ОТЧЁТ о выполнении лабораторной работы №3

«Интерполяция и среднеквадратичное приближение функции, заданной в узлах, алгебраическими многочленами»

Подготовил Сечейко Н.В., ст. гр. 421702

Цель работы. Исследовать поведение интерполяционных многочленов (равноотстоящие и чебышевские узлы) и сплайнов при разных числах узлов, а также построить многочлены наилучшего среднеквадратичного приближения для степеней $m=1, .. ,4$.

Вариант. Функция: $f(x)=ctg(x)$. Отрезок: $[a;b]=[0.3;2\pi/3]$. Исследования проведены для $n=1,2,3,4,5,10$.

Задание 1. Необходимо построить интерполяционные многочлены степени n для функции $f(x)$, заданной в равноотстоящих точках отрезка $[a;b]$ и исследовать зависимость погрешности интерполирования от степени полинома n ($n = 1, 2, 3, 4, 5, 10$) (для удобства оформления в отчёте показаны решения для степени $n=5$ и $n=10$). Для этого я:

а) Создал таблицу значений заданной функции в равноотстоящих точках отрезка $x_j=a+j*(b-a)/n, j=[0;n], j \in Z$.

```
xj = Table[a + (b - a) / n * j, {j, 0, n}];
     таблица значений
yj = f /@ xj;
```

```
=== n = 5 ===
```

Таблица значений:

xj	f(xj)
0.3	3.23273
0.658879	1.29147
1.01776	0.617293
1.37664	0.196636
1.73552	-0.166226
2.0944	-0.57735

```
=== n = 10 ===
```

Таблица значений:

xj	f(xj)
0.3	3.23273
0.47944	1.92345
0.658879	1.29147
0.838319	0.89939
1.01776	0.617293
1.1972	0.392009
1.37664	0.196636
1.55608	0.0147208
1.73552	-0.166226
1.91496	-0.358424
2.0944	-0.57735

б) Нашёл интерполяционный многочлен $N_n(x)$

```
Nn[x_] = InterpolatingPolynomial[Transpose[{xj, yj}], x] // Expand;
         интерполяционный многоч···  транспозиция            раскрыть скобки
```

Интерполяционный многочлен Nn(x):

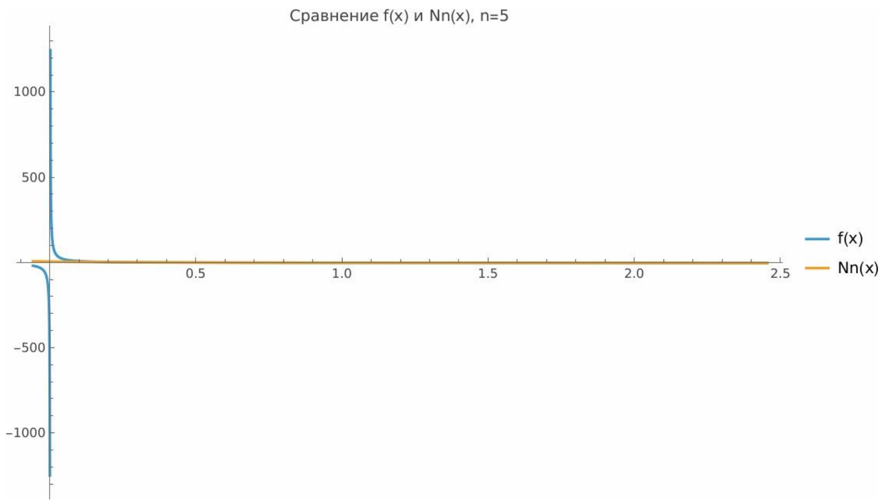
$$7.62187 - 21.6433\,x + 28.8854\,x^2 - 20.4452\,x^3 + 7.24131\,x^4 - 1.01931\,x^5$$

