BUỔI 3+4: ĐẠI LƯỢNG NGẪU NHIÊN

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. Khái niệm và các tính chất

a) Khái niệm và các tính chất

Đại lượng cho tương ứng mỗi kết quả của phép thử với một số được gọi là đại lượng ngẫu nhiên trên các kết quả của phép thử đó.

b) Các loại đại lượng ngẫu nhiên

Đại lượng ngẫu nhiên X có dạng $X = \{x_1, x_2,...,x_n\}$ hoặc $X = \{x_1, x_2,..., x_n,...\}$ được gọi là đại lượng ngẫu nhiên rời rạc.

Đại lượng ngẫu nhiên $X = \{c\}$ chỉ nhận một giá trị duy nhất được gọi là hằng số và được viết là X = c.

Đại lượng ngẫu nhiên có giá trị lấp đầy một khoảng hay đoạn nào đó được gọi là đại lượng ngẫu nhiên liên tục.

c) Bảng phân phối xác suất

Cho $X = \{x_1, x_2,..., x_n,...\}$ là một đại lượng ngẫu nhiên rời rạc. Đặt $p_i = P(X = x_i)$. Khi đó bảng sau đây được gọi là bảng phân phối xác suất của X.

X	x_1	x_2 ...	x_n ...
P	p_1	p_2 ...	p_n ...

Bảng phân phối xác suất có các tính chất sau

(1) $0 \le p_i \le 1$;

(2) $\sum_i p_i = 1$.

d) Hàm phân phối xác suất

Cho X là đại lượng ngẫu nhiên.Ta gọi hàm số $F(x) = P(X < x)$ là hàm phân phối xác suất của X.

Hàm phân phối xác suất có các tính chất sau

(1) F(x) là hàm không giảm;

(2) $0 \le F(x) \le 1, \forall x \in R$;

(3) $F(-\infty) = \lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$;

$F(+\infty) = \lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$;

(4) $P(a \le X < b) = F(b) - F(a)$.

Ngược lại, nếu F(x) là hàm số xác định trên R và có các tính chất (1) – (3) thì F(x) là hàm phân phối xác suất của một đại lượng ngẫu nhiên nào đó.

Nếu X là đại lượng ngẫu nhiên rời rạc có bảng phân phối xác suất.

X	x_1	x_2 ...	x_n
P	p_1	p_2 ...	p_n

Với $x_1 < x_2 < ... < x_n$, thì hàm phân phối xác suất của X là

$$F(x) = \begin{cases} 0 & ,\text{nếu} \quad x \le x_1 \\ p_1 & ,\text{nếu} \quad x < x \le x_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots \\ p_1 + p_2 + \ldots + p_{n-1} & ,\text{nếu} \quad x_{n-1} < x \le x_n \\ 1 & ,\text{nếu} \quad x > x_n \end{cases}$$

e) Hàm mật độ xác suất

Nếu đại lượng ngẫu nhiên liên tục X có hàm phân phối xác suất F(x) khả vi thì hàm

$$f(x) = F'(x)$$

được gọi là hàm mật độ xác suất của X.

Hàm mật độ xác suất có các tính chất sau

(1) $f(x) \ge 0, \forall x \in R$;

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$;

(3) $P(a < X < b) = \int_{b}^{a} f(x)dx$;

(4) $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$.

Ngược lại, một hàm số f(x) có các tính chất (1) – (2) phải là hàm mật độ xác suất của một đại lượng ngẫu nhiên nào đó.

2. Các phép toán đối với đại lượng ngẫu nhiên

a) Phép cộng

Giả sử X và Y là các đại lượng ngẫu nhiên rời rạc có bảng phân phối xác suất như sau

X	x_1	x_2 ...	x_m
P	p_1	p_2 ...	p_m

Y	y_1	y_2 ...	y_n
P	p'_1	p'_2 ...	p'_n

Khi đó X + Y là đại lượng ngẫu nhiên rời rạc có bảng phân phối xác suất là

X + Y	z_1	z_2 ...	z_s
P	P''_1	P''_2 ...	P''_s

Trong đó z_k là các giá trị khác nhau của các tổng $x_i + y_j$ và $p''_k = \sum_{x_i+y_j=z_K} p_i p'_j$

b) Phép nhân

Cho X, Y là hai đại lượng ngẫu nhiên rời rạc có bảng phân phối xác suất như ở a). Khi đó X.Y là đại lượng ngẫu nhiên rời rạc có bảng phân phối xác suất là

X Y	z_1	z_2 ...	z_s
P	P''_1	P''_2 ...	P''_s

Trong đó z_K là các giá trị khác nhau của các tích $x_i y_j$ và

$$p''_K = \sum_{x_i y_j = z_K} p_i p'_j$$

3. Các đặc trưng của đại lượng ngẫu nhiên

a) Kì vọng

Nếu X là đại lượng ngẫu nhiên rời rạc có bảng phân phối xác suất là :

X	x_1	x_2 ...	x_k
P	p_1	p_2 ...	p_k

thì số $E(X) = \sum_i x_i p_i$ được gọi là kì vọng của X.

