BUỔI 2: KHÁI NIỆM XÁC SUẤT

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. Phép thử ngẫu nhiên, không gian mẫu, biến cố

Một trong những khái niệm cơ bản của lí thuyết xác suất là phép thử. Một thí nghiệm, một hành động, một phép đo,... được hiểu là phép thử.

Phép thử ngẫu nhiên là phép thử mà ta không đoán trước được kết quả của nó, mặc dù đã biết tập hợp tất cả các kết quả có thể có của phép thử đó.

Tập hợp mọi kết quả của một phép thử được gọi là không gian mẫu (của phép thử) và kí hiệu là Ω.

Biến cố là một tập con của không gian mẫu. Một biến cố liên quan với phép thử là một tập hợp bao gồm các kết quả nào đó của phép thử.

Tập hợp $\varnothing$ được gọi là biến cố không thể, tập hợp Ω được gọi là biến cố chắc chắn.

Ta nói rằng biến cố A xảy ra khi và chỉ khi kết quả của phép thử là một phần tử của A. Như vậy, biến cố không thể $\varnothing$ không bao giờ xảy ra, biến cố chắc chắn Ω luôn luôn xảy ra. Biến cố có thể xảy ra hoặc không xảy ra được gọi là biến cố ngẫu nhiên.

2. Quan hệ giữa biến cố

a) Biến cố bằng nhau

Biến cố A được gọi là kéo theo biến cố B nếu A xảy ra thì B xảy ra, kí hiệu $A \subset B$.

Nếu $A \subset B$ và $B \subset A$ thì các biến cố A và B được gọi là bằng nhau, kí hiệu là $A = B$.

Với mọi biến cố A, ta có

$$\varnothing \subset A,\ A \subset \Omega.$$

b) Tổng, tích các biến cố

Giả sử A và B là các biến cố liên quan với một phép thử. Khi đó :

- A cộng B là biến cố xảy ra nếu A hoặc B xảy ra, kí hiệu là $A + B$ (hoặc $A \cup B$) ;
- A nhân B là biến cố xảy ra nếu A và B đồng thời xảy ra, kí hiệu là AB (hoặc $A \cap B$)

Với mọi biến cố A, B, C, ta có

- $A + B = B + A$; $AB = BA$
- $(A + B) + C = A + (B + C)$; $(AB)C = A(BC)$
- $A(B + C) = AB + AC$; $A + (BC) = (A + B)(A + C)$
- Nếu $A \subset B$ thì $A + B = B$; $AB = A$
- $A + A = A$; $AA = A$
- $A + \varnothing = A$; $A\varnothing = \varnothing$
- $A + \Omega = \Omega$; $A\Omega = A$

c) Biến cố xung khắc, biến cố đối lập

- Biến cố A và B được gọi là xung khắc nếu chúng không đồng thời xảy ra, tức là $AB = \varnothing$.

- Biến cố A và B được gọi là đối lập nếu chúng không đồng thời xảy ra nhưng có ít nhất một trong chúng chắc chắn xảy ra, tức là $AB = \varnothing$ và $A + B = \Omega$.

Nếu A và B đối lập thì ta kí hiệu B = $\overline{A}$ và gọi B là biến cố đối lập của A.

Như vậy, ta có

- $A + \overline{A} = \Omega$; $A\overline{A} = \varnothing$
- $\overline{\overline{A}} = A$
- $\overline{A+B} = \overline{A}.\overline{B}$; $\overline{AB} = \overline{A} + \overline{B}$

d) Nhóm đầy đủ các biến cố

Các biến cố $A_1, A_2, \ldots, A_n$ được gọi là đôi một xung khắc, nếu hai biến cố khác nhau bất kì trong đó đều xung khắc, tức là $A_iA_j = \varnothing$ với $i \neq j$.

Các biến cố $A_1, A_2, \ldots, A_n$ được gọi là một nhóm đầy đủ các biến cố, nếu chúng đôi một xung khắc và ít nhất một trong chúng chắc chắn xảy ra, tức là $A_iA_j = \varnothing$ với $i \neq j$ và $A_1 + A_2 + \ldots + A_n = \Omega$.

Như vậy, với mọi biến cố A thì A, $\overline{A}$ là một nhóm đầy đủ các biến cố.

3. Định nghĩa xác suất

a) Định nghĩa cổ điển

Cho phép thử T có không gian mẫu Ω là một tập hợp hữu hạn và các kết quả của T là đồng khả năng (tức là có cùng khả năng xuất hiện).

Giả sử A là một biến cố liên quan với phép thử T và Ω_A là tập hợp các kết quả mô tả A (còn gọi là các kết quả thuận lợi cho A).

Khi đó, xác suất của A là một số, kí hiệu là P(A), được xác định bởi công thức :

$$P(A) = \frac{\text{Số phần tử của } \Omega_A}{\text{Số phần tử của } \Omega}$$

Hay

$$\boxed{P(A) = \frac{\text{Số kết quả thuận lợi cho A}}{\text{Số kết quả có thể của phép thử T}}}$$

b) Định nghĩa hình học

Giả sử các kết quả đồng khả năng của phép thử T được đặt tương ứng với các điểm của một tập hợp có độ đo M, các kết quả thuận lợi cho biến cố A tương ứng với các điểm của một tập hợp có độ đo m. Khi đó ta gọi xác suất của biến cố A là số :

$$P(A) = \frac{m}{M}$$

Ở đây độ đo có thể là độ dài, diện tích hay thể tích, tùy theo tập hợp đang xét thuộc R, R^2 hay R^3.

c) Định nghĩa thống kê

Giả sử trong n phép thử với điều kiện giống nhau, biến cố A xuất hiện k lần. Ta gọi

$$f_n(A) = \frac{k}{n}$$

là tần suất xuất hiện biến cố A trong n phép thử và gọi giới hạn $\lim_{n\to+\infty} f_n(A)$ là xác suất P(A) của biến cố A.

Xác suất của một biến cố luôn có ba tính chất sau đây

$0 \le P(A) \le 1$, với mọi biến cố A.
$P(\varnothing) = 0, \quad P(\Omega) = 1$
Nếu A, B xung khắc thì $P(A + B) = P(A) + P(B)$

d) Định nghĩa theo tiên đề

Kí hiệu @ là tập hợp tất cả các biến cố trong một phép thử. Ta gọi xác suất là một quy tắc đặt mỗi $A \in$ @ với một số P(A) thỏa mãn ba điều kiện sau

(1) $\forall A \in$ @ : $0 \le P(A) \le 1$;

(2) $P(\varnothing) = 0$; $P(\Omega) = 1$;

(3) $AB = \varnothing \Rightarrow P(A + B) = P(A) + P(B)$.

Từ định nghĩa, ta có

$$\boxed{P(\overline{A}) = 1 - P(A)}$$

4. Công thức cộng xác suất

a) Trường hợp tổng của hai biến cố

- Nếu các biến cố A, B xung khắc thì

$$P(A + B) = P(A) + P(B)$$

- Nếu A, B bất kì thì

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

b) Trường hợp tổng của n biến cố

- Nếu $A_1, A_2, \dots, A_n$ là các biến cố đôi một xung khắc thì

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n).$$

- Nếu $A_1, A_2, \dots, A_n$ bất kì thì

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_iA_j) + \sum_{i<j<k} P(A_iA_jA_k) + \dots + (-1)^{n-1}P(A_1A_2\dots A_n)$$

5. Xác suất có điều kiện. Công thức nhân xác suất

a) Xác suất có điều kiện

Ta gọi xác suất của biến cố A khi biến cố B đã xảy ra là xác suất của biến cố A với điều kiện B, kí hiệu là P(A/B).

