BÀI TẬP BUỔI 8
KIỂM ĐỊNH GIẢ THIẾT THỐNG KÊ

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. Khái niệm

Giả thiết thống kê là giả thiết nói về đặc trưng, quy luật phân phối, tính độc lập... của các đại lượng ngẫu nhiên.

Dùng các thống kê từ mẫu để khẳng định hay bác bỏ một giả thiết thống kê được gọi là kiểm định giả thiết thống kê.

Khi kiểm định một giả thiết H, có thể xảy ra một trong hai loại sai lầm :

- Loại một : bác bỏ H trong lúc H đúng ;
- Loại hai : chấp nhận H trong lúc H sai.

Ta gọi xác suất xảy ra sai lầm loại một trong kiểm định là mức ý nghĩa của kiểm định, kí hiệu là α.

Phương pháp kiểm định là cho trước mức ý nghĩa α (thường $\alpha \leq 10\%$). Nếu xác suất H đúng không bé hơn $1 - \alpha$ thì ta chấp nhận H, nếu xác suất đó bé hơn $1 - \alpha$ thì ta bác bỏ H.

2. Kiểm định tỉ lệ

a) Kiểm định giả thiết về tỉ lệ của tổng thể

. Bài toán. Giả sử tổng thể có tỉ lệ p chưa biết.

Ta cần kiểm định giả thiết H : "$p = p_o$" với mức ý nghĩa α.

. Phương pháp

- Từ mẫu định tính kích thước $n \geq 30$, ta tính được tỉ lệ mẫu f.
- Tra bảng hàm số Laplace để tìm số Z_α sao cho $\Phi(Z_\alpha) = \dfrac{1-\alpha}{2}$.
- Tính thống kê $Z_o = \dfrac{|f - p_o|}{\sqrt{p_o(1-p_o)}}\sqrt{n}$.
- So sánh Z_o với Z_α :
  - . Nếu $Z_o \leq Z_\alpha$ thì chấp nhận H ;
  - . Nếu $Z_o > Z_\alpha$ thì bác bỏ H.

b) Kiểm định so sánh hai tỉ lệ

. Bài toán

Giả sử tỉ lệ của hai tổng thể lần lượt là p_1, p_2 chưa biết. Cần kiểm định giả thiết H : "$p_1 = p_2$" với mức ý nghĩa α.

. Phương pháp

- Từ hai mẫu tương ứng kích thước $n_1, n_2 \geq 30$, ta tính được các tỉ lệ mẫu f_1, f_2.
- Tra bảng hàm số Laplace để tìm Z_α sao cho $\Phi(Z_\alpha) = \dfrac{1-\alpha}{2}$.
- Tính thống kê $Z_o = \dfrac{|f_1 - f_2|}{\sqrt{p_o(1-p_o)\left(\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}\right)}}$,

trong đó $p_o = \dfrac{n_1 f_1 + n_2 f_2}{n_1 + n_2}$.

- So sánh Z_o với Z_α :
  - . Nếu $Z_o \leq Z_\alpha$ thì chấp nhận H ;
  - . Nếu $Z_o > Z_\alpha$ thì bác bỏ H.

3. Kiểm định kì vọng

a) Kiểm định giả thiết về kì vọng của tổng thể

. Bài toán

Giả sử tổng thể có giá trị trung bình (kì vọng) là μ chưa biết. Cần kiểm định giả thiết H : "$\mu = \mu_o$" với mức ý nghĩa α.

. Phương pháp

Từ mẫu định lượng kích thước n ta tính được $\overline{X}$, S.

(1) Trường hợp $n \geq 30$.

- Tra bảng hàm số Laplace tìm Z_α sao cho

$$\Phi(Z_\alpha) = \frac{1-\alpha}{2}.$$

- Tính thống kê $Z_o = \dfrac{\left|\overline{X} - \mu_o\right|}{S}\sqrt{n}$.

- So sánh Z_o với Z_α :

. Nếu $Z_o \leq Z_\alpha$ thì chấp nhận H ;

. Nếu $Z_o > Z_\alpha$ thì bác bỏ H.

