

BUỔI 1: ĐẠI SỐ TỔ HỢP

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Quy tắc đếm

a/ Quy tắc cộng

Giả sử một công việc V có thể tiến hành theo một trong hai phương án A hoặc B. Phương án A có thể thực hiện bởi m cách, phương án B có thể thực hiện bởi n cách. Mỗi cách thực hiện A không trùng với bất kỳ cách thực hiện B nào. Khi đó công việc V có thể thực hiện bởi $m + n$ cách.

b/ Quy tắc nhân

Giả sử một công việc V bao gồm hai công đoạn A và B. Công đoạn A có thể làm theo m cách, công đoạn B có thể làm theo n cách. Mỗi cách thực hiện A đều có n cách thực hiện B. Khi đó công việc V có thể thực hiện theo $m.n$ cách.

2. Chỉnh hợp, hoán vị, tổ hợp

a/ Chỉnh hợp

Giả sử A là tập hợp gồm n phần tử và k là số tự nhiên ($1 \leq k \leq n$). Kết quả của việc lấy k phần tử khác nhau thuộc A và sắp xếp chúng theo một thứ tự nào đó được gọi là một chỉnh hợp chập k của n phần tử.

Số chỉnh hợp chập k của n phần tử kí hiệu là A_n^k . Ta có :

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} \quad (1 \leq k \leq n)$$

với quy ước : $0! = 1$, $n! = 1.2.3....n$ ($n \in \mathbb{N}^*$)

b/ Chỉnh hợp lặp

Kết quả của việc lấy k phần tử, không cần khác nhau, từ n phần tử đã cho và sắp xếp chúng theo một thứ tự nào đó được gọi là một chỉnh hợp lặp chập k của n phần tử.

Số chỉnh hợp lặp chập k của n phần tử kí hiệu là \overline{A}_n^k . Ta có :

$$\overline{A}_n^k = n^k \quad (n \in \mathbb{N}^*, k \in \mathbb{N})$$

c/ Hoán vị

Kết quả của sự sắp xếp n phần tử khác nhau theo một thứ tự nào đó được gọi là một hoán vị của n phần tử đó.

Số các hoán vị của n phần tử kí hiệu là P_n .

Ta có

$$P_n = A_n^n = n! \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

d/ Tổ hợp

Mỗi tập con gồm k phần tử khác nhau của tập hợp A có n phần tử được gọi là một tổ hợp chập k của n phần tử đã cho.

Số các tổ hợp chập k của n phần tử kí hiệu là C_n^k . Ta có :

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad (n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq k \leq n)$$

B. CÁC BÀI GIẢI MẪU

1. Quy tắc cộng

Bài 1. Từ tỉnh X đến tỉnh Y có thể đi bằng ô tô hoặc tàu hỏa. Mỗi ngày có 10 chuyến ô tô, 5 chuyến tàu hỏa đi từ X đến Y. Hỏi có bao nhiêu sự lựa chọn để đi từ X đến Y ?

Giải. Ta xem công việc V là đi từ X đến Y. Có hai phương án thực hiện :

- A là đi ô tô, có 10 cách chọn.
- B là đi tàu hỏa, có 5 cách chọn.

Mỗi cách chọn A không trùng với bất kì cách chọn B nào.

Theo quy tắc cộng, số cách lựa chọn để đi từ X đến Y là : $10 + 5 = 15$.

Bài 2. Từ các chữ số 1, 2, 3 có thể lập được bao nhiêu số khác nhau có chữ số khác nhau ?

Giải. Ta có ba phương án lập số :

- A : Lập số có một chữ số, có 3 số, đó là các số 1, 2, 3.
- B : Lập số có hai chữ số, có 6 số, đó là các số : 12, 13, 21, 23, 31, 32.
- C : Lập số có ba chữ số, có 6 số, đó là các số : 123, 132, 213, 231, 312, 321.

Các cách lập trên đôi một không trùng nhau.

