1. Dạng Poisson:

Bài 16: Xác suất để đoàn tàu khởi hành đúng giờ là 98,2%. Tính xác suất để 1000 chuyến tàu có 995 chuyến tàu khởi hành đúng thời gian.

Giải

X là số chuyến tàu đúng giờ trong 1000 chuyến tàu
X có phân phối nhị thức

$$\lambda = n.q = 1000.0,018 = 18$$

$$P(X) = 1 - P(5) = 1 - \frac{18^5}{5!}.e^{-18}$$

Bài 17: : Lưu lượng giao thông theo cách truyền thống được coi là có phân phối Poisson. Một trạm kiểm soát điều khiển lưu lượng giao thông ở một nút giao thông với trung bình 6 xe một phút. Để thiết lập thời gian cho đèn tín hiệu thì các xác suất sau đây được sử dụng:

a) Tính xác suất để không có xe nào đi qua nút giao thông trong 30 giây.

b) Tính xác suất có 3 xe hoặc nhiều hơn 3 xe đi qua nút giao thông trong một phút

Giải

Gọi X là số xe đi qua nút giao thông 1p với $\lambda = 6$
Gọi Y là biến cố không có xe nào đi qua trong 30s

$$P(Y) = P(Y=0) = \frac{3^0}{0!}.e^{-3} = 0,05$$

b.

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - [P0+P1+P2]$$

$$= 1 - \left[\frac{6^0}{0!}.e^{-6} + \frac{6^1}{1!}.e^{-6} + \frac{6^2}{2!}.e^{-6}\right] = 0,938$$

Bài 18: Số cuộc gọi điện thoại đến trung tâm tổng đài thường được mô tả là một biến ngẫu nhiên Poisson. Biết rằng trung bình có 10 cuộc điện thoại gọi tới trong 1 giờ.

a) Xác suất có đúng 5 cuộc điện thoại gọi tới trong 1 giờ là bao nhiêu?

b) Xác suất có 3 hoặc ít hơn 3 cuộc điện thoại gọi tới trong 1 giờ là bao nhiêu?

c) Xác suất có đúng 15 cuộc điện thoại gọi tới trong 2 giờ là bao nhiêu?

d) Xác suất có đúng 5 cuộc điện thoại gọi tới trong 30 phút là bao nhiêu?

Giải

a. Gọi X là cuộc gọi đến tổng đài trong 1h. Theo giả thiết X có poisson phân phối với:

$$\lambda = 10 (X \sim P(10))$$

$$P(X=5) \approx P_5 = \frac{10^5}{5!}.e^{-10} \approx 0{,}0378$$

b.

$$P(X=3) \approx P_3 = \frac{10^3}{3}.e^{-10}$$

$$P(X=2) \approx P_2 = \frac{10^2}{2}.e^{-10}$$

$$P(X=1) \approx P_2 = \frac{10^2}{2!}.e^{-10}$$

$$P(X=0) \approx P_0 = \frac{10^0}{0!}.e^{-10}$$

c. Gọi Y là cuộc gọi đến tổng đài trong 2h. Theo giả thiết Y có poisson phân phối với:

$$\lambda = 20 (Y \sim P(20))$$

$$P(Y=15) \approx P_{15} = \frac{20^{15}}{15!}.e^{-20}$$

d. Gọi Z là cuộc gọi đến tổng đài trong 30p. Theo giả thiết Z có poisson phân phối với:

$$\lambda = 5 (Z \sim P(5))$$

$$P(Z=5) \approx P_{15} = \frac{5^5}{5!}.e^{-5}$$

2. Phân phối chuẩn:

Câu 3: Tìm xác suất để biến ngẫu nhiên phân phối chuẩn hóa nhận giá trị:

a) Trong khoảng (-2,33; 2,33)

b) Trong khoảng (-2; 1)

c) Trong khoảng (-0,89; 2,5)

