XÁC SUẤT THỐNG KÊ VÀ ỨNG DỤNG

CÁC PHÂN PHỐI XÁC SUẤT ĐẶC BIỆT

Buổi học 5

CÁC PHÂN PHỐI XÁC SUẤT ĐẶC BIỆT

CÁC PHÂN PHỐI RỜI RẠC

1. PHÂN PHỐI NHỊ THỨC
2. PHÂN PHỐI SIÊU BỘI
3. PHÂN PHỐI POISSON

CÁC PHÂN PHỐI LIÊN TỤC

4. PHÂN PHỐI CHUẨN
5. PHÂN PHỐI CHI BÌNH PHƯƠNG
6. PHÂN PHỐI STUDENT
7. XẤP XỈ GIỮA CÁC PHÂN PHỐI

DÃY PHÉP THỬ BERNOULLI

Một dãy n – phép thử được gọi là dãy phép thử Bernoulli nếu thỏa 3 điều kiện sau:

- Các phép thử độc lập với nhau.
- Mỗi phép thử chỉ có 2 kết cục A và $A^/$
- Xác suất biến cố A xảy ra trong mỗi phép thử không đổi là P(A) = p.

PHÂN PHỐI NHỊ THỨC

- Thực hiện dãy n–phép thử Bernoulli.
- Gọi X là số lần thành công (xuất hiện) của biến cố A thì X = {0, 1, 2,..., n}.

Ta nói X là ĐLNN có *phân phối nhị thức*. Ký hiệu là X ~ B(n, p).

- Xác suất để biến cố A xuất hiện đúng k lần được cho bởi công thức

$$P(X=k)=C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \qquad (1)$$

- Trong trường hợp đặc biệt, n = 1 thì luật phân phối nhị thức được gọi là *luật phân phối Bernoulli*.

PHÂN PHỐI NHỊ THỨC

VÍ DỤ 4.1. Tung một đồng xu công bằng 6 lần. Tìm xác suất để có đúng 2 lần xuất hiện mặt ngửa.

- Gọi X là số lần xuất hiện mặt ngửa trong 6 lần tung, X = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6} và X ~ B(6, ½)
- Vậy xác suất cần tìm là

$$P(X=2)=C_6^2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^{6-2}=\frac{6!}{2!4!}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{15}{64}$$

là một phần của khai triển nhị thức

$$(q+p)^n=q^n+C_n^1q^{n-1}p+C_n^2q^{n-2}p^2+\ldots+p^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^kp^kq^{n-k}$$

PHÂN PHỐI NHỊ THỨC

- X là ĐLNN rời rạc và $X \sim B(n, p)$,
  i. Kỳ vọng của ĐLNN X là $EX = np$.
  ii. Phương sai của ĐLNN X là
  $VarX = npq$, với $q = 1-p$.
  iii. $np - q \le Mod(X) \le np - q + 1$.

VÍ DỤ 4.2. Tung một đồng xu 100 lần. Gọi X là số lần mặt ngửa xuất hiện trong 100 lần tung thì $X = \{0, 1, 2, ..., 100\}$ và $X \sim B(100, ½)$.

- Trung bình mặt ngửa xuất hiện là

$$EX = (100)(½) = 50 \text{ lần.}$$

- Phương sai $VarX = 100(½)(½) = 25 \Rightarrow \sigma = 5$
- Số lần ngửa tin chắc nhất là $modX=50$ lần

PHÂN PHỐI SIÊU BỘI

- Xét một tập gồm N phần tử trong đó có M phần tử có tính A.
- Chọn ngẫu nhiên không hoàn lại n phần tử. Gọi X là số pt có t/c A trong n phần tử lấy ra thì X là ĐLNN rời rạc và X = {0,1,2,...,n}.Ta nói X có PP siêu bội, ký hiệu X ~ H (N, M, n).

Gọi k là số phần tử có tính chất A có trong n phần tử được chọn ra (k = 0,1,...,n) thì ta có

$$P(X = k) = \frac{C_M^k . C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}$$

PHÂN PHÔI SIÊU BỘI

Cho X là ĐLNN rời rạc và X ~ H(N, M, n).

- **Kỳ vọng của đại lượng ngẫu nhiên X là**

$$EX = np.$$

- **Phương sai của đại lượng ngẫu nhiên X là**

$$VarX = npq\frac{N-n}{N-1}$$

- **Độ lệch chuẩn** v́ ť$p = \frac{M}{N}$ va $q = 1-p$

$$\sigma = \sqrt{npq\frac{N-n}{N-1}}$$

PHÂN PHỐI SIÊU BỘI

VÍ DỤ 4.3. Một công ty có 40 kiện hàng trong đó có 8 kiện chất lượng không đạt tiêu chuẩn. Phân phối ngẫu nhiên 10 kiện hàng này cho một cửa hàng. Tính xác suất để cửa hàng đó nhận đúng 2 kiện hàng không đạt tiêu chuẩn.

- Gọi X là số kiện hàng không đạt tiêu chuẩn có trong 10 kiện hàng được phân phối. Khi đó X = {0, 1, 2, ... ,8} là ĐLNN rời rạc có luật phân phối X~ H(40, 8,10).
- Xác suất cần tìm: $P(X=2)=\dfrac{C_8^2.C_{32}^8}{C_{40}^{10}}=0{,}347441$

PHÂN PHỐI POISSON

- **Định nghĩa.** Đại lượng ngẫu nhiên rời rạc X có phân phối Poisson, ký hiệu là X ~ P(λ), nếu X nhận các giá trị 0, 1, 2,...,n với xác suất tương ứng

$$P(X=k)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$

Với k $\le$ n và λ là hằng số dương.

