XÁC SUẤT THỐNG KÊ VÀ ỨNG DỤNG

KHÁI NIỆM VỀ XÁC SUẤT

Buổi học 2

KHÁI NIỆM VỀ XÁC SUẤT

1. CÁC PHÉP THỬ NGẪU NHIÊN
2. KHÔNG GIAN MẪU
3. BIẾN CỐ
4. KHÁI NIỆM VỀ XÁC SUẤT
5. CÁC TIÊN ĐỀ XÁC SUẤT
6. MỘT VÀI ĐỊNH LÝ XÁC SUẤT QUAN TRỌNG
7. PHÉP GÁN XÁC SUẤT
8. XÁC SUẤT CÓ ĐIỀU KIỆN
9. CÁC ĐỊNH LÝ VỀ XÁC SUẤT CÓ ĐIỀU KIỆN
10. BIẾN CỐ ĐỘC LẬP
11. ĐỊNH LÝ BAYES

CÁC PHÉP THỬ NGẪU NHIÊN

- Một phép thử được thực hiện nhiều lần trong cùng điều kiện, cho ra cùng kết quả thì ta nói phép thử đó là phép thử "tất nhiên".
- Tuy nhiên, trong một số phép thử, chúng ta không thể xác định hoặc kiểm soát được giá trị của các biến, các kết cục của nó sẽ thay đổi qua các lần thực hiện phép thử, mặc dù các điều kiện thực hiện phép thử giống nhau. Các phép thử này được gọi là *phép thử ngẫu nhiên*.

CÁC PHÉP THỬ NGẪU NHIÊN

- **VÍ DỤ 1.1.** Tung một đồng xu, kết quả có thể là sấp, ký hiệu S (hay 0), hoặc ngửa, ký hiệu N (hay 1), nghĩa là một trong các phần tử của tập {S, N} hay {0, 1}.
- **VÍ DỤ 1.2.** Tung một con xúc xắc, kết quả là một trong các số của tập {1, 2, 3, 4, 5, 6}.
- **VÍ DỤ 1.3.** Tung một đồng xu hai lần, bốn kết quả có thể có của phép thử này là {SS, SN, NS, NN}, nghĩa là cả hai lần đều sấp, sấp lần đầu, ngửa lần thứ hai,...

CÁC PHÉP THỬ NGẪU NHIÊN

- **VÍ DỤ 1.4.** Cho một máy sản xuất bu-long, kết quả có thể có một vài con bu-long bị hỏng. Vì vậy, khi một con bu-long được sản xuất, thì con bu-long đó là thành phần của tập {hỏng, không hỏng}.
- **VÍ DỤ 1.5.** Phép thử là đo lường "tuổi thọ" bóng đèn do một công ty sản xuất, kết quả của phép thử là thời gian t (tính bằng giờ) trong khoảng $0 \le t \le 4.000$. Ta nói, không có bóng đèn nào có tuổi thọ hơn 4.000 giờ.

KHÔNG GIAN MẪU

- Tập Ω gồm các kết cục của một phép thử ngẫu nhiên, gọi là *không gian mẫu*. Có nhiều cách mô tả không gian mẫu, nhưng chỉ có duy nhất một không gian mẫu cung cấp hầu hết các thông tin của phép thử.
- VÍ DỤ 1.6. Tung một con xúc xắc, không gian mẫu là {1, 2, 3, 4, 5, 6}; một không gian mẫu khác là {mặt chẵn, mặt lẻ}.
- Ta thường dùng đồ thị để biểu diễn cho một không gian mẫu và dùng các số để thay thế cho các mẫu tự.

KHÔNG GIAN MẪU

- **VÍ DỤ 1.7.** Tung đồng xu hai lần, dùng 0 để biểu diễn cho mặt sấp và 1 biểu diễn cho mặt ngửa thì không gian mẫu được biểu diễn bằng các điểm như trong hình1-1, chẳng hạn (0,1) biểu diễn mặt sấp trong lần tung thứ nhất và mặt ngửa trong lần tung thứ hai, nghĩa là biểu diễn cho SN.