d) Lớn hơn 3,02

e) Nhỏ hơn 2,5

Giải

a) $P(-2,33 < x < 2,33) = \Phi_0(2,33) - \Phi_0(-2,33) = \Phi_0(2,33) + \Phi_0(2,33) = 2.\ \Phi_0(2,3 + 0,03) = 2.\ 0,4901 = 0,9802$

b) $P(-2 < x < 1) = \Phi_0(1) - \Phi_0(-2) = \Phi_0(1) + \Phi_0(2) = 0,3413 + 0,4772 = 0,8185$

c) $P(-0,89 < x < 2,5) = \Phi_0(2,5) - \Phi_0(-0,89) = \Phi_0(2,5) + \Phi_0(0,89) = 0,4938 + 0.3133 = 0,8071$

d) $P(x > 3,02) = P(x > (3 + 0,02)) = 0,0013$

e) $P(x < 2,5) = 1 - P(x > 2,5) = 1 - 0,0062 = 0,9938$

Câu 4: Biến ngẫu nhiên X tuân theo quy luật chuẩn với μ =10,δ= 2. Tính xác suất để X nhận được giá trị trong khoảng (8;12)

Giải

X tuân theo phân phối chuẩn → Áp dụng công thức, ta có:

$$P(8<X<12) = \Phi_0\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi_0\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

$$= \Phi_0\left(\frac{12-10}{2}\right) - \Phi_0\left(\frac{8-10}{2}\right)$$

$$= 2\,\Phi_0(1)$$

Tra bảng: $\Phi_0(1)=0,3413$

Vậy $P(8<X<12)=0,6826$.

Câu 5: Trong hệ thống tỷ giá hối đoái thả nổi, sự biến đổi của tỷ giá hối đoái thả nổi, sự biến động của tỷ giá hối đoái chịu sự tác động của rất nhiều nhân tố và có thể xem như biến ngẫu nhiên phấn phối chuẩn, giả sử ở một giai đoạn nào đó tỷ giá của USD với VND có trung bình là 15000đ và độ lệch chuẩn là 500đ. Tìm xác suất để trong một ngày nào đó.

a) Tỷ giá sẽ cao hơn 16000đ

b) Tỷ giá sẽ thấp hơn 14500đ

c) Nằm trong khoảng 14500đ đến 16500

Giải

Gọi X là tỷ giá của USD và VND

Ta có: X~N(15000, 500^2)

a) $P(X>16000)= P\left(\frac{X-15000}{500} > \frac{16000-15000}{500}\right) = P(U>2)=0,0228$

b) tương tự câu A

$P(X<14500) = P(U<-1) =P(U>1)=0.1587$

c) $P(14500<X<16500) =P(-1<U<3) = P(U>-1)- P(U>3) = 1- 0.1587 – 0,0013= 0,84$

Câu 6: Việc tiêu dùng điện hàng tháng của các hộ gia đình ở Hà Nội là biến ngẫu nhiên phân bố chuẩn với trung bình là 200KWh và độ lệch chuẩn là 40KWh. Tìm xác suất để chọn ngẫu nhiên một hộ gia đình thì hộ đó:

a. Có mức tiêu dùng điện hàng tháng trên 250KWh

b. Có mức tiêu dùng điện hàng tháng dưới 180KWh

Giải

$X \sim N\left(\mu;\sigma^2\right) = (200;1600)$ và X là biến ngẫu nhiên phân bố chuẩn.

$$P\left[X > 250\right] = P\left[X-\mu > 250-\mu\right]$$

$$= P\left[\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{250-\mu}{\sigma}\right]$$

$$= P\left[U > \frac{5}{4}\right] \quad \text{với } U = \frac{X-200}{40} \sim N(0;1)$$

$$= F(+\infty) - F\left(\frac{5}{4}\right) = 1 - F\left(\frac{5}{4}\right)$$

$$= 1 - \left(\frac{1}{2} + \Phi_0\left(\frac{5}{4}\right)\right) = \frac{1}{2} - \Phi_0\left(\frac{5}{4}\right)$$

$$= 0,5 - 0,3944 = 0,1056$$

$$P\left[0 < X < 180\right] = P\left[0-\mu < X-\mu < 180-\mu\right]$$

$$= P\left[\frac{0-\mu}{\sigma} < \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{180-\mu}{\sigma}\right]$$

$$= P\left[-5 < U < \frac{-1}{2}\right] \quad \text{với } U = \frac{X-200}{40} \sim N(0;1)$$

$$= F\left(\frac{-1}{2}\right) - F(-5)$$

$$= \Phi_0(5) - \Phi_0\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= 0,5 - 0,1915 = 0,3085$$