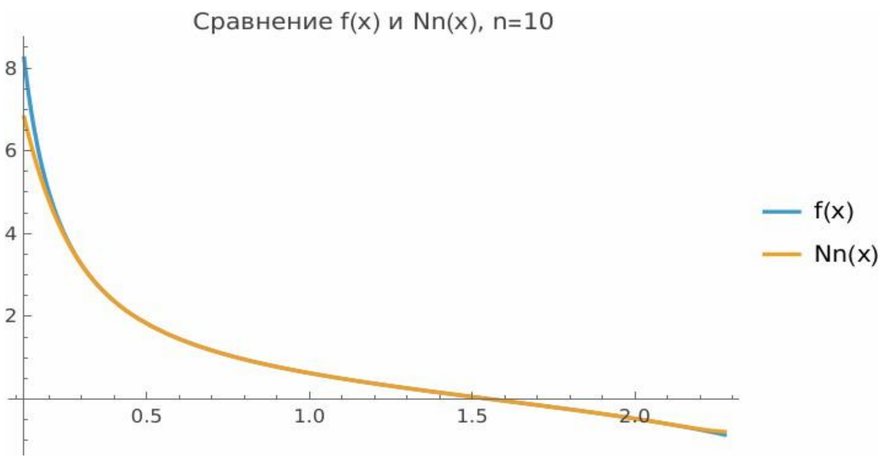
Интерполяционный многочлен Nn(x):

$$12.8919 - 72.1223\,x + 229.253\,x^2 - 468.711\,x^3 + 646.607\,x^4 - 616.266\,x^5 + 406.876\,x^6 - 182.804\,x^7 + 53.3384\,x^8 - 9.11283\,x^9 + 0.691717\,x^{10}$$

в) График функции *f(x)*, узлов интерполирования и интерполяционного многочлена $N_n(x)$ на отрезке *[a-h;b+h]*:

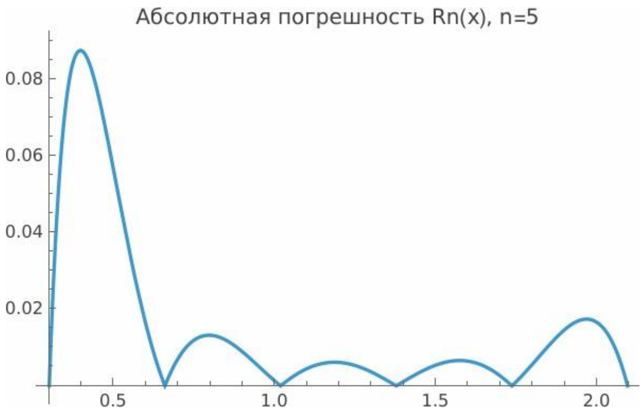
```
Plot[
 график функции
     {f[x], Nn[x]}, {x, a - (b - a) / n, b + (b - a) / n},
     PlotLegends → {"f(x)", "Nn(x)"},
     легенды графика
     PlotLabel → Row[{"Сравнение f(x) и Nn(x), n=", n}],
     пометка г···  ряд
     PlotRange → All
     отобража···  всё
 ]
```

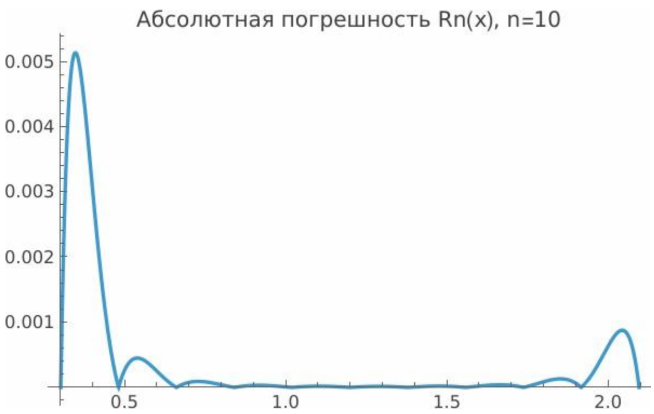




г) График абсолютной погрешности интерполирования многочленом Ньютона $R_n(x)$ на отрезке $[a;b]$:

```
Rn[x_] := Abs[f[x] - Nn[x]];
          абсолютное значение
Print[
печатать
    Plot[
    график функции
        Rn[x], {x, a, b},
        PlotLabel → Row[{"Абсолютная погрешность Rn(x), n=", n}],
        пометка г···  ряд
        PlotRange → All
        отобража···   всё
    ]
];
```