Ta có
$$\boxed{P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)}}$$

b) Biến cố độc lập

Hai biến cố A và B được gọi là độc lập, nếu xác suất của biến cố này không phụ thuộc vào sự xảy ra hay không xảy ra của biến cố kia, tức là :

$$P(A/B) = P(A) \text{ hoặc } P(B/A) = P(B).$$

Các biến cố $A_1, A_2,...,A_n$ được gọi là độc lập toàn thể, nếu xác suất của một biến cố trong đó không phụ thuộc vào sự xảy ra hay không xảy ra của một tổ hợp bất kì các biến cố khác.

Nếu A, B độc lập thì các cặp A, $\overline{B}$; $\overline{A}$, B ; $\overline{A}, \overline{B}$ cũng độc lập. Tính độc lập toàn thể của nhiều biến cố cũng có tính chất tương tự.

c) Công thức nhân xác suất

Trường hợp tích của hai biến cố

- Nếu A, B bất kỳ thì

$$P(AB) = P(A)\,P(B/A) = P(B)\,P(A/B)$$

- Nếu A, B độc lập thì

$$P(AB) = P(A)\ P(B)$$

. Trường hợp tích của n biến cố

- Nếu $A_1, A_2, \ldots, A_n$ bất kỳ thì

$$P(A_1 A_2 \ldots A_n) = P(A_1)\,P(A_2/A_1) \ldots P(A_n/A_1A_2 \ldots A_{n-1})$$

- Nếu $A_1, A_2, \ldots, A_n$ độc lập toàn thể thì

$$P(A_1 A_2 \ldots A_n) = P(A_1)\,P(A_2) \ldots P(A_n)$$

6. Công thức xác suất đầy đủ. Công thức Bayes

Cho $A_1, A_2, \ldots, A_n$ là một nhóm đầy đủ các biến cố và B là một biến cố bất kỳ. Ta có

$$\boxed{P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B/A_i)}$$

(Công thức xác suất đầy đủ)

$$\boxed{P(A_K / B) = \frac{P(A_K)P(B/A_K)}{P(B)}}$$

(Công thức Bayes, còn gọi là công thức xác suất giả thiết).

7. Công thức Bernoulli

a) Dãy phép thử Bernoulli

Một dãy n phép thử ($n \in N^*$) được gọi là một dãy n phép thử Bernoulli, nếu :

- các phép thử là độc lập với nhau.
- trong mỗi phép thử biến cố A mà ta quan tâm có xác suất $P(A) = p$ không đổi.

b) Công thức Bernoulli

Kí hiệu $P_n(k, p)$ là xác suất để biến cố A xuất hiện k lần trong n phép thử Bernoulli, $q = 1 - p = P(\overline{A})$. Ta có

$$\boxed{P_n(k, p) = C_n^K p^K q^{n-K}} \quad (0 \le k \le n)$$

(Công thức Bernoulli)

c) Số có khả năng nhất

Số K_0 sao cho $P_n(K_0, p)$ lớn nhất được gọi là số có khả năng nhất. Ta có

$$K_0 = [np - q] \text{ hoặc } K_0 = [np - q] + 1.$$

B. CÁC BÀI GIẢI MẪU

1. Biểu diễn một biến cố thành phép toán đối với các biến cố khác

Bài 1. *Một sinh viên phải thi hai môn : Toán và Lý. Gọi T, L lần lượt là các biến cố sinh viên đó đậu Toán, Lý. Hãy biểu diễn các biến cố sau đây qua T và L.*

a) Sinh viên đó rớt Toán.
b) Sinh viên đó chỉ đậu Toán.
c) Sinh viên đó đậu cả hai môn.
d) Sinh viên đó rớt cả hai môn.
e) Sinh viên đó chỉ đậu một môn.
f) Sinh viên đó đậu không quá một môn.
g) Sinh viên đó đậu ít nhất một môn.
h) Sinh viên đó rớt ít nhất một môn.
i) Sinh viên đó rớt nhiều nhất một môn.

Giải

a) Ta có biến cố rớt Toán đối lập với biến cố đậu Toán nên, nếu gọi A là biến cố sinh viên đó rớt Toán, thì $A = \overline{T}$.

b) Gọi B là biến cố sinh viên đó chỉ đậu Toán, thì B xảy ra khi T xảy ra và L không xảy ra. Vậy $B = T\overline{L}$.

c) Gọi C là biến cố sinh viên đó đậu cả 2 môn. Ta có C xảy ra khi T và L cùng xảy ra. Vậy C = TL.

d) Tương tự, biến cố sinh viên đó rớt cả 2 môn là $D = \overline{T}\,\overline{L}$.

e) Gọi E là biến cố sinh viên đó chỉ đậu 1 môn. Ta có E xảy ra khi sinh viên đó chỉ đậu Toán (biến cố B) hoặc sinh viên đó chỉ đậu Lý (biến cố $B' = \overline{T}L$). Vậy E = B + B' hay $E = T\overline{L} + \overline{T}L$.

f) Gọi F là biến cố sinh viên đó đậu không quá một môn.

- <u>Cách thứ nhất</u>. Ta có F xảy ra khi sinh viên đó rớt cả 2 môn (biến cố D) hoặc chỉ đậu một môn (biến cố E). Do đó F = D + E hay $F = \overline{T}\,\overline{L} + T\overline{L} + \overline{T}L$.

- <u>Cách thứ hai</u>. Ta có biến cố đối lập của F là sinh viên đó đậu quá 1 môn, tức là đậu cả hai môn (biến cố C). Vậy F = $\overline{C}$ hay F = $\overline{TL}$.

- <u>Cách thứ ba</u> . Biến cố F xảy ra khi sinh viên đó rớt Toán hoặc rớt Lý.

Vậy F = $\overline{T} + \overline{L}$.

g) Gọi G là biến cố sinh viên đó đậu ít nhất 1 môn. Tương tự, ta có ba cách biểu diễn G

- <u>Cách thứ nhất</u>. $G = E + C = T\overline{L} + \overline{T}L + TL$
- <u>Cách thứ hai</u>. $G = \overline{D} = (\overline{\overline{T}\quad\overline{L}})$.
- <u>Cách thứ ba</u>. $G = T + L$

h) Gọi H là biến cố sinh viên đó rớt ít nhất 1 môn.

Ta có H = F. Vậy :

$H = \overline{T} + \overline{L}$,

$H = \overline{C} = \overline{TL}$,

$H = \overline{T}\,\overline{L} + T\overline{L} + \overline{T}L$

i) Gọi I là biến cố sinh viên đó rớt nhiều nhất 1 môn. Ta có I = G. Vậy

$I = T\overline{L} + \overline{T}L + TL$,

$I = (\overline{\overline{T}\quad\overline{L}})$,

$I = T + L$.

2. Tính xác suất của biến cố theo định nghĩa cổ điển

. Nêu phép thử, tính số kết quả có thể có của phép thử.
. Nếu biến cố cần tìm xác suất, tính số kết quả (của phép thử) thuận lợi cho biến cố đó.
. Áp dụng định nghĩa để tìm xác suất của biến cố.

Bài 2. *Đề cương thi môn Triết có 70 câu hỏi. Một sinh viên chỉ ôn 40 câu. Cho biết đề thi tự luận gồm 3 câu thuộc đề cương và nếu sinh viên trả lời ít nhất 2 câu thì đậu. Tìm xác suất để sinh viên đó đậu môn Triết.*

Giải.

Phép thử là việc trả lời 3 câu từ 70 câu hỏi của đề cương (không cần sắp thứ tự), do đó số các kết quả có thể là C_{70}^{3}.

