BUỔI 5: PHÂN PHỐI XÁC SUẤT

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. Các phân phối rời rạc

a) Phân phối nhị thức

Đại lượng ngẫu nhiên $X = \{0, 1,...,n\}$ được gọi là có phân phối nhị thức, nếu tồn tại số p $\in (0, 1)$ sao cho

$$P(X = k) = C_n^k p^k(1-p)^{n-k},\ k = \overline{0,n}.$$

Khi đó ta kí hiệu $X \in B(n, p)$.

Nếu X có phân phối nhị thức thì

$$E(X) = np,\ D(X) = npq,\ \text{trong đó } q = 1 - p.$$

b) Phân phối siêu bội

Đại lượng ngẫu nhiên $X = \{0, 1,...,n\}$ được gọi là có phân phối siêu bội, nếu tồn tại các số tự nhiên N, M sao cho $n \le M \le N$ và

n trich tu tong so N, M qua lon (xem bai mau 1)

$$P(X = k) = \frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n},\ k = \overline{0,n}.$$

Khi đó ta kí hiệu $X \in H(N, M, n)$.

Nếu X có phân phối siêu bội thì

$$E(X) = np,\ D(X) = npq\frac{N-n}{N-1},\ \text{trong đó } p = \frac{M}{N},\ q = 1 - p.$$

c) Phân phối Poisson

Đại lượng ngẫu nhiên $X = \{0, 1,...,n,...\}$ được gọi là có phân phối Poisson, nếu tồn tại số a > 0 sao cho

$$P(X = k) = \frac{e^{-a}a^k}{k!},\ k = 0, 1, ...$$

Khi đó ta kí hiệu $X \in P(a)$.

Nếu X có phân phối Poisson thì

$$E(X) = a,\ D(X) = a.$$

2. Các phân phối liên tục

a) Phân phối đều

Đại lượng ngẫu nhiên X được gọi là có phân phối đều trên [a, b], nếu hàm mật độ xác suất của X có dạng

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & ,\text{khi } x \in [a, b] \\ 0 & ,\text{khi } x \notin [a, b] \end{cases}$$

Nếu X có phân phối đều trên [a, b] thì

$$E(X) = \frac{a+b}{2}, D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

b) Phân phối mũ

Đại lượng ngẫu nhiên X được gọi là có phân phối mũ, nếu hàm mật độ xác suất của X có dạng

$$f(x) = \begin{cases} \lambda\ e^{-\lambda\ x} & , \text{khi } x \geq 0, \\ 0 & , \text{khi } x < 0, \end{cases}$$

trong đó $\lambda > 0$.

Nếu X có phân phối mũ với tham số λ thì

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}, D(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

c) Phân phối chuẩn

Đại lượng ngẫu nhiên X được gọi là có phân phối chuẩn, nếu hàm mật độ xác suất của X có dạng

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \sigma > 0.$$

Khi đó ta kí hiệu $X \in N(\mu, \sigma^2)$.

Nếu X có phân phối chuẩn thì

$$E(X) = \mu, D(X) = \sigma^2.$$

Khi $X \in N(0 ; 1)$ ta còn nói X có phân phối chuẩn chuẩn tắc. Khi ấy, hàm mật độ xác suất của X có dạng

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

và được gọi là hàm mật độ Gauss.

Nếu f(x) là hàm mật độ Gauss thì hàm $F(u) = \int_{-\infty}^{u} f(x)\ dx$ được gọi là hàm phân phối Gauss, hàm $\Phi(u) = \int_{0}^{u} f(x)\ dx$ được gọi là hàm Laplace.

Ta có $F(u) = \frac{1}{2} + \Phi(u)$.

Nếu $X \in N(0 ; 1)$ thì

(1) $P(a < X < b) = \Phi(b) - \Phi(a)$;

(2) $P(|X| < a) = 2\Phi(a)$, $a > 0$.