Nếu X là đại lượng ngẫu nhiên liên tục có hàm mật độ xác suất f(x) thì số

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

được gọi là kì vọng của X.

Kì vọng của một đại lượng ngẫu nhiên là trung bình theo xác suất các giá trị có thể nhận của đại lượng đó.

Kì vọng có các tính chất sau

(1) $E(C) = C$, với C là hằng số ;

(2) $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$;

(3) $E(XY) = E(X) + E(Y)$; nếu X, Y độc lập.

(4) $E(CX) = CE(X)$; với C là hằng số.

b) Phương sai

Kì vọng của bình phương độ lệch giữa X và E(X) được gọi là phương sai của X, kí hiệu là D(X). Vậy, $D(X) = E(X - E(X))^2 = E(X - \mu)^2$,

trong đó

$\mu = E(X)$.

Phương sai là trung bình của bình phương sai số giữa X và trung bình theo xác suất của X.

Nếu X là đại lượng ngẫu nhiên rời rạc có bảng phân phối xác suất như ở a) thì

$$D(X) = \sum_i (x_i - \mu)^2 p_i .$$

Nếu X là đại lượng ngẫu nhiên liên tục có hàm mật độ xác suất f(x) thì

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 f(x)dx .$$

Phương sai có các tính chất sau

(1) $D(X) \geq 0$;

(2) $D(C) = 0$, với C là hằng số ;

(3) $D(CX) = C^2 D(X)$, với C là hằng số ;

(4) $D(X) = E(X^2) - E^2(X)$;

(5) $D(X + Y) = D(X) + D(Y)$, nếu X,Y độc lập.

c) Độ lệch

Số $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$

được gọi là độ lệch của đại lượng ngẫu nhiên X.

B. CÁC BÀI GIẢI MẪU

1. Lập bảng phân phối xác suất

Bài 1. *Một xạ thủ được phép bắn 3 viên đạn. Biết xác suất bắn trúng mục tiêu của mỗi viên đạn đều 0,8. Gọi X là số viên đạn anh ta bắn trúng bia. Hãy lập bảng phân phối xác suất của X.*

Giải. Ta có $X = \{0, 1, 2, 3\}$. Ta cần tìm $P(X = k)$, $k = \overline{0,3}$.

Xem phép thử là bắn 1 viên đạn và A là biến cố viên đạn đó trúng mục tiêu. Ta có $P(A) = 0,8$ không đổi ở mỗi lần bắn nên đây là một dãy 3 phép thử Bernoulli với $p = 0,8$;

$$q = 1 - p = 0,2.$$

Áp dụng công thức Bernoulli, ta được

$P(X = 0) = P_3(0 ; 0,8) = C_3^0 0,8^0.0,2^3 = 0,008$;

$P(X = 1) = P_3(1 ; 0,8) = C_3^1 0,8^1.0,2^2 = 0,96$;

$P(X = 2) = P_3(2 ; 0,8) = C_3^2 0,8^2.0,2^1 = 0,384$;

$P(X = 3) = P_3(3 ; 0,8) = C_3^0 0,8^3.0,2^0 = 0,512$.

Vậy, bảng phân phối xác suất của X là

X	0	1	2	3
P	0,008	0,096	0,384	0,512

Bài 2. *Một xạ thủ được phát 3 viên đạn và được phép bắn lần lượt từng viên cho đến khi trúng mục tiêu thì dừng bắn. Biết xác suất bắn trúng từng viên đều là 0,8. Hãy lập bảng phân phối xác suất của số viên đạn*

a) trúng mục tiêu.

b) anh ta đã sử dụng.

Giải

a) Gọi X là số viên đạn trúng mục tiêu.

Theo đề bài, nếu trúng mục tiêu thì dừng bắn nên $X = \{0, 1\}$. Ta tính $P(X = 0)$, $P(X=1)$.

Gọi L_K là biến cố lần thứ k bắn trúng mục tiêu, $k = \overline{1,3}$.

Ta có X = 0 xảy ra khi cả 3 lần đều bắn trượt. Các lần bắn độc lập với nhau nên :

$$P(X = 0) = P(\overline{L_1}\,\overline{L_2}\,\overline{L_3}) = P(\overline{L_1})P(\overline{L_2})P(\overline{L_3}) = (1 - 0,8)^3 = 0,008.$$

Để tính $P(X = 1)$ ta có hai cách sau.