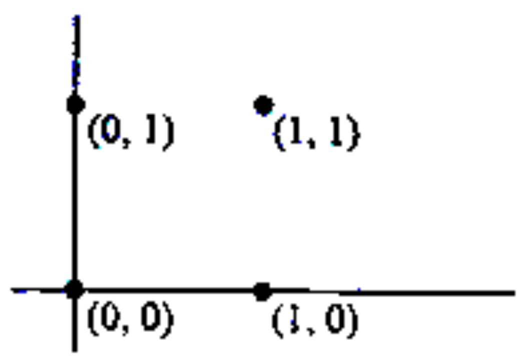

Fig. 1-1

BIẾN CỐ

❑ *Biến cố* là tập con A của không gian mẫu Ω. Nếu kết cục của một phép thử là một phần tử của tập A thì ta nói biến cố A xảy ra. Một biến cố chỉ có một phần tử của Ω thì được gọi là biến *cố sơ cấp*.

❑ **VÍ DỤ 1.8.** Tung đồng xu hai lần, biến cố xuất hiện mặt ngửa chỉ một lần là tập con của không gian [redacted] điểm (0,1) và (1,0).

BIẾN CỐ

- Các biến cố đặc biệt: Ω là *biến cố chắc chắn* và $\varnothing$ được gọi là *biến cố không thể xảy ra* trong phép thử.
- Các phép toán trên biến cố

1. $A \cup B$ là biến cố "A hay B". Ký hiệu $A \cup B$ hay A + B được gọi là hợp của A và B.
2. $A \cap B$ là biến cố "cả hai A và B". Ký hiệu $A \cap B$ hay A.B, được gọi là giao của A và B.
3. $A^{/}$ (hay $\bar{A}$) là biến cố "không A". $A^{/}$ được gọi là *phần bù* của A hay *đối lập của* A.

BIẾN CỐ

4. $A - B = A \cap B^{/}$ là biến cố "A nhưng không B". Trường hợp riêng, ta có $A^{/} = \Omega - A$.

- Nếu $A \cap B = \varnothing$, ta nói A và B là hai biến cố xung khắc. Một họ các biến cố $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *xung khắc từng đôi* nếu $A_i \cap A_j = \varnothing, \forall i \neq j$.
- VÍ DỤ 1.9. Xem lại phép thử tung đồng xu hai lần, gọi A là biến cố "có ít nhất một mặt ngửa xuất hiện" và B là biến cố "kết quả lần tung thứ hai xuất hiện mặt sấp" thì $A = \{NS, SN, NN\}$, $B = \{NS, SS\}$, và ta có

  $A \cup B = \{NS, SN, NN, SS\} = \Omega$; $A \cap B = \{NS\}$

  $A^{/} = \{SS\}$; $A - B = \{SN, NN\}$

KHÁI NIỆM VỀ XÁC SUẤT

Có hai hướng tiếp cận quan trọng:

1. HƯỚNG TIẾP CẬN CỔ ĐIỂN. Một biến cố có thể xảy ra với *k cách* (*số biến cố thuận lợi*), trong tổng số n cách có khả năng xảy ra như nhau (*số biến cố đồng khả năng*), thì xác suất của biến cố đó là tỷ số k/n.

- **VÍ DỤ 1.10.** Giả sử ta tung một đồng xu. Vậy khả năng mặt ngửa xuất hiện trong phép thử này là bao nhiêu?

Có 2 biến cố đồng khả năng: sấp, ngửa.

Mặt ngửa chỉ một cách xuất hiện mà thôi. Vậy, xác suất cần tìm là ½.

KHÁI NIỆM VỀ XÁC SUẤT

2. **HƯỚNG TIẾP CẬN TẦN SỐ.** Nếu sau n lần thực hiện phép thử, với n đủ lớn, ta quan sát một biến cố nào đó, thấy có k lần xuất hiện, thì xác suất của biến cố này là tỷ số k/n. Xác suất này còn được gọi là *xác suất thực nghiệm* của biến cố.