- **Định lý.** Cho X là đại lượng ngẫu nhiên có luật phân phối xác suất X ~ P(λ).

$$EX = VarX = \lambda$$

PHÂN PHỐI POISSON

VÍ DỤ 4.4. Qua thống kê nhiều năm, một cửa hàng Vina Giày trung bình một giờ bán được 4 đôi giày. Tính xác suất để trong một giờ cửa hàng này bán được nhiều hơn 5 đôi.

- Gọi X là số đôi giày cửa hàng bán được trong một giờ thì X = {0,1, 2, ..., n} và X ~ P(4).
- Xác suất cần tìm:

$$P(X>5)=1-P(X\leq 5)=1-\left[P(X=0)+\ldots+P(X=5)\right]$$

$$=1-e^{-4}\left(1+4+\frac{4^2}{2}+\frac{4^3}{3!}+\frac{4^4}{4!}+\frac{4^5}{5!}\right)$$ (Tra bảng IA)

$$=1-0,7851=0,2149$$ (Tra bảng IB)

PHÂN PHỐI CHUẨN

- Đại lượng ngẫu nhiên liên tục X có *phân phối chuẩn*, ký hiệu X ~ N (μ, σ²) nếu hàm mật độ của ĐLNN X có dạng

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, \qquad \forall x \in R$$

- Hàm phân phối tương ứng

$$F(x) = P(X \le x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} dt$$

- Nếu $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ là ĐLNN được chuẩn hóa ứng với X thì Z ~ N(0, 1), được gọi là phân phối *chuẩn tắc*, và có hàm mật độ

$$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}$$

PHÂN PHỐI CHUẨN

- Nếu ĐLNN liên tục X có X ~ N (μ, σ^2) thì
  - i. Kỳ vọng của X là EX = μ
  - ii. Phương sai của X là VarX = σ^2
  - iii. ModX = μ
- Tính xác suất $P(a \le X \le b) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_a^b e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$
- Chuẩn hoá X, $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$

$$P(a \le Z \le b) = \phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

với $\phi(z) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$ được gọi là *hàm Laplace*

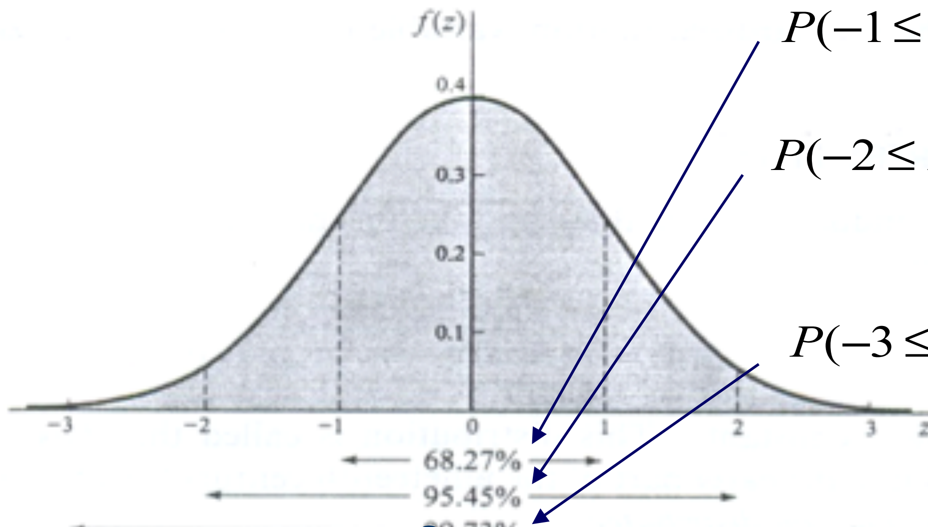
PHÂN PHỐI CHUẨN

Đồ thị của hàm mật độ chuẩn tắc *f(z)*, còn được gọi là *đường cong chuẩn tắc*.

$$P(-1 \le Z \le 1) = 0,6827$$

$$P(-2 \le Z \le 2) = 0,9545$$

$$P(-3 \le Z \le 3) = 0,9973$$



Trong đồ thị này chỉ ra các diện tích có 1, 2, và 3 lần độ lệch chuẩn so với giá trị trung bình, với tổng diện tích bằng một.

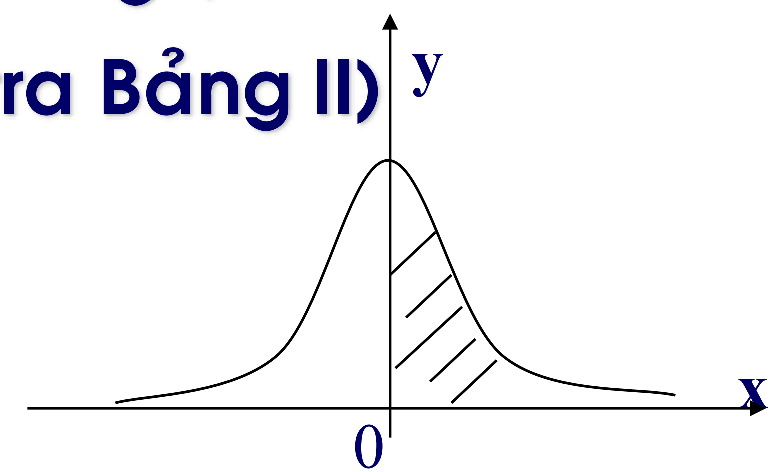
PHÂN PHỐI CHUẨN

- Do $\phi(z)=\int_0^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}dz$ là hàm lẻ, ϕ(– z) = – ϕ(z), nên có thể suy ra giá trị ϕ(z), với mọi z < 0.
- Với hàm mật độ của phân phối chuẩn tắc, $\varphi(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-z^2/2}$ là hàm chẵn: φ(z)= φ(-z)

và $\lim\limits_{z\to+\infty}\varphi(z)=0$ (giá trị tra Bảng I)

do $\phi(z)=\int_0^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}dz$ (giá trị tra Bảng II)

