left[1 - 3\sqrt{\frac{1}{c^2(n)} - 1}\right]$$

$$UCL = \overline{S}\left[1 + 3\sqrt{\frac{1}{c^2(n)} - 1}\right]$$

Khi lập biểu đồ kiểm soát $\overline{X}$, phải kiểm tra rằng k độ lệch tiêu chuẩn $S_1, S_2, \ldots, S_k$ của các nhóm con phải rơi vào trong các giới hạn kiểm soát. Nếu giá trị nào trong chúng rơi ra ngoài thì loại bỏ nhóm con đó và tính lại $\overline{S}$.

• **Ví dụ 3** *Các giá trị của $\overline{X}$ và S của 20 nhóm con kích thước 5 của quá trình mới bắt đầu cho bởi*

Nhóm con	$\overline{X}$	S	Nhóm con	$\overline{X}$	S	Nhóm con	$\overline{X}$	S
1	35,1	4,2	8	38,4	5,1	15	43,2	3,5
2	33,2	4,4	9	35,7	3,8	16	41,3	8,2
3	31,7	2,5	10	27,2	6,2	17	35,7	8,1
4	35,4	3,2	11	38,1	4,2	18	36,3	4,2
5	34,5	2,6	12	37,6	3,9	19	35,4	4,1
6	36,4	4,5	13	38,8	3,2	20	34,6	3,7
7	35,9	3,4	14	34,3	4,0			

Vì $\overline{\overline{X}} = 35,94$, $\overline{S} = 4,35$, $c(5) = 0,9400$ nên giới hạn kiểm soát dưới và giới hạn kiểm soát trên của $\overline{X}$ và S là

$$LCL(\overline{X}) = 29,731; \qquad UCL(\overline{X}) = 42,149$$

$$LCL(S) = -0,386; \qquad UCL(S) = 9,087$$

Biểu đồ S

Biểu đồ $\overline{X}$

Ta thấy $\overline{X}_{10}$ và $\overline{X}_{15}$ rơi ra ngoài giới hạn kiểm soát của $\overline{X}$ nên các nhóm con này phải được loại ra và các giới hạn kiểm soát phải được tính lại. Việc tính lại xem như bài tập, các bạn tự giải.

3. BIỂU ĐỒ KIỂM SOÁT CHO TỶ LỆ KHIẾM KHUYẾT

Biểu đồ kiểm soát $\overline{X}$ và S được dùng khi dữ liệu là các đại lượng đo được. Có trường hợp sản phẩm được sản xuất có đặc trưng về chất (tính chất nào đó) được phân loại không xảy ra (*ta gọi là khuyết*) hoặc xảy ra. Biểu đồ kiểm soát cũng được dùng cho trường hợp này.

Giả sử khi quá trình trong trong sự kiểm soát mỗi sản phẩm được tạo ra *khuyết* một cách độc lập với xác suất p.

Nếu gọi X là số sản phẩm *khuyết* trong một nhóm con kích thước n thì X là đại lượng ngẫu nhiên có phân phối nhị thức với tham số n và p.

Nếu $F = \dfrac{X}{n}$ là tỷ số của nhóm con bị *khuyết* thì trung bình và độ lệch tiêu chuẩn của nó được cho bởi

$$E(F) = \frac{E(X)}{n} = \frac{np}{n} = p$$

$$\sqrt{Var(F)} = \sqrt{\frac{Var(X)}{n^2}} = \sqrt{\frac{np(1-p)}{n^2}} = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

Do đó khi quá trình trong sự kiểm soát tỷ lệ *khuyết* trong một nhóm con của n sản phẩm có xác suất nằm giữa các giới hạn

$$LCL = p - 3\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}; \qquad UCL = p + \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

⊙ **Chú ý** Kích thước n của nhóm nhóm con thường lớn hơn nhiều so với các giá trị tiêu biểu từ 4 đến 10 được dùng trong biểu đồ kiểm soát $\overline{X}$ và S. Lý do chính của điều này là nếu p nhỏ và n là kích thước không hợp lý thì hầu hết các nhóm con sẽ có *khuyết* zero thậm chí khi quá trình ra ngoài sự kiểm soát. Vì vậy n phải được chọn lớn hơn sao cho np không gần 0 để có thể nhận ra sự thay đổi chất lượng của sản phẩm.

Để bắt đầu biểu đồ kiểm soát như vật trước hết phải ước lượng p. Ta chọn k nhóm con với $k \geq 20$ và gọi F_i là tỷ số của nhóm thứ i bị *khuyết*. Ước lượng của p cho bởi

$$\overline{F} = \frac{F_1 + \ldots + F_k}{k}$$

Vì nF_i bằng số của các *khuyết* trong nhóm i nên có thể xem

$$\overline{F} = \frac{nF_1 + \ldots + nF_k}{k} = \frac{\textit{tổng số các khuyết trong tất cả các nhóm con}}{\textit{số sản phẩm trong các nhóm con}}$$

Giới hạn kiểm soát dưới và giới hạn kiểm soát trên cho bởi

$$LCL = \overline{F} - 3\sqrt{\frac{\overline{F}(1-\overline{F})}{n}}; \qquad UCL = \overline{F} + 3\sqrt{\frac{\overline{F}(1-\overline{F})}{n}}$$

Bây giờ ta kiểm tra xem tỷ số nhóm con $F_1, F_2, \ldots, F_k$ có rơi vào giữa các giới hạn kiểm soát không? Nếu giá trị nào rơi ra ngoài thì nhóm con tương ứng với nó sẽ bị loại bỏ và $\overline{F}$ được tính lại.