Gọi Đ là biến cố sinh viên đó đậu môn Triết. Muốn Đ xảy ra ta có hai phương án :

- Cả ba câu hỏi của đề thi đều nằm trong số 40 câu mà sinh viên đã ôn, có C_{40}^{3} cách ;

- Có hai câu nằm trong số 40 câu đã ôn và một câu còn lại nằm trong số 30 câu anh ta không ôn, có $C_{40}^{2}C_{30}^{1}$ cách.

Theo quy tắc cộng, số kết quả thuận lợi cho Đ là

$$C_{40}^{3} + C_{40}^{2}C_{30}^{1}$$

Vậy, theo định nghĩa, xác suất sinh viên đậu môn Triết là

$$P(Đ) = \frac{C_{40}^{3} + C_{40}^{2}.C_{30}^{1}}{C_{70}^{3}} = \frac{33280}{54740} = \frac{1664}{2737} \approx 0{,}6.$$

3. Tính xác suất của biến cố theo định nghĩa hình học

. Nêu phép thử, tìm tập hợp biểu diễn phép thử và độ đo của tập hợp này.
. Nêu biến cố cần tìm xác suất, tìm tập hợp biểu diễn biến cố và độ đo của tập hợp đó.
. Áp dụng định nghĩa để tìm xác suất của biến cố.

Bài 3.

a) Cho một tấm bia có hình dạng và kích thước như hình vẽ. Một sinh viên bắn một viên đạn vào tấm bia đó. Nếu bắn trúng hình tròn ở tâm có bán kính 5cm thì đạt yêu cầu. Tìm xác suất để sinh viên đó bắn đạt yêu cầu.

b) Hai người hẹn gặp nhau tại một địa điểm trong khoảng thời gian từ 17h đến 18h. Họ giao hẹn : ai đến trước sẽ đợi người kia 15 phút, nếu không thấy thì hủy cuộc hẹn. Tìm xác suất để họ gặp nhau.

Giải.

a) Phép thử là bắn một viên đạn vào tấm bia. Tập hợp biểu diễn phép thử là hình chữ nhật (có chiều dài 40cm, chiều rộng 30cm) và nửa hình tròn (đường kính 30cm). Độ đo của tập hợp này (hay diện tích) là :

$$S = 40 \,.\, 30 + \frac{1}{2}\pi 15^2 = 1200 + 112{,}5\,\pi\ (cm^2).$$

Gọi D là biến cố sinh viên đó bắn đạt yêu cầu. Tập hợp biểu diễn A là hình tròn ở tâm (có bán kính 5cm) nên có độ đo là

$$s = \pi 5^2 = 25\pi\ (cm^2)$$

Vậy, theo định nghĩa,

$$P(D) = \frac{s}{S} = \frac{25\pi}{1200 + 112{,}5\pi} \approx 0{,}05.$$

b) Gọi x, y lần lượt là thời điểm đến chỗ hẹn của người thứ nhất, thứ hai. Từ 17h đến 18h ta có 60 phút nên có thể xem tập hợp biểu diễn phép thử thỏa mãn điều kiện

$$\begin{cases} 0 \le x \le 60, \\ 0 \le y \le 60. \end{cases}$$

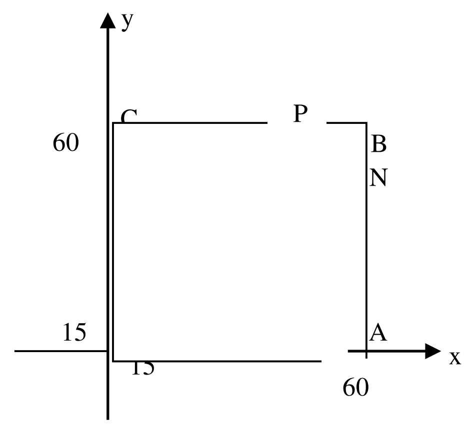
Gọi G là biến cố hai người đó gặp nhau thì điều kiện để G xảy ra là

$$|y - x| \leq 15$$

$$\Leftrightarrow$$

$$-15 \leq y - x \leq 15.$$

Như vậy, phép thử được biểu diễn bởi hình vuông OABC có cạnh 60 (xem hình vẽ bên). Còn biến cố G được biểu diễn bởi lục giác OMNBPQ.



Ta có diện tích hình vuông là

$$S = 60^2 = 3600,$$

diện tích lục giác là

$$s = dt_{OABC} - (dt_{AMN} + dt_{CPQ}) = 3600 - 45^2 = 1575.$$

Vậy xác suất hai người gặp nhau là :

$$P(G) = \frac{s}{S} = \frac{1575}{3600} = 0{,}4375.$$

4. Tính xác suất của biến cố bằng các công thức

. Nêu biến cố cần tìm xác suất, biểu diễn biến cố này thành phép toán đối với các biến cố khác mà ta xem là các biến cố "đơn giản" hơn biến cố ban đầu.
. Phân tích mối quan hệ giữa các biến cố tham gia vào phép toán : xung khắc hay không, độc lập hay không, có tạo thành nhóm đầy đủ không ...
. Chọn công thức tính xác suất của biến cố ban đầu thông qua xác suất của các biến cố "đơn giản".
. Tính xác suất của các biến cố "đơn giản" (nếu cần).
. Tính xác suất của biến cố ban đầu.

Bài 4. *Một sinh viên phải thi Toán và Lý. Cho biết xác suất đậu hai môn đó lần lượt là 0,7 ; 0,6. Hãy tính các xác suất sau đây.*

a) Sinh viên đó rớt Toán.
b) Sinh viên đó chỉ đậu Toán.
c) Sinh viên đó đậu cả 2 môn.
d) Sinh viên đó rớt cả 2 môn.
e) Sinh viên đó chỉ đậu 1 môn.
f) Sinh viên đó đậu không quá 1 môn.
g) Sinh viên đó đậu ít nhất 1 môn.

Giải.

Giữ nguyên cách ký hiệu và biểu diễn các biến cố như ở Bài 1, ta có các kết quả sau đây.

a) $P(A) = P(\overline{T}) = 1 - P(T) = 1 - 0,7 = 0,3$.

b) Vì T và $\overline{L}$ độc lập nên $P(B) = P(T\overline{L}) = P(T)\,P(\overline{L}) = 0,7.0,4 = 0,28$.

c) Tương tự, $P(C) = P(TL) = P(T)\,P(L) = 0,42$.

d) $P(D) = P(\overline{T}\,\overline{L}) = P(\overline{T})\,P(\overline{L}) = 0,12$.

e) Vì B, B' xung khắc nên

$$P(E) = P(B) + P(B') = P(T\overline{L}) + P(\overline{T}L) = 0,28 + 0,18 = 0,46$$

f) <u>Cách thứ nhất</u> $F = D + E$ và $DE = \emptyset$ nên

$$P(F) = P(D) + P(E) = 0,58.$$

<u>Cách thứ hai</u> $F = \overline{C}$ nên $P(F) = 1 - P(C) = 0,58$.

<u>Cách thứ ba</u> $F = \overline{T} + \overline{L}$ và $\overline{T}\,\overline{L} \neq \emptyset$ nên

$$P(F) = P(\overline{T}) + P(\overline{L}) - P(\overline{T}\,\overline{L}) = 0,3 + 0,4 - 0,12 = 0,58.$$

g) <u>Cách thứ nhất</u> $G = E + C$ và $EC = \emptyset$ nên

$$P(G) = P(E) + P(C) = 0,46 + 0,42 = 0,88.$$

<u>Cách thứ hai</u> $G = \overline{D}$ nên $P(G) = 1 - P(D) = 1 - 0,12 = 0,88$.