<u>Cách thứ nhất.</u> Theo tính chất của bảng phân phối xác suất, ta có

$$P(X = 0) + P(X = 1) = 1.$$

Suy ra $P(X = 1) = 1 - P(X = 0) = 0,992$.

<u>Cách thứ hai .</u> Tương tự cách tính $P(X = 0)$ ta có

$$P(X = 1) = P(L_1 + \overline{L_1}L_2 + \overline{L_1}\,\overline{L_2}L_3) = 0,8 + 0,2.0,8 + 0,2^2.0,8 = 0,992.$$

Vậy, bảng phân phối xác suất của X là

X	0	1
P	0,008	0,992

b) Gọi Y là số viên đạn anh ta đã sử dụng thì $Y = \{1, 2, 3\}$. Ta tính $P(X = m)$, $m = \overline{1,3}$.

. Rõ ràng Y = 1 xảy ra khi và chỉ khi L_1 xảy ra, do đó $P(Y = 1) = P(L_1) = 0,8$.

. Y = 2 xảy ra khi và chỉ khi lần thứ nhất bắn trượt và lần thứ hai bắn trúng. Suy ra

$$P(Y = 2) = P(\overline{L_1}L_2) = 0,2.0,8 = 0,16.$$

. Y = 3 xảy ra khi và chỉ khi cả hai viên đạn đầu tiên đều trượt, còn viên thứ ba có thể trúng hoặc trượt, tức là biến cố chắn chắn xảy ra.

Vì

$$\overline{L_1}\,\overline{L_2}(L_3 + \overline{L_3}) = \overline{L_1}\,\overline{L_2}\Omega = \overline{L_1}\,\overline{L_2},$$

nên

$$P(Y = 3) = P(\overline{L_1}\,\overline{L_2}) = 0,2^2 = 0,04.$$

<u>Cách thứ hai.</u> Ta cũng có

$$P(Y = 3) = 1 - (P(Y = 1) + P(Y = 2)) = 0,04.$$

Vậy, bảng phân phối xác suất của Y là :

Y	1	2	3
P	0,8	0,16	0,04

2. Tìm hàm phân phối xác suất

Bài 3. *Một sinh viên thi ba môn Toán, Lý, Hóa với xác suất đậu lần lượt là 0,6 ; 0,7 ; 0,8. Hãy tìm hàm phân phối xác suất của số môn anh ta đậu trong ba môn đó.*

Giải

Gọi X là số môn đậu của sinh viên đó. Ta có $X = \{0, 1, 2, 3\}$. Ta tính $P(X = k)$, $k = \overline{0,3}$.

Gọi T, L, H lần lượt là các biến cố sinh viên đó đậu Toán, Lý, Hóa. Khi đó

$$P(X = 0) = P(\overline{T}\,\overline{L}\,\overline{H}) = 0{,}024,$$
$$P(X = 1) = P(T\overline{L}\,\overline{H} + \overline{T}L\overline{H} + \overline{T}\,\overline{L}H) = 0{,}188,$$
$$P(X = 2) = P(TL\overline{H} + T\overline{L}H + \overline{T}LH) = 0{,}452,$$
$$P(X = 3) = P(TLH) = 0{,}336.$$

Vậy, bảng phân phối xác suất của X là

X	0	1	2	3
P	0,024	0,188	0,452	0,336

Từ đó, ta có hàm phân phối xác suất của X là

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{, nếu } x \le 0 \\ 0{,}024 & \text{, nếu } 0 < x \le 1 \\ 0{,}024 + 0{,}188 = 0{,}212 & \text{, nếu } 1 < x \le 2 \\ 0{,}024 + 0{,}188 + 0{,}452 = 0{,}664 & \text{, nếu } 2 < x \le 3 \\ 1 & \text{, nếu } x > 3 \end{cases}$$

Bài 4. *Cho X là đại lượng ngẫu nhiên liên tục có hàm mật độ xác suất là*

$$f(x) \begin{cases} 0 & \text{, khi } x \le 0 \\ ae^{-x/\theta} & \text{, khi } x > 0 \end{cases}$$

Trong đó θ là số cho trước ($\theta > 0$).

Hãy xác định

a) hệ số a.

b) hàm phân phối xác suất của X.

c) $P(0 < X < \theta)$.

Giải

a) Theo tính chất của hàm mật độ xác suất, ta có

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) = 1,$$

hay

$$\int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{+\infty} ae^{-x/\theta}dx = 1.$$

Suy ra $\quad \theta.a = 1$.