• **Ví dụ 4** *Các mẫu liên tiếp của 50 đinh ốc được lấy ra từ một máy sản xuất đinh ốc tự động. Mỗi đinh ốc có tính chất nào đómà ta quan tâm nó xảy ra hoặc không xảy ra khuyết. Quan sát tính chất trên 20 sản phẩm ta có kết quả sau:*

Nhóm con	Khuyết	F	Nhóm con	Khuyết	F
1	6	0.12	11	1	0.02
2	5	0.10	12	3	0.06
3	3	0.06	13	2	0.04
4	0	0.00	14	0	0.00
5	1	0.02	15	1	0.02
6	2	0.04	16	1	0.02
7	1	0.02	17	0	0.00
8	0	0.00	18	2	0.04
9	2	0.04	19	1	0.02
10	1	0.02	20	2	0.04

Ta có

$$\overline{F} = \frac{\textit{Tổng các khuyết}}{\textit{Tổng các sản phẩm}} = \frac{34}{1000} = 0,034$$

Do đó

$$LCL = 0,034 - 3\sqrt{\frac{0,034.0.966}{50}} = -0,0429$$

$$UCL = 0,034 + 3\sqrt{\frac{0,034.0,966}{50}} = 0,1109$$

Vì tỷ số các *khuyết* trong nhóm đầu tiên rơi ra ngoài giới hạn trên nên ta loại nhóm con này ra và tính lại $\overline{F}$ nhưsau:

$$\overline{F} = \frac{34-6}{950} = 0,0295$$

Các giới hạn kiểm soát mới là

$$LCL = 0,0295 - \sqrt{\frac{0,0295(1-0,0295)}{50}} = -0,0423$$

$$UCL = 0,0295 + 3\sqrt{\frac{0,0295(1-0,0295)}{50}} = 0,1013$$

Ta thấy các nhóm con còn lại có tỷ số các khuyết rơi vào trong các giới hạn kiểm soát. Ta thừa nhận rằng khi trong sự kiểm soát tỷ số các sản phẩm bị khuyết trong một nhóm con phải dưới 0,1013.

4. BIỂU ĐỒ SỐ CÁC KHUYẾT

Trong phần này ta xét trường hợp dữ liệu bao gồm số các khuyết trong một đơn vị chứa một sản phẩm hoặc một nhóm các sản phẩm. Ví dụ số các đinh ốc bị khuyết trong một cánh máy bay hoặc số các *chip* máy tính bị khuyết được sản xuất của một nhà máy. Trường hợp thông thường có một số lớn các sản phẩm bị khuyết, trong đó mỗi sản phẩm bị khuyết với xác suất nhỏ. Do dó ta có thể xem khi quá trình trong sự kiểm soát thì số các khuyết có phân phối Poisson với trung bình λ.

Gọi X_i là số các khuyết trong đơn vị thứ i. Vì phương sai của đại lượng ngẫu nhiên có phân phối Poisson bằng với trung bình của nó nên

$$E(X_i) = \lambda, \qquad Var(X_i) = \lambda$$

Do đó khi trong sự kiểm soát mỗi X_i có xác suất cao trong $\lambda \pm 3\sqrt{\lambda}$. Vì vậy giới hạn kiểm soát dưới và giới hạn kiểm soát trên cho bởi

$$LCL = \lambda - 3\sqrt{\lambda}\,; \qquad UCL = \lambda + 3\sqrt{\lambda}$$

⊙ **Chú ý** Giống như phần trước, khi biểu đồ kiểm soát bắt đầu mà λ chưa biết ta chọn một mẫu của k đơn vị và ước lượng λ bởi

$$\overline{X} = \frac{X_1 + \ldots + X_k}{k}$$

Ta được các giới hạn kiểm soát dưới và trên

$$\overline{X} - 3\sqrt{\overline{X}}; \qquad \overline{X} + 3\sqrt{\overline{X}}$$

Nếu tất cả X_i, $i = 1, \ldots, k$ rơi vào phía trong các giới hạn này ta giả thiết quá trình trong sự kiểm soát với $\lambda = \overline{X}$. Nếu một vài giá trị rơi ra ngoài thì các giá trị này bị loại bỏ và ta tính lại $\overline{X}$.

Trong trường hợp số các khuyết trung bình trên sản phẩm nhỏ, ta kết hợp các sản phẩm lại và dùng như dữ liệu số các khuyết n đã cho. Vì tổng của các đại lượng ngẫu nhiên có phân phối Poisson cũng là đại lượng ngẫu nhiên có phân phối Poisson với cùng trung bình λ Sự kết hợp các sản phẩm như vậy có tác dụng khi số các khuyết trên sản phẩm ít hơn 25.