<u>Cách thứ ba</u> $G = T + L$ và $TL \neq \emptyset$ nên

$$P(G) = P(T) + P(L) - P(TL) = 0,7 + 0,6 - 0,42 = 0,88.$$

Bài 5. *Một lô hàng có 50 sản phẩm, trong đó có 8 phế phẩm. Minh lấy ra 3 sản phẩm, sau đó Huy lấy ra 2 sản phẩm. Tính các xác suất sau đây.*

a) Huy lấy trúng 1 phế phẩm khi Minh đã lấy đi 1 phế phẩm.
b) Hai bạn lấy được toàn sản phẩm tốt.
c) Hai bạn lấy ra đúng 1 phế phẩm.
d) Hai bạn lấy ra ít nhất 1 phế phẩm.

Giải.

Gọi M_i là biến cố Minh lấy ra i phế phẩm (và 3 – i sản phẩm tốt), $i = \overline{0,3}$; H_K là biến cố Huy lấy ra k phế phẩm (và 2 – k sản phẩm tốt), $k = \overline{0,2}$.

a) Gọi A là biến cố cần tìm xác suất. Ta có $P(A) = P(H_1/M_1)$.

Ta áp dụng định nghĩa để tính xác suất trên. Khi Minh đã lấy đi 1 phế phẩm (và 2 sản phẩm tốt) thì phép thử là việc Huy chọn 2 sản phẩm từ 47 sản phẩm còn lại, có C_{47}^{2} cách.

Để H_1 xảy ra thì cần chọn 1 phế phẩm trong số 7 phế phẩm còn lại và chọn 1 sản phẩm tốt trong số 40 sản phẩm tốt còn lại, do đó số cách là $C_7^1 C_{40}^1$.

Vậy $$P(H_1/M_1) = \frac{C_7^1 C_{40}^1}{C_{47}^2} = \frac{280}{1081} \approx 0{,}259.$$

b) Gọi B là biến cố Minh và Huy lấy được 5 sản phẩm tốt.

Cách thứ nhất. Ta có biểu diễn

$$B = M_0 H_0 ,$$

trong đó M_O, H_O không độc lập nên

$$P(B) = P(M_0) P(H_0/ M_0).$$

Các xác suất ở vế phải được tính bằng định nghĩa.

$$P(M_0) = \frac{C_{42}^3}{C_{50}^3} ; P (H_0/ M_0) = \frac{C_{39}^2}{C_{47}^2}$$

Vậy $$P(B) = \frac{C_{42}^3}{C_{50}^3} - \frac{C_{39}^2}{C_{47}^2} = \frac{11480}{19600} . \frac{741}{1081} \approx 0{,}4.$$

Cách thứ hai. Không quan tâm đến thứ tự thời gian mà Minh và Huy lấy các sản phẩm, ta có thể xem phép thử là việc hai bạn cùng lấy 5 sản phẩm từ 50 sản phẩm đã cho. Để B xảy ra thì phải lấy được 5 sản phẩm tốt trong số 42 sản phẩm tốt. Vậy, theo định nghĩa, xác suất hai bạn lấy được toàn sản phẩm tốt là

$$P(B) = \frac{C_{42}^5}{C_{50}^5} = \frac{850668}{2118760} \approx 0{,}4.$$

c) Gọi C là biến cố Minh và Huy lấy ra đúng 1 phế phẩm.

Cách thứ nhất. Ta có biểu diễn

$$C = M_1H_0 + M_0H_1.$$

Các biến cố tham gia vào tổng là M_1H_0 và M_0H_1 xung khắc, các biến cố tham gia vào tích là M_1, H_0 và M_0, H_1 không độc lập. Do đó

$$P(C) = P(M_1) P(H_0/M_1) + P(M_0) P(H_1/M_0)$$

Tương tự câu b), ta tính được

$$P(C) = \frac{C_8^1 C_{42}^2}{C_{50}^3} . \frac{C_{40}^2}{C_{47}^2} + \frac{C_{42}^3}{C_{50}^3} . \frac{C_8^1 C_{39}^1}{C_{47}^2} = \frac{8954400}{21187600} \approx 0{,}42.$$

Cách thứ hai. Áp dụng định nghĩa, ta có

$$P(C) = \frac{C_8^1 C_{42}^4}{C_{50}^5} = \frac{8954400}{21187600} \approx 0{,}42.$$

d) Gọi D là biến cố Minh và Huy lấy ra ít nhất 1 phế phẩm. Ta có $\overline{D}$ là biến cố hai bạn lấy được toàn sản phẩm tốt, do đó D = $\overline{B}$.

$$\text{Vậy } P(D) = 1 - P(B) = \frac{801}{1081} \approx 0{,}741.$$

Bài 6. *Có hai hộp phấn. Hộp thứ nhất có 6 viên phấn trắng, 4 viên phấn màu. Hộp thứ hai có 7 viên phấn trắng, 3 viên phấn màu. Từ hộp thứ nhất lấy ra 2 viên phấn, từ hộp thứ hai lấy ra 1 viên. Tìm xác suất lấy được*

a) 2 viên phấn trắng.

b) ít nhất 1 viên phấn màu.

Giải.

Theo đề bài, từ hai hộp ta sẽ lấy được 3 viên phấn. Các biến cố cần tìm xác suất liên quan đến số lượng các viên phấn trắng lấy từ mỗi hộp. Do đó ta sẽ biểu diễn các biến cố qua các phép toán tương ứng.

Gọi A_K là biến cố lấy được k viên phấn trắng từ hộp thứ nhất, k = $\overline{0,2}$, B_i là biến cố lấy được i viên phấn trắng từ hộp thứ hai, i = $\overline{0,1}$.

a) Gọi A là biến cố trong 3 viên phấn lấy từ hai hộp có 2 viên màu trắng. Ta có

$A = A_1B_1 + A_2B_{0.}$

Rõ ràng các biến cố tham gia vào tổng là A_1B_1 và A_2B_0 xung khắc, còn các biến cố tham gia vào tích là A_1 và B_1, A_2 và B_0 độc lập. Do đó

$$P(A) = P(A_1)\,P(B_1) + P(A_2)\,P(B_0).$$

Các xác suất ở vế phải được tính bằng định nghĩa.

Chẳng hạn, đối với A_1 : phép thử là việc lấy 2 trong 10 viên phấn của hộp thứ nhất ; A_1 xảy ra khi lấy 1 viên phấn trắng từ 6 viên và 1 viên phấn màu từ 4 viên ở hộp đó. Suy ra

$$P(A_1) = \frac{C_6^1\,C_4^1}{C_{10}^2}.$$

Tương tự, ta tính được các xác suất còn lại.

Vậy

$$P(A) = \frac{C_6^1\,C_4^1}{C_{10}^2}\cdot\frac{C_7^1}{C_{10}^1} + \frac{C_6^2}{C_{10}^2}\cdot\frac{C_3^1}{C_{10}^1} = \frac{71}{150} \approx 0{,}4733.$$

b) Gọi B là biến cố lấy được ít nhất một viên phấn màu từ cả hai hộp. Ta có hai cách tính xác suất của B.

<u>Cách thứ nhất.</u> Ta nhận thấy $\overline{B}$ là biến cố cả 3 viên phấn lấy từ hai hộp đều màu trắng. Do đó

$\overline{B} = A_2\,B_1,$

nên $P\left(\overline{B}\right) = P(A_2)\,P(B_1) = \dfrac{C_6^2}{C_{10}^2}\cdot\dfrac{C_7^1}{C_{10}^1} = \dfrac{7}{30}.$

Suy ra $\qquad P(B) = 1 - P(\overline{B}) = \dfrac{23}{30}$.