- **VÍ DỤ 1.10.** Nếu ta tung một đồng xu 1.000 lần và thấy mặt ngửa xuất hiện 532 lần, ta ước lượng xác suất xuất hiện mặt sấp là 532/1000 = 0,532.

Cả hai hướng tiếp cận cổ điển và tần số đều có mặt hạn chế.

CÁC TIÊN ĐỀ XÁC SUẤT

❑ Với biến cố A trong lớp C gồm các biến cố, kết hợp với một số thực thì P được gọi là *hàm xác suất* và P(A) là xác suất của biến cố A, nếu các tiên đề sau đây được thỏa.

- ***Tiên đề 1.*** Với mỗi biến cố A trong lớp C,

$$P(A) \geq 0 \qquad (1)$$

- ***Tiên đề 2.*** Với Ω là biến cố trong lớp C,

$$P(\Omega) = 1 \qquad (2)$$

- ***Tiên đề 3.*** Với $A_1, A_2, \ldots$ là các biến cố xung khắc từng đôi trong lớp C,

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots \qquad (3)$$

MỘT VÀI ĐỊNH LÝ XÁC SUẤT

- *Định lý 1-1:* Nếu $A_1 \subset A_2$ thì $P(A_1) \leq P(A_2)$ và $P(A_2 - A_1) = P(A_2) - P(A_1)$. (4)
- *Định lý 1-2:* Với mỗi biến cố A,

$$0 \leq P(A) \leq 1, \quad (5)$$

- *Định lý 1-3:* $P(\varnothing) = 0$ (6)
- *Định lý 1-4:* Nếu A' biến cố đối lập của A,

$$P(A') = 1 - P(A) \quad (7)$$

- *Định lý 1-5:* Nếu $A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$, trong đó $A_1, A_2, \ldots, A_n$ xung khắc từng đôi thì

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) \quad (8)$$

Trường hợp riêng, nếu $A = \Omega$ thì

$$P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) = 1 \quad (9)$$

MỘT VÀI ĐỊNH LÝ XÁC SUẤT

- ***Định lý 1-6:*** A và B là hai biến cố bất kỳ

  $$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \qquad (10)$$

  Tổng quát, A_1, A_2, A_3 là ba biến cố bất kỳ

  $$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_2) - P(A_2 \cap A_3) - P(A_3 \cap A_1) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \qquad (11)$$

- ***Định lý 1-7:*** A và B là hai biến cố bất kỳ,

  $$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^{/}) \qquad (12)$$

- ***Định lý 1-8:*** Nếu biến cố A xảy ra dẫn đến một trong các biến cố xung khắc từng đôi $A_1, A_2, \ldots, A_n$ xảy ra, thì

  $$P(A) = P(A \cap A_1) + P(A \cap A_2) + \ldots + P(A \cap A_n) \qquad (13)$$

PHÉP GÁN XÁC SUẤT

- Nếu không gian mẫu Ω gồm hữu hạn các kết cục $a_1, a_2,\ldots,a_n$, theo định lý 1-5,

$$P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) = 1 \qquad (14)$$

$A_1, A_2, \ldots, A_n$ là các b/c cấp, với $A_i = \{a_i\}$.

