ОТЧЕТ о выполненной лабораторной работе № 2

«Решение систем линейных алгебраических уравнений»

Вариант 6

Выполнил студент гр.421702 Сечейко Н.В.

Проверил: Нижников З. С.

Задание 1. Исследование погрешность решения СЛАУ прямыми методами. Цель задания: убедиться в том, что решения двух систем с хорошо и плохо обусловленными матрицами коэффициентов по-разному реагируют на возмущение правой части системы - на точность решения влияют два фактора: число обусловленности матрицы и эквивалентые возмущения.

1. Условие:

Выполнить задание для двух случаев:

$$\textbf{1)}\quad a_{ij}=\begin{cases}1, & i>j,\\ i+1, & i=j,\\ 2, & i<j,\end{cases}\qquad b_i=2ki-i^2;\qquad\qquad \textbf{2)}\quad a_{ij}=\frac{1}{i+j-1}\qquad b_i=3i-2k,$$

где $i=\overline{1,7}$, $j=\overline{1,7}$, k – номер вашего варианта.

Номер варианта - 6.

2. Ввод матриц:

```
In[•]:= n = 7
k = 6
A1 = Table[1 / (i + j - 1), {i, 1, n}, {j, 1, n}]
B1 = Table[3 * i - 2 * k, {i, 1, n}]
MatrixForm[A1]
MatrixForm[B1]
```

1)

Out[•]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} & \frac{1}{9} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} & \frac{1}{9} & \frac{1}{10} & \frac{1}{11} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} & \frac{1}{9} & \frac{1}{10} & \frac{1}{11} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{7} & \frac{1}{8} & \frac{1}{9} & \frac{1}{10} & \frac{1}{11} & \frac{1}{12} & \frac{1}{13} \end{pmatrix}$$

Out[•]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} -9 \\ -6 \\ -3 \\ 0 \\ 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$$

```
In[63]:= n = 7
k = 6
A1 = Table[If[i > j, 1, If[i == j, i + 1, 2]], {i, 1, n}, {j, 1, n}]
B1 = Table[2 * k * i - i ^ 2, {i, 1, n}]
MatrixForm[A1]
MatrixForm[B1]
```

2)

Out[67]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 4 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 5 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 6 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

Out[68]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 11 \\ 20 \\ 27 \\ 32 \\ 35 \\ 36 \\ 35 \end{pmatrix}$$

Решение функцией LinearSolve:

```
X = LinearSolve[A1, B1]
```

1)

Out[•]= {945, -44 352, 487 620, -2 116 800, 4 261 950, -3 991 680, 1 405 404}

2)

Out[•]= $\left\{-\frac{1503}{140}, -\frac{243}{140}, \frac{247}{140}, \frac{1441}{420}, \frac{439}{105}, \frac{92}{21}, \frac{59}{14}\right\}$

Вычисление обратной матрицы функцией Inverse:

```
invA = Inverse[A1]
```

Out[∘]//MatrixForm=

1)
$$\begin{pmatrix} 49 & -1176 & 8820 & -29400 & 48510 & -38808 & 12012 \\ -1176 & 37632 & -317520 & 1128960 & -1940400 & 1596672 & -504504 \\ 8820 & -317520 & 2857680 & -10584000 & 18711000 & -15717240 & 5045040 \\ -29400 & 1128960 & -10584000 & 40320000 & -72765000 & 62092800 & -20180160 \\ 48510 & -1940400 & 18711000 & -72765000 & 133402500 & -115259760 & 37837800 \\ -38808 & 1596672 & -15717240 & 62092800 & -115259760 & 100590336 & -33297264 \\ 12012 & -504504 & 5045040 & -20180160 & 37837800 & -33297264 & 11099088 \end{pmatrix}$$

2)
$$\begin{pmatrix} \frac{13}{14} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{12} & -\frac{1}{20} & -\frac{1}{30} & -\frac{1}{42} \\ -\frac{1}{14} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{12} & -\frac{1}{20} & -\frac{1}{30} & -\frac{1}{42} \\ -\frac{1}{14} & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{12} & -\frac{1}{20} & -\frac{1}{30} & -\frac{1}{42} \\ -\frac{1}{14} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{20} & -\frac{1}{30} & -\frac{1}{42} \\ -\frac{1}{14} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{30} & -\frac{1}{42} \\ -\frac{1}{14} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{42} \\ -\frac{1}{14} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$$

Вычисление числа обусловленности:

```
condA = normA * norminvA
```

1) Out[∘]= $\frac{1970389773}{2}$

2) Out[∘]= 25

Вычисление норм векторов погрешностей:

```
Bdelta = Bd1 - B1
normBdelta = Norm[Bdelta, Infinity]
```

```
Bd2 = B1
```

```
Bdelta = Bd2 - B1
normBdelta = Norm[Bdelta, Infinity]
```

```
Bd3 = B1
Bdelta = Bd3 - B1
normBdelta = Norm[Bdelta, Infinity]
```

1) Out[•]= 0.35

2) Out[•]= 0.035

3) Out[•]= 0.0035

3. Таблица результатов рассчетов:

condA	«возмущение», %	Норма вектора абс. ошибки ||Δ X|| = ||X *- X||	Норма вектора отн. ошибки ||Δ X||/||X||
Хорошо обусл.	Без возмущ.	-	-
25	1%	0.05	0.00465735
	0.1%	0.005	0.000465735
	0.01%	0.0005	0.0000465735
Плохо обусл.	Без возмущ.	-	-
1970389773/2	1%	3405400	0.799024
	0.1%	340540	0.0799024
	0.01%	34054	0.00799025

Задание 3. Изучение итерационных методов решения СЛАУ - метода Якоби, метода Зейделя.