д) Максимум погрешности $R_n(x)$ на отрезке $[a;b]$:

```
maxError = FindMaximum[{Rn[x], a ≤ x ≤ b}, x];
           найти максимум
```

```
Максимальная погрешность: {0.0874937, {x → 0.396942}}
```

```
Максимальная погрешность: {0.000451676, {x → 0.537594}}
```

Задание 2. Повторить те же действия для неравноотстоящих узлов на отрезке *[a;b]*, расположенных пропорционально нулям многочленов Чебышева.

$$x_k = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cos\frac{(2k+1)\pi}{2(n+1)}, \quad k = 0,1,\ldots,n.$$

```
xk = Table[(a + b) / 2 + (b - a) / 2 * Cos[(2 * k + 1) * Pi / (2 * (n + 1))], {k, 0, n}];
     таблица значений                  косинус            число пи
yk = f /@ xk;
```

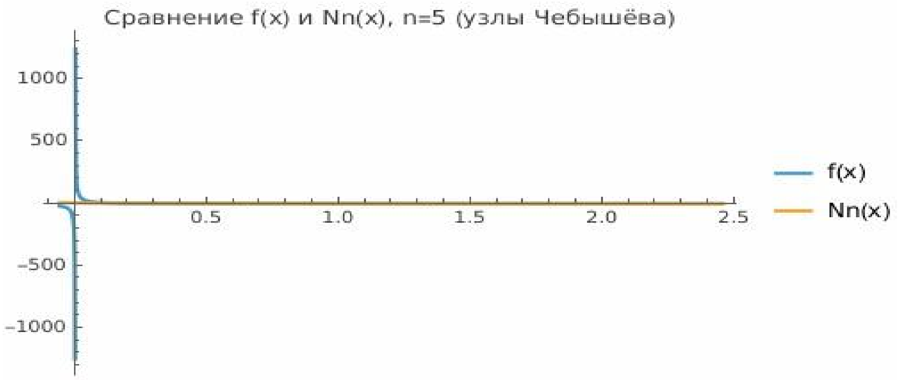
(для удобства оформления в отчёте представлены решения для *n=5* и *n=10*)

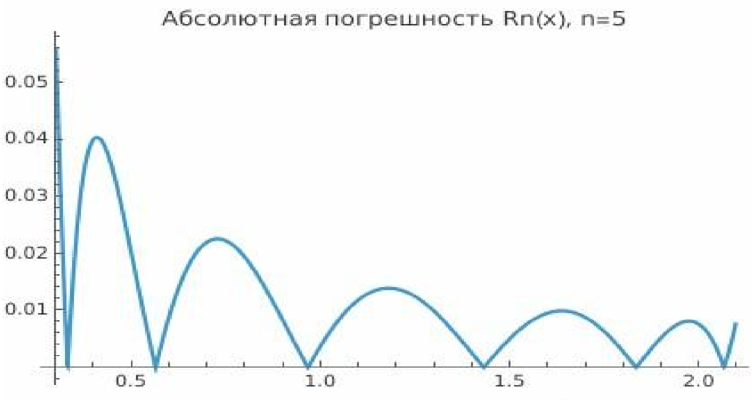
```
=== n = 5 (узлы Чебышёва) ===
Таблица значений (узлы Чебышёва):
```

xk	f(xk)
2.06382	-0.537283
1.83161	-0.266895
1.42941	0.142337
0.964986	0.692701
0.562783	1.5852
0.330571	2.91406

Интерполяционный многочлен Nn(x):

$$7.57638 - 21.8292\,x + 29.5714\,x^2 - 21.128\,x^3 + 7.51279\,x^4 - 1.05733\,x^5$$





Максимальная погрешность: {0.0404565, {x → 0.407578}}

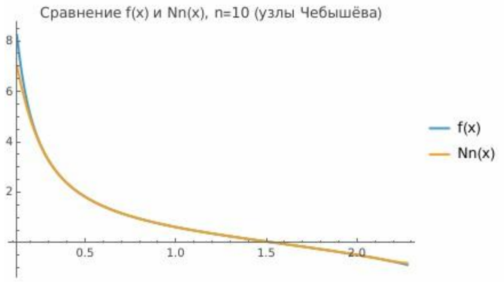
=== n = 10 (узлы Чебышёва) ===

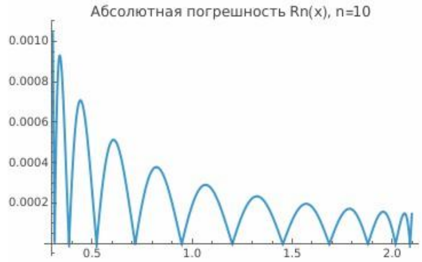
Таблица значений (узлы Чебышёва):