Nếu $X \in N(\mu, \sigma^2)$ thì

(1) $P(a < X < b) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$;

(2) $P(|X-\mu| < \varepsilon) = 2\,\Phi\,\frac{\varepsilon}{\sigma}$;

(3) $P(|X-\mu| < K\sigma) = 2\,\Phi(K)$.

d) Phân phối "khi bình phương"

Đại lượng ngẫu nhiên X^2 được gọi là có phân phối "khi bình phương" n bậc tự do, nếu

$$X^2 = X_1^2 + X_2^2 + ... + X_n^2,$$

trong đó $X_1, X_2, ..., X_n$ là các đại lượng ngẫu nhiên độc lập có phân phối chuẩn chuẩn tắc.

Khi ấy ta kí hiệu $X^2 \in \chi^2(n)$.

Hàm $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\,dt$ được gọi là hàm Gamma.

Nếu $X^2 \in \chi^2(n)$ thì

(1) Hàm mật độ xác suất của X^2 là

$$f_n(x) = \begin{cases} e^{-\frac{x}{2}} \quad x^{\frac{n}{2}-1} & , \text{ nếu } \quad x > 0, \\ 0 & , \text{ nếu } \quad x \le 0. \end{cases}$$

(2) $E(X^2) = n$, $D(X^2) = 2n$.

e) Phân phối Student

Đại lượng ngẫu nhiên X được gọi là có phân phối Student n bậc tự do, nếu $X = \frac{U\sqrt{n}}{\sqrt{V}}$,

trong đó $U \in N(0; 1)$, $V \in \chi^2(n)$.

Khi đó ta kí hiệu $X \in T(n)$.

Nếu $X \in T(n)$ thì

(1) Hàm mật độ xác suất của X là

$$f_n(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}};$$

(2) $E(X) = 0$, $D(X) = \frac{n}{n-2}$.

3. Các định lý giới hạn

a) Bất đẳng thức Chebyshev.

Với mọi $\varepsilon > 0$ và mọi đại lượng ngẫu nhiên X, ta có

$$P(|X - E(X)| \ge \varepsilon) \le \frac{D(X)}{\varepsilon^2}.$$

b) định lý Chebyshev

Nếu $X_1, X_2, \ldots$ là dãy các đại lượng ngẫu nhiên độc lập từng đôi, có phương sai bị chặn đều (tức là tồn tại $C > 0$ để $D(X_K) \le C$ với mọi k) thì với mọi $\varepsilon > 0$ ta có

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{K=1}^{n} X_K - \frac{1}{n}\sum_{K=1}^{n} E(X_K)\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

Khi ấy, với n khá lớn ta có xấp xỉ sau đây

$$\frac{1}{n}\sum_{K=1}^{n} X_K \approx \frac{1}{n}\sum_{K=1}^{n} E(X_K).$$

c) Định lý Bernoulli

Nếu m là số lần thành công trong dãy n phép thử Bernoulli với xác suất thành công p thì

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

Khi đó, với n khá lớn ta có xấp xỉ

$$p \approx \frac{m}{n}.$$

d) Định lý giới hạn trung tâm (Liapounov)

Giả sử $X_1, X_2, \ldots$ là các đại lượng ngẫu nhiên.

Đặt

$$\mu_K = E(X_k),\ \sigma_K^2 = D(X_K),\ C_K = E\left|X_K - \mu_K\right|^3$$

$$Y_n = \sum_{K=1}^{n} X_K,\ e_n = \sum_{K=1}^{n} \mu_K,\ d_n^2 = \sum_{K=1}^{n} \sigma_K^2.$$

Nếu $X_1, X_2, \ldots$ độc lập từng đôi và

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{K=1}^{n} C_K}{\left(\sum_{K=1}^{n} \sigma_K^2\right)^{3/2}} = 0$$

thì

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(a < \frac{Y_n - e_n}{d_n} < b\right) = \Phi(b) - \Phi(a),$$

với mọi a, b (a<b), Φ là hàm Laplace.

Khi đó, với n khá lớn có thể xem

$$\frac{Y_n - e_n}{d_n} \in N(0\,;\,1) \quad \text{hay} \quad Y_n \in N\left(e_n, d_n^2\right).$$

Đặc biệt, nếu $E(X_K) = \mu$, $D(X_K) = \sigma^2$ với mọi k, thì với n khá lớn có thể xem

$$\frac{1}{n}(X_1 + X_2 + ... + X_n) \in N\left(\mu\ , \frac{\sigma^2}{n}\right).$$

Trong thống kê ta xem n là đủ lớn nếu $n \geq 30$.

