课程编号：100171019　　　北京理工大学 2018-2019 学年第二学期

2018 级理科数学分析（II）期终考试试题 A 卷解答

座号______班级__________学号___________姓名________成绩______

1.(8 分)判断下列命题是否正确（不用说明原因）.

(1)设 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点存在偏导数 $f_x(x_0,y_0)$ 和 $f_y(x_0,y_0)$，则 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 连续.

解：否。

(2)设 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点可微，则 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点的偏导数 $f_x(x_0,y_0)$ 和 $f_y(x_0,y_0)$ 都存在.

解：是。

(3)设 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点可微，则 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 连续.

解：是。

(4)若 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛.

解：否。

(5)设 $a_n > 0\,(n=1,2,\cdots)$. 若 $\lim\limits_{n\to+\infty} na_n = 0$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛.

解：否。

反例：$a_n = \dfrac{1}{n\ln n}$, $n \ge 3$.

(6)若 $a_n > 0$ 且 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1$，$n=1,2,\cdots$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛.

解：否。

反例：$a_n = \dfrac{1}{n}$.

(7)若级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ 收敛，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛.

解：是。

(8) 若 $\lim_{A\to+\infty}\int_{-A}^{A} f(x)dx = L$（$L$ 有限数），则 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ 收敛.

解：否。

2. (18 分) 求下列函数的偏导数

(1) 设 $z = y\cos x + e^{xy}$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$ 和 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解：$\frac{\partial z}{\partial x} = -y\sin x + ye^{xy}$，$\frac{\partial z}{\partial y} = \cos x + xe^{xy}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = -\sin x + e^{xy} + xye^{xy}$.

(2) 设 $z = z(x,y)$ 由方程 $e^x\sin y + yz + e^z + 5 = 0$ 所确定的隐函数，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$ 和 $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

解：方程关于 x 求导，z 是 x 的函数，得

$$e^x\sin y + y\frac{\partial z}{\partial x} + e^z\frac{\partial z}{\partial x} = 0, \quad \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{e^x\sin y}{y+e^z};$$

方程关于 y 求导，z 是 y 的函数，得

$$e^x\cos y + z + y\frac{\partial z}{\partial y} + e^z\frac{\partial z}{\partial y} = 0, \text{（*）}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{e^x\cos y + z}{y+e^z};$$

方程（*）再关于 y 求导，z 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 是 y 的函数，得

$$-e^x\sin y + \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial y} + y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + e^z\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial y} + e^z\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{-e^x\sin y + 2\frac{\partial z}{\partial y} + e^z\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial y}}{y+e^z}.$$

方法二：$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{e^x\cos y + z}{y+e^z}$ 关于 y 求导，z 是 y 的函数，得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{(-e^x\sin y + \frac{\partial z}{\partial y})(y+e^z) - (e^x\cos y + z)(1+e^z\frac{\partial z}{\partial y})}{(y+e^z)^2}.$$

3. (18 分) 计算下列积分

(1) 求三重积分 $I=\iiint\limits_{\Omega}\frac{xy}{\sqrt{z}}dxdydz$， 其中 Ω 是锥面 $x^2+y^2=z^2$ 与平面 $z=1$ 所围成区域在第一卦限部分，即 $\Omega=\left\{ (x,y,z)\,\middle|\,0\le x\le 1, 0\le y\le\sqrt{1-x^2}, \sqrt{x^2+y^2}\le z\le 1 \right\}$.

解：记 $D=\left\{ (x,y)\,\middle|\,0\le x\le 1, 0\le y\le\sqrt{1-x^2} \right\}$.

$$I=\iiint\limits_{\Omega}\frac{xy}{\sqrt{z}}dxdydz=\iint\limits_{D}dxdy\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1}\frac{xy}{\sqrt{z}}dz$$

$$=\iint\limits_{D}xy\left(2\sqrt{z}\Big|_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1}\right)dxdy=\iint\limits_{D}2xy\left(1-(x^2+y^2)^{\frac{1}{4}}\right)dxdy$$

$$=\int_0^1dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}}2xy\left(1-(x^2+y^2)^{\frac{1}{4}}\right)dy$$

$$=\int_0^1 x\left(y^2-\frac{4}{5}(x^2+y^2)^{\frac{5}{4}}\right)\Bigg|_{y=0}^{\sqrt{1-x^2}}dx=\frac{1}{36}.$$

方法二：利用平面极坐标，

$$I=\iiint\limits_{\Omega}\frac{xy}{\sqrt{z}}dxdydz=\iint\limits_{D}dxdy\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1}\frac{xy}{\sqrt{z}}dz$$

$$=\iint\limits_{D}2xy\left(1-(x^2+y^2)^{\frac{1}{4}}\right)dxdy$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1 2r\cos\theta r\sin\theta\left(1-r^{\frac{1}{2}}\right)rdr=\frac{1}{36}.$$

方法三：记 $D_z=\left\{ (x,y)\,\middle|\,x^2+y^2\le z^2, x\ge 0, y\ge 0 \right\}$.

$$I=\iiint\limits_{\Omega}\frac{xy}{\sqrt{z}}dxdydz=\int_0^1dz\iint\limits_{D_z}\frac{xy}{\sqrt{z}}dxdy$$

$$=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{z}}dz\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^z r\cos\theta r\sin\theta rdr\right)=\frac{1}{36}.$$

(2) 求第二型曲线积分 $I=\int_{L}(1-2xy-y^2)dx-(x+y)^2dy$，其中 L 是曲线 $x^2+y^2=2y$ 上从点 $O(0,0)$ 到点 $A(1,1)$ 的一段.