(2) Trường hợp n tùy ý, tổng thể có phân phối chuẩn, đã biết phương sai σ^2.

Ta tiến hành kiểm định như trường hợp (1) với

$$Z_o = \frac{\left|\overline{X} - \mu_o\right|}{\sigma}\sqrt{n}.$$

(3) Trường hợp $n < 30$, tổng thể có phân phối chuẩn, chưa biết phương sai.

- Tra bảng phân phối Student dòng $n - 1$, cột α ta tìm được số T_α.

- Tính thống kê $Z_o = \dfrac{\left|\overline{X} - \mu_o\right|}{S}\sqrt{n}$.

- So sánh Z_o với T_α :

. Nếu $Z_o \leq T_\alpha$ thì chấp nhận H ;

. Nếu $Z_o > T_\alpha$ thì bác bỏ H.

b) Kiểm định so sánh hai kì vọng

. Bài toán

Giả sử giá trị trung bình của hai tổng thể lần lượt là μ_1, μ_2. Cần kiểm định giả thiết H : "$\mu_1 = \mu_2$" với mức ý nghĩa α.

. Phương pháp

- Từ hai mẫu tương ứng kích thước $n_1, n_2 \geq 30$, ta tính được $\overline{X}_1, S_1^2$; $\overline{X}_2, S_2^2$.

- Tra bảng ta tìm được số Z_α sao cho $\Phi(Z_\alpha) = \dfrac{1-\alpha}{2}$.

- Tính thống kê $Z_o = \dfrac{\left|\overline{X}_1 - \overline{X}_2\right|}{\sqrt{\dfrac{S_1^2}{n_1} + \dfrac{S_2^2}{n_2}}}$.

- So sánh Z_o với Z_α :

. Nếu $Z_o \leq Z_\alpha$ thì chấp nhận H ;

. Nếu $Z_o > Z_\alpha$ thì bác bỏ H.

4. Kiểm định phương sai

. Bài toán

Giả sử tổng thể có phân phối chuẩn với phương sai σ^2 chưa biết. Cần kiểm định giả thiết H : "$\sigma^2 = \sigma_o^2$" với mức ý nghĩa α.

. Phương pháp

- Từ mẫu định lượng kích thước n, ta tính được phương sai mẫu hiệu chỉnh S^2.

- Tra bảng phân phối “khi bình phương” dòng n – 1, cột 1 - $\frac{\alpha}{2}$ và cột $\frac{\alpha}{2}$, ta tìm được hai số tương ứng là χ_1^2, χ_2^2.

- Tính thống kê $\chi_0^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_o^2}$.

- So sánh χ_0^2 với χ_1^2, χ_2^2

. Nếu $\chi_1^2 \le \chi_0^2 \le \chi_2^2$ thì chấp nhận H ;

. Nếu $\chi_0^2 < \chi_1^2$ hoặc $\chi_0^2 > \chi_2^2$ thì bác bỏ H.

B. CÁC BÀI GIẢI MẪU

1. Kiểm định giả thiết về tỉ lệ của tổng thể

Bài 1. *Theo báo cáo, tỉ lệ hàng phế phẩm trong kho là 10%. Kiểm tra ngẫu nhiên 100 sản phẩm thấy có 8 phế phẩm. Hỏi báo cáo trên có đáng tin ở mức ý nghĩa 5% không?*

Giải

Gọi p là tỉ lệ phế phẩm trong kho hàng, p chưa biết. Ta giả thiết p = 10%, đúng như báo cáo, (ở đây tỉ lệ giả thiết p_o = 10%). Ta kiểm tra giả thiết H : “$p = p_o$” với α = 5%.

Ta có kích thước mẫu n = 100, tỉ lệ mẫu $f = \frac{8}{10} = 0{,}08$.

Tra bảng hàm số Laplace ta thấy

$$\Phi(1{,}96) = \frac{1-0{,}05}{2} = 0{,}475 \text{ nên } Z_\alpha = 1{,}96.$$

Tính thống kê, ta được

$$Z_o = \frac{|0{,}08 - 0{,}10|}{\sqrt{0{,}10(1-0{,}10)}}\sqrt{100} = 0{,}6667.$$

Vì $Z_o < Z_\alpha$ nên ta chấp nhận H, nghĩa là báo cáo đáng tin cậy.

