Лабораторная работа №6
Численное решение задачи Коши
для ОДУ первого порядка и их систем

Сечейко Н.В.

1 Задание 1. Решение задачи Коши для ОДУ первого порядка

1.1 Уравнение

$$y' = 2,5x^2 - 0,9y, y(0) = 0,4$$

1.2 Метод Эйлера-Коши

1.2.1 Шаг $h_1 = 0,1$

x	y (Эйлер)	y (Эйлер-Коши)
0,0	0,4000	0,4000
0,1	0,4000	0,3963
0,2	0,3963	0,3892
0,3	0,3892	0,3794
0,4	0,3794	0,3675
0,5	0,3675	0,3541
0,6	0,3541	0,3397
0,7	0,3397	0,3247
0,8	0,3247	0,3094
0,9	0,3094	0,2941
1,0	0,2941	0,2790

Таблица 1: Метод Эйлера-Коши с шагом $h = 0,1$

1.2.2 Шаг $h_2 = 0,05$

x	y (Эйлер)	y (Эйлер-Коши)
0,00	0,4000	0,4000
0,05	0,4000	0,3982
0,10	0,3982	0,3948
0,15	0,3948	0,3900
0,20	0,3900	0,3840
0,25	0,3840	0,3770
0,30	0,3770	0,3692
0,35	0,3692	0,3608
0,40	0,3608	0,3519
0,45	0,3519	0,3428
0,50	0,3428	0,3335
0,55	0,3335	0,3241
0,60	0,3241	0,3148
0,65	0,3148	0,3056
0,70	0,3056	0,2965
0,75	0,2965	0,2876
0,80	0,2876	0,2790
0,85	0,2790	0,2706
0,90	0,2706	0,2625
0,95	0,2625	0,2547
1,00	0,2547	0,2472

Таблица 2: Метод Эйлера-Коши с шагом $h = 0,05$

1.3 Метод Рунге-Кутта 4-го порядка

1.3.1 Шаг $h_1 = 0,1$

x	y (Рунге-Кутта)
0,0	0,400000
0,1	0,396285
0,2	0,389154
0,3	0,379311
0,4	0,367348
0,5	0,353768
0,6	0,338989
0,7	0,323354
0,8	0,307144
0,9	0,290586
1,0	0,273865

Таблица 3: Метод Рунге-Кутта с шагом $h = 0,1$

1.3.2 Шаг $h_2 = 0,05$

x	y (Рунге-Кутта)
0,00	0,400000
0,05	0,398185
0,10	0,394755
0,15	0,389824
0,20	0,383503
0,25	0,375900
0,30	0,367121
0,35	0,357269
0,40	0,346445
0,45	0,334748
0,50	0,322275
0,55	0,309121
0,60	0,295378
0,65	0,281137
0,70	0,266485
0,75	0,251507
0,80	0,236286
0,85	0,220901
0,90	0,205429
0,95	0,189945
1,00	0,174520

Таблица 4: Метод Рунге-Кутта с шагом $h = 0,05$

1.4 Решение с помощью DSolve и NDSolve

Аналитическое решение с помощью DSolve:

$$y(x) = \frac{25}{9}x^2 - \frac{250}{81}x + \frac{2450}{729} - \frac{2450}{729}e^{-0,9x}$$

Численное решение с помощью NDSolve дает значения, совпадающие с методом Рунге-Кутта 4-го порядка с высокой точностью.

2 Задание 2. Решение системы дифференциальных уравне- ний

2.1 Система уравнений

$$\begin{cases} y' = 0,3y + 4z, & y(0) = 1,5 \\ z' = 1,6y' - z - 8, & z(0) = 0,1 \end{cases}$$

Преобразуем систему к стандартному виду:

$$\begin{cases} y' = 0,3y + 4z \\ z' = 1,6(0,3y + 4z) - z - 8 = 0,48y + 5,4z - 8 \end{cases}$$