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\int_0^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}dz=0,5$$

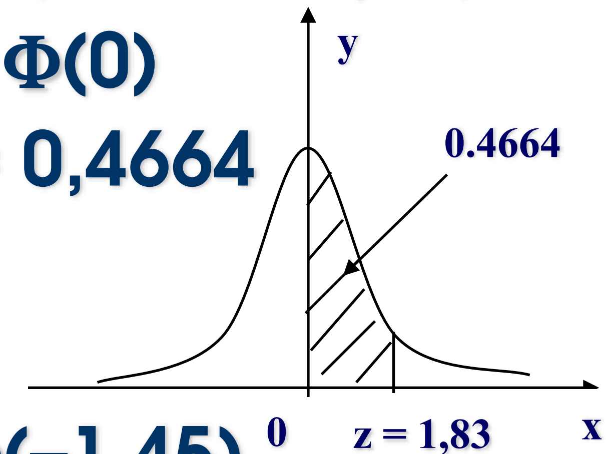


PHÂN PHỐI CHUẨN

VÍ DỤ 4.5. Cho $X \sim N(0,1)$. Tính $P(0 \le X \le 1,83)$.

Ta có $P(0 \le X \le 1,83) = \Phi(1,83) - \Phi(0)$

(Tra bảng II) $= 0,4664 - 0 = 0,4664$

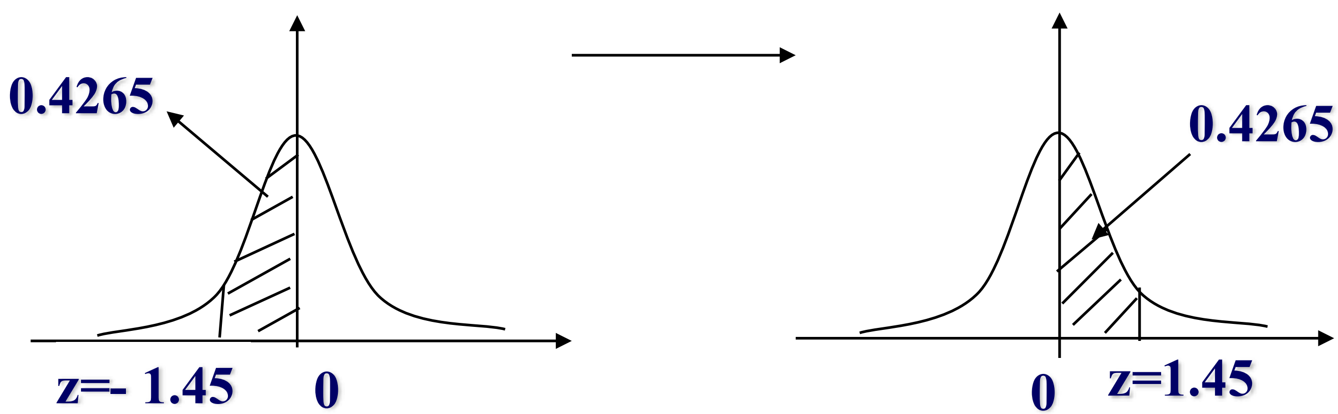


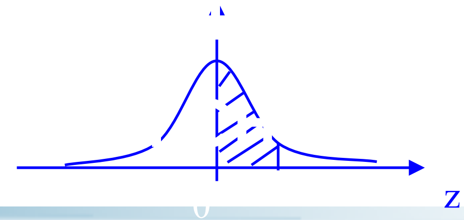
VÍ DỤ 4.6. Cho $X \sim N(0,1)$.

Tính $P(-1,45 \le X \le 0)$.

Ta có $P(-1,45 \le X \le 0) = \Phi(0) - \Phi(-1,45)$

(Tra bảng II) $= 0 + \Phi(1,45) = 0,4265$





$$\phi(z)=\int_0^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz$$

Z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
3.0	…	…	…	…	…	…	…	…	…	0.4990

PHÂN PHỐI CHUẨN

VÍ DỤ 4.7. Giả sử X là trọng lượng của những quả cam trong một lô hàng có luật phân phối chuẩn với μ = 0,5kg và σ = 0,04kg. Hãy tính tỉ lệ những quả cam trong lô hàng có trọng lượng từ 450g đến 600g.

Áp dụng công thức $P(a \le X \le b) = \phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$

$$P(0,45 \le X \le 0,6) = \phi\left(\frac{0,6-0,5}{0,04}\right) - \phi\left(\frac{0,45-0,5}{0,04}\right)$$

$$= \phi(2,5) - \phi(-1,25) = \phi(2,5) + \phi(1,25) = 0,8882$$

- Vậy các quả cam có trọng lượng từ 450g đến 600g chiếm tỷ lệ 88,82%.

