Giá trị riêng, vector riêng và chéo hóa ma trận

1. Giá trị riêng và vector riêng

Cho một ma trận vuông $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Một số thực (hoặc phức) λ được gọi là **giá trị riêng** (eigenvalue) của A nếu tồn tại vector không-zero $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ sao cho:

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v}$$

Vector $\vec{v}$ được gọi là **vector riêng** (eigenvector) tương ứng với giá trị riêng λ.

Tìm giá trị riêng

Để tìm giá trị riêng, giải phương trình:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Đây được gọi là phương trình đặc trưng (characteristic equation) của ma trận A.

Tìm vector riêng

Sau khi tìm được các giá trị riêng λ, thay vào:

$$(A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0}$$

và giải hệ để tìm vector $\vec{v} \neq \vec{0}$.

2. Chéo hóa ma trận

Một ma trận $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ được gọi là **chéo hóa được** nếu tồn tại ma trận khả nghịch P sao cho:

$$A = PDP^{-1}$$

trong đó D là ma trận đường chéo chứa các giá trị riêng của A, và các cột của P là các vector riêng tương ứng.

Điều kiện chéo hóa: Ma trận A chéo hóa được khi và chỉ khi nó có đủ n vector riêng tuyến tính độc lập.

3. Ví dụ minh họa

Cho ma trận:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Bước 1: Tìm giá trị riêng

Tìm nghiệm của phương trình:

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow \det \begin{bmatrix} 4-\lambda & 1 \\ 2 & 3-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$(4-\lambda)(3-\lambda) - 2 = \lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 5, \quad \lambda_2 = 2$$

Bước 2: Tìm vector riêng

Với $\lambda = 5$:

$$(A - 5I)\vec{v} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \vec{v} = 0 \Rightarrow v_1 = v_2 \Rightarrow \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Với $\lambda = 2$:

$$(A - 2I)\vec{v} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \vec{v} = 0 \Rightarrow 2v_1 + v_2 = 0 \Rightarrow v_2 = -2v_1 \Rightarrow \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Bước 3: Chéo hóa

Tạo ma trận:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow A = PDP^{-1}$$

4. Kết luận

- Giá trị riêng cho biết mức độ co giãn của không gian theo các hướng riêng. - Vector riêng là những hướng không đổi khi tác động bởi phép biến đổi tuyến tính A. - Chéo hóa giúp đơn giản hóa tính toán lũy thừa ma trận và giải hệ phương trình vi phân tuyến tính.

a