Bài 2. *Trước đây tỉ lệ phế phẩm của một nhà máy là 5%. Năm nay người ta áp dụng một biện pháp kĩ thuật mới để sản xuất. Sau một thời gian, kiểm tra 800 sản phẩm thì thấy có 24 phế phẩm. Với mức ý nghĩa 1%, hãy đánh giá hiệu quả của biện pháp kĩ thuật đó.*

Giải

Tỉ lệ phế phẩm của nhà máy (xem là tổng thể) trước đây, tức là trước khi áp dụng biện pháp kĩ thuật mới, là 5%. Còn tỉ lệ phế phẩm sau khi áp dụng biện pháp kĩ thuật là p chưa biết. Ta giả thiết H : “p = 5%”, giống như trước đây.

Rõ ràng, nếu giả thiết đúng thì biện pháp kĩ thuật không tác dụng đến tỉ lệ phế phẩm của nhà máy. Còn nếu giả thiết sai thì biện pháp kĩ thuật đã làm thay đổi tỉ lệ phế phẩm đó.

Ta tiến hành kiểm tra giả thiết trên với α = 1%.

Từ mẫu ta có

$$n = 800,\ f = \frac{24}{800} = 0{,}03.$$

Tra bảng hàm số Laplace, ta tìm được $Z_\alpha = 2{,}58$.

Tính thống kê, ta được

$$Z_o = \frac{|0{,}03 - 0{,}05|}{\sqrt{0{,}05(1-0{,}05)}}\sqrt{800} = 2{,}6.$$

Vì $Z_o > Z_\alpha$ nên giả thiết p = 5% là sai. Do đó tỉ lệ phế phẩm của nhà máy hiện nay không phải là 5% như trước kia.

Mặt khác, vì tỉ lệ mẫu f = 3% < 5% = p_o, nên tỉ lệ phế phẩm hiện nay đã giảm đi so với trước kia.

Vậy, biện pháp kĩ thuật mới đã làm giảm tỉ lệ phế phẩm của nhà máy.

2. Kiểm định so sánh hai tỉ lệ

Bài 3. *Kiểm tra 100 sản phẩm ở kho hàng thứ nhất thấy có 8 phế phẩm. Kiểm tra 150 sản phẩm ở kho hàng thứ hai thấy có 18 phế phẩm. Với mức ý nghĩa 0,05, có thể cho rằng chất lượng hàng ở hai kho là khác nhau không. ?*

Giải.

Tỉ lệ phế phẩm của hai kho hàng (xem là hai tổng thể) lần lượt là p_1, p_2 đều chưa biết. Ta giả thiết H : "$p_1 = p_2$" với $\alpha = 0,05$.

Nếu giả thiết đúng thì chất lượng hàng ở hai kho là như nhau và trái lại.

Ta kiểm định giả thiết trên.

Từ mẫu thứ nhất ta có $n_1 = 100$, $f_1 = 0,08$; từ mẫu thứ hai ta có $n_2 = 150$, $f_2 = 0,12$.

Tra bảng hàm số Laplace ta có $Z_\alpha = 1,96$.

Ta tính được

$$p_o = \frac{100.0,08 + 150.0,12}{100 + 150} = 0,104 \ ;$$

$$Z_o = \frac{|\ 0,08 - 0,12\ |}{\sqrt{0,104(1-0,104)\left(\frac{1}{100} + \frac{1}{150}\right)}} = 1,015.$$

Vì $Z_o < Z_\alpha$ nên ta chấp nhận giả thiết H, tức là chất lượng hai kho hàng không khác nhau.