xk	f(xk)
2.08526	-0.565238
2.01332	-0.473864
1.87525	-0.314227
1.68226	-0.111927
1.44997	0.12142
1.1972	0.392009
0.944428	0.723567
0.712136	1.15841
0.519141	1.75002
0.381078	2.49586
0.309132	3.13116

Интерполяционный многочлен Nn(x):

$$13.8768 - 83.3961\,x + 283.418\,x^{2} - 613.837\,x^{3} + 888.435\,x^{4} - 879.67\,x^{5} + 597.74\,x^{6} - 274.032\,x^{7} + 80.9644\,x^{8} - 13.9136\,x^{9} + 1.05623\,x^{10}$$





Максимальная погрешность: {0.000516418, {x → 0.603462}}

Задание 3. Нужно выполнить интерполяцию функции *f(x)* сплайном *Sf(x)* используя таблицу значений функции *f(x)* в равноотстоящих точках для *n=5* и *n=10*:

а) Графики функции *f(x)*, узлов интерполирования и интерполяционного сплайна *Sf(x)* на отрезке *[a-h;b+h]*.

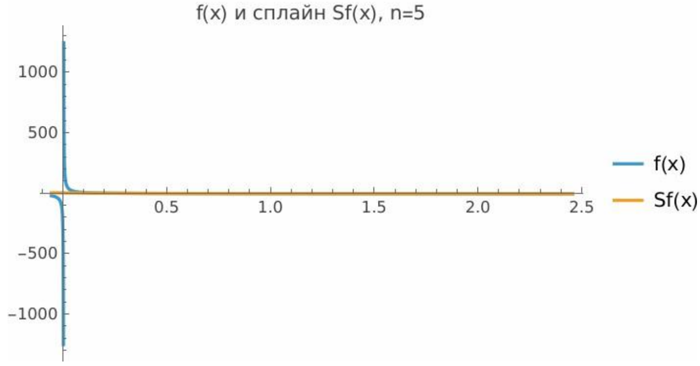
```
xj = Table[a + (b - a) / n * j, {j, 0, n}];
     таблица значений
yj = f /@ xj;
data = Transpose[{xj, yj}];
       транспозиция
Print["Таблица значений функции:"];
печатать
Print[TableForm[data, TableHeadings → {None, {"xj", "f(xj)"}}]];
печ…  табличная форма  табличные загол…  ни одного/отсутствует
Sf = Interpolation[data, Method → "Spline"];
     интерполировать        метод

h = (b - a) / n;
Print[
печатать
    Plot[
    график функции
        {f[x], Sf[x]}, {x, a - h, b + h},
        PlotLegends → {"f(x)", "Sf(x)"},
        легенды графика
        PlotLabel → Row[{"f(x) и сплайн Sf(x), n=", n}],
        пометка г…  ряд
        PlotRange → All
        отобража…  всё
    ]
];
```

=== Сплайновая интерполяция, n = 5 ===

Таблица значений функции:

xj	f(xj)
0.3	3.23273
0.658879	1.29147
1.01776	0.617293
1.37664	0.196636
1.73552	-0.166226
2.0944	-0.57735

f(x) и сплайн Sf(x), n=5

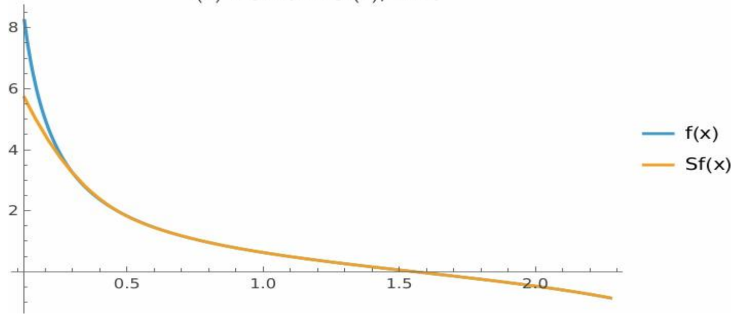


=== Сплайновая интерполяция, n = 10 ===

Таблица значений функции:

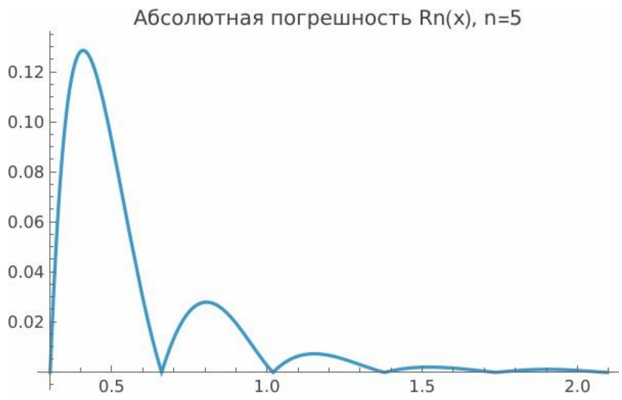
xj	f(xj)
0.3	3.23273
0.47944	1.92345
0.658879	1.29147
0.838319	0.89939
1.01776	0.617293
1.1972	0.392009
1.37664	0.196636
1.55608	0.0147208
1.73552	-0.166226
1.91496	-0.358424
2.0944	-0.57735

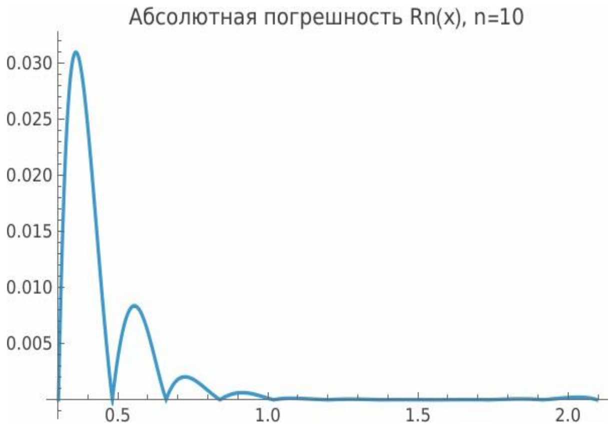
f(x) и сплайн Sf(x), n=10



б) График абсолютной погрешности интерполирования сплайном $R_n(x)=f(x)-Sf(x)$ на отрезке *[a;b]*.

```
Rn[x_] := Abs[f[x] - Sf[x]];
          абсолютное значение
Print[
печатать
     Plot[
     график функции
          Rn[x], {x, a, b},
          PlotLabel → Row[{"Абсолютная погрешность Rn(x), n=", n}],
          пометка г⋯   ряд
          PlotRange → All
          отобража⋯   всё
     ]
];
```





в) Максимум погрешности $R_n(x)$ на отрезке *[a;b]*:

```
maxError = FindMaximum[{Rn[x], a ≤ x ≤ b}, x];
                   найти максимум
```

n=5:

```
Максимальная погрешность: {0.128813, {x → 0.406067}}
```

n=10:

```
Максимальная погрешность: {0.00839673, {x → 0.553019}}
```

Задание 4. Таблица максимальных значений погрешности $R_n(x)$ для разных значений *n*.

n	**Равноотстоящие узлы**	**Чебышёвские узлы**	**Сплайн**
1	1.2039	1.2639	—
2	0.2526	0.2526	—
3	0.3018	0.3018	—
4	0.1628	0.1628	—
5	0.0875	0.0875	0.1288
10	0.00045	0.00045	0.00840

Задание 5. Необходимо построить с помощью метода наименьших квадратов аппроксимирующие алгебраические многочлены наилучшего среднеквадратичного приближения.

а) Многочлены наилучшего среднеквадратичного приближения для степеней *m=1,2,3,4*.