Vậy $\quad a = \dfrac{1}{\theta}$.

b) Theo tính chất của hàm phân phối xác suất, ta có

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt.$$

Do đó,

- Với $x \le 0$ thì $F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0dt = 0$,

- Với $x > 0$ thì $F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0dt + \int_{0}^{x} \frac{1}{\theta} e^{-t/\theta} dt = 1 - e^{-x/\theta}$.

c) $P(0 < X < \theta) = F(\theta) - F(0) = (1 - e^{-1}) - 0 = 1 - \dfrac{1}{e}$.

3. Tìm hàm mật độ xác suất

Bài 5. *Hàm phân phối xác suất của một đại lượng ngẫu nhiên có dạng*

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \left(\dfrac{x_0}{x}\right)^{\alpha} & \text{, nếu} \quad x \ge x_0 \\ 0 & \text{, nếu} \quad x < x_0, \end{cases}$$

trong đó $\alpha > 0$, $x_0 > 0$.

Hãy tìm hàm mật độ xác suất của đại lượng đó.

Giải

Theo định nghĩa, ta có hàm mật độ xác suất

$$f(x) = F'(x),\ x \in R.$$

Do đó

. Với $x < x_0$ thì $f(x) = 0$,

. Với $x > x_0$ thì $f(x) = \dfrac{\alpha x_0^{\alpha}}{x^{\alpha+1}}$,

. Tại $x = x_0$

$$F'_{-}(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = 0,$$

$$F'_{+}(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0^+} \frac{1 - \left(\dfrac{x_0}{x}\right)^{\alpha}}{x - x_0} = \frac{\alpha}{x_0},$$

nên $F(x)$ không khả vi tại x_0.

Vậy, hàm mật độ xác suất cần tìm có dạng

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\alpha x_0^{\alpha}}{x^{\alpha+1}} & \text{, nếu } x > x_0 \\ 0 & \text{, nếu } x < x_0 \end{cases}$$

Bài 6. *Chứng minh rằng hàm số*

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + \pi^2}$$

là hàm mật độ xác suất của một đại lượng ngẫu nhiên nào đó. Tìm xác suất để đại lượng này nhận giá trị trong khoảng (π, + ∞).

Giải

Ta có

$$f(x) \geq 0, \forall x \in R$$

và

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + \pi^2} = \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{x}{\pi}\Big|_{-\infty}^{+\infty} = 1.$$

Vậy f(x) là hàm mật độ xác suất của một đại lượng ngẫu nhiên nào đó mà ta gọi là X.

Ta cần tính $P(\pi < X < +\infty)$.

Theo tính chất của hàm mật độ xác suất,

$$P(\pi < X < +\infty) = \int_{\pi}^{+\infty} f(x)dx = \int_{\pi}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + \pi^2}$$

$$= \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{x}{\pi}\Big|_{\pi}^{+\infty} = \frac{1}{4}.$$

4. Các phép toán đối với đại lượng ngẫu nhiên

Bài 7. *Cho hai đại lượng ngẫu nhiên X và Y có bảng phân phối xác suất lần lượt là*

X	0	1	2
P	0,2	0,3	0,5

,

Y	-1	1	2
P	0,4	0,3	0,3

Hãy lập bảng phân phối xác suất của các đại lượng X+Y, XY, 2X, Y^2.

Giải

Đối với từng phép toán đã cho ta lập bảng ghi các giá trị và xác suất tương ứng.

a) Trường hợp X+Y

Ta có hai bảng sau đây.

. Ở bảng thứ nhất (xem Bảng 1)

- dòng 1 ghi các giá trị của X,
- cột 1 ghi các giá trị của Y,
- các ô giữa ghi giá trị tương ứng của X+Y. Kết quả ở mỗi ô là tổng các giá trị thuộc dòng 1 lần lượt với các giá trị thuộc cột 1.

. Ở bảng thứ hai (xem Bảng 2)

- dòng 1 ghi xác suất ứng với mỗi giá trị của X,
- cột 1 ghi xác suất ứng với mỗi giá trị của Y,
- các ô giữa ghi xác suất ứng với mỗi giá trị của X+Y. Kết quả ở mỗi ô là tích các giá trị thuộc dòng 1 lần lượt với các giá trị thuộc cột 1.

