

Phép khử Gauss

Định nghĩa: Phép khử Gauss là một thuật toán biến đổi ma trận về dạng bậc thang dòng bằng cách sử dụng các phép biến đổi sơ cấp trên dòng. Đây là một công cụ quan trọng để:

- Giải hệ phương trình tuyến tính.
- Tính hạng của ma trận.
- Tính định thức.
- Tìm ma trận nghịch đảo.

Ba phép biến đổi sơ cấp trên dòng:

1. Đổi chỗ hai dòng: $R_i \leftrightarrow R_j$
2. Nhân một dòng với một số khác 0: $R_i \leftarrow k \cdot R_i$, với $k \neq 0$
3. Cộng bội của dòng này vào dòng khác: $R_i \leftarrow R_i + k \cdot R_j$

Ví dụ:

Giải hệ phương trình sau bằng phép khử Gauss:

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x + 3y + 7z = 20 \\ x + 3y + 4z = 14 \end{cases}$$

Ma trận mở rộng tương ứng là:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & 7 & 20 \\ 1 & 3 & 4 & 14 \end{bmatrix}$$

Bước 1: $R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1$, $R_3 \leftarrow R_3 - R_1$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 5 & 8 \\ 0 & 2 & 3 & 8 \end{bmatrix}$$

Bước 2: $R_3 \leftarrow R_3 - 2R_2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & -7 & -8 \end{bmatrix}$$

Bước 3: $R_3 \leftarrow -\frac{1}{7}R_3$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{8}{7} \end{bmatrix}$$

Bước 4: Khử ngược:

$$R_2 \leftarrow R_2 - 5R_3$$

$$R_1 \leftarrow R_1 - R_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \frac{34}{7} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{4}{7} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{8}{7} \end{bmatrix}$$

Bước 5: $R_1 \leftarrow R_1 - R_2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{30}{7} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{4}{7} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{8}{7} \end{bmatrix}$$

Kết luận: Nghiệm của hệ phương trình là:

$$x = \frac{30}{7}, \quad y = \frac{4}{7}, \quad z = \frac{8}{7}$$