4. Các công thức tính gần đúng xác suất

a) Phân phối siêu bội và phân phối nhị thức

Cho $X \in H(N, M, n)$. Nếu N khá lớn so với n, ta có thể xem $X \in B\left(n, \frac{M}{n}\right)$. Khi đó, ta có công thức gần đúng

$$P(X = k) = \frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n} \approx C_N^k \left(\frac{M}{N}\right)^k \left(1 - \frac{M}{N}\right)^{n-k}$$

b) Phân phối nhị thức và phân phối Poisson

Cho $X \in B(n, p)$. Nếu p khá bé và n khá lớn có thể xem $X \in P(np)$. Khi đó

$$P(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-K} \approx \frac{e^{-np}(np)^k}{k!}.$$

c) Phân phối nhị thức và phân phối chuẩn

Cho $X \in B(n, p)$. Khi n khá lớn ta có

$$P(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-K} \approx \frac{1}{\sqrt{np(1-p)}} f\left(\frac{k - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right),$$

$$P(k_1 \leq X \leq k_2) = \sum_{K=K_1}^{K_2} C_n^K p^k (1-p)^{n-K} \approx$$

$$\approx \Phi\left(\frac{k_2 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - \Phi\left(\frac{k_1 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

trong đó f là hàm mật độ Gauss, Φ là hàm Laplace

B. CÁC BÀI GIẢI MẪU

1. Áp dụng các phân phối rời rạc

Bài 1. *Một lô hàng có 500 sản phẩm, trong đó có 400 sản phẩm loại một. Lấy ngẫu nhiên từ lô hàng đó ra 200 sản phẩm để kiểm tra. Gọi X là số sản phẩm loại một có trong 200 sản phẩm đó. Hãy tính kì vọng và phương sai của X.*

Giải

Ta có $X \in H(500, 400, 200)$, tức là X có phân phối siêu bội với $N = 500$, $M = 400$, $n = 200$.

Suy ra

$$p = \frac{M}{N} = 0{,}8\ ; \quad q = 1 - p = 0{,}2.$$

Vậy

$$E(X) = np = 200 \cdot 0{,}8 = 160,$$

$$D(X) = npq\,\frac{N-n}{N-1} = 200\,.\,0{,}8\,.\,0{,}2\,.\,\frac{300}{499} \approx 19{,}238.$$

Bài 2. *Một xạ thủ bắn 40 viên đạn. Biết xác suất bắn trúng mục tiêu của mỗi viên đạn đều là 0,7. Tính kì vọng, phương sai, độ lệch của số viên đạn trúng mục tiêu.*

Giải

Ta có $X \in B(40\,;\,0{,}7)$, tức là X có phân phối nhị thức với n = 40, p = 0,7. Do đó

$E(X) = np = 40\,.\,0{,}7 = 28,$

$D(X) = np(1-p) = 40\,.\,0{,}7\,.\,0{,}3 = 8{,}4\,,$

$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = 2{,}898.$

2. Áp dụng các phân phối liên tục

Bài 3. *Trọng lượng của một loại sản phẩm do một nhà máy sản xuất là đại lượng ngẫu nhiên có phân phối chuẩn với kì vọng là 250 gam và phương sai là 25. Sản phẩm được gọi là loại một nếu trọng lượng từ 245 gam đến 260 gam. Tìm tỉ lệ sản phẩm loại một của nhà máy đó.*

Giải

Gọi X là trọng lượng của loại sản phẩm đó. Theo đề bài $X \in N(250, 25)$. Ta cần tìm $P(245 \le X \le 260)$.

Ta có a = 245 , b = 260 , $\mu = 250$, $\sigma = \sqrt{25} = 5$.

Do đó

$$P(245 \le X \le 260) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right) = \Phi(2) - \Phi(-1) = \Phi(2) + \Phi(1).$$

Tra bảng hàm số Laplace, ta được $\Phi(1) = 0{,}3413$, $\Phi(2) = 0{,}4772$.