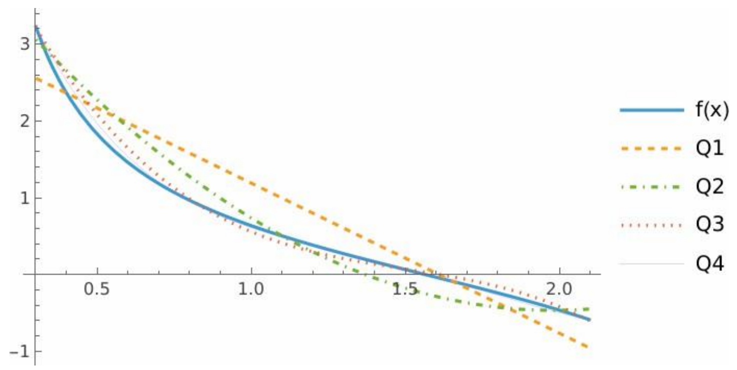
```
nValues = {5, 10}

tables = Table[
         |таблица значений
       Table[{x, f[x]}, {x, a, b, (b - a) / (n - 1)}],
       |таблица значений
       {n, nValues}
  ];

degrees = {1, 2, 3, 4}
polynomials = Table[
              |таблица значений
       Fit[tables[[i]], Table[x^m, {m, 0, Max[degrees]}], x],
       |согласовать      |таблица значений    |максимум
       {i, Length[nValues]}
          |длина
  ];
```

для удобства:

```
polyByDegree = Table[
               |таблица значений
       Fit[tables[[i]], Table[x^m, {m, 0, deg}], x],
       |согласовать      |таблица значений
       {i, Length[nValues]}, {deg, degrees}
          |длина
  ];
```

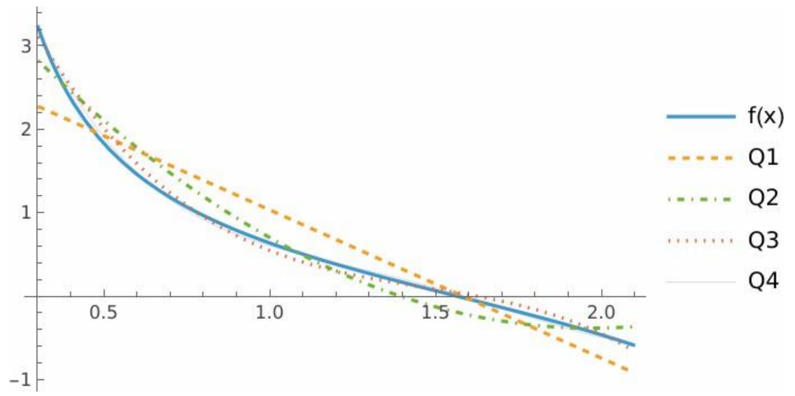
5	5	5	5
$3.1507 - 1.95537 x$	$4.44056 - 4.95152 x + 1.25132 x^2$	$5.68798 - 9.98089 x + 6.24726 x^2 - 1.39101 x^3$	$6.57502 - 14.8579 x + 14.1957 x^2 - 6.3289 x^3 + 1.03113 x^4$
10	10	10	10
$2.81532 - 1.77678 x$	$4.08721 - 4.53197 x + 1.15068 x^2$	$5.54659 - 9.85747 x + 6.29583 x^2 - 1.43255 x^3$	$6.75787 - 16.0392 x + 16.092 x^2 - 7.45867 x^3 + 1.25838 x^4$

б) Графики функции *f(x)*, узлов функции и многочленов.



n=5

n=10:



Вывод: По результатам вычислений и сравнений можно сделать следующие выводы:

1. Погрешность интерполирования уменьшается с увеличением числа узлов для всех способов.

2. Сплайновая интерполяция показала невысокие значения погрешности даже при небольшом числе узлов. Это подтверждает её устойчивость и плавность аппроксимации по сравнению с многочленами.

3. Зависимость погрешности от числа узлов носит монотонный характер: чем больше узлов, тем меньше ошибка, что соответствует теоретическим ожиданиям.

4. Метод наименьших квадратов позволил построить многочлены наилучшего среднеквадратичного приближения. Увеличение степени аппроксимирующего многочлена привело к уменьшению максимальной ошибки и лучшему совпадению графиков.

Резюмируя, можно сказать, что с увеличением числа узлов и степени многочлена точность аппроксимации возрастает. Интерполяция в узлах Чебышева и сплайновая интерполяция обеспечивают более устойчивые результаты и меньшие колебания ошибки. Метод наименьших квадратов даёт хорошее среднее приближение функции, особенно при увеличении степени многочлена.