解： L 的参数方程为 $\begin{cases} x=\cos\theta \\ y=1+\sin\theta \end{cases}$ $(\frac{3\pi}{2}\le\theta\le 2\pi)$.

$$I=\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}\left\{[1-2\cos\theta(1+\sin\theta)-(1+\sin\theta)^2](-\sin\theta)-(\cos\theta+1+\sin\theta)^2\cos\theta\right\}d\theta$$

$$=-\frac{4}{3}.$$

方法二： $P(x,y)=1-2xy-y^2$， $Q(x,y)=-(x+y)^2$.

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}=-2(x+y).$$

则积分与路径无关.

记 $B(0,1)$.

$$I=\int_{OB}(1-2xy-y^2)dx-(x+y)^2dy+\int_{BA}(1-2xy-y^2)dx-(x+y)^2dy$$

$$=\int_0^1(-y^2)dy+\int_0^1(1-2x-1)dx$$

$$=-\frac{4}{3}.$$

方法三： $P(x,y)=1-2xy-y^2$， $Q(x,y)=-(x+y)^2$.

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}=-2(x+y).$$

则积分与路径无关.

记从 O 到 A 的直线为 L_1，它的方程是 $y=x$.

$$I=\int_{L_1}(1-2xy-y^2)dx-(x+y)^2dy$$

$$=\int_0^1\left[(1-2x\cdot x-x^2)-(x+x)^2\right]dx$$

$$=-\frac{4}{3}.$$

(3) 求第一型曲面积分 $\iint\limits_{M}(x^2+y)dS$，其中 M 是上半球面

$$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}\ \left(x^2+y^2\le R^2, R>0\right).$$

解：记 $D=\left\{\ (x,y)\,\middle|\,x^2+y^2\le R^2\ \right\}$.

$$z_x=-\frac{x}{z},\quad z_y=-\frac{y}{z},$$

$$\Rightarrow \sqrt{1+z_x{}^2+z_y{}^2}=\frac{R}{z}=\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$$

$$\Rightarrow \iint\limits_{M}(x^2+y)dS=\iint\limits_{D}(x^2+y)\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}dxdy$$

$$=\iint\limits_{D}x^2\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}dxdy$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^R r^2\cos^2\theta\frac{R}{\sqrt{R^2-r^2}}rdr$$

$$=\frac{2}{3}\pi R^4.$$

4. (12 分) 判断下列广义积分或级数的收敛性

(1) $\int_0^{+\infty}xe^{-x}dx$

解：$\int_0^{+\infty}xe^{-x}dx=-\int_0^{+\infty}xde^{-x}=-xe^{-x}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}e^{-x}dx=1.\quad\Rightarrow\int_0^{+\infty}xe^{-x}dx$ 收敛.

方法二：$x^2\cdot xe^{-x}\to 0$，$x\to+\infty$.

(2) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{e^n}{n!}$

解：记 $a_n=\frac{e^n}{n!}$.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{e}{n+1}\to 0<1,\quad n\to+\infty.\quad\Rightarrow\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^n}{n!}\text{ 收敛}.$$

(3) $\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)$

解： $\dfrac{n(1-\cos\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} = \dfrac{1-\cos\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} \to \frac{1}{2}$， $n\to+\infty$． $\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} n\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)$ 发散.

5.（12 分）求幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$ 的收敛半径，收敛域及和函数的表达式.

解： $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1} = x\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{2n+1}$， 考虑级数 $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\dfrac{y^n}{2n+1}$ 的收敛半径.

记 $a_n = \dfrac{(-1)^n}{2n+1}$.

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{2n+1}{2n+3} \to 1， \quad n\to+\infty .$$

则 $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$ 的收敛半径为 $R=1$.

当 $x=\pm1$ 时，级数 $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\dfrac{(\pm1)^{2n+1}}{2n+1} = \pm\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\dfrac{1}{2n+1}$ 收敛，

所以收敛域为 $[-1,1]$.

记和函数为 $S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$，

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-x^2)^n$$

$$= \frac{1}{1+x^2} .$$

又 $S(0)=0$， 则 $S(x)=\arctan x$.

6.(14 分)设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的函数，它在区间 $(-\pi,\pi]$ 上的表达式为

$$f(x)=\begin{cases} x & 0<x\le\pi \\ 0 & -\pi<x\le 0 \end{cases}.$$

(1)求 $f(x)$ 的 Fourier 级数；

(2)求 $f(x)$ 的 Fourier 级数的和函数在区间 $[-\pi,2\pi]$ 上的表达式；

(3)求 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$.