Vậy, tỉ lệ sản phẩm loại một của nhà máy là

$P(245 \le X \le 260) = 0{,}8185.$

Bài 4. *Một loại chi tiết máy được xem là đạt tiêu chuẩn, nếu đường kính của nó sai lệch so với đường kính thiết kế không quá 0,33mm. Cho biết đường kính của loại chi tiết máy đó là đại lượng ngẫu nhiên có phân phối chuẩn với độ lệch là 0,3mm.*

Tìm số chi tiết đạt tiêu chuẩn trung bình khi sản xuất 200 chi tiết.

Giải

Gọi X là số chi tiết đạt tiêu chuẩn trong số 200 chi tiết sản xuất ra thì $X \in B(200, p)$, trong đó p là xác suất sản xuất được một chi tiết đạt tiêu chuẩn.

Rõ ràng, số chi tiết đạt tiêu chuẩn trung bình khi sản xuất 200 chi tiết là kì vọng của X. Để tính E(X), trước hết ta tìm p.

Gọi Y là đường kính của loại chi tiết máy đó. Theo đề bài, $Y \in N(\mu\,;\,0{,}3^2)$. Do đó

$$p = P(|Y-\mu| < 0{,}33) = 2\Phi\left(\frac{0{,}33}{0{,}3}\right) = 2\Phi(1{,}1)$$

Tra bảng hàm số Laplace, ta được $\Phi(1{,}1) = 0{,}3643$.

Suy ra

$p = 0{,}7286;\quad E(X) = np = 200\,.\,0{,}7286 = 145{,}72.$

Như vậy, khi sản xuất 200 chi tiết, trung bình có khoảng 146 chi tiết đạt tiêu chuẩn.

3. Áp dụng các định lý giới hạn

Bài 5. *Giả sử tiền điện mà một gia đình phải trả trong một tháng là một đại lượng ngẫu nhiên với trung bình 160 ngàn đồng và độ lệch 1 ngàn đồng. Áp dụng bất đẳng thức Chebyshev, hãy xác định số M nhỏ nhất để với xác suất không bé hơn 0,99, số tiền điện phải trả trong một năm của gia đình đó không quá M đồng.*

Giải

Gọi X_K là số tiền điện phải trả trong tháng k, $k = \overline{1,12}$, S là số tiền điện phải trả trong một năm.

Ta có $X_K \in N(160\,;\,1^2)$, $k = \overline{1,12}$, nên

$$S = \sum_{k=1}^{12} X_k$$

là đại lượng ngẫu nhiên có

$$\mu = E(S) = 160.12 = 1920,$$
$$\sigma^2 = D(S) = 1^2 . 12 = 12.$$

Theo đề bài, ta cần tìm M nhỏ nhất để

$$P(S \le M) \ge 0{,}99.$$

Giả sử $\varepsilon > 0$. Áp dụng bất đẳng thức Chebyshev, ta có

$$P(|S - 1920| \ge \varepsilon) \le \frac{12}{\varepsilon^2},$$

hay

$$P(|S - 1920| \le \varepsilon) \ge 1 - \frac{12}{\varepsilon^2}.$$

Mặt khác, vì

$$|S - 1920| \le \varepsilon \Leftrightarrow 1920 - \varepsilon \le S \le 1920 + \varepsilon,$$

nên bài toán tìm M được đưa về bài toán tìm ε nhỏ nhất sao cho

$$P(|S - 1920| \le \varepsilon) \ge 0{,}99.$$

Muốn vậy, ta phải có

$$1 - \frac{12}{\varepsilon^2} \ge 0{,}99.$$

Suy ra $\varepsilon \ge 34{,}64$

Vậy giá trị nhỏ nhất của ε là 34,64.

Từ đó, giá trị nhỏ nhất của M là

$1920 + \varepsilon = 1954{,}64$ (ngàn đồng).

4. Tính gần đúng xác suất

Nếu X có phân phối nhị thức, $X \in B(n, p)$ với p khá bé, n khá lớn thì áp dụng phân phối Poisson để tính xác suất $P(X = k)$.

