Tổ hợp tuyến tính, Phụ thuộc tuyến tính, Span và Cơ sở

1. Phụ thuộc tuyến tính

Một tập các vectơ $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k$ được gọi là *phụ thuộc tuyến tính* nếu tồn tại các hệ số $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, không đồng thời bằng 0, sao cho:

$$\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + \cdots + \lambda_k\vec{v}_k = \vec{0}$$

Ví dụ:

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{v}_2 = 2\vec{v}_1 \Rightarrow \text{phụ thuộc tuyến tính}$$

2. Tổ hợp tuyến tính

Tổ hợp tuyến tính của các vectơ $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k$ là biểu thức dạng:

$$\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + \cdots + \lambda_k\vec{v}_k, \quad \lambda_i \in \mathbb{R}$$

Ví dụ:

$$3\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

3. Span (Không gian con sinh bởi một hệ vectơ)

$$\operatorname{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k) = \left\{ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i\vec{v}_i \mid \lambda_i \in \mathbb{R} \right\}$$

Ví dụ:

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = \mathbb{R}^2$$

4. Cơ sở của một không gian

Một tập hợp các vectơ là một *cơ sở* của không gian nếu:

- Các vectơ **độc lập tuyến tính**.
- Tập đó **sinh ra toàn bộ không gian** (span).

Ví dụ:

Trong $\mathbb{R}^3$, tập:

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

là cơ sở chuẩn của $\mathbb{R}^3$.