3. Kiểm định giả thiết về giá trị trung bình của tổng thể

Bài 4. *Khối lượng quy định cho mỗi gói bánh được đóng gói tự động là 250 gam. Kiểm tra ngẫu nhiên 81 gói thì thấy khối lượng trung bình là 235 gam và độ lệch mẫu hiệu chỉnh là 36 gam. Với mức ý nghĩa 0,01 hãy kết luận về tình hình sản xuất.*

Giải

Khối lượng trung bình của các gói bánh thuộc tổng thể là μ chưa biết. Ta giả thiết H : "μ = 250 gam" đúng như quy định. Nếu giả thiết được chấp nhận thì tình hình sản xuất bình thường. Nếu giả thiết bị bác bỏ thì tình hình sản xuất có vấn đề. Ta tiến hành kiểm định giả thiết với $n = 81 > 30$, $\overline{X} = 235$g, $S = 36$. Vì $\alpha = 0,01$ nên $Z_\alpha = 2,58$.

Ta có

$$Z_o = \frac{|\ 2,35 - 250\ |}{36}\sqrt{81} = 3,75.$$

Suy ra $Z_o > Z_\alpha$ nên giả thiết bị bác bỏ.

Mặt khác, vì khối lượng trung bình của mẫu $\overline{X} = 235$g bé hơn khối lượng quy định nên việc đóng gói tự động chưa đạt yêu cầu về khối lượng các gói bánh.

Bài 5. *Một cửa hàng nhận thấy lâu nay trung bình mỗi khách hàng mua 15 ngàn đồng. Tuần này cửa hàng chọn ngẫu nhiên 16 khách hàng thì thấy trung bình mỗi người mua 14 ngàn đồng và độ lệch mẫu hiệu chỉnh là 2 ngàn đồng. Cho biết sức mua của khách hàng có phân phối chuẩn. Với mức ý nghĩa 5%, xét xem sức mua của khách hàng có giảm sút không ?*

Giải

Gọi μ là sức mua trung bình hiện nay, $\mu_o = 15$ ngàn đồng là sức mua trung bình trước kia.

Ta giả thiết H : "$\mu = \mu_o$". Nếu giả thiết đúng thì sức mua của khách hàng không thay đổi, nếu giả thiết sai thì sức mua đã thay đổi.

Ta kiểm định giả thiết đó.

Vì kích thước mẫu $n = 16 < 30$ nên tra bảng phân phối Student dòng 15 cột α ta được

$T_\alpha = 2,131.$

Tính thống kê

$$Z_o = \frac{|\ 14 - 15\ |}{2}\sqrt{16} = 2.$$

Suy ra $Z_o < T_\alpha$, ta chấp nhận H. Vậy, sức mua của khách hàng không giảm sút.

4. Kiểm định so sánh hai giá trị trung bình

Bài 6. *Chiều cao trung bình của 100 học sinh nam ở một trường trung học nội thành là 1,68m, độ lệch mẫu hiệu chỉnh là 6m. Kiểm tra 120 em ở một huyện ngoại thành thì thấy chiều cao trung bình là 1,64m, độ lệch mẫu hiệu chỉnh là 5cm.*

Với mức ý nghĩa 5%, có thể kết luận rằng học sinh nội thành phát triển thể lực tốt hơn không?

Giải

Chiều cao trung bình của học sinh ở nội thành và ngoại thành lần lượt là μ_1, μ_2 chưa biết. Ta giả thiết H : "$\mu_1 = \mu_2$" với mức ý nghĩa $\alpha = 0,05$.

Nếu giả thiết đúng thì thể lực học sinh ở hai vùng đó như nhau, nếu giả thiết sai thì có sự khác biệt.

Ta tiến hành kiểm định giả thiết.

Ta có $\alpha = 0,05$ nên $Z_\alpha = 1,96$.

$$n_1 = 100,\ n_2 = 120 > 30\ ;\ \overline{X}_1 = 1,68,\ S_1^2 = 36\ ;\ \overline{X}_2 = 1,64,\ S_2^2 = 25.$$

Suy ra

$$Z_o = \frac{|1,68 - 1,64|}{\sqrt{\frac{36}{100} + \frac{25}{120}}} = 0,0531.$$

Vì $Z_o < Z_\alpha$ nên ta chấp nhận giả thiết. Vậy không thể kết luận thể lực của học sinh nội thành tốt hơn.