Vậy, theo quy tắc cộng, ta sẽ lập được :

$$3 + 6 + 6 = 15$$

số có các chữ số khác nhau từ ba chữ số đã cho.

2. Quy tắc nhân

Bài 3. Một thiết bị được lắp ráp từ hai loại linh kiện. Linh kiện loại một có 10 chiếc, linh kiện loại hai có 8 chiếc. Hỏi có bao nhiêu cách lắp thiết bị đó ?

Giải. Ta xem công việc V là lắp thiết bị, bao gồm hai công đoạn :

- A : Lắp linh kiện loại một, có 10 cách chọn ;
- B : lắp linh kiện loại hai, có 8 cách chọn.

Mỗi cách chọn linh kiện loại một đều có 8 cách chọn linh kiện loại hai.

Theo quy tắc nhân, số cách lắp thiết bị là : $10 \cdot 8 = 80$

Bài 4. Nếu không kể mã số vùng thì một biển số xe máy có 6 kí tự. Kí tự ở vị trí đầu tiên là một chữ cái trong bảng 24 chữ cái, ở vị trí thứ hai là một chữ số thuộc tập hợp $\{1, 2, \dots, 9\}$.

Bốn vị trí tiếp theo là bốn chữ số thuộc tập hợp $\{0, 1, 2, \dots, 9\}$. Hỏi có thể làm được bao nhiêu biển số xe máy khác nhau, nếu không kể mã số vùng ?

Giải. Ta có 24 cách chọn chữ cái để xếp ở vị trí đầu tiên. Tương tự có 9 cách chọn chữ số cho vị trí thứ hai và có 10 cách chọn chữ số cho mỗi vị trí trong bốn vị trí còn lại.

Theo quy tắc nhân, số biển số xe máy có thể làm được là

$$24 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 2\,160\,000.$$

3. Chỉnh hợp, hoán vị, tổ hợp

Bài 5. Một lớp học có 60 sinh viên. Hỏi có bao nhiêu cách chọn một Ban cán sự gồm một lớp trưởng, một lớp phó học tập, một lớp phó đời sống ?

Giải.

Cách thứ nhất. Mỗi cách chọn là một chỉnh hợp chập 3 của 60 phần tử. Do đó, số cách chọn là

$$A_{60}^3 = 60 \cdot 59 \cdot 58 = 205\,320.$$

Cách thứ hai. Ta xem V là công việc chọn Ban cán sự lớp, bao gồm ba công đoạn :

- Thứ nhất, chọn lớp trưởng từ 60 sinh viên, có 60 cách.
- Thứ hai, chọn lớp phó học tập từ 59 sinh viên còn lại, có 59 cách.
- Thứ ba, chọn lớp phó đời sống, tương tự có 58 cách.

Theo quy tắc nhân, số cách chọn Ban cán sự lớp là

$$60 \cdot 59 \cdot 58 = 205\,320.$$

Bài 6. Trong trận chung kết bóng đá phải phân định thắng thua bằng đá luân lưu 11 mét. Huấn luyện viên của mỗi đội cần trình với trọng tài một danh sách sắp thứ tự 5 cầu thủ trong số 11 cầu thủ để đá luân lưu. Hỏi huấn luyện viên của mỗi đội có bao nhiêu cách chọn?

Giải. Mỗi danh sách là một chỉnh hợp chập 5 của 11 phần tử. Vậy, số cách chọn của huấn luyện viên mỗi đội là :

$$A_{11}^5 = 55\,440.$$

Bài 7. Có 8 người lên một đoàn tàu gồm 5 toa. Hỏi có bao nhiêu cách lên tàu một cách tùy ý?