PHÂN PHỐI CHI BÌNH PHƯƠNG

❑ Cho $X_1, X_2, \ldots, X_n$ là n ĐLNN độc lập có phân phối chuẩn tắc. Xét ĐLNN

$$\chi^2 = X_1^2 + X_2^2 + \ldots.. + X_n^2 \qquad (38)$$

với mọi x ≥ 0, $P(\chi^2 \le x) = \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)}\int_0^x u^{(n/2)-1}e^{-u/2}du$ **(39)**

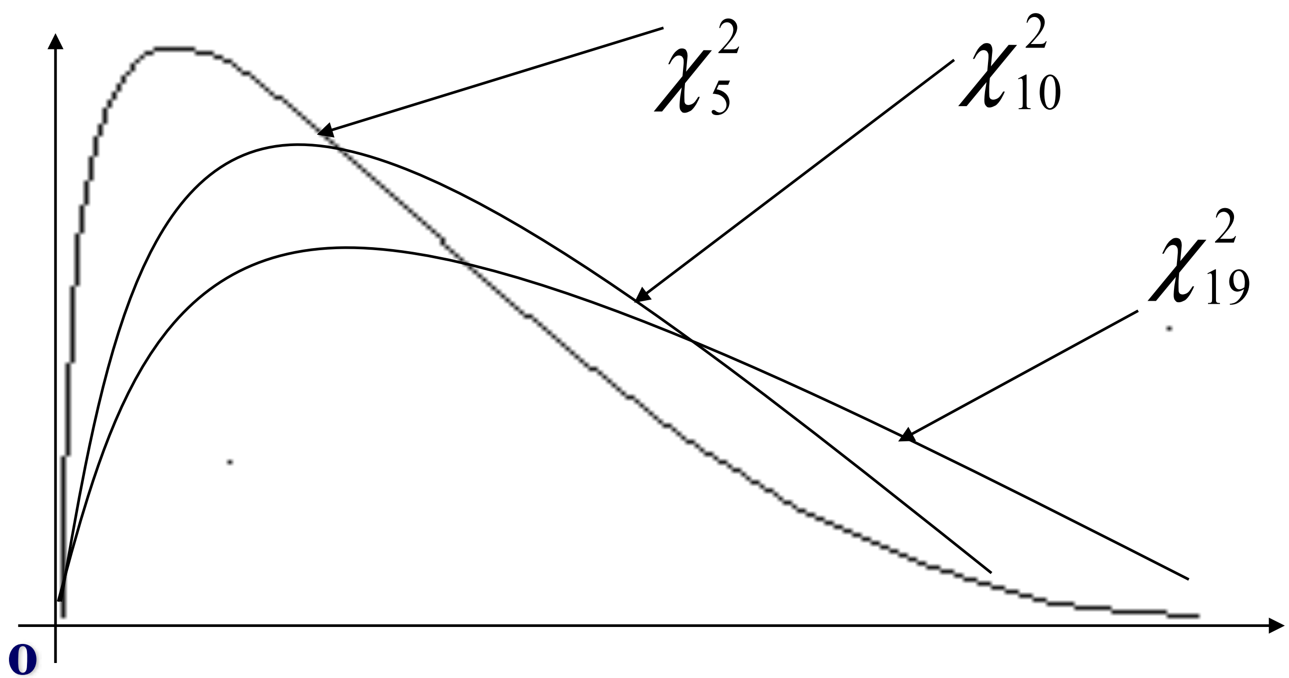
được gọi là *luật phân phối Chi bình phương*, với *n bậc tự do*, Ký hiệu là X ~ χ^2(n) và có hàm mật độ tương ứng là

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)}x^{(n/2)-1}e^{-x/2} & x > 0 \\ 0 & x \le 0 \end{cases}$$

, trong đó $\Gamma(t) = \int_0^{+\infty} x^{t-1}e^{-t}dt$

PHÂN PHỐI CHI BÌNH PHƯƠNG

- Đồ thị của đường cong $\chi^2(n)$ ở phần tư thứ nhất và tiệm cận với trục hoành.
- Tổng dt dưới đường cong $\chi^2(n)$ bằng 1.
- $P\left(\chi^2(n) > \chi^2_\alpha\right) = \alpha$. Giá trị $\chi^2(n)$ (tra bảng IV).