解：(1)

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}xdx=\frac{\pi}{2}.$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nxdx=\frac{(-1)^n-1}{n^2\pi}.$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin nxdx=\frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

则 $f(x)$ 的 Fourier 级数为

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right)=\frac{\pi}{4}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{(-1)^n-1}{n^2\pi}\cos nx+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx\right).$$

(2) $f(x)$ 的 Fourier 级数的和函数记为 $S(x)$.

$$S(x)=\begin{cases} 0 & x\in(-\pi,0]\cup(\pi,2\pi] \\ x & x\in(0,\pi) \\ \frac{\pi}{2} & x=-\pi,\pi \end{cases}.$$

(3)取 $x=0$， $S(0)=0$，则

$$0=\frac{\pi}{4}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n-1}{n^2\pi}.$$

解得 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$.

7.（8 分）设 $y=y(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$ 是初值问题 $\begin{cases} xy''+y'+xy=0 \\ y(0)=1, y'(0)=0 \end{cases}$ 的解，

求 $a_n(n=0,1,\cdots)$.

解：由条件，$y(0)=a_0=1$，$y'(0)=a_1=0$.

$$y'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}na_nx^{n-1} ,$$

$$y''(x)=\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)a_nx^{n-2} ,$$

代入微分方程，

$$x\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}+\sum_{n=1}^{+\infty}na_nx^{n-1}+x\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n=0 ,$$

$$\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)a_nx^{n-1}+a_1+\sum_{n=2}^{+\infty}na_nx^{n-1}+\sum_{n=2}^{+\infty}a_{n-2}x^{n-1}=0 ,$$

则 $a_n=\frac{-1}{n^2}a_{n-2}$.

所以，$a_{2n+1}=0$，$a_{2n}=\frac{(-1)^n}{\left[(2n)!!\right]^2}=\frac{(-1)^n}{(n!)^2 2^{2n}}$，$n=0,1,2,\cdots$.

8.（10 分）

(1) 设 $I(x)=\int_0^x\frac{\ln(1+xy)}{y}dy\ (x>0)$，求 $I'(x)$.

(2) 求 $I(x)=\int_0^{2\pi}e^{x\cos\theta}\cos\left(x\sin\theta\right)d\theta$，$x\in\left(-\infty,+\infty\right)$.

解：(1) $I'(x)=\int_0^x\frac{1}{y}\frac{y}{1+xy}dy+\frac{\ln(1+x^2)}{x}$.

(2) $\forall x \in (-\infty,+\infty)$，

$$I'(x)=\int_0^{2\pi}\left\{e^{x\cos\theta}\cos\theta\cos(x\sin\theta)+e^{x\cos\theta}[-\sin(x\sin\theta)]\sin\theta\right\}d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}e^{x\cos\theta}\cos(x\sin\theta+\theta)d\theta .$$

$$I^{(n)}(x)=\int_0^{2\pi}e^{x\cos\theta}\cos(x\sin\theta+n\theta)d\theta ,\quad n=0,1,2,\cdots .$$

$$I(0)=2\pi ,\quad I^{(n)}(0)=0, n=1,2,\cdots ,$$

利用泰勒公式，

$$I(x)=I(0)+\sum_{k=1}^{n}\frac{I^{(k)}(0)}{k!}+r_n(x) ,$$

其中，$r_n(x)=\dfrac{I^{(n+1)}(tx)}{(n+1)!}x^{n+1}$，其中$0<t<1$.

$$\left|I^{(n+1)}(tx)\right|=\left|\int_0^{2\pi}e^{tx\cos\theta}\cos(tx\sin\theta+n\theta)d\theta\right|\le 2\pi e^{|x|},$$

$$|r_n(x)|\le 2\pi e^{|x|}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} ,$$

$$r_n(x)\to 0, n\to+\infty .$$

则$I(x)=I(0)=2\pi$.

方法二：$\forall \alpha \in (-\infty,+\infty)$，记$I(\alpha)=\int_0^{2\pi}e^{\alpha\cos\theta}\cos(\alpha\sin\theta)d\theta$.

$$I'(\alpha)=\int_0^{2\pi}\left\{e^{\alpha\cos\theta}\cos\theta\cos(\alpha\sin\theta)+e^{\alpha\cos\theta}[-\sin(\alpha\sin\theta)]\sin\theta\right\}d\theta .$$

记L为单位圆周$x^2+y^2=1$，逆时针方向，则

$$\int_L e^{\alpha x}\sin\alpha y dx+e^{\alpha x}\cos\alpha y dy=I'(\alpha) .$$

利用格林公式，

$$I'(\alpha)=\iint_{x^2+y^2\le 1}\left(\alpha e^{\alpha x}\cos\alpha y-e^{\alpha x}\alpha\cos\alpha y\right)dxdy=0 .$$

$I(\alpha)=\int_0^{2\pi}e^{\alpha\cos\theta}\cos(\alpha\sin\theta)d\theta$是常数函数，

则$I(x)=I(0)=2\pi$.