Cách thứ hai. Ta có B xảy ra khi lấy được 1 viên phấn màu và 2 viên phấn trắng ; hoặc 2 viên phấn màu và 1 viên phấn trắng ; hoặc 3 viên phấn màu (và 0 viên phấn trắng). Do đó

$$B = A + (A_1B_0 + A_0B_1) + A_0B_0,$$

$$P(B) = P(A) + P(A_1)\,P(B_0) + P(A_0)\,P(B_1) + P(A_0)\,P(B_0) =$$

$$= \frac{71}{150} + \frac{C_6^1 C_4^1}{C_{10}^2}\cdot\frac{C_3^1}{C_{10}^1} + \frac{C_4^2}{C_{10}^2}\cdot\frac{C_7^1}{C_{10}^1} + \frac{C_4^2}{C_{10}^2}\cdot\frac{C_3^1}{C_{10}^1} = \frac{23}{30}.$$

Bài 7. *Một nhà máy có ba phân xưởng cùng sản xuất một loại sản phẩm. Phân xưởng thứ nhất sản xuất 25%, phân xưởng thứ hai sản xuất 35% và phân xưởng thứ ba sản xuất 40% tổng số sản phẩm của toàn nhà máy. Tỉ lệ phế phẩm của từng phân xưởng tương ứng là : 1% ; 3% ; 2%. Lấy ngẫu nhiên một sản phẩm từ lô hàng do ba phân xưởng sản xuất.*

a) Tìm xác suất lấy được phế phẩm.

b) Giả sử lấy được phế phẩm. Tìm xác suất phế phẩm này do phân xưởng thứ hai sản xuất .

c) Nếu lấy được sản phẩm tốt, theo bạn thì sản phẩm đó do phân xưởng nào sản xuất? Tại sao ?

Giải.

Các biến cố cần tìm xác suất phụ thuộc vào việc sản phẩm lấy từ lô hàng do phân xưởng nào sản xuất. Do đó, cần chỉ ra các biến cố này.

Gọi X_K là biến cố sản phẩm lấy được do phân xưởng thứ k sản xuất, $k = \overline{1,3}$. Dễ dàng nhận thấy ba biến cố X_1, X_2, X_3 lập thành nhóm đầy đủ các biến cố (vì luôn có một và chỉ một biến cố trong số chúng xảy ra, khi ta thực hiện phép thử lấy một sản phẩm từ lô hàng).

a) Gọi A là biến cố sản phẩm lấy được là phế phẩm. Theo công thức xác suất đầy đủ

$$P(A) = P(X_1)\,P(A/X_1) + P(X_2)\,P(A/X_2) + P(X_3)\,P(A/X_3).$$

Các số liệu trong đề bài chính là các xác suất tương ứng ở vế phải. Vậy

$$P(A) = 0{,}25 \,.\, 0{,}01 + 0{,}35 \,.\, 0{,}03 + 0{,}40 \,.\, 0{,}02 = 0{,}021 = 2{,}1\%.$$

Lưu ý rằng, 2,1% là tỉ lệ phế phẩm chung của cả ba phân xưởng.

b) Theo đề bài, biến cố A đã xảy ra và ta cần tìm $P(X_2 / A)$. Áp dụng công thức Bayes, ta được

$$P(X_2 / A) = \frac{P(X_2)P(A/X_2)}{P(A)} = \frac{0{,}35.0{,}03}{0{,}021} = 0{,}5.$$

c) Điều kiện bây giờ là $\bar{A}$ đã xảy ra. Ta sẽ tính các xác suất $P(X_K/\bar{A})$, với $k = \overline{1,3}$, và so sánh các kết quả để đưa ra kết luận.

Theo công thức Bayes

$$P(X_1/\bar{A}) = \frac{P(X_1)P(\overline{A}/X_1)}{P(\overline{A})} = \frac{0{,}25.(1-0{,}01)}{1-0{,}021} \approx 0{,}25\ ;$$

$$P(X_2/\bar{A}) = \frac{P(X_2)P(\bar{A}/X_2)}{P(\bar{A})} = \frac{0{,}35.(1-0{,}03)}{1-0{,}021} \approx 0{,}35\,;$$

$$P(X_3/\bar{A}) = \frac{P(X_3)P(\bar{A}/X_3)}{P(\bar{A})} = \frac{0{,}4.(1-0{,}02)}{1-0{,}021} \approx 0{,}4\,.$$

Các xác suất trên đây đặc trưng cho khả năng sản phẩm tốt do từng phân xưởng sản xuất. Vậy, khi lấy được sản phẩm tốt từ lô hàng thì khả năng sản phẩm này do phân xưởng thứ ba sản xuất là nhiều nhất.

Bài 8. *Các sản phẩm được đóng thành hộp, mỗi hộp có 10 sản phẩm, trong đó 4 sản phẩm do máy thứ nhất sản xuất, còn lại do máy thứ hai sản xuất. Tỷ lệ sản phẩm loại A do hai máy đó sản xuất lần lượt là 90%, 80%.*

Một người đến mua hàng quy định kiểm tra như sau. Lấy ngẫu nhiên một sản phẩm trong hộp. Nếu đó là sản phẩm loại A thì chấp nhận hộp, ngược lại thì loại hộp này.

a) Tính xác suất để người mua hàng chấp nhận một hộp bất kì.

b) Phải kiểm tra tối thiểu bao nhiêu hộp để xác suất người mua hàng chấp nhận ít nhất một hộp sẽ lớn hơn 0,9 ?

Giải.

a) Biến cố cần tìm xác suất phụ thuộc vào việc sản phẩm lấy ra kiểm tra do máy nào sản xuất.

Gọi M_K là biến cố lấy được sản phẩm do máy thứ k sản xuất, k = 1,2. Hai biến cố M_1, M_2 tạo thành nhóm đầy đủ.

Gọi H là biến cố người mua hàng chấp nhận hộp đang được kiểm tra. Theo công thức xác suất đầy đủ

$$P(H) = P(M_1)\,P(H/M_1) + P(M_2).P(H/M_2).$$

Từ đề bài ta có

$$P(M_1) = \frac{4}{10}\ ; \quad P(M_2) = \frac{6}{10}\ ; \quad P(H/M_1) = 0{,}9\ ; \quad P(H/M_2) = 0{,}8.$$

Vậy $P(H) = 0{,}4.0{,}9 + 0{,}6.0{,}8 = 0{,}84.$

b) Giả sử n là số hộp mà người mua hàng sẽ kiểm tra ($n \in N^*$). Gọi L là biến cố anh ta loại cả n hộp, thì $\bar{L}$ là biến cố anh ta chấp nhận ít nhất một hộp trong số chúng.

Theo đề bài, ta phải có

$$P(\bar{L}) > 0{,}9.$$

Suy ra $P(L) < 0{,}1.$

Ta tính P(L). Các hộp đem ra kiểm tra một cách độc lập. (Nếu xem mỗi phép thử là kiểm tra một hộp bất kì thì ta có dãy n phép thử Bernoulli). Xác suất loại mỗi hộp đều là :

$p = 1 - 0,84 = 0,16.$

Theo công thức Bernoulli

$$P(L) = P_n(n,p) = C_n^n p^n q^o = 0,16^n .$$

Như vậy, ta có

$$(0,16)^n < 0,1 ,$$

$$\text{hay } n > \log_{0,16} 0,1 = \frac{\ln 0,1}{\ln 0,16} \approx 1,3.$$

Vì n là số tự nhiên nên ta được $n \geq 2$.

Vậy, phải kiểm tra tối thiểu hai hộp.

Bài 9. *Xác suất bắn trúng mục tiêu của một xạ thủ ở mỗi lần bắn là 0,6. Biết rằng xác suất mục tiêu bị diệt khi trúng 1, 2, 3 phát đạn lần lượt là 0,2 ; 0,5 ; 0,8. Còn nếu trúng 4 phát đạn thì chắc chắn bị diệt.Tìm xác suất mục tiêu bị diệt nếu xạ thủ đó bắn 4 phát đạn.*

Giải.