PHÂN PHỐI CHI BÌNH PHƯƠNG

Nếu X ~ $\chi^2(n)$ thì

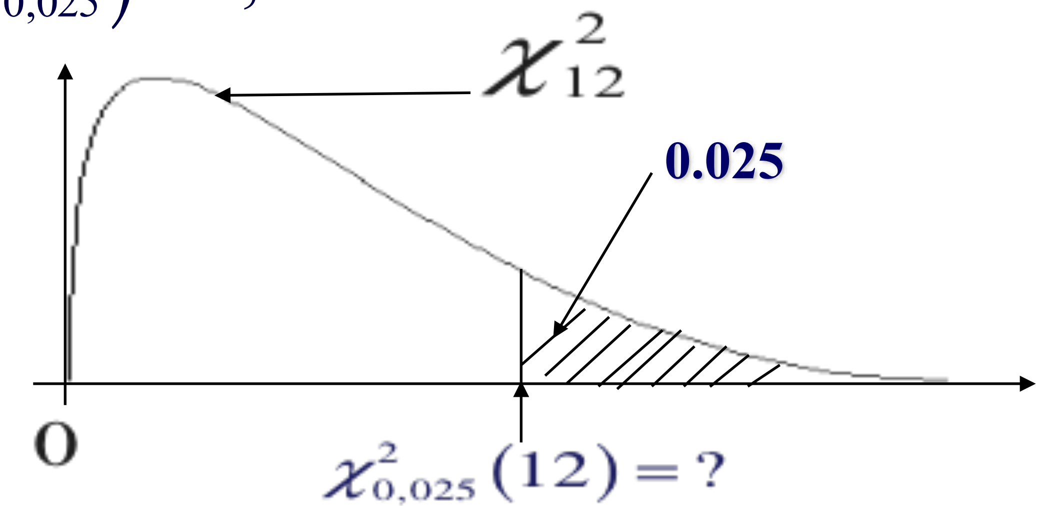
(i) Kỳ vọng của X là: $\mu_X = n$

(ii) Phương sai của X là: $\sigma^2 = 2n$

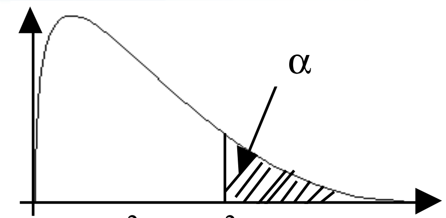
VÍ DỤ 4.8. Cho X có phân phối Chi bình phương 12 bậc tự do, xác định giá trị $\chi^2_{0,025}$ công thức $P\left(\chi_n^2 > \chi_{0,025}^2\right) = 0,025$

(tra bảng IV)

$$\Rightarrow \chi_{0,025}^2(12) = 23,3367$$



BẢNG IV
PHÂN PHỐI CHI BÌNH PHƯƠNG



$$P(\chi_n^2 > \chi_\alpha^2) = \alpha$$

α / n	0.005	0.01	0.025	0.05	0.95	0.975	0.99	0.995
1	7.8794	6.6349	5.0239	3.8415	0.0039	0.0010	0.0002	0.0000
2	10.5965	9.2104	7.3778	5.9915	0.1026	0.0506	0.0201	0.0100
…	…	…	…	…	…	…	…	…
12	28.2997	26.2170	23.3367	21.0261	5.2260	4.4038	3.5706	3.0738
…	…	…	…	…	…	…	…	…
30	53.6719	…	…	…	…	…	…	13.7867

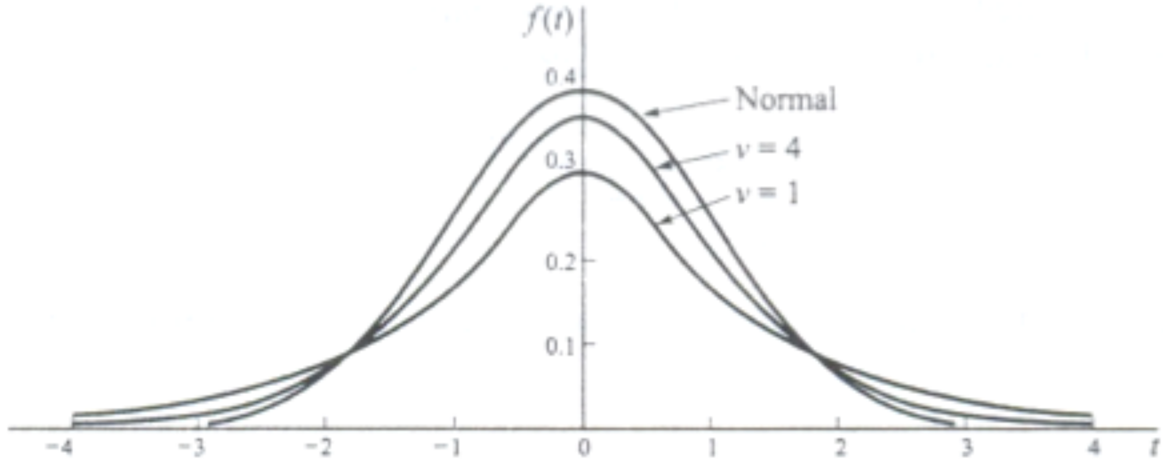
PHÂN PHỐI STUDENT

- ĐLNN liên tục X có phân phối *Student* với *n bậc tự do*, ký hiệu X ~ T(n), nếu có hàm mật độ có dạng

$$f(t)=\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-(n+1)/2} \qquad -\infty<t<+\infty$$

- Nếu n lớn ($n \geq 30$) thì đồ thị của hàm mật độ $f(t)$ xấp xỉ với đường cong chuẩn tắc.
- Các giá trị của luật phân phối T với n bậc tự do được viết là t_α. Do luật phân phối T đối xứng nên ta có $t_\alpha = -t_\alpha$; ví dụ $t_{0,05} = -t_{0,05}$
- X ~ T(n) thì $\mu = 0$ và $\sigma^2 = n/(n-2)$, $(n > 2)$.

PHÂN PHỐI STUDENT



- Đồ thị của đường cong T(n) tiệm cận với trục hoành và đối xứng qua trục tung.
- Khi $n \to \infty$ thì phân phối Student T(n) trùng với phân phối chuẩn tắc X~N(0,1).
- Tổng dt dưới đường cong T(n) bằng 1.
- $P\left(\left|T(n)\right| > t_\alpha\right) = \alpha$. Giá trị t_α (tra bảng III).

PHÂN PHỐI STUDENT

VÍ DỤ 4.9. Cho X ~ T(13). (a) Tính xác suất $P(|T| > 1,7709)$ và $P(T > 1,7709)$. (b) Xác định giá trị $t_{0,01}$.