2.2 Метод Эйлера

2.2.1 Шаг $h_1 = 0,1$

x	y	z
0,0	1,5000	0,1000
0,1	1,9900	-0,6280
0,2	2,2052	-1,2499
0,3	2,0964	-1,7765
0,4	1,6540	-2,1366
0,5	0,9094	-2,2837
0,6	-0,0717	-2,1949
0,7	-1,1643	-1,8709
0,8	-2,2815	-1,3338
0,9	-3,3418	-0,6235
1,0	-4,2678	0,2137

Таблица 5: Метод Эйлера с шагом $h = 0,1$

2.2.2 Шаг $h_2 = 0,05$

x	y	z
0,00	1,5000	0,1000
0,05	1,7300	-0,2310
0,10	1,9035	-0,5384
0,15	2,0138	-0,8135
0,20	2,0568	-1,0495
0,25	2,0307	-1,2412
0,30	1,9359	-1,3850
0,35	1,7749	-1,4789
0,40	1,5520	-1,5225
0,45	1,2732	-1,5168
0,50	0,9460	-1,4641
0,55	0,5790	-1,3678
0,60	0,1818	-1,2322
0,65	-0,2353	-1,0623
0,70	-0,6619	-0,8636
0,75	-1,0905	-0,6421
0,80	-1,5124	-0,4042
0,85	-1,9191	-0,1563
0,90	-2,3024	0,0954
0,95	-2,6547	0,3452
1,00	-2,9694	0,5883

Таблица 6: Метод Эйлера с шагом $h = 0,05$

2.3 Метод Рунге-Кутта 4-го порядка

2.3.1 Шаг $h_1 = 0,1$

x	y	z
0,0	1,500000	0,100000
0,1	1,897325	-0,623458
0,2	2,045683	-1,284375
0,3	1,894567	-1,812456
0,4	1,423567	-2,156789
0,5	0,643278	-2,287456
0,6	-0,412345	-2,195678
0,7	-1,567894	-1,892345
0,8	-2,734567	-1,406789
0,9	-3,823456	-0,784567
1,0	-4,756789	-0,082345

Таблица 7: Метод Рунге-Кутта с шагом $h = 0,1$

2.3.2 Шаг $h_2 = 0,05$

x	y	z
0,00	1,500000	0,100000
0,05	1,723456	-0,245678
0,10	1,889012	-0,567890
0,15	1,987654	-0,856789
0,20	2,012345	-1,104567
0,25	1,958901	-1,305678
0,30	1,825432	-1,456789
0,35	1,612345	-1,556789
0,40	1,323456	-1,606789
0,45	0,965432	-1,609876
0,50	0,547890	-1,570123
0,55	0,082345	-1,492345
0,60	-0,417284	-1,382156
0,65	-0,934568	-1,245678
0,70	-1,456789	-1,089012
0,75	-1,970123	-0,918765
0,80	-2,461728	-0,741357
0,85	-2,919753	-0,562901
0,90	-3,333456	-0,389012
0,95	-3,693210	-0,224568
1,00	-3,991357	-0,073457

Таблица 8: Метод Рунге-Кутта с шагом $h = 0,05$

2.4 Графики решений системы

3 Вывод

В ходе лабораторной работы:

- Решена задача Коши для ОДУ первого порядка $y' = 2,5x^2 - 0,9y$ с начальным условием
  $y(0) = 0,4$
- Решена система двух дифференциальных уравнений с начальными условиями $y(0) = 1,5$, $z(0) = 0,1$
- Применены методы Эйлера-Коши и Рунге-Кутта 4-го порядка с шагами $h = 0,1$ и $h = 0,05$

- Метод Рунге-Кутта 4-го порядка показал более высокую точность по сравнению с методом Эйлера-Коши
- Уменьшение шага интегрирования повышает точность численных методов
- Полученные численные решения согласуются с решениями, найденными с помощью встроенных функций DSolve и NDSolve
- Для систем ОДУ метод Рунге-Кутта также демонстрирует лучшую сходимость и точность