Gọi D là biến cố cần tìm xác suất. Theo đề bài, D phụ thuộc vào việc mục tiêu bị trúng mấy phát đạn. Ta gọi biến cố mục tiêu trúng k phát đạn là T_K. Muốn có một nhóm đầy đủ thì k phải nhận các giá trị $\overline{0,4}$. Khi ấy, xác suất của D được tính bởi công thức :

$$P(D) = \sum_{K=0}^{4} P(T_K)P(D/T_K).$$

Từ đề bài suy ra $P(D/T_1) = 0,2$; $P(D/T_2) = 0,5$; $P(D/T_3) = 0,8$; $P(D/T_4) = 1$, còn hiển nhiên $P(D/T_0) = 0$.

Ta cần tính $P(T_K)$, $k = \overline{0,4}$.

Xạ thủ bắn 4 phát đạn một cách độc lập và xác suất bắn trúng mục tiêu ở mỗi lần không thay đổi. Do đó ta có dãy 4 phép thử Bernoulli với $p = 0,6$, $q = 0,4$. Áp dụng công thức Bernoulli ta được

$$P(T_0) = P_4(0 ; 0,6) = C_4^0 p^0 q^4 = 0,4^4 = 0,0256 ;$$

$$P(T_1) = P_4(1 ; 0,6) = C_4^1 p^1 q^3 = 4.0,6.0,4^3 = 0,1536 ;$$

$$P(T_2) = P_4(2 ; 0,6) = C_4^2 p^2 q^2 = 6.0,6^2.0,4^2 = 0,3456 ;$$

$$P(T_3) = P_4(3 ; 0,6) = C_4^3 p^3 q^1 = 4.0,6^3.0,4 = 0,3456 ;$$

$$P(T_4) = P_4(4 ; 0,6) = C_4^4 p^4 q^0 = 0,6^4 = 0,1296 ;$$

Vậy xác suất mục tiêu bị diệt nếu xạ thủ bắn 4 phát đạn là :

$$P(D) = 0,0256.0 + 0,1536.0,2 + 0,3456.0,5 + 0,3456.0,8 + 0,1296.1 = 0,6096.$$

Bài 10. *Có ba hộp, mỗi hộp đựng 5 viên bi, trong đó hộp thứ k có k viên đỏ,* $k = \overline{1,3}$.

1. Lấy ngẫu nhiên từ mỗi hộp ra một viên bi.

a) Tìm xác suất lấy được 3 bi đỏ.

b) Tìm xác suất để trong 3 bi thu được sẽ có 1 bi đỏ.

c) Biết rằng trong 3 bi lấy ra có 1 bi đỏ, tìm xác suất để viên bi đỏ này là của hộp thứ nhất.

2. Chọn ngẫu nhiên một hộp, từ đó lấy ngẫu nhiên 3 viên bi. Tìm các xác suất như ở câu 1.

Giải.

1. Các biến cố cần tìm xác suất phụ thuộc vào việc từ mỗi hộp lấy ra được viên bi màu gì.

Gọi $Đ_K$ là biến cố lấy được 1 viên bi đỏ từ hộp thứ k, k = $\overline{1,3}$.

a) Gọi A là biến cố lấy được 3 bi đỏ từ 3 hộp.

Ta có phép toán

$$A = Đ_1Đ_2Đ_3$$

Các biến cố ở vế phải trong biểu diễn trên độc lập với nhau nên

$$P(A) = P(Đ_1)P(Đ_2)P(Đ_3) = \frac{1}{5}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5} = \frac{6}{125}.$$

b) Gọi B là biến cố trong 3 bi lấy từ 3 hộp có 1 bi đỏ. Ta có

$$B = Đ_1\overline{Đ_2}\,\overline{Đ_3} + \overline{Đ_1}Đ_2\overline{Đ_3} + \overline{Đ_1}\,\overline{Đ_2}Đ_3.$$

Các biến cố tham gia vào tổng ở vế phải thì xung khắc, còn các biến cố tham gia vào tích thì độc lập, do đó :

$$P(B) = \frac{1}{5}\cdot(1-\frac{2}{5})\cdot(1-\frac{3}{5}) + (1-\frac{1}{5})\cdot\frac{2}{5}\cdot(1-\frac{3}{5}) + (1-\frac{1}{5})\cdot(1-\frac{2}{5})\cdot\frac{3}{5} = \frac{58}{125}$$

c) Theo đề bài, biến cố B đã xảy ra, ta cần tìm $P(Đ_1/B)$.

Vì B là điều kiện để $Đ_1$ xảy ra nên ta áp dụng công thức xác suất có điều kiện để tính.

$$P(Đ_1/B) = \frac{P(Đ_1B)}{P(B)}.$$

Từ cách biểu diễn biến cố B ở câu b) ta có

$$Đ_1B = Đ_1(Đ_1\overline{Đ_2}\,\overline{Đ_3} + \overline{Đ_1}Đ_2\overline{Đ_3} + \overline{Đ_1}\,\overline{Đ_2}Đ_3) = Đ_1\overline{Đ_2}\,\overline{Đ_3}.$$

Suy ra

$$P(Đ_1B) = \frac{1}{5}\cdot(1-\frac{2}{5})\cdot(1-\frac{3}{5}) = \frac{6}{125}.$$

Vậy

$$P(Đ_1/B) = \frac{6/125}{58/125} = \frac{3}{29}.$$

2. Trong trường hợp này, các biến cố cần tìm xác suất lại phụ thuộc vào việc chọn hộp. Do đó ta gọi H_K là biến cố chọn được hộp thứ k, k = $\overline{1,3}$.

Rõ ràng các biến cố H_1, H_2, H_3 cho ta một nhóm đầy đủ.

a) Gọi C là biến cố lấy được 3 bi đỏ từ hộp đã chọn. Áp dụng công thức xác suất đầy đủ, ta có

$$P(C) = P(H_1).P(C/H_1) + P(H_2).P(C/H_2) + P(H_3).P(C/H_3).$$

Dễ thấy rằng

$$P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = \frac{1}{3} \;;$$

$$P(C/H_1) = P(\phi) = 0 \;; \qquad P(C/H_2) = P(\phi) = 0 \;;$$

(Vì trong hộp thứ nhất và hộp thứ hai chỉ có 1 hoặc 2 bi đỏ, nên biến cố lấy được 3 bi đỏ từ hai hộp này là không thể).

$$P(C/H_3) = \frac{C_3^3}{C_5^3} = \frac{1}{10}.$$

Vậy

$$P(C) = \frac{1}{3}\cdot 0 + \frac{1}{3}\cdot 0 + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{10} = \frac{1}{30}.$$

b) Gọi D là biến cố lấy được 1 bi đỏ và 2 bi trắng từ hộp đã chọn. Tương tự, ta có

$$P(D) = \sum_{K=1}^{3} P(H_K)P(D/H_K) \;;$$

Trong đó

$$P(D/H_1) = \frac{C_1^1 C_4^2}{C_5^3} = \frac{6}{10} \;;\; P(D/H_2) = \frac{C_2^1 C_3^2}{C_5^3} = \frac{6}{10} \;;\; P(D/H_3) = \frac{C_3^1 C_2^2}{C_5^3} = \frac{3}{10}.$$

Suy ra

$$P(D) = \frac{1}{3}\cdot\frac{6}{10} + \frac{1}{3}\cdot\frac{6}{10} + \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{10} = \frac{1}{2}.$$

c) Theo đề bài, biến cố D đã xảy ra, ta cần tìm $P(H_1/D)$.