(a) Ta có $P(|T(n)| > t_\alpha) = \alpha$

Vậy $P(|T(13)| > 1,7709) =$ 0,1 (Tra bảng IV)

Do $P(|T| > t_\alpha) = \alpha \Leftrightarrow P(T > t_\alpha) + P(T < -t_\alpha) = \alpha$

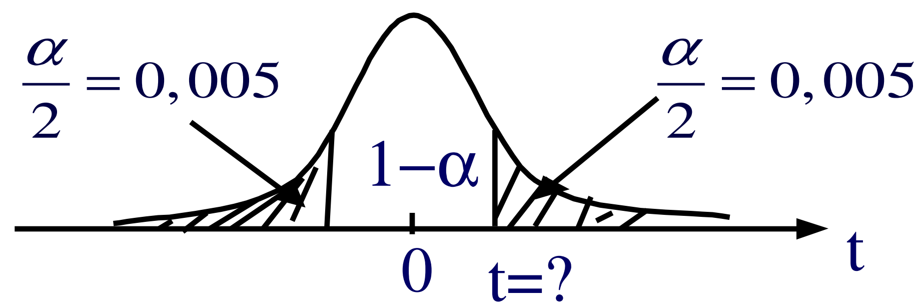
phân phối T đối xứng nên $P(T > t_\alpha) = \alpha/_2$

Vậy $P(T > 1,7709) = (0,1)/_2 = 0,05$

(b) Ta có $P(|T(13)| > t_{0,01}) = 0,01$

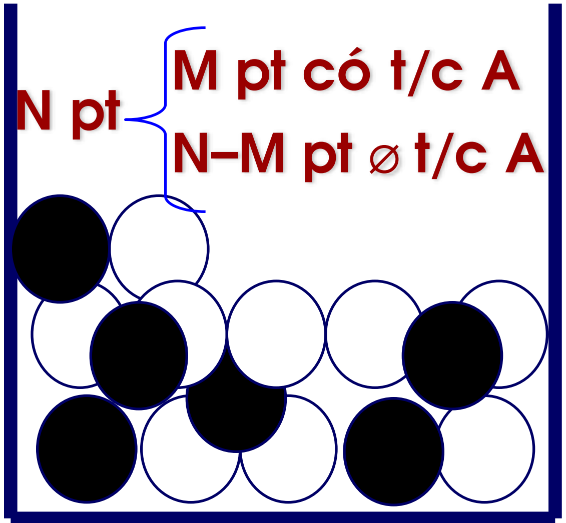
$\Rightarrow t_{0,01} = 3,0123.$ (Tra bảng IV)

BẢNG PHÂN PHỐI STUDENT



α / n	0.10	0.09	0.08	0.07	0.06	0.05	0.04	0.03	0.02	0.01
1	6.3137	7.0264	7.9158	9.0579	10.5789	12.7062	15.8945	21.2051	31.8210	63.6559
2	2.9200	3.1040	3.3198	3.5782	3.8964	4.3027	4.8487	5.6428	6.9645	9.9250
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
13	1.7709	1.8317	1.8989	1.9742	2.0600	2.1604	2.2816	2.4358	2.6503	3.0123

XẤP XỈ TỪ PHÂN PHỐI NHỊ THỨC SANG PHÂN PHỐI SIÊU BỘI



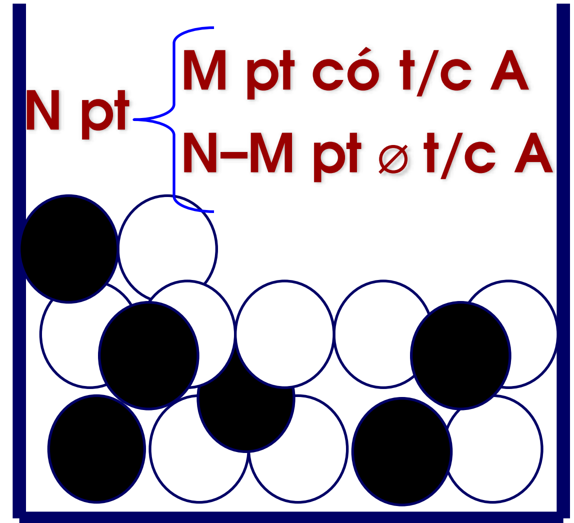
?

Chọn có hoàn lại

n pt

Gọi X là số pt có t/c A

X ~ B(n, p)



Chọn không hoàn lại

n pt

Gọi X là số pt có t/c A

X ~ H(N, M, n)

$$\lim_{N \to +\infty} \frac{N-n}{N-1} = 1$$

XẤP XỈ TỪ PHÂN PHỐI SIÊU BỘI SANG PHÂN PHỐI NHỊ THỨC

Xét tập có N phần tử, trong đó có M phần tử có tính chất A. Lấy ngẫu nhiên n phần tử. Gọi X là số phần tử có tính chất A có trong n phần tử được lấy ra.

- Nếu lấy có hoàn lại thì có n–phép thử độc lập và X~B(n, p), với $\mathbf{p} = \dfrac{\mathbf{M}}{\mathbf{N}}$
- Nếu lấy ra không hoàn lại, khi đó ĐLNN X có luật phân phối X~ H(N, M, n).
- Khi n << N, khi đó $X \sim H(N, M, n) \approx X \sim B(n, p)$

$$P(X = k) = \frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n} \approx C_n^k p^k q^{n-k}$$

XẤP XỈ TỪ PHÂN PHỐI SIÊU BỘI SANG PHÂN PHỐI NHỊ THỨC

VÍ DỤ 4.10. Công ty T&T hiện đang tồn kho 8.000 linh kiện điện tử các loại, trong đó có 2.000 linh kiện không đạt tiêu chuẩn kỹ thuật. Một khách hàng muốn mua hết số linh kiện trên nhưng không hề biết trong lô hàng có linh kiện không đạt tiêu chuẩn kỹ thuật. Khách hàng lấy ngẫu nhiên 10 linh kiện để kiểm tra, nếu trong 10 linh kiện lấy ra có không quá 2 linh kiện không đạt tiêu chuẩn kỹ thuật thì khách hàng đồng ý mua lô hàng trên. Tính xác suất lô hàng được mua.