Nếu $X \in B(n, p)$ với p không quá lớn, không quá bé, n khá lớn thì áp dụng hàm mật độ Gauss để tính $P(X=k)$ hoặc áp dụng hàm Laplace để tính $P(k_1 \le X \le k_2)$.

Bài 6. *Một chung cư có 160 hộ gia đình. Xác suất để mỗi hộ có sự cố về điện vào buổi tối là 0,02. Tính xác suất để trong một buổi tối có*

a) 4 gia đình gặp sự cố về điện.

b) từ 2 đến 5 gia đình gặp sự cố về điện.

Giải

Gọi X là số gia đình gặp sự cố về điện trong một buổi tối ở chung cư đó.

a) Cách thứ nhất. Ta có $X \in B(160\ ;\ 0{,}02)$ nên áp dụng phân phối nhị thức, ta được

$$P(X = 4) = C_{160}^{4}\ 0{,}02^4\ 0{,}98^{156} \approx 0{,}17999.$$

Cách thứ hai. Vì n =160 khá lớn, p = 0,02 khá bé nên X có xấp xỉ phân phối Poisson với

$$a = np = 160\ .\ 0{,}02 = 3{,}2.$$

Tra bảng phân phối Poisson, ta được

$$P(X = 4) = 0{,}17809.$$

Nếu không tra bảng, áp dụng công thức, ta được

$$P(X = 4) = \frac{e^{-3,2}\,3{,}2^4}{41} = 0{,}17809.$$

b) Áp dụng phân phối Poisson, ta được

$$P(2 \le X \le 5) = \sum_{k=2}^{5} P(X = k) = e^{-3,2}\left(\frac{3{,}2^2}{2!} + \frac{3{,}2^3}{3!} + \frac{3{,}2^4}{4!} + \frac{3{,}2^5}{5!}\right) = 0{,}72339.$$

Bài 7*. Một đề thi trắc nghiệm có 100 câu hỏi, xác suất trả lời đúng mỗi câu của một sinh viên là 0,4. Tính xác suất để sinh viên đó trả lời đúng*

a) 50 câu hỏi.

b) ít nhất 50 câu hỏi.

Giải

Xem phép thử là trả lời một câu hỏi, ta có n = 100 phép thử độc lập. Gọi A là biến cố sinh viên trả lời đúng câu hỏi đó, theo đề bài, P(A) = p = 0,4.

Gọi X là số câu sinh viên trả lời đúng thì $X \in B(100\ ;\ 0{,}4)$. Vì n khá lớn và p không quá lớn, không quá bé nên X có xấp xỉ phân phối chuẩn, tức là $X \in N(\mu, \sigma^2)$, trong đó

$$\mu = np = 40, \quad \sigma^2 = np(1 - p) = 24.$$

a) Áp dụng hàm mật độ Gauss, ta có

$$P(X = 50) = \frac{1}{\sqrt{24}} f\left(\frac{50 - 40}{\sqrt{24}}\right) = \frac{1}{\sqrt{24}} f(2{,}04).$$

Tra bảng hàm số Gauss ta được

$$f(2{,}04) = 0{,}0498.$$

Vậy

$$P(X = 50) = \frac{0{,}0498}{\sqrt{24}} = 0{,}0102.$$

b) Áp dụng hàm số Laplace, ta có

$$P(50 \le X \le 100) = \Phi\left(\frac{100-40}{\sqrt{24}}\right) - \Phi\left(\frac{50-40}{\sqrt{24}}\right) = \Phi\,(12{,}25) - \Phi\,(2{,}04).$$

Tra bảng hàm số Laplace ta được

$$\Phi\,(12{,}25) = 0{,}5\ ;\ \Phi(2{,}04) = 0{,}4793\,.$$

Vậy

$$P(60 \le X \le 100) = 0{,}0207.$$

Bài 8*. Sản phẩm của một nhà máy được đóng thành từng hộp, mỗi hộp 10 sản phẩm. Gọi X là số sản phẩm loại một có trong hộp. Cho biết X có phân phối xác suất như sau*

X	7	8	9	10
P	0,2	0,3	0,3	0,2

Tiến hành kiểm tra 300 hộp theo cách sau.

