2020-2021 学年第二学期线性代数 A 样题答案

一、 填空题（每小题 4 分，共 20 分）

1、$\underline{\quad 4m \quad}$；2、$\underline{\ m-t\ }$ 3、$\underline{-16}$；4、$\underline{(\lambda-a)^2,(\lambda-a),(\lambda-b)^2}$；5、$\underline{\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}$

二(10 分)、

解：由题设可得

$$|A| = 3$$

在等式$\frac{1}{3}A^*XA = 2A + XA$两边同时左乘$A$、右乘$A^{-1}$，可得

$$X = 2A + AX$$

整理可得 $$X = 2(I-A)^{-1}A$$

$$X = 2(I-A)^{-1}A = 2\begin{bmatrix} -2 & 5 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ -2 & 5 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 10 & 4 \\ -2 & 4 & 2 \\ -4 & 10 & 0 \end{bmatrix}$$

三（**10** 分)、解:（1）由题意

$$\left(1,1+x,1+x+x^2,1+x+x^2+x^3\right) = \left(1,x,x^2,x^3\right)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

由于$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$，所以$\left(1,1+x,1+x+x^2,1+x+x^2+x^3\right)$的秩为 4

即$1,1+x,1+x+x^2,1+x+x^2+x^3$线性无关，可以作为$F[x]_4$的一个基

（2）由题意，所求过渡矩阵$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

（3）$h(x) = 1 + 3x - x^3$在后一个基下的坐标

$$y=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1\\3\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\0&1&-1&0\\0&0&1&-1\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\3\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\3\\1\\-1\end{pmatrix}$$

四(15 分)

解：对非齐次线性方程组的增广矩阵进行初等行变换，可得

$$A\to\begin{pmatrix}1&1&-2&3&0\\0&1&2&2&1\\0&0&a+8&0&0\\0&0&0&0&b+2\end{pmatrix}$$

(1)当 $b\neq-2$ 时, $r(A)\neq r(B)$ 方程组无解; ………5

(2)当 $b=-2$ 时，$r(A)=r(\mathbf{B})$ 方程组有解; ………7

①当 