XẤP XỈ TỪ PHÂN PHỐI SIÊU BỘI SANG PHÂN PHỐI NHỊ THỨC

- Gọi X là số linh kiện không đạt tiêu chuẩn có trong 10 sản phẩm lấy ra.
- X = {0,1,2,...,10} và X ~ H(8.000, 2.000,10).
- Do n = 10 << N = 8.000 nên có thể tính xấp xỉ P(X = 2) bởi phân phối nhị thức

Ta có

$$X \sim B\left(10, \frac{2000}{8000}\right) = B(10; 0,25)$$

- Xác suất cần tìm

$$P(X \le 2) = \sum_{k=0}^{2} C_{10}^{k}.(0,25)^{k}.(0,75)^{10-k}$$

$$= 0,5255$$

XẤP XỈ NHỊ THỨC SANG POISSON

ĐLNN X có luật phân phối nhị thức X ~ B(n, p)

- Khi n lớn, xác suất p xảy ra của một biến cố rất gần không sao cho q = 1 – p rất gần 1, biến cố này được gọi là *biến cố hiếm*.
- Khi đó ta có thể xem ĐLNN X có luật phân phối Poisson X ~ P(λ), với λ = np.

$$X \sim B(n,p) \approx X \sim P(\lambda)$$

$$P(X=k) = C_n^k p^k q^{n-k} \approx \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$

- Trong thực hành, một biến cố được xem là hiếm nếu n $\geq$ 50 và np $\leq$ 5.

XẤP XỈ NHỊ THỨC SANG POISSON

VÍ DỤ 4.11. Một dây chuyền tự động lắp ráp xe máy có thể cho xuất xưởng xe không đạt tiêu chuẩn kỹ thuật (phế phẩm) với xác suất là 0,1%. Tính xác suất để trong 4.000 xe do dây chuyền này sản xuất ra có (a) đúng 5 phế phẩm, (b) không quá 5 phế phẩm.

- Gọi X là số phế phẩm do dây chuyền sản xuất, $X = \{0,1,\ldots,4.000\}$ và $X \sim B(4.000; 0,001)$.
- Với $n = 4.000$ (lớn) và $p = 0,001$ (nhỏ) nên ta có thể xem ĐLNN rời rạc X có phân phối Poisson.

XẤP XỈ NHỊ THỨC SANG POISSON

với λ = np = 4000×0,001 = 4 hay X~ P(4)

a) Xác suất có đúng 5 phế phẩm.

$$P(X=5)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^{k}}{k!}=\frac{e^{-4}4^{5}}{5!}=0,1563$$

(Tra bảng IA)

b) Xác suất có không quá 5 phế phẩm.

$$P(X\le 5)=\sum_{k=0}^{5}\frac{e^{-4}.4^{k}}{k!}$$

$$=e^{-4}\left(1+4+\frac{4^{2}}{2}+\frac{4^{3}}{3!}+\frac{4^{4}}{4!}+\frac{4^{5}}{5!}\right)$$

(Tra bảng IB)

$$=0,7851$$

BẢNG IA
PHÂN PHỐI POISSON X ~ P(λ)

k \ λ	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5	5.5
0	0.2231	0.1353	0.0821	0.0498	0.0302	0.0183	0.0111	0.0067	0.0041
1	0.3347	0.2707	0.2052	0.1494	0.1057	0.0733	0.0500	0.0337	0.0225
2	0.2510	0.2707	0.2565	0.2240	0.1850	0.1465	0.1125	0.0842	0.0618
3	0.1255	0.1804	0.2138	0.2240	0.2158	0.1954	0.1687	0.1404	0.1133
4	0.0471	0.0902	0.1336	0.1680	0.1888	0.1954	0.1898	0.1755	0.1558
5	0.0141	0.0361	0.0668	0.1008	0.1322	0.1563	0.1708	0.1755	0.1714
6	0.0035	0.0120	0.0278	0.0504	0.0771	0.1042	0.1281	0.1462	0.1571
7	0.0008	0.0034	0.0099	0.0216	0.0385	0.0595	0.0824	0.1044	0.1234
8	0.0001	0.0009	0.0031	0.0081	0.0169	0.0298	0.0463	0.0653	0.0849
9	0.0000	0.0002	0.0009	0.0027	0.0066	0.0132	0.0232	0.0363	0.0519
13	...	...	...	...	...	...	...	...	...

BẢNG IB
PHÂN PHỐI POISSON X ~ P(λ)

k \ λ	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5	5.5
0	0.2231	0.1353	0.0821	0.0498	0.0302	0.0183	0.0111	0.0067	0.0041
1	0.5578	0.4060	0.2873	0.1991	0.1359	0.0916	0.0611	0.0404	0.0266
2	0.8088	0.6767	0.5438	0.4232	0.3208	0.2381	0.1736	0.1247	0.0884
3	0.9344	0.8571	0.7576	0.6472	0.5366	0.4335	0.3423	0.2650	0.2017
4	0.9814	0.9473	0.8912	0.8153	0.7254	0.6288	0.5321	0.4405	0.3575
5	0.9955	0.9834	0.9580	0.9161	0.8576	0.7851	0.7029	0.6160	0.5289
6	0.9991	0.9955	0.9858	0.9665	0.9347	0.8893	0.8311	0.7622	0.6860
7	0.9998	0.9989	0.9958	0.9881	0.9733	0.9489	0.9134	0.8666	0.8095
8	1.0000	0.9998	0.9989	0.9962	0.9901	0.9786	0.9597	0.9319	0.8944
9	1.0000	1.0000	0.9997	0.9989	0.9967	0.9919	0.9829	0.9682	0.9462
13	...	...	...	...	...	...	...	...	...