Mỗi hộp chọn ngẫu nhiên 3 sản phẩm để kiểm tra. Nếu thấy có ít nhất 2 sản phẩm loại một thì nhận hộp đó.

a) Tìm xác suất để có ít nhất 240 hộp được nhận.

b) Tìm số hộp được nhận có khả năng lớn nhất.

Giải

a) Xem phép thử là kiểm tra một hộp, ta có n = 300 phép thử độc lập. Gọi N là biến cố nhận hộp. Ta tính P(N) = p.

Gọi N_i là biến cố có i sản phẩm loại một trong 3 sản phẩm được kiểm tra ở mỗi hộp, i= $\overline{0,3}$.

Ta có

$$N = N_2 + N_3$$

và N_2, N_3 xung khắc. Do đó

$$P(N) = P(N_2) + P(N_3).$$

Gọi M_k là biến cố có k sản phẩm loại một trong số 10 sản phẩm của hộp, k = $\overline{0,10}$. Theo đề bài, M_7, M_8, M_9, M_{10} tạo thành một nhóm đầy đủ (vì chúng xung khắc từng đôi và tổng xác suất bằng 1). Áp dụng công thức xác suất đầy đủ, ta có

$$P(N_2) = P(M_7)P(N_2/M_7) + \ldots + P(M_{10})P(N_2/M_{10}),$$
$$P(N_3) = P(M_7)P(N_3/M_7) + \ldots + P(M_{10})P(N_3/M_{10}).$$

Các xác suất $P(M_k)$, k = $\overline{7,10}$, đã được cho trong bảng phân phối xác suất của X ; bằng định nghĩa ta tính được

$$P(N_i/M_k)\ ,\ i = 2,3\ ;\ k = \overline{7,10}\,.$$

Chẳng hạn,

$$P(N_2/M_7) = \frac{C_7^2C_3^1}{C_{10}^3}, \quad P(N_3/M_7) = \frac{C_7^3}{C_{10}^3}.$$

Suy ra

$$P(N_2) = 0{,}2.\frac{C_7^2C_3^1}{C_{10}^3} + 0{,}3\frac{C_8^2C_2^1}{C_{10}^3} + 0{,}3\frac{C_9^2C_1^1}{C_{10}^3} + 0{,}2.0 = 0{,}335,$$

$$P(N_3) = 0{,}2.\frac{C_7^3}{C_{10}^3} + 0{,}3.\frac{C_8^3}{C_{10}^3} + 0{,}3\frac{C_9^3}{C_{10}^3} + 0{,}2.1 = 0{,}41.$$

Vậy

$$P(N) = 0{,}335 + 0{,}41 = 0{,}745.$$

. Gọi Y là số hộp được nhận trong 300 hộp đã kiểm tra.

Ta cần tìm $P(240 \le Y \le 300)$.

Ta có $Y \in B(300 ; 0{,}745)$, vì n khá lớn , p không quá lớn, không quá bé nên có thể xem Y có xấp xỉ phân phối chuẩn $Y \in N(\mu, \sigma^2)$, với $\mu = np = 223{,}5$;

$$\sigma^2 = np(1 - p) = 56{,}9925, \quad \sigma = 7{,}5493.$$

Áp dụng hàm số Laplace, ta được

$$P(275 \le Y \le 300) = \Phi\left(\frac{300 - 223{,}5}{7{,}5493}\right) - \Phi\left(\frac{240 - 223{,}5}{7{,}5493}\right) =$$

$$= \Phi\ (10{,}13) - \Phi\ (2{,}186) = 0{,}5 - 0{,}4854 = 0{,}0146.$$

c) Ta có

$$Y \in B(300 ; 0{,}745) \text{ và } n = 300,\ p = 0{,}745,\ q = 0{,}255$$

nên

$$[np - q] = [223{,}245] = 223.$$

Vậy, số hộp được nhận có khả năng lớn nhất là 223 hoặc 224 hộp.

C. BÀI TẬP

1. Một lô hàng có 700 chi tiết, trong đó có 250 chi tiết đạt tiêu chuẩn. Lấy ngẫu nhiên từ lô hàng đó ra 80 chi tiết, gọi X là số chi tiết đạt tiêu chuẩn lấy được. Tính kì vọng, phương sai của X.

