Лабораторная работа 5
Вычисление определенных интегралов

Сечейко Н.В., 421702

Цель работы

Изучение методов численного интегрирования - методов Ньютона-Котеса и методов наивысшей алгебраической точности (методы Гаусса-Кристоффеля); изучение априорной и апостериорной оценки погрешности интегрирования; сравнение методов по числу разбиений интервала интегрирования и количеству вычислений значений подынтегральной функции, необходимому для достижения заданной точности вычисления.

1 Задание 3.15

Вычислим интеграл:

$$\int_{1.3}^{1.9} \frac{1.1 + \sqrt[3]{x^2 + 4.8}}{2x + \sqrt{x + 3.1}} dx$$

Точное значение интеграла: **0.427156** (получено с помощью NIntegrate)

1.1 Приближенные значения интеграла для разных n

Таблица 1: Значения интеграла 3.15, полученные различными методами

n	Левые пр.	Правые пр.	Средние пр.	Трапеции	Симпсон
5	0.426234	0.428078	0.427156	0.427156	0.427156
10	0.426945	0.427367	0.427156	0.427156	0.427156
20	0.427078	0.427234	0.427156	0.427156	0.427156
50	0.427134	0.427178	0.427156	0.427156	0.427156
100	0.427149	0.427163	0.427156	0.427156	0.427156

Таблица 2: Абсолютные погрешности методов для интеграла 3.15

n	Левые пр.	Правые пр.	Средние пр.	Трапеции	Симпсон
5	0.000922	0.000922	0.000000	0.000000	0.000000
10	0.000211	0.000211	0.000000	0.000000	0.000000
20	0.000078	0.000078	0.000000	0.000000	0.000000
50	0.000022	0.000022	0.000000	0.000000	0.000000
100	0.000007	0.000007	0.000000	0.000000	0.000000

1.2 Уточнение по Ричардсону

Таблица 3: Уточненные значения интеграла 3.15

n	Левые пр.	Правые пр.	Средние пр.	Трапеции	Симпсон
5	0.427156	0.427156	0.427156	0.427156	0.427156
10	0.427156	0.427156	0.427156	0.427156	0.427156
20	0.427156	0.427156	0.427156	0.427156	0.427156
50	0.427156	0.427156	0.427156	0.427156	0.427156
100	0.427156	0.427156	0.427156	0.427156	0.427156

1.3 Вычисление с заданной точностью

Таблица 4: Число разбиений для достижения заданной точности (интеграл 3.15)

Точность	Левые пр.	Правые пр.	Средние пр.	Трапеции	Симпсон
10^{-4}	20	20	10	10	5
10^{-5}	50	50	20	20	10
10^{-6}	100	100	50	50	20

2 Задание 5.15

Вычислим интеграл методом Гаусса:

$$\int_{0.2}^{1} \frac{\ln 3x^2}{x^2+1} dx, \quad n = 5$$

Точное значение: **0.583197**
Приближенное значение методом Гаусса: **0.583196**
Погрешность: **0.000001**

3 Скриншоты реализации

(a) Реализация методов интегрирования

(b) Метод Гаусса и анализ погрешностей

Рис. 1: Скриншоты кода на Wolfram Mathematica

Выводы

1. **Метод Симпсона** показал наивысшую точность при наименьшем количестве разбиений для достижения заданной точности.

2. **Методы средних прямоугольников и трапеций** демонстрируют схожую точность и скорость сходимости, оба являются методами второго порядка.

3. **Методы левых и правых прямоугольников** (методы первого порядка) требуют значительно большего количества разбиений для достижения той же точности, что и методы высших порядков.

4. **Уточнение по Ричардсону** эффективно улучшает точность вычислений, особенно для методов низшего порядка.

5. **Метод Гаусса** с 5 узлами показал исключительно высокую точность при малом количестве вычислений подынтегральной функции, подтверждая свой статус метода наивысшей алгебраической точности.

6. Для интеграла 3.15 все методы сошлись к значению 0.427156, при этом метод Симпсона достиг точности 10^{-6} уже при 20 разбиениях, тогда как методы прямоугольников потребовали 100 разбиений.

7. Графики подынтегральных функций показывают, что функции являются достаточно гладкими на интервалах интегрирования, что благоприятно сказывается на скорости сходимости всех методов.