XẤP XỈ NHỊ THỨC SANG CHUẨN

- Nếu n lớn và p hoặc q không quá gần không, luật phân phối nhị thức có thể xấp xỉ bằng luật phân phối chuẩn với ĐLNN được chuẩn hóa

$$Z = \frac{X - np}{\sqrt{npq}}$$

trong đó X là số lần thành công trong n lần thử Bernoulli và p là xác suất thành công.

- Trong thực hành, phương pháp xấp xỉ này rất tốt nếu cả hai np và nq đều lớn hơn 5.

$$\lim_{n \to \infty} P\left(a \le \frac{X - np}{\sqrt{npq}} \le b\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-u^2/2} du$$

XẤP XỈ NHỊ THỨC SANG CHUẨN

1. TRƯỜNG HỢP 1: Tính P(X= k)

- **Cách 1. Sử dụng hàm phân phối**

$$P(X=k)=\Phi\left(\frac{k-0,5-np}{\sqrt{npq}}\right)-\Phi\left(\frac{k+0,5-np}{\sqrt{npq}}\right)$$

trong đó $\Phi(z)=\int_0^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}dz$

- **Cách 2. Sử dụng hàm mật độ**

$$P(X=k)=\frac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}}$$

Trong đó: $x=\frac{k-np}{\sqrt{npq}}$ và $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$

XẤP XỈ NHỊ THỨC SANG CHUẨN

VÍ DỤ 4.12. Một máy sản xuất ra sản phẩm loại A với xác suất là 0,485. Tính xác suất sao cho trong 200 sản phẩm do máy sản xuất ra có đúng 95 sản phẩm loại A.

- Gọi X là số SP loại A thì X ~ B(200; 0,485).
- Xấp xỉ sang chuẩn X ~ N(97; 49,955)

Cách 1. Dùng hàm phân phối

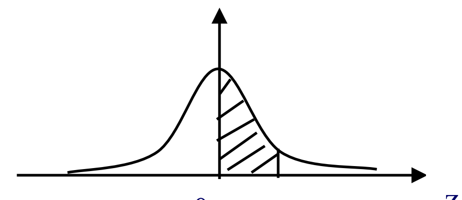
$P(X = 95) = P(94,5 \le X \le 95,5)$

$= \Phi(-14,78) - \Phi(-14,92) = 0,0542$

Cách 2. Dùng hàm mật độ (Tra bảng I)

$$P(X=95)=\frac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}}=\frac{\varphi(-0,283)}{7,068}=\frac{\varphi(0,28)}{7,068}=\frac{0,3836}{7,068}=0,0542$$

XẤP XỈ NHỊ THỨC SANG CHUẨN



Z	0	1	2	3	---	6	7	8	9
0.0	0.3989	0.3989	0.3989	0.3988	...	0.3982	0.3980	0.3977	0.3973
0.1	0.3970	0.3965	0.3961	0.3956	...	0.3939	0.3932	0.3925	0.3918
0.2	0.3910	0.3902	0.3894	0.3885	...	0.3857	0.3847	0.3836	0.3825
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
1.8	0.0790	0.0775	0.0761	0.0748	...	0.0707	0.0694	0.0681	0.0669
1.9	0.0656	0.0644	0.0632	0.0620	...	0.0584	0.0573	0.0562	0.0551
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
3.3	0.0017	0.0017	0.0016	0.0016	...	0.0014	0.0014	0.0013	0.0013
3.4	0.0012	0.0012	0.0012	0.0011	...	0.0010	0.0010	0.0009	0.0009

XẤP XỈ NHỊ THỨC SANG CHUẨN

2. TRƯỜNG HỢP 2. Tính P(a ≤ X ≤ b)

X ~ B(n, p), xấp xỉ X ~ N(μ, σ²) = N(np, npq).

$$P(a \le X \le b) = \phi\left(\frac{(b+0,5)-np}{\sqrt{npq}}\right) - \phi\left(\frac{(a-0,5)-np}{\sqrt{npq}}\right)$$

Trong đó

$$\phi(z) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

là hàm phân phối Laplace của Z ~ N (0,1).

XẤP XỈ NHỊ THỨC SANG CHUẨN

VÍ DỤ 4.13. Xác suất một máy có thể sản xuất ra sản phẩm loại A là 0,25. Tính xác suất trong 80 sản phẩm do máy này sản xuất ra có từ 25 đến 30 sản phẩm loại A.

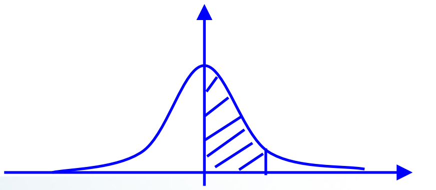
- Gọi X là số sản phẩm loại A có trong 80 sản phẩm thì X={0,1,..., 80} và X ~ B(80; 0,25).
- Do n=80; p=0,25; có thể xấp xỉ X~N(20, 15).

Xác suất cần tìm:

$$P(25 \le X \le 30) = \phi\left(\frac{30+0,5-20}{\sqrt{15}}\right) - \phi\left(\frac{25-0,5-20}{\sqrt{15}}\right)$$

$$= \phi(2,71) - \phi(1,16)$$ (Tra bảng II)

$$= 0,4966 - 0,3770 = 0,1196$$



$$\phi(z)=\int_0^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

Z	0	1	2	3	...	6	7	8	9
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	...	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	...	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	...	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	...	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	...	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
3.0	…	…	…	…	…	…	…	…	0.4990

THE END