Khác với câu 1c), trong trường hợp này, vì H_1 thuộc nhóm đầy đủ, nên ta áp dụng công thức Bayes. Ta có :

$$P(H_1/D) = \frac{P(H_1)P(D/H_1)}{P(D)} = \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{6}{10}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{5}.$$

C. BÀI TẬP

1. Hai người cùng bắn, mỗi người bắn một viên đạn vào tấm bia. Gọi N_i là biến cố người thứ i bắn trúng bia, i = 1,2. Hãy biểu diễn các biến cố sau qua N_1, N_2.

   a) Chỉ có người thứ nhất bắn trúng bia. $N_1\overline{N_2}$
   b) Có đúng một người bắn trúng. $N_1\overline{N_2} + \overline{N_1}N_2$

c) Cả hai người đều bắn trúng. $N_1 N_2$

d) Không có ai bắn trúng. $\overline{N_1}\,\overline{N_2}$

e) Có ít nhất một người bắn trúng. $N_1N_2 + \overline{N_1}N_2 + N_1\overline{N_2}$

f) Có không quá một người bắn trúng. $\overline{N_1}\,\overline{N_2} + \overline{N_1}N_2 + N_1\overline{N_2}$

2. Người ta chọn ngẫu nhiên 3 linh kiện từ một lô hàng. Gọi L_K là biến cố linh kiện thứ k đạt tiêu chuẩn loại A, $k = \overline{1,3}$. Hãy biểu diễn các biến cố sau qua L_1, L_2, L_3.

a) Cả ba linh kiện đều đạt loại A. $L_1L_2L_3$

b) Chỉ có một linh kiện đạt loại A. $L_1\overline{L_2}\,\overline{L_3} + \overline{L_1}L_2\overline{L_3} + \overline{L_1}\,\overline{L_2}L_3$

c) Có đúng hai linh kiện đạt loại A.

d) Không có kinh kiện nào đạt loại A. $\overline{L_1}\,\overline{L_2}\,\overline{L_3}$

e) Có nhiều nhất một linh kiện đạt loại A.

f) Có không quá hai linh kiện đạt loại A. $+ L_1L_2\overline{L_3} + L_1\overline{L_2}L_3 + \overline{L_1}L_2L_3$

g) Có ít nhất một linh kiện không đạt loại A. Tự viết

h) Có ít nhất một linh kiện đạt loại A.

3. Một chiếc tàu thủy gồm có 1 bánh lái, 2 tuyếc bin, 3 nồi hơi. Gọi A là biến cố bánh lái hoạt động tốt ; B_i là biến cố tuyếc bin thứ i hoạt động tốt (i = 1,2) ; C_j là biến cố nồi nơi thứ j hoạt động tốt ($j = \overline{1,3}$). $D = A(B_1+B_2)(C_1+C_2+C_3)$

Biết rằng, tàu thuỷ sẽ chạy được khi và chỉ khi bánh lái, ít nhất một tuyếc bin và ít nhất một nồi nơi hoạt động tốt. Gọi D là biến cố tàu thủy chạy được. Hãy biểu diễn các biến cố D và $\overline{D}$ qua A, B_1, B_2, C_1, C_2, C_3. $\overline{D} = \overline{A} + \overline{B_1+B_2} + \overline{C_1+C_2+C_3} = \overline{A} + \overline{B_1}\,\overline{B_2} + \overline{C_1}\,\overline{C_2}\,\overline{C_3}$

Cho biết tàu thuỷ sẽ chạy tốt khi bánh lái, ít nhất một tuyếc bin và ít nhất hai nồi hơi hoạt động tốt. Gọi E là biến cố tàu thủy chạy tốt. Hãy biểu diễn E và $\overline{E}$ qua các biến cố trên đây. Tự viết

4. Lớp học môn xác suất có 64 sinh viên, trong đó có 15 sinh viên nữ. Chọn ngẫu nhiên một nhóm gồm 10 sinh viên. Tìm xác suất trong nhóm chọn ra có

a) 4 sinh viên nữ. $C_{15}^4 C_{49}^6 / C_{64}^{10}$

b) không quá 2 sinh viên nữ. $(C_{49}^{10} + 15C_{49}^9 + C_{15}^2C_{49}^8)/C_{64}^{10}$

c) ít nhất 1 sinh viên nữ. $1 - C_{49}^{10}/C_{64}^{10}$

5. Thang máy của một trường đại học xuất phát từ tầng trệt với 10 sinh viên và có thể lên đến lầu 8 là cao nhất. Tìm xác suất để

a) tất cả cùng ra ở lầu 8. $1/8^{10}$

b) tất cả cùng ra ở một lầu. $1/8^9$

c) có 3 người cùng ra ở lầu 2, những người còn lại ra ở các lầu khác. $C_{10}^3 \times 7^7/8^{10}$

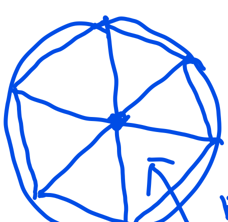
$h = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow a = \frac{2h}{\sqrt{3}} = \frac{2\times\frac{3R}{2}}{\sqrt{3}} = R\sqrt{3}$

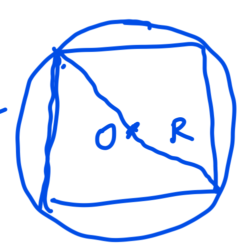
6. Gieo một cách ngẫu nhiên một điểm vào hình tròn bán kính R (R > 0). Tìm xác suất sao cho điểm rơi vào

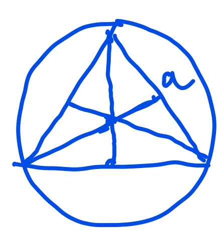
a) hình vuông nội tiếp đường tròn. $\frac{2R^2}{\pi R^2} = \frac{2}{\pi}$

b) tam giác đều nội tiếp đường tròn. $\frac{R\sqrt{3}\times\frac{3}{2}R}{2}/\pi R^2 = \frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$

c) lục giác đều nội tiếp đường tròn.



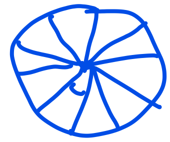




$h = \frac{3}{2}R$

$6\times\frac{R\times\frac{R\sqrt{3}}{2}}{2}/\pi R^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi}$

$\frac{n\sin\left(\frac{360^0}{n}\right)}{2\pi}$



$\frac{\sin\frac{360^0}{n}\times R^2}{2}\times n/\pi R^2$

d) đa giác đều n cạnh nội tiếp đường tròn. ???

7. Hai tàu thủy đến dỡ hàng tại một bến cảng trong cùng một ngày. Biết thời gian dỡ hàng của tàu thứ nhất là 1 giờ, của tàu thứ hai là 2 giờ và hai tàu không thể cùng dỡ hàng. Tìm xác suất để một trong hai tàu phải chờ tàu kia. $P(A)=1-\frac{\frac{1}{2}(23^2+22^2)}{24^2}$

8. Có ba người, mỗi người bắn một viên đạn vào bia với xác suất bắn trúng lần lượt là 0,6 ; 0,7 ; 0,8. Tìm các xác suất sau đây:

a) Chỉ có người thứ hai bắn trúng. $\bar{A}_1 A_2 \bar{A}_3 \to 0.4\times0.7\times0.2$

b) Có đúng một người bắn trúng. $A_1\bar{A}_2\bar{A}_3+\bar{A}_1A_2\bar{A}_3+\bar{A}_1\bar{A}_2A_3 \to P=$

c) Chỉ có người thứ ba bắn trượt. $A_1A_2\bar{A}_3$

d) Có đúng hai người bắn trúng. $A_1A_2\bar{A}_3+A_1\bar{A}_2A_3+\bar{A}_1A_2A_3$

e) Cả ba người đều bắn trúng. $A_1A_2A_3$

f) Không có ai bắn trúng. $\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3$

g) Có ít nhất một người bắn trúng. $1-P(\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3)$

h) Có không quá hai người bắn trúng. $1-P(A_1A_2A_3)$

i) Có ít nhất hai người bắn trúng.