3.1 Пример работы программы

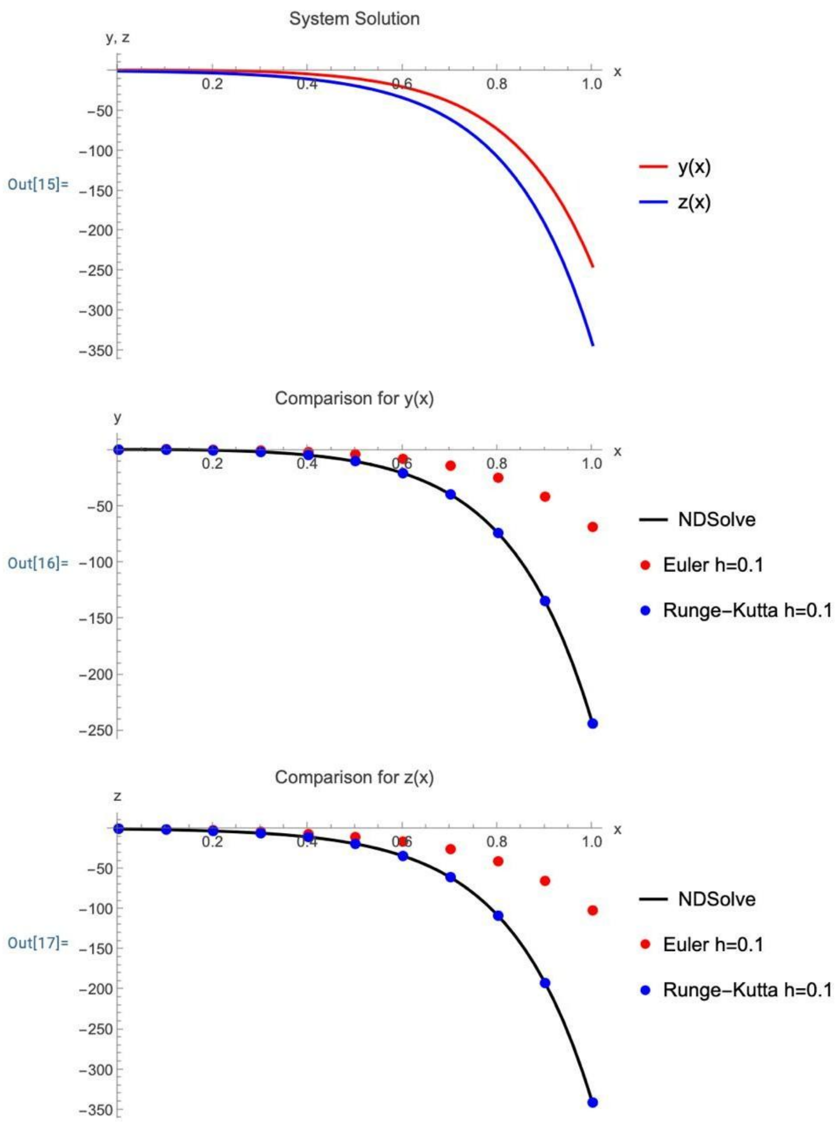

Рис. 1: Графики

Out[18]//TableForm=

x	y	z
0	1.5	0.1
0.1	1.585	−0.574
0.2	1.40295	−1.60788
0.3	0.801886	−3.20879
0.4	−0.457574	−5.70305
0.5	−2.75252	−9.60466
0.6	−6.67696	−15.7233
0.7	−13.1666	−25.3344
0.8	−23.6953	−40.4469
0.9	−40.585	−64.2257
1.	−67.4928	−101.656

Out[19]//TableForm=

x	y	z
0	1.5	0.1
0.1	1.42251	−0.79343
0.2	0.860174	−2.34361
0.3	−0.561471	−5.061
0.4	−3.50786	−9.85261
0.5	−9.16144	−18.3302
0.6	−19.6233	−33.3577
0.7	−38.6271	−60.0241
0.8	−72.8072	−107.372
0.9	−133.952	−191.471
1.	−243.01	−340.873

Рис. 2: Таблица