5. Kiểm định phương sai

Bài 7*. Đo đường kính của 25 viên bi từ một lô hàng, ta tính được S = 0,3 mm. Với mức ý nghĩa 0,01, hãy kiểm định giả thiết cho rằng phương sai của đường kính các viên bi trong lô hàng trên là 0,06 mm², biết đường kính đó tuân theo quy luật phân phối chuẩn.*

Giải

Gọi σ^2 là phương sai của đường kính các viên bi trong lô hàng thì σ^2 chưa biết. Ta kiểm định giả thiết H : $\sigma^2 = 0,06$ mm² với $\alpha = 0,01$.

Theo đề bài ta có $n = 25$, $S^2 = 0,09$.

Tra bảng phân phối "khi bình phương" dòng 24 cột 0,995 và cột 0,005, ta được

$\chi_1^2 = 12,4$; $\chi_2^2 = 39,4$.

Tìm thống kê

$$\chi_0^2 = \frac{24.0,09}{0,06} = 36.$$

Vì $\chi_1^2 < \chi_0^2 < \chi_2^2$ nên ta chấp nhận giả thiết.

C. BÀI TẬP

1. Theo quy định, một lô hàng được xem là đạt tiêu chuẩn nếu tỉ lệ phế phẩm của lô hàng không quá 5%. Tiến hành kiểm tra 100 sản phẩm của lô hàng thì thấy có 8 phế phẩm. Với mức ý nghĩa 5%, hãy cho kết luận về lô hàng đó.

2. Tỉ lệ người mắc bệnh tai mũi họng ở một thành phố là 6%. Trong lần kiểm tra sức khoẻ ngẫu nhiên 300 người thì thấy có 24 người mắc bệnh tai mũi họng. Với $\alpha = 0,01$ có thể cho rằng tỉ lệ người mắc bệnh đó có xu hướng tăng lên không ?

3. Khi điều trị bằng thuốc A, tỉ lệ bệnh nhân khỏi bệnh là 80%. Đổi sang thuốc B để điều trị cho 110 người thì thấy có 920 người khỏi bệnh. Với mức ý nghĩa $\alpha = 0,02$ có thể cho rằng thuốc B hiệu quả hơn thuốc A hay không ?

4. Một máy sản xuất tự động có tỉ lệ sản phẩm không đạt tiêu chuẩn là 20%. Sau khi áp dụng phương pháp sản xuất mới, người ta lấy 40 thùng hàng, mỗi thùng có 10 sản phẩm để kiểm tra. Kết quả cho trong bảng sau.

Số sản phẩm không đạt tiêu chuẩn	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Số thùng hàng	2	0	4	6	8	10	4	5	1	0

Với mức ý nghĩa $\alpha = 0{,}05$, hãy đánh giá hiệu quả của phương pháp sản xuất mới này.

5. Theo dõi số tai nạn lao động của hai xí nghiệp trong một thời gian ta có số liệu sau. Xí nghiệp thứ nhất : 20 tai nạn/400 công nhân. Xí nghiệp thứ hai : 28 tai nạn/500 công nhân. Hỏi có sự khác nhau đáng kể về chất lượng công tác phòng hộ lao động ở hai xí nghiệp đó với $\alpha = 2\%$?

6. Theo phương pháp nuôi thứ nhất ta có 12 con gà bị bệnh trong đàn gà 200 con. Theo phương pháp nuôi thứ hai có 5 con bị bệnh trong đàn gà 100 con. Với $\alpha = 5\%$, có thể kết luận rằng tỉ lệ gà bị bệnh khi nuôi theo phương pháp thứ hai thấp hơn không ?

7. Khối lượng của một loại sản phẩm do một nhà máy sản xuất là đại lượng ngẫu nhiên có phân phối chuẩn với khối lượng trung bình quy định là 500 gam. Nghi ngờ khối lượng của loại sản phẩm này có xu hướng giảm sút, người ta đã cân thử một số sản phẩm và thu được kết quả ghi ở bảng sau.

Khối lượng (g)	480	485	490	495	500	510
Số sản phẩm	2	3	8	5	3	4

Với $\alpha = 3\%$, hãy kết luận về điều nghi ngờ đó.