Цель задания: убедиться в том, что методы Якоби и Зейделя сходятся к решению системы и им требуется разное число итераций для достижения требуемой точности (сравнение скорости сходимости); обратить внимание на зависимость число итераций и достигнутой реальной точности решения от способа завершения итерационного
процесса (см. на уменьшение нормы невязки).

Порядок системы	Количество итераций m	норма вектора абсолютной погрешности	Норма вектора отн. погрешности
М. Якоби			
n=10	14	0.00023039	0.00001097
n=20	15	0.00030398	9.80575212*10^(-6)
М. Зейделя			
n=10	6	0.00006026	2.86970278*10^(-6)
n=20	7	0.00001656	5.34198693*10^(-7)

```
In[207]:= (*Уведомление о перезапуске–игнорируем*)n1 = 10;
A = Table[If[i == j, 2 * n1, 1], {i, 1, n1}, {j, 1, n1}];
B = Table[(2 * n1 - 1) * i + (n1 * (n1 + 1)) / 2 + (3 * n1 - 1) * (6 - 1), {i, 1, n1}];

(*Метод Якоби*)
maxiter = 1000;
eps = 10 ^ -3;
n = Length[B];
x = ConstantArray[0., n]; (*начальное приближение*)
y = x;
iter = 0;
m = 0;
SD = {};   (*последовательные приближения*)
Abss = {};  (*разности между итерациями*)
NList = {};  (*невязка*)

While[iter < maxiter && m < n, iter ++;
  m = 0;
  For[i = 1, i ≤ n, i ++, s = Sum[A[[i, j]] * x[[j]], {j, 1, n}] - A[[i, i]] * x[[i]];
   y[[i]] = (B[[i]] - s) / A[[i, i]];
   If[Abs[y[[i]] - x[[i]]] < eps, m ++];];
  SD = Append[SD, y];
  Abss = Append[Abss, Norm[y - x, Infinity]];
  NList = Append[NList, Norm[A.y - B, Infinity]];
  x = y;];
```

```
(*Точное решение*)
xExact = LinearSolve[A, B];

(*Абсолютная и относительная погрешности в ∞-норме*)
absError = Norm[x - xExact, Infinity];
relError = If[Norm[xExact, Infinity] ≠ 0, absError / Norm[xExact, Infinity], Infinity];

(*Вывод результатов*)
If[iter ≥ maxiter, Print["Решение не найдено"]];
Print["Итераций: ", iter];
Print["Приближённое решение: ", PaddedForm[x, {9, 8}]];
Print["Точное решение (LinearSolve): ", PaddedForm[xExact, {9, 8}]];
Print["Невязка: ", Last[NList]];
Print["Абсолютная погрешность (∞-норма): ", PaddedForm[absError, {9, 8}]];
Print["Относительная погрешность (∞-норма): ", PaddedForm[relError, {9, 8}]];
```

```
Итераций: 14
Приближённое решение: { 5.99985339, 6.99985339, 7.99985339, 8.99985339, 9.99985339, 10.99985340, 11.99985340, 12.99985340, 13.99985340, 14.99985340}
Точное решение (LinearSolve): { 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15}
Невязка: 0.0042517
Абсолютная погрешность (∞-норма): 0.00014661
Относительная погрешность (∞-норма): 9.77402021×10^-6
```

```
In[•]:= n1 = 10;
A = Table[If[i == j, 2 * n1, 1], {i, 1, n1}, {j, 1, n1}];
B = Table[(2 * n1 - 1) * i + (n1 * (n1 + 1)) / 2 + (3 * n1 - 1) * (6 - 1), {i, 1, n1}];

(*Метод Якоби*)
maxiter = 1000;
eps = 10^-3;
n = Length[B];
x = ConstantArray[0., n]; (*начальное приближение*)
y = x;
iter = 0;
m = 0;     (*счетчик сходившихся компонент*)
SD = {};   (*последовательные приближения*)
Abss = {};  (*разности между итерациями*)
NList = {};  (*невязка*)

While[iter < maxiter && m < n, iter++;
  m = 0;
  For[i = 1, i ≤ n, i++, s = Sum[A[[i, j]] * x[[j]], {j, 1, n}] - A[[i, i]] * x[[i]];
   y[[i]] = (B[[i]] - s) / A[[i, i]];
   If[Abs[y[[i]] - x[[i]]] < eps, m++];];
  SD = Append[SD, y];
  Abss = Append[Abss, Norm[y - x, Infinity]];
  NList = Append[NList, Norm[A.y - B, Infinity]];
  x = y;];
(*Точное решение*)
xExact = LinearSolve[A, B];

(*Абсолютная и относительная погрешности в ∞-норме*)
absError = Norm[x - xExact, Infinity];
relError = If[Norm[xExact, Infinity] ≠ 0, absError / Norm[xExact, Infinity], Infinity];

(*Вывод результатов*)
If[iter ≥ maxiter, Print["Решение не найдено"]];
Print["Итераций: ", iter];
Print["Приближённое решение: ", PaddedForm[x, {9, 8}]];
Print["Точное решение (LinearSolve): ", PaddedForm[xExact, {9, 8}]];
Print["Невязка: ", Last[NList]];
Print["Абсолютная погрешность (∞-норма): ", PaddedForm[absError, {9, 8}]];
Print["Относительная погрешность (∞-норма): ", PaddedForm[relError, {9, 8}]];
```

```
Итераций: 14
Приближённое решение: { 5.99985339, 6.99985339, 7.99985339, 8.99985339, 9.99985339, 10.99985340, 11.99985340, 12.99985340, 13.99985340, 14.99985340}
Точное решение (LinearSolve): { 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15}
Невязка: 0.0042517
Абсолютная погрешность (∞-норма): 0.00014661
Относительная погрешность (∞-норма): 9.77402021×10^-6
```