Giải

Cách thứ nhất Mỗi cách lên tàu là một chỉnh hợp lặp chập 8 của 5 phần tử. Vậy, số cách lên tàu là :

$$\overline{A}_5^8 = 5^8 = 390\,625.$$

Cách thứ hai ta xem công việc V là 8 người lên tàu, bao gồm 8 công đoạn :

- Người thứ nhất lên tàu, có 5 cách chọn toa.
- Người thứ hai lên tàu, cũng có 5 cách chọn toa.
- v.v..... Tương tự, người thứ tám vẫn có 5 cách chọn toa.

Theo quy tắc nhân, số cách lên tàu của 8 người đó là :

$$5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 390\,625.$$

Bài 8. Trong giờ học môn Giáo dục quốc phòng, một tiểu đội 10 sinh viên được xếp thành hàng ngang. Hỏi có bao nhiêu cách xếp ?

Giải. Mỗi cách xếp là một hoán vị của 10 người. Vậy số cách là :

$$P_{10} = 10! = 3\,628\,800.$$

Bài 9. Một lớp học có 50 sinh viên, mỗi buổi học cần chọn 3 sinh viên làm trực nhật lớp. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ?

Giải. Mỗi cách chọn sinh viên làm trực nhật lớp là một tổ hợp chập 3 của 50 phần tử. Vậy số cách chọn là

$$C_{50}^3 = 19\,600.$$

4. Bài tập tổng hợp

Bài 10. Một chi đoàn có 30 sinh viên nam và 15 sinh viên nữ. Cần chọn một nhóm gồm 8 sinh viên để tham gia chiến dịch “Mùa hè xanh” của Thành Đoàn. Hỏi có bao nhiêu cách chọn sao cho nhóm đó có

a) 8 sinh viên bất kì của chi đoàn ?

b) 3 sinh viên nữ ?

c) nhiều nhất 1 sinh viên nữ ?

d) ít nhất 1 sinh viên nữ ?

Giải.

a) Mỗi cách chọn là một tổ hợp chập 8 của 45 đoàn viên, do đó số cách là

$$C_{45}^8 = 215\,553\,195.$$

b) Việc chọn 8 sinh viên theo yêu cầu đề bài bao gồm hai công đoạn :

- Chọn 3 sinh viên nữ trong số 15 sinh viên nữ, có C_{15}^3 cách.

- Chọn 5 sinh viên nam trong số 30 sinh viên nam, có C_{30}^5 cách.

Theo quy tắc nhân, số cách chọn nhóm là

$$C_{15}^3 \cdot C_{30}^5 = 64\,840\,230.$$

c) Việc thành lập nhóm theo yêu cầu đề bài có hai phương án thực hiện :

- Nhóm có 1 sinh viên nữ và 7 sinh viên nam, tương tự câu b), số cách là $C_{15}^1 C_{30}^7$;

- Nhóm có 8 sinh viên nam, số cách là C_{30}^8 .

Theo quy tắc cộng, số cách thành lập nhóm để có nhiều nhất 1 sinh viên nữ là

$$C_{15}^1 C_{30}^7 + C_{30}^8 = 36\,389\,925.$$

d) Cách thứ nhất. Việc lập nhóm gồm 8 sinh viên bất kì của chi đoàn có thể thực hiện theo hai phương án :

- Nhóm gồm 8 sinh viên nam (không có sinh viên nữ), số cách là C_{30}^8 ,

- Nhóm có ít nhất 1 sinh viên nữ, số cách là n .

Theo câu a), số cách lập nhóm gồm 8 sinh viên bất kì là C_{45}^8 .

Theo quy tắc cộng, ta có :

$$C_{30}^8 + n = C_{45}^8.$$

Suy ra, số cách lập nhóm để có ít nhất 1 sinh viên nữ là :

$$n = C_{45}^8 - C_{30}^8 = 209\,700\,270.$$

Cách thứ hai. Việc lập nhóm để có ít nhất 1 sinh viên nữ có 8 phương án thực hiện :

- Nhóm có 1 sinh viên nữ và 7 sinh viên nam, theo câu c), số cách là $C_{15}^1 C_{30}^7$;

- Nhóm có 2 sinh viên nữ và 6 sinh viên nam, tương tự, có $C_{15}^2 C_{30}^6$ cách ;

- v.v...., nhóm có 7 nữ và 1 nam, số cách lập là $C_{15}^7 C_{30}^1$;

- Nhóm có 8 sinh viên nữ, số cách lập là C_{15}^8 .