Câu 7: Chiều cao nam giới khi trưởng thành ở một vùng dân cư là biến ngẫu nhiên phân phối chuẩn với μ=160 cm và σ=6cm . Một thanh niên bị coi là lùn nếu có chiều cao nhỏ hơn 155cm

a) Tìm tỷ lệ thanh niên lùn ở vùng đó

b) Tìm xác suất để lấy ngẫu nhiên 4 người thì có ít nhất 1 người không bị lùn.

Giải

Gọi X là chiều cao của 1 thanh niên $\Rightarrow X \sim N\left(\mu=160, \sigma^2=6^2\right)$

a. Tỷ lệ thanh niên lùn là

$$P(X<155)=P\left(U<\frac{155-160}{6}\right)=P\left(U>0,83\right)=0,2033$$

b. Xác suất để cả 4 người đều bị lùn là $0,2033^4$

Xác suất có ít nhất 1 người không bị lùn là $1 - 0,2033^4 = 0,9983$

Câu 8: Kích thước chi tiết là biến ngẫu nhiên phân phối chuẩn với 50. Kích thước thực tế của các chi tiết không nhỏ hơn 32cm và không lớn hơn 68cm. Tìm xác suất để lấy ngẫu nhiên một chi tiết có kích thước.

a) Lớn hơn 55cm

b) Nhỏ hơn 40cm

Giải

Tính phương sai σ^2:

$P(32 \le X \le 68)=100\%$

$$= P(32-50 \le X-50 \le 68-50) = P(-18 \le X-50 \le 18) = \Phi_0\left(\frac{18}{\sigma}\right)-\Phi_0\left(\frac{-18}{\sigma}\right) = 2\Phi_0\left(\frac{18}{\sigma}\right)$$

suy ra $\frac{18}{\sigma}$ xấp xỉ 5; có nghĩa $\sigma = 3,6$.

a) Xác suất lấy ngẫu nhiên một chi tiết có kích thước lớn hơn 55cm:

$$P(X>55)=\frac{1}{2}-\Phi_0\left(\frac{55-50}{3,6}\right)=0,5-\Phi_0(1,39)\approx 0,0823.$$

b) Xác suất lấy ngẫu nhiên một chi tiết có kích thước nhỏ hơn 40cm:

$$P(X<40)=\frac{1}{2}-\Phi_0\left(\frac{40-50}{3,6}\right)=0,5-\Phi_0(2,78)\approx 0,0027.$$

3. Phân phối nhị thức

Bài 3: Một lô hàng có 8 sản phẩm loai I và 2 sản phẩm loại II. Lấy ngẫu nhiên lần lượt ra 5 sản phẩm theo phương thức hoàn lại. Gọi X là số sản phẩm loại II trong 5 sản phẩm lấy ra.

a) X có phân phối gì?

b) Tính kỳ vọng và phương sai của X.

c) Tính số sản phẩm loại II trung bình trong số sản phẩm lấy ra và tính khả năng để xảy ra điều đó.

d) Nếu lấy lần lượt ra 64 sản phẩm từ lô hàng đó (vẫn lấy theo phương thức hoàn lại) thì trung bình lấy được bao nhiêu sản phẩm loại II? Số sản phẩm loại II có khả năng xảy ra nhất là bao nhiêu?