• **Ví dụ 5** *Số các khuyết sau được phát hiện tại một nhà máy trên các đơn vị của mỗi 10 ô tô:*

Ô tô	Các khuyết	Ô tô	Các khuyết	Ôtô	Các khuyết
1	141	8	95	15	94
2	162	9	76	16	68
3	150	10	68	17	95
4	111	11	63	18	81
5	92	12	74	19	102
6	74	13	103	20	73
7	85	14	81		

Xét xem quá trình sản xuất có trong sự kiểm soát không?

Giải

Ta có $\overline{X} = 94,4$ nên các giới hạn kiểm soát thử là

$$LCL = 94,4 - 3\sqrt{94,4} = 65,25$$

$$UCL = 94,4 + 3\sqrt{94,4} = 123,55$$

Vì ba giá trị dữ liệu đầu tiên lớn hơn UCL nên chúng bị loại đi và trung bình mẫu được tính lại. Ta được

$$\overline{X} = \frac{94,4.20 - (141 + 162 + 150)}{17} = 84,41$$

và các giới hạn kiểm soát thử mới là

$$LCL = 84,41 - 3\sqrt{84,41} = 56,85$$

$$UCL = 84,41 + 3\sqrt{84,41} = 111,97$$

Ta thấy 17 giá trị dữ liệu còn lại rơi vào trong các giới hạn kiểm soát. Do đó có thể nói rằng bây giờ quá trình trong sự kiểm soát với giá trị trung bình $84,41$. Tuy nhiên dường như các giá trị trung bình của các khuyết cao từ ban đầu trước khi ổn định để đi vào sự kiểm soát, dường như có vẻ tin tưởng rằng giá trị dữ liệu X_4 cũng cao trước khi đi vào sự kiểm soát. Trong trường hợp này,đẻ thận trọng ta loại bỏ X_4 và tính lại. Dựa vào việc tính lại 16 dữ liệu này ta nhận được

$$\overline{X} = 82,56$$

$$LCL = 82,56 - 3\sqrt{82,56} = 55,30$$

$$UCL = 82,56 + 3\sqrt{82,56} = 109,82$$

và quá trình trong sự kiểm soát với giá trị trung bình 82,56.

5. BÀI TẬP

1. Xét các dữ liệu về giá của 10 mẫu cho dưới đây

Mẫu	Giá			
1	10,6	10,1	11,3	9,1
2	10,2	11,6	10,5	10,5
3	10,1	9,8	8,8	9,3
4	10,1	9,5	10,3	10,6
5	8,7	11,6	9,7	9,3
6	10,1	9,8	10,8	8,9
7	11,2	11,5	10,9	11,6
8	10,6	9,6	10,3	9,9
9	9,8	7,7	9,4	9,9
10	10,0	8,4	10,6	8,8

Hãy tìm giới hạn kiểm soát trên và giới hạn kiểm soát dưới cho $\overline{X}$.

2. Giả sử các sản phẩm được sản xuất có phân phối chuẩn với trung bình 35 và độ lệch tiêu chuẩn 3. Để giám sát quá trình ta chọn mẫu các nhóm con kích thước 5. Trung bình của 20 nhóm con đầu tiên cho bởi bảng sau:

Số nhóm con	$\overline{X}$	Số nhóm con	$\overline{X}$
1	34,0	11	35,8
2	31,6	12	35,8
3	30,8	13	34,0
4	33,0	14	35,0
5	35,0	15	33,8
6	32,2	16	31,6
7	33,0	17	33,0
8	32,6	18	33,2
9	33,8	19	31,8
10	35,8	20	35,6

Hỏi quá trình có trong sự kiểm soát hay không?

3. Các giá trị của $\overline{X}$ và S đối với 20 nhóm con kích thước 5 cho bởi bảng sau

Nhóm con	$\overline{X}$	S	Nhóm con	$\overline{X}$	S
1	33,8	5,1	11	29,7	5,1
2	37,2	5,4	12	31,6	5,3
3	40,4	6,1	13	38,4	5,8
4	39,3	5,5	14	40,2	6,4
5	41,1	5,2	15	35,6	4,8
6	40,4	4,8	16	36,4	4,6
7	35,0	5,0	17	37,2	6,1
8	36,1	4,1	18	31,3	5,7
9	38,2	7,3	19	33,6	5,5
10	32,4	6,6	20	36,7	4,2

a) Xác định các giới hạn kiểm soát cho $\overline{X}$.

b) Xác định các giới hạn kiểm soát cho S.

4. Dữ liệu sau giới thiệu số khiếm khuyết của "con chip" điện tử được sản xuất trong 15 ngày gần đây: 121, 133, 98, 85, 101, 78, 66, 82, 90, 78, 85, 81, 100, 75, 89. Hãy kết luận xem quá trình có trong sự kiểm soát hay không? Hãy chỉ ra các giới hạn kiểm soát cho các sản phẩm trong tương lai?

◙ TRẢ LỜI BÀI TẬP

1. 8,8292 ; 11,2458.

2. Không.

4. LCL = 57,5 ; UCL= 112,9.