

2021 级理科数学分析 (I) 期中考试试题 (6-7) 解答

班级	学号	姓名	成绩
----	----	----	----

1. (10 分) 判断下列命题是否正确:

(1) 设 $f(x) = x^2$, $g(x) = 2^x$, 则 $f \circ g(x) = 4^x$.

(2) 若 $f(x)$ 是定义在 $(-\infty, +\infty)$ 上的偶函数, 则 $f(-x)$ 也是偶函数.

(3) 若 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都是定义在 $(-\infty, +\infty)$ 上的严格单调递增的函数,

则 $f(x) \cdot g(x)$ 也是 $(-\infty, +\infty)$ 上的严格单调递增的函数.

(4) 若 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$, 则 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{x_n} = 0$.

(5) 若 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导, 则 $f(|x|)$ 在 $x=0$ 处连续但不一定可导.

(6) 设 $y = f(e^x)e^{f(x)}$, 其中 $f(x)$ 是可微函数, 则

$$y' = f'(e^x)e^{f(x)} + f(e^x)e^{f(x)}f'(x).$$

(7) 设 $\varphi(x)$ 在 $x=a$ 连续但不可导. 若 $f(x)=(x-a)\varphi(x)$, 则 $f(x)$ 在 $x=a$ 可导.

(8) 设 $\varphi(x)$ 在 $x=a$ 连续且 $\varphi(a) \neq 0$. 若 $f(x) = |x-a|\varphi(x)$, 则 $f(x)$ 在 $x=a$ 不可导.

(9) 若 $y=f(x)$ 在 x_0 的某个邻域内具有三阶连续导数, 并且 $f'(x_0)=0$,

$f''(x_0)=0, f'''(x_0)\neq 0$, 则 x_0 是 $y=f(x)$ 的极值点.

(10) 若 $y=f(x)$ 在 x_0 的某个邻域内具有三阶连续导数, 并且 $f'(x_0)=0$,

$f''(x_0)=0, f'''(x_0)\neq 0$, 则 $(x_0, f(x_0))$ 是 $y=f(x)$ 的拐点.

请在对应题号下方填写答案,若正确,画“√”;若不正确,画“×”.

[illegible]

2. (20 分)

(1) 设 $f(x) = \arctan \frac{e^x}{1+e^x}$, 求 $f'(x)$.

(2) 设 $y = f(x)$ 是由方程 $x^2 + 3xy + y^2 + 1 = 0$ 确定的隐函数, 求 $\frac{d^2 y}{dx^2}$.

(3) 设 $y = f(x)$ 是由参数方程 $\begin{cases} x = \ln(1+t^2) \\ y = t - \arctan t \end{cases}$ 确定的函数, 求 $\frac{d^2 y}{dx^2}$.

3. (20 分) 求下列极限

(1) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right)$

(2) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sin(\sqrt{n^2+1} \pi)$

(3) $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$, 其中 $x_1 = \sqrt{2}$, $x_{n+1} = \sqrt{2x_n}$, $n = 1, 2, \dots$.

4. (15 分) 证明: $xe^{-x} > \frac{1}{x}e^{-\frac{1}{x}}$ ($0 < x < 1$).

5. (15 分) 设 $f(x) = x^2 D(x) + x$, 其中 $D(x) = \begin{cases} 1 & x \text{ 有理数} \\ 0 & x \text{ 无理数} \end{cases}$.

(1) 证明: $\forall x_0 \neq 0$, $f(x)$ 在 x_0 点不连续;

(2) 证明: $f(x)$ 在 $x=0$ 可导, 并求出 $f'(0)$.

6. (20 分) 设 $f'(x)$ 在 $[a, b]$ 连续, 且存在 $c \in (a, b)$, 使得 $f'(c) = 0$.

证明: 存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f'(\xi) = \frac{f(\xi) - f(a)}{b - a}$.