Theo quy tắc cộng, số cách lập nhóm để có ít nhất 1 sinh viên nữ là :

$$C_{15}^1 C_{30}^7 + C_{15}^2 C_{30}^6 + \dots + C_{15}^7 C_{30}^1 + C_{15}^8 = 209\,700\,270.$$

C. BÀI TẬP

1. Một tòa nhà có 10 tầng, 7 người vào thang máy xuất phát từ tầng 1. Hỏi có bao nhiêu cách sao cho

a) mỗi người ra ở một tầng khác nhau ? A_{10}^7

b) mỗi người ra ở một tầng tùy ý ? 10^7

c) có hai người cùng ra ở một tầng, những người còn lại ra ở các tầng khác ? $10 C_{10}^2 9^5$

2. Một đội công nhân có 15 người, gồm 9 nam và 6 nữ. Có bao nhiêu cách thành lập một tổ công tác gồm

a) 5 người ? C_{15}^5

b) 3 nam và 2 nữ ? $C_9^3 C_6^2$

c) 3 nam và 2 nữ nhưng anh A và chị B không đi cùng nhau ? $C_{15}^5 - C_8^2 \times 5$

3. Một lô hàng có 100 sản phẩm, trong đó có 5 phế phẩm. Chọn ra 12 sản phẩm để kiểm tra. Hỏi có bao nhiêu cách chọn

a) các sản phẩm bất kì ? C_{100}^{12}

b) sao cho trong số các sản phẩm đó có không quá 2 phế phẩm ? $C_{95}^{12} + 5 \times C_9^{11} + C_5^2 C_{95}^{10}$

c) sao cho chọn được ít nhất 1 phế phẩm ? $C_{100}^{12} - C_{95}^{12}$

4. Người ta lấy ra 3 viên bi từ một cái hộp đựng 6 viên vi đỏ, 4 viên bi xanh, 5 viên bi vàng. Hỏi có bao nhiêu cách lấy ra

a) các viên bi tùy ý ? C_{15}^3

b) 2 viên bi đỏ, 1 viên bi xanh ? $C_6^2 \times 4$

c) các viên bi có màu khác nhau ? $6 \times 4 \times 5$

d) một viên màu đỏ ? $6 \times C_9^2$

e) nhiều nhất một viên màu đỏ ? C_9^3

f) ít nhất một viên màu đỏ ? $C_{15}^3 - C_9^3$

5. Một bộ bài có 52 lá với 4 chất khác nhau, trong đó chất rô và cơ có màu đỏ, chất pic và chuồn có màu đen. Chọn 8 lá bài từ bộ bài đó. Hỏi có bao nhiêu cách lấy được

a) 3 lá màu đỏ ?

b) 2 lá cơ ?

c) 1 lá át và 2 lá K ?

d) 2 lá rô và 4 lá màu đen ?

e) không quá một lá màu đỏ ?

f) ít nhất một lá màu đen ?

g) ít nhất 2 lá át ?

Handwritten calculations for the problems:

- a) $C_{26}^3 C_{26}^5$
- b) $C_{13}^2 C_{39}^6$
- c) $4 \times C_4^2 \times C_{44}^5$
- d) $C_{13}^2 C_{26}^4 C_{13}^2 \rightarrow C_{26}^8$
- e) $C_{52}^8 - 26 \times C_{26}^7$
- f) $C_{52}^8 - C_{26}^8$
- g) $C_4^2 C_{48}^6$, $C_3^1 C_4^1 C_{48}^5$, $C_4^4 C_{48}^4$