S

$V_1: 0.95$

$V_2: 0.8\times0.95$

$V_3: \boxed{0.7\times0.8\times0.95}/S$

100TS

90

72 → 18

9. Một cuộc thi có ba vòng. Vòng thứ nhất lấy 90% số thí sinh dự thi. Vòng thứ hai lấy 80% thí sinh đã qua vòng thứ nhất. Vòng thứ ba lấy 70% thí sinh đã qua vòng hai.

a) Tìm xác suất để một thí sinh lọt qua cả ba vòng thi.

b) Biết rằng thí sinh đó bị loại, tìm xác suất để anh ta bị loại ở vòng thứ hai. 18/90

10. Một bài thi trắc nghiệm nhiều lựa chọn gồm 12 câu hỏi. Mỗi câu có 5 phương án trả lời, trong đó chỉ có 1 phương án đúng. Cho biết mỗi câu trả lời đúng được 4 điểm, mỗi câu trả lời sai bị trừ đi 1 điểm. Một sinh viên không học bài nên đã làm bài bằng cách chọn ngẫu nhiên 1 phương án trả lời trong từng câu hỏi. Tìm xác suất anh ta

$4x-(12-x)=13$

$x=5$

a) được 13 điểm. $C_{12}^5\left(\frac{1}{5}\right)^5\left(\frac{4}{5}\right)^7$

$4x-(12-x)<0$

b) bị điểm âm. $\sum_{k=0}^{2} C_{12}^k(1/5)^k(4/5)^{12-k}$

$5x-12<0$

$x<2.4$

11. Một người bắn ba viên đạn. Xác suất để cả ba viên trúng vòng 10 là 0,008. Xác suất để một viên trúng vòng 8 là 0,15. Xác suất để một viên trúng vòng dưới 8 là 0,4. Tìm xác suất để người đó đạt ít nhất 28 điểm. TH1: 3 viên trúng + TH2: 2 viên vòng 10 và 1 viên vòng 8

0.008

$(0.2)^2\times0.15$

12. Một máy bay có 5 động cơ, trong đó có 3 động cơ ở cánh phải, 2 động cơ ở cánh trái. Mỗi động cơ ở cánh phải có xác suất bị hỏng là 0,1 ; ở cánh trái là 0,05. Các động cơ hoạt động độc lập. Tính xác suất để máy bay thực hiện chuyến bay an toàn trong các trường hợp sau.

a) Máy bay chỉ bay được nếu có ít nhất hai động cơ làm việc.

b) Máy bay chỉ bay được khi trên mỗi cánh của nó ít nhất một động cơ hoạt động.

Đã gợi ý trên bảng

13. Hai máy cùng sản xuất ra một loại chi tiết. Năng suất của máy thứ hai gấp đôi máy thứ nhất. Tỉ lệ chi tiết đạt tiêu chuẩn của máy thứ nhất là 65%, của máy thứ hai là 80%. Lấy ngẫu nhiên một chi tiết từ lô hàng do hai máy sản xuất.

a) Tìm xác suất lấy được chi tiết đạt tiêu chuẩn. $1/3\times0.65+\frac{2}{3}\times0.8$

b) Nếu chi tiết đó là phế phẩm, tìm xác suất chi tiết đó do máy thứ hai sản xuất. Xem vd7

14. Có hai lô hàng, lô thứ nhất có 10 sản phẩm loại A, 2 sản phẩm loại B ; lô thứ hai có 16 sản phẩm loại A, 4 sản phẩm loại B. Từ mỗi lô ta lấy ngẫu nhiên ra một sản phẩm. Sau đó,

Công thức xác suất đầy đủ

trong hai sản phẩm thu được lại lấy ra một sản phẩm. Tìm xác suất để sản phẩm lấy ra sau cùng là sản phẩm loại A.

15. Có ba cái hộp đựng bút. Hộp thứ nhất có 5 bút đỏ, 10 bút xanh. Hộp thứ hai có 3 bút đỏ, 7 bút xanh. Hộp thứ ba có 3 bút đỏ, 4 bút xanh. Từ hộp thứ nhất lấy ra 1 cái bút, từ hộp thứ hai lấy ra 2 cái, cùng bỏ vào hộp thứ ba.

a) Tìm xác suất để trong hộp thứ ba số bút đỏ nhiều hơn số bút xanh.

b) Từ hộp thứ ba lấy ra 2 cái bút. Tìm xác suất lấy được 2 bút cùng màu.

16. Ở một vùng cứ 100 người thì có 30 người hút thuốc lá. Biết tỉ lệ người bị viêm họng trong số người hút thuốc là 60%, còn trong số người không hút là 10%.

a) Khám ngẫu nhiên một người. Tìm xác suất để người đó bị viêm họng.

b) Giả sử người được khám bị viêm họng. Tìm xác suất anh ta hút thuốc.

c) Nếu người đó không bị viêm họng thì xác suất để anh ta hút thuốc bằng bao nhiêu ?

17. Có bốn nhóm xạ thủ tập bắn. Nhóm thứ nhất có 6 người, nhóm thứ hai có 7 người, nhóm thứ ba có 8 người và nhóm thứ tư có 4 người. Xác suất bắn trúng đích của mỗi người trong bốn nhóm đó lần lượt là 0,8 ; 0,7 ; 0,6 ; 0,5. Chọn ngẫu nhiên một xạ thủ.

a) Tìm xác suất anh ta bắn trúng đích.

b) Giả sử xạ thủ này bắn trượt. Hãy xác định xem người đó có khả năng ở trong nhóm nào nhất ?

18. Một tín hiệu vô tuyến được phát đi 4 lần. Xác suất thu được ở mỗi lần phát đều là 0,4.

a) Tìm xác suất để nơi thu nhận được tín hiệu đó.

b) Muốn xác suất thu được tín hiệu không bé hơn 95% thì phải phát tối thiểu bao nhiêu lần ?

19. Giả sử xác suất sinh con trai là 0,51. Một gia đình có 4 người con. Tìm xác suất để gia đình đó có

a) hai con trai. $C_4^2(0.51)^2(0.49)^2$ $\quad C_n^k p^k q^{n-k}$

b) không quá một con trai. $(0.49)^4 + C_4^1 0.51 \times (0.49)^3$ $\quad q = 1-p$

c) Nếu muốn có ít nhất một con trai với xác suất trên 80% thì gia đình đó phải sinh tối thiểu mấy con ? $1-(0.49)^n > 0.8 \Rightarrow n?$

20. Một xạ thủ có xác suất bắn trúng đích ở mỗi lần bắn là 0,7. Anh ta đã bắn 5 lần, mỗi lần 1 viên đạn.

a) Tìm xác suất có 3 viên trúng đích. $C_5^3(0.7)^3(0.3)^2$

b) Tìm xác suất có không quá 3 viên trúng. $\sum_{k=0}^{3}(0.7)^k(0.3)^{3-k}$

c) Trong 5 viên đạn đó khả năng mấy viên trúng là nhiều nhất ? $\sum_{k=3}^{5}(0.7)^k(0.3)^{5-k}$

d) Muốn xác suất có ít nhất 1 viên đạn trúng đích không nhỏ hơn 99% thì xạ thủ đó phải bắn tối thiểu bao nhiêu viên đạn ? $1-(0.3)^n \geq 0.99$