Giải

a. X có phân phối nhị thức: n = 5; p = 0,2

b. E (X) = n.p = 5.0,2 = 1; V (X) = 5.0,2.0,8 = 0,8

c.

$$P(X=1)=P_5(1)=C_5^1.0,2^1.0,8^4=0,4096$$
$$P(X=2)=P_5(2)=C_5^2.0,2^2.0,8^3=0,2048$$

d.Gọi Y là số sản phẩm loại 2 có trong 64 sản phẩm lấy ra

Y có phân phối nhị thức n = 64; p = 0,2

E (Y) = 64.0,2 = 12,8 Như vậy

trong 64 sản phẩm thì có 13 sản phẩm loại 2

Số sản phẩm loại 2 có nhiều khả năng là Y mod của Y

64.0,2-0 , 8 <= Ymod <= 64.0,2 + 0,2

12 <= Ymod <= 13

Ymod <= 12: 13

Bài 13: Một báo cáo đã cung cấp các dữ liệu về 10 phần mềm phá hoại đầu bảng tính tới năm 2002. Đứng đầu nhóm này là loại vi rút mạng có tên "Klez" và tới năm 2002 nó vẫn là loại vi rút có sức phá hoại lớn nhất. Có 61,22% phiên bản loại vi rút này. Giả sử có 20 phiên bản phần mềm phá hoại và các bản gốc của các phiên bản phần mềm này là độc lập

a) Xác suất để có ít nhất một phiên bản "Klez" là bao nhiêu?

b) Trung bình và độ lệch chuẩn của số phiên bản "Klez" trong 20 phiên bản phần mềm phá hoại là bao nhiêu?

c) Xác suất có 3 hay nhiều hơn 3 phiên bản "Klez" là bao nhiêu?

Giải

n=20

Mỗi phiên bản — A virus Klez

$\bar{A}$ không phải virus Klez

a, Gọi B là biến cố trong 20 phiên bản có ít nhất một phiên bản virus Klez

Gọi $\bar{B}$ là biến cố trong 20 phiên bản không có virus Klez

$P(\bar{B}) = P_{20}(0) = C_{20}^{0}0{,}6122.0{,}3878$

b, Gọi X là số phiên bản Klez trong 20 phiên bản

X có phân phối nhị thức với n=20, p=0,6122

Số phiên bản Klez trong 20 phiên bản:

E(X) =n.p

V(X)=20.0,0122.3878

c, Cần tính P(X) với X>=3

Gọi C là biến cố có 3 hoặc nhiều hơn 3 phiên bản virus Klez trong 20 phiên bản

Gọi $\bar{C}$ là biến cố không quá 2 phiên bản virus Klez trong 20 phiên bản

C0 là biến cố là phiên bản 0 có virus Klez

C1 là biến cố là phiên bản có 1 virus Klez

C2 là biến cố là phiên bản có 2 virus Klez

Sau đó sử dụng biến cố đối để tìm ra C

4. Phân phối siêu bội:

Thí dụ: Một lô hàng gồm 1000 sản phẩm, trong đó có 800 sản phẩm loại A và 200 sản phẩm loại B. Lây ngẫu nhiên (không hoàn lại) từ lô hàng đó 10 sản phẩm để kiểm ưa. Tìm xác suất để có ít nhất 8 sản phẩm loại A ương 10 sản phẩm lấy ra kiểm tra.

Giải: Gọi X là số sản phẩm loại A có trong 10 sản phẩm lấy ra kiểm ưa. Vì lấy không hoàn lại nên X ~ H(1000, 800, 10). Nhưng vì lấy ít (10) từ một tập hợp có số phần tử lớn (1000) nên ta có thể coi X ~ B(n, p), với n = 10 và $p = \frac{800}{1000} = 0,8$

Xác suất cần tìm là P(X $\leq$ 8).

Ta có:

$$P(X = 8) = C_{10}^{8}(0,8)^{8}(0,2)^{2} = 0,30199$$

$$P(X = 9) = C_{10}^{9}(0,8)^{9}(0,2)^{2} = 0,268435$$

$$P(X = 10) = (0,8)^{10} = 0,107374$$

Vậy: P(X $\geq$ 8) = P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10) = 0,6778