8. Kết quả đo chiều cao của 24 trẻ em 2 tuổi được ghi trong bảng sau (đơn vị tính : cm).

84,4	89,9	89,0	87,0	78,5	84,1	86,3	80,6
80,0	81,3	86,8	83,4	89,8	85,4	80,6	85,0
82,5	80,7	84,3	85,4	85,0	85,5	81,6	81,9

Chiều cao chuẩn của trẻ em 2 tuổi là 86,5 cm. Hỏi với $\alpha = 0{,}01$ có sự khác biệt đáng kể của chiều cao nhóm trẻ so với chuẩn không ?

9. Độ bền của một loại dây thép sản xuất theo công nghệ cũ là 150. Sau khi cải tiến kĩ thuật người ta lấy 100 sợi dây thép để thử thì thấy độ bền trung bình là 185 và S = 25. Với $\alpha = 0{,}03$ hãy kết luận hiệu quả của việc cải tiến kĩ thuật.

10. Năng suất lúa trung bình ở vụ trước là 4,5 tấn/ha. Vụ lúa năm nay người ta áp dụng biện pháp kĩ thuật mới cho toàn bộ diện tích trồng lúa trong vùng. Theo dõi 100 ha ta có bảng năng suất lúa sau đây.

Năng suất (tạ/ha)	Diện tích (ha)	Năng suất	Diện tích
30 – 35	7	50 – 55	20
35 – 40	12	55 – 60	8
40 – 45	18	60 – 65	5
45 – 50	27	65 – 70	3

Với $\alpha = 0{,}01$ hãy kết luận về biện pháp kĩ thuật mới.

11. Để nghiên cứu nhu cầu một loại hàng, người ta khảo sát nhu cầu của mặt hàng này ở một số hộ gia đình. Kết quả cho ở bảng sau.

Nhu cầu (kg/tháng)	Số hộ gia đình	Nhu cầu	Số hộ gia đình
< 1	10	4 – 5	78
1 – 2	35	5 – 6	31
2 – 3	86	6 – 7	18
3 – 4	132	7 – 8	10

Giả sử khu vực đó có 4000 hộ gia đình. Nếu cho rằng nhu cầu trung bình về mặt hàng này của toàn khu vực là 168 tấn trong một năm thì có chấp nhận được không với mức ý nghĩa 1% ?

12. Kiểm tra các sản phẩm do hai phân xưởng sản xuất, ta có các số liệu sau đây.

Phân xưởng	Số sản phẩm được kiểm tra	Khối lượng trung bình (kg)	Phương sai mẫu hiệu chỉnh	Số phế phẩm
1	900	50,2	0,16	18
2	800	50,1	0,20	16

a) Với mức ý nghĩa 0,05 có thể coi khối lượng trung bình của các sản phẩm do hai phân xưởng sản xuất là như nhau được không ?

b) Với mức ý nghĩa 0,01 có thể coi tỉ lệ phế phẩm của hai phân xưởng cũng như nhau hay không ?

13. Kiểm tra 100 sản phẩm do máy thứ nhất sản xuất ta thấy khối lượng trung bình là 251 gam, phương sai mẫu hiệu chỉnh là 9 (g^2). Kiểm tra 100 sản phẩm do máy thứ hai sản xuất ta được kết quả tương ứng là 249g, 16 g^2. Với mức ý nghĩa 0,02 có thể kết luận khối lượng trung bình của sản phẩm do hai máy sản xuất là khác nhau hay không ?

14. Nếu máy móc hoạt động bình thường thì khối lượng của một loại sản phẩm là đại lượng ngẫu nhiên có phân phối chuẩn với phương sai $\sigma^2 = 25$. Nghi ngờ máy hoạt động không bình thường, người ta cân thử 20 sản phẩm và tính được $S^2 = 27,5$. Với mức ý nghĩa 0,03 hãy kết luận về điều nghi ngờ đó.

15. Cho biết đường kính của một loại chi tiết là đại lượng ngẫu nhiên có phân phối chuẩn với phương sai $\sigma^2 = 0,04\ mm^2$. Đo đường kính của 15 chi tiết ta được độ lệch mẫu hiệu chỉnh là 0,22 mm^2. Với mức ý nghĩa 0,05 hãy kiểm định giả thiết cho rằng độ phân tán của đường kính là quá khác biệt so với quy định.