X Y	0	1	2
-1	-1	0	1
1	1	2	3
2	2	3	4

Bảng 1

X Y	0,2	0,3	0,5
0,4	~~0,008~~ 0,08	0,12	0,20
0,3	0,06	0,09	0,15
0,3	0,06	0,09	0,15

Bảng 2

Từ Bảng 1 và Bảng 2 suy ra

$X+Y = \{-1, \ 0, \ 1, \ 2, \ 3, \ 4\}$,

$P(X+Y = -1) = 0{,}08$,

$P(X+Y = 0) = 0{,}12$,

$P(X+Y = 1) = 0{,}20 + 0{,}06 = 0{,}26$,

$P(X+Y = 2) = 0{,}09 + 0{,}06 = 0{,}15$,

$P(X+Y = 3) = 0{,}15 + 0{,}09 = 0{,}24$,

$P(X+Y = 4) = 0{,}15$.

Vậy, bảng phân phối xác suất của X+Y là

X+Y	-1	0	1	2	3	4
P	0,08	0,12	0,26	0,15	0,24	0,15

b) Trường hợp XY

Ta chỉ cần lập lại bảng giá trị của tích XY tương tự như Bảng 1, nhưng kết quả ở mỗi ô giữa trong bảng mới sẽ là tích các giá trị thuộc dòng 1 lần lượt với các giá trị thuộc cột 1. (xem Bảng 3)

X Y	0	1	2
-1	0	-1	-2
1	0	1	2
2	0	2	4

Bảng 3

Từ Bảng 3 và Bảng 2 suy ra

$XY = \{-2, \ -1, \ 0, \ 1, \ 2, \ 4\}$,

$P(XY = -2) = 0{,}20$,

$P(XY = -1) = 0{,}12$,

$P(XY = 0) = 0{,}08 + 0{,}06 + 0{,}06 = 0{,}20$,

$P(XY = 1) = 0{,}09$,

$P(XY = 2) = 0{,}15 + 0{,}09 = 0{,}24$,

$P(XY = 4) = 0{,}15$.

Vậy, bảng phân phối xác suất của XY là

XY	-2	-1	0	1	2	3
P	0,20	0,12	0,20	0,09	0,24	0,15

Lưu ý. Bảng 1 và Bảng 2 có thể ghi chung thành một bảng (xem Bảng A) ; Bảng 3 và Bảng 2 có thể ghi chung thành một bảng (xem Bảng B). Trong hai bảng này, góc trái của mỗi ô ghi giá trị, góc phải ghi xác suất tương ứng.

X Y	0 0,2	1 0,3	2 0,5
-1 0,4	-1 0,08	0 0,12	1 0,20
1 0,3	1 0,06	2 0,09	3 0,15
2 0,3	2 0,06	3 0,09	4 0,12

Bảng A

X Y	0	1	2
-1	0 0,08	-1 0,12	-2 0,20
1	0 0,06	1 0,09	2 0,15
2	0 0,06	2 0,09	4 0,15

Bảng B

c) Trường hợp 2X, Y^2

Ta có $2X = X + X$,
$Y^2 = YY$,

nên tương tự các trường hợp a), b) ta có các bảng sau đây (xem Bảng C, Bảng D tương ứng).

X X	0 0,2	1 0,3	2 0,5
0 0,2	0 0,04	1 0,06	2 0,10
1 0,3	1 0,06	2 0,09	3 0,15
2 0,5	2 0,10	3 0,15	4 0,25

Bảng C

Y Y	-1 0,4	1 0,3	2 0,3
-1 0,4	1 0,16	-1 0,12	-2 0,12
1 0,3	-1 0,12	1 0,09	2 0,09
2 0,3	-2 0,12	2 0,09	4 0,09

Bảng D

Từ Bảng C ta có bảng phân phối xác suất của 2X là

2X	0	1	2	3	4
P	0,04	0,12	0,29	0,30	0,25

Từ Bảng D ta có bảng phân phối xác suất của Y^2 là

Y^2	-2	-1	1	2	4
P	0,24	0,24	0,25	0,18	0,09

5. Tính kì vọng, phương sai, độ lệch

Bài 8. *Cho đại lượng ngẫu nhiên X có bảng phân phối xác suất như sau*

X	0	1	2	3	4
P	0,1	0,2	0,3	0,25	0,15

Hãy tính kì vọng, phương sai, độ lệch của X.

Giải

- Kì vọng của X là

$$E(X) = 0.0,1 + 1.0,2 + 2.0,3 + 3.0,25 + 4.0,15 = 2,15.$$

- Để tính phương sai, ta có hai cách sau.