?

2. Cho X là đại lượng ngẫu nhiên với $E(X) = 5$, $D(X) = 0{,}16$.

a) Tính xác suất nhỏ nhất để $X \in (3 ; 7)$.

b) Chứng minh rằng

$$P(2 < X < 8) \ge 0{,}98.$$

c) Chứng minh rằng, nếu $X_1, X_2, ..., X_9$ là các đại lượng ngẫu nhiên độc lập có cùng phân phối xác suất với X, thì

$$P\left(3 < \frac{X_1 + X_2 + ... + X_9}{9} < 7\right) \ge 0{,}99.$$

3. Trọng lượng của một toa tàu là một đại lượng ngẫu nhiên có giá trị trung bình bằng 65 tấn và độ lệch là 0,9 tấn. Tìm xác suất để trọng lượng toa tàu không vượt quá 70 tấn nhưng vẫn lớn hơn 60 tấn, biết rằng trọng lượng này tuân theo luật phân phối chuẩn.

4. Xác suất để một hạt thóc giống bị lép là 0,006. Tính xác suất sao cho trong số 1000 hạt thóc giống có

a) đúng 6 hạt lép.

b) không ít hơn 3 hạt lép.

c) không nhiều hơn 5 hạt lép.

5. Xác suất sinh một bé trai là 0,51. Tìm xác suất để trong 200 em bé, số bé trai ít hơn số bé gái.

? **6.** Một đề thì gồm 45 câu hỏi, với mỗi câu hỏi thí sinh cần chọn một trong bốn câu trả lời kèm theo, trong đó chỉ có một câu trả lời đúng.

Một sinh viên hoàn toàn không học bài, khi đi thi chọn ngẫu nhiên một trong bốn câu trả lời. Tìm xác suất

a) sinh viên đó trả lời đúng 30 câu hỏi.

b) sinh viên đó trả lời đúng ít nhất 23 câu hỏi.

c) sinh viên đó trả lời đúng nhiều nhất 20 câu hỏi.

? **7**. Một máy tính điện tử gồm 10000 bóng bán dẫn, chia làm ba loại.

Loại một có 1000 bóng, xác suất hỏng của mỗi bóng là 0,0005. Loại hai có 3000 bóng, xác suất hỏng tương ứng là 0,0003. Loại ba có xác suất hỏng tương ứng là 0,0001.

Máy tính ngừng làm việc nếu có ít nhất hai bóng bán dẫn bị hỏng.

Tìm xác suất máy tính ngừng làm việc, nếu các bóng hỏng hay tốt độc lập với nhau.

8. Cho đại lượng ngẫu nhiên X có phân phối đều trên [0, 1]. Tìm xác suất sao cho trong 100 lần quan sát về X thì có 60 lần X nhận giá trị thuộc (0,2 ; 0,7).

9. Một máy sản xuất hàng loạt sản phẩm. Các sản phẩm được xem là đạt tiêu chuẩn nếu trọng lượng của nó sai lệch so với trọng lượng quy định không quá 0,588. Biết trọng lượng của sản phẩm do máy sản xuất ra là một đại lượng ngẫu nhiên có phân phối chuẩn với phương sai 0,09. Tìm xác suất để trong 10 sản phẩm do máy sản xuất sẽ có ít nhất 4 sản phẩm đạt tiêu chuẩn.

10. Ở một xí nghiệp may xuất khẩu, sau khi quần áo may xong, người ta đóng thành từng hộp, mỗi hộp 3 bộ quần áo. Khi đóng hộp có thể xảy ra hiện tượng xếp áo quần nhầm số. Cho biết xác suất xếp áo đúng số là 0,7, xếp quần đúng số là 0,8 và hộp sẽ được chấp nhận nếu số lượng quần xếp đúng số bằng số lượng áo xếp đúng số.

a) Kiểm tra ngẫu nhiên 100 hộp của xí nghiệp. Tìm xác suất có 50 hộp được chấp nhận.

b) Phải kiểm tra ít nhất bao nhiêu hộp để xác suất có ít nhất một hộp được chấp nhận lớn hơn hay bằng 0,9.