- Đặc biệt, nếu giả thiết tất cả các biến cố sơ cấp đều đồng khả năng thì

$$P(A_k) = 1/n, \qquad k = 1, 2, \qquad (15)$$

- Nếu A là biến cố được tạo thành từ k biến cố sơ cấp, ta có

$$P(A) = k/n \qquad (16)$$

PHÉP GÁN XÁC SUẤT

- **VÍ DỤ 1.12.** Tung con xúc xắc một lần. Tìm xác suất để mặt 2 hoặc mặt 5 xuất hiện.
- Không gian mẫu là $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Nếu ta gán tất cả các biến cố sơ cấp có xác suất bằng nhau, nghĩa là ta giả sử con xúc xắc công bằng thì
  - $P(1) = P(2) = \ldots = P(6) = 1/6$
- Biến cố xuất hiện mặt 2 hoặc mặt 5 được ký hiệu là $2 \cup 5$. Vậy,

$$P(2 \cup 5) = P(2) + P(5) = 1/6 + 1/6 = 1/3$$

XÁC SUẤT CÓ ĐIỀU KIỆN

- Cho A và B là hai biến cố (xem Hình. 1-3) sao cho P(A)> 0. Xác suất của biến cố B biết rằng biến cố A đã xảy ra, ký hiệu là P(B|A). Từ đó dẫn đến định nghĩa (17)

hay $$P(A \cap B) = P(B \mid A)P(A) \qquad (18)$$

[redacted]

XÁC SUẤT CÓ ĐIỀU KIỆN

❑ **VÍ DỤ 1.13.** Tung một con xúc xắc. Tìm xác suất để mặt xuất hiện nhỏ hơn 4 nếu (a) không biết thông tin nào, (b) biết rằng mặt chấm xuất hiện là một số lẻ.

a) Gọi B là biến cố {mặt chấm nhỏ hơn 4}. Do B là hợp của các biến cố xuất hiện mặt 1, 2, 3, áp dụng định lý 1-5 ta có

P(B)= P(1) + P(2) + P(3)= 1/6 + 1/6 + 1/6= ½.

b) Gọi A là biến cố {mặt chấm là số lẻ}, ta có P(A) = 3/6 = ½ và P(A∩B) = 2/6 = 1/3.

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{1/3}{1/2}=\frac{2}{3}$$

ĐỊNH LÝ XÁC SUẤT CÓ ĐIỀU KIỆN

- ***Định lý* 1-9:** Với 3 biến cố bất kỳ A_1, A_2, A_3, $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2 | A_1)P(A_3 | A_1 \cap A_2)$ (19)

  Dễ dàng tổng quát cho n biến cố

- ***Định lý 1-10:*** *Một phép thử có* A_1, A_2,…,A_n là một hệ đầy đủ các biến cố, nghĩa là $A_i \cap A_j = \varnothing$, $\forall i \neq j$ và $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \Omega$

  A là một biến cố xảy ra trong phép thử, ta có công thức xác suất đầy đủ

  $P(A) = P(A_1)P(A | A_1) + P(A_2)P(A | A_2) + \ldots + P(A_n)P(A | A_n)$ *(20)*

BIẾN CỐ ĐỘC LẬP

- Nếu $P(B|A) = P(B)$, nghĩa là xác suất của biến cố B xảy ra không bị ảnh hưởng do việc có xảy ra hay không xảy ra của biến cố A thì ta nói A và B là hai biến cố *độc lập*.

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \qquad (21)$$

- Ta nói ba biến cố A_1, A_2, A_3 độc lập nếu chúng độc lập từng đôi:

$$P(A_j \cap A_k) = P(A_j)P(A_k),\ j \neq k \qquad (22)$$

Và $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3) \qquad (23)$

Dễ dàng tổng quát cho n biến cố độc lập.

ĐỊNH LÝ BAYES

Giả sử A_1, A_2,...,A_n là hệ đầy đủ các biến cố. Nếu A là một biến cố bất kỳ trong phép thử thì ta có định lý quan trọng sau đây:

- ***Định lý 1-11 (Luật Bayes):***

$$P(A_k \mid A) = \frac{P(A_k)P(A \mid A_k)}{\sum_{j=1}^{n} P(A_j)P(A \mid A_j)} \qquad (24)$$

Định lý này cho phép chúng ta tìm xác suất của các biến cố khác nhau trong hệ A_1, A_2, . . .,A_n mà các biến cố này có thể là nguyên nhân gây ra biến cố A xảy ra.

THE END