<u>Cách thứ nhất.</u> (Áp dụng định nghĩa).

$$D(X) = (0 - 2,15)^2.0,1 + (1 - 2,15)^2.0,2 + (2 - 21,5)^2.0,3 + (3 - 2,15)^2.0,25 + (4 - 2,15)^2.0,15 = 1,4275.$$

<u>Cách thứ hai.</u> (Áp dụng tính chất)

$$E(X^2) = 0^2.0,1 + 1^2.0,2 + 2^2.0,3 + 3^2.0,25 + 4^2.0,15 = 6,05\ ;$$

$$D(X) = E(X^2) - E^2(X) = 6,05 - 2,15^2 = 1,4275.$$

- Độ lệch của X là

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{1,4275} = 1,19478.$$

Bài 9. *Cho đại lượng ngẫu nhiên X có hàm mật độ xác suất*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi\sqrt{a^2 - x^2}}, neáu & x \in (-a, a) \\ 0, neáu & x \notin (-a, a) \end{cases}$$

Tìm kì vọng, phương sai, độ lệch của X.

Giải

- Kì vọng của X là

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_{-\infty}^{-a} xodx + \int_{-a}^{a} \frac{xdx}{\pi\sqrt{a^2 - x^2}} + \int_{a}^{+\infty} xodx = \frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a} \frac{xdx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = 0$$

(vì hàm số lấy tích phân là hàm lẻ).

- Phương sai của X là

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty}(x-0)^2 f(x)dx = \int_{-a}^{a}\frac{x^2dx}{\pi\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{a}\frac{x^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} a^2\sin^2 t dt = \frac{a^2}{\pi}\int_0^{\pi/2}(1-\cos 2t)dt = \frac{a^2}{2}.$$

- Độ lệch của X là

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

6. Bài tập tổng hợp

Bài 10. *Một xạ thủ bắn 2 viên đạn vào một tấm bia gồm hai vòng tròn. Bắn trúng vòng thứ nhất được 10 điểm, trúng vòng thứ hai được 6 điểm, còn bắn trượt thì bị điểm 0. Gọi X là điểm trung bình của xạ thủ đó sau 2 lần bắn độc lập, mỗi lần 1 viên đạn. Hãy lập bảng phân phối xác suất, hàm phân phối xác suất và tính kì vọng, phương sai của X. Cho biết ở lần bắn thứ nhất xác suất bắn trúng vòng thứ nhất là 0,5, vòng thứ hai là 0,3 và xác suất bắn trượt là 0,2. Ở lần thứ hai các xác suất đó lần lượt là 0,4 ; 0,2 ; 0,4.*

Giải

Gọi L_K là số điểm mà xạ thủ đạt được ở lần bắn thứ k, k = 1,2. Theo đề bài

$$L_K = \{0, 6, 10\}, k = 1,2,$$

và bảng phân phối xác suất của L_1, L_2 lần lượt là

L_1	0	6	10
P	0,2	0,3	0,5

,

L_2	0	6	10
P	0,4	0,2	0,4

Ta có $X = \frac{L_1 + L_2}{2}$. Ta lập bảng các giá trị và xác suất tương ứng của X (xem Bảng E).

L_2 \ L_1	0 (0,2)	6 (0,3)	1 (0,5)
0 (0,4)	0 (0,08)	3 (0,12)	5 (0,20)
6 (0,2)	3 (0,04)	6 (0,06)	8 (0,10)
10 (0,4)	5 (0,08)	8 (0,12)	10 (0,20)

Bảng E

Từ bảng E suy ra bảng phân phối xác suất của X là

X	0	3	5	6	8	10

P	0,08	0,16	0,28	0,06	0,22	0,20

- Hàm phân phối xác suất của X là

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \ khi \quad x \le 0 \\ 0,08 & , \ khi \quad 0 < x \le 3 \\ 0,24 & , \ khi \quad 3 < x \le 5 \\ 0,52 & , \ khi \quad 5 < x \le 6 \\ 0,58 & , \ khi \quad 6 < x \le 8 \\ 0,80 & , \ khi \quad 8 < x \le 10 \\ 1 & , \ khi \quad x > 10 \end{cases}$$

- Kì vọng của X là

$E(X) = 0.0{,}08 + 3.\ 0{,}16 + 5.0,\ 28 + 6.\ 0{,}06 + 8.0,\ 22 + 10.0{,}20 = 6$

$E(X^2) = 0^2.0{,}08 + 3^2.0{,}16 + 5^2.0{,}28 + 6^2.0{,}06 + 8^2.0{,}22 + 10^2.0{,}20 = 44{,}68$

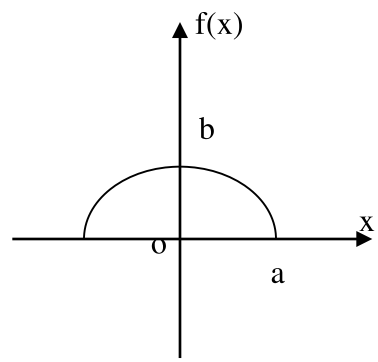
- Phương sai của X là

$D(X) = 44{,}68 - 6^2 = 8{,}68.$

Bài 11. *Cho đồ thị của hàm mật độ xác suất của đại lượng ngẫu nhiên X là nửa đường ellip bán trục a, b (xem hình vẽ).*

Cho biết a. Hãy tìm b.

Lập hàm phân phối xác suất và tính kì vọng, phương sai của X.



Giải

Từ đề bài suy ra hàm mật độ xác suất của X có dạng

$$f(x) = \begin{cases} \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} & , \ \text{nếu} \quad x \in (-a, a) \\ 0 & , \ \text{nếu} \quad x \notin (-a, a) \end{cases}$$

Trước hết ta tìm b.

Ta phải có

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \text{ hay } \int_{-a}^{a} \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\,dx = 1.$$

Đổi biến số x = asint và để ý rằng hàm lấy tích phân là hàm chẵn, ta có

$$\frac{2b}{a}\int_0^{\pi/2} a^2\cos^2 t\,dt = 1 \quad \text{hay} \quad ab\frac{\pi}{2} = 1.$$

Vậy

$$b = \frac{2}{a\pi}.$$

Ta tìm hàm phân phối xác suất của X.

- Với $x \in (-\infty, -a]$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{x} 0dt = 0.$$

- Với $x \in (-a, a)$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{-a} 0dt + \int_{-a}^{x} \frac{2}{a^2\pi}\sqrt{a^2 - t^2}dt =$$

$$= \frac{2}{a^2\pi}\left[\frac{t}{2}\sqrt{a^2 - t^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{t}{a}\right]_{-a}^{x} = \frac{x}{a^2\pi}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{1}{\pi}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{1}{2}.$$

- Với $x \in [a, +\infty)$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{-a} 0dt + \int_{-a}^{a} \frac{2}{a^2\pi}\sqrt{a^2 - t^2}dt + \int_{a}^{x} 0dt = 1.$$

Vậy, hàm phân phối xác suất của X là

$$F(x) = \begin{cases} 0 & ,\text{nếu } x \le -a \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{a^2\pi}\sqrt{a^2 - x^2} & ,\text{nếu } -a < x < a \\ 1 & ,\text{nếu } x \ge a \end{cases}$$

. Kì vọng của X là

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_{-a}^{a} \frac{2x}{a^2\pi}\sqrt{a^2 - x^2}dx = 0$$

(vì hàm số lấy tích phân là hàm lẻ).

. Phương sai của X là

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-0)^2 f(x)dx = \int_{-a}^{a} \frac{2x^2}{a^2\pi}\sqrt{a^2 - x^2}dx = \frac{4}{a^2\pi}\int_{0}^{a} x^2\sqrt{a^2 - x^2}dx.$$

Đổi biến số $x = a\sin t$, ta có

$$D(X) = \frac{4}{a^2\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} a^2 \sin^2 t\, a^2 \cos^2 t dt = \frac{a^2}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2t\, dt =$$

$$= \frac{a^2}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 4t}{2} dt = \frac{a^2}{4}.$$

C. BÀI TẬP

1. Cho đại lượng ngẫu nhiên X có bảng phân phối xác suất sau đây

X	0	1	2	3	4	5	6	7
P	0	a	2a	2a	3a	a^2	$2a^2$	$7a^2 + a$

2 Sum = 1

P(1)

a) Tính a.

b) Tính $P(X \geq 3)$, $P(X < 3)$.

+P2 + P3 + P4 + P5

c) Tìm giá trị bé nhất của k sao cho $P(X \leq k) \geq \frac{1}{2}$.

2. Trong một hộp có 10 sản phẩm, trong đó có 2 phế phẩm. Lấy ngẫu nhiên 3 sản phẩm. Gọi X là số phế phẩm trong các sản phẩm lấy ra. Hãy lập bảng phân phối xác suất và hàm phân phối xác suất của X. Vẽ đồ thị hàm số đó.

3. Một túi chứa 10 tấm thẻ đỏ và 6 tấm thẻ xanh. Chọn ngẫu nhiên ra 3 tấm thẻ.

a) Gọi X là số thẻ đỏ lấy được. Hãy lập bảng phân phối xác suất của X.

b) Giả sử rút mỗi tấm thẻ đỏ được 5 điểm, thẻ xanh được 8 điểm. Gọi Y là số điểm tổng cộng trên 3 thẻ rút ra. Hãy tìm hàm phân phối xác suất của Y.

4. Có hai hộp bi, hộp thứ nhất có 3 bi xanh và 1 bi đỏ, hộp thứ hai có 2 bi xanh và 2 bi đỏ. Từ hộp thứ nhất lấy ra 2 viên bi bỏ vào hộp thứ hai. Sau đó lại lấy 2 viên bi từ hộp thứ hai bỏ vào hộp thứ nhất. Gọi X, Y là số bi đỏ tương ứng ở hai hộp đó sau hai lần chuyển bi. Hãy lập bảng phân phối xác suất của X, Y.

5. Cho hai đại lượng ngẫu nhiên X và Y độc lập với các bảng phân phối xác suất như sau

X	-1	0	1	2
P	0,2	0,3	0,3	0,2

Y	-1	0	1
P	0,3	0,4	0,3

Hãy lập bảng phân phối xác suất của X^2, $X + Y$, $2Y$, $X - Y$, XY.

6. Gieo đồng thời hai con súc sắc. Gọi X_1, X_2 lần lượt là số chấm xuất hiện trên hai con súc sắc đó. Tìm bảng phân phối xác suất của các đại lượng ngẫu nhiên sau đây

a) $Y_1 = X_1 + X_2$

b) $Y_2 = X_1 - X_2$

c) $Y_3 = \max(X_1, X_2)$.

7. Một người có một chùm chìa khóa gồm 5 chiếc giống nhau, trong đó chỉ có 2 chiếc mở được cửa. Người đó thử ngẫu nhiên từng chiếc (thử xong bỏ ra ngoài) cho đến khi tìm đúng chìa mở được cửa. Gọi X là số lần thử cần thiết. Hãy lập bảng phân phối xác suất và tính kì vọng, phương sai của X.

8. Một ôtô đi trên đoạn đường có 3 đèn tín hiệu giao thông hoạt động độc lập. Tính kì vọng, phương sai, độ lệch của số lần ôtô dừng khi đi trên đoạn đường đó, biết rằng chỉ tín hiệu xanh mới được phép đi và

a) cả 3 đèn đều có thời gian tín hiệu xanh là 30 giây, tín hiệu vàng là 5 giây, tín hiệu đỏ là 15 giây.

b) ở đèn thứ nhất thời gian dành cho ba tín hiệu đó lần lượt là : 40 giây, 10 giây, 30 giây ; ở đèn thứ hai : 25 giây, 5 giây, 10 giây ; ở đèn thứ ba 20 giây, 5 giây, 35 giây.

9. Cho X, Y là hai đại lượng ngẫu nhiên độc lập có bảng phân phối xác suất như sau

X	0	1	2	3
P	0,4	0,3	0,2	0,1

Y	0	1	2	3	4
P	0,1	0,3	0,4	0,15	0,05

Tìm bảng phân phối xác suất và tính kì vọng, phương sai của X + Y, XY.

10. Cho đại lượng ngẫu nhiên X có hàm mật độ xác suất

$$f(x) = \begin{cases} kx^2(1-x) & ,\text{nếu } 0 \le x \le 1 \\ 0 & ,\text{nếu } x \notin [0,1] \end{cases}$$

a) Tìm k.

b) Tìm hàm phân phối xác suất của X.

c) Tính kì vọng, phương sai của X.

11. Cho đại lượng ngẫu nhiên X có hàm mật độ xác suất

$$f(x) = \begin{cases} a\cos x & ,\text{nếu } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ 0 & ,\text{nếu } x \notin \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$$

a) Tìm a.

b) Viết biểu thức của hàm phân phối xác suất.

c) Tìm $P(0 \le X \le \frac{\pi}{4})$.

d) Nếu quan sát X 5 lần thì bao nhiêu lần X nhận giá trị thuộc $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ là có khả năng nhất? Tính xác suất đó.

12. Cho đại lượng ngẫu nhiên X có hàm phân phối xác suất

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\text{arctg}x.$$

a) Tìm hàm mật độ xác suất của X.

b) Tính $P(0 < X < 1)$.

13. Hàm phân phối xác suất của một đại lượng ngẫu nhiên có dạng

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x^2/2a^2} & ,\text{khi } x \ge 0 \\ 0 & ,\text{khi } x < 0 \end{cases}$$

a) Hãy tìm hàm mật độ xác suất tương ứng.

b) Tính xác suất để đại lượng đó nhận giá trị trong khoảng (0, ln2).

14. Cho đại lượng ngẫu nhiên X có hàm mật độ xác suất

$$f(x) = \begin{cases} a(x-2)(x-4) & ,\text{nếu } x \in [2,4] \\ 0 & ,\text{nếu } x \notin [2,4] \end{cases}$$

a) Tìm a.

b) Tính kì vọng, phương sai của X.

15. Cho hàm mật độ xác suất của đại lượng ngẫu nhiên X

$$f(x) = \lambda e^{-/x/}$$

Hãy tính λ và tìm kì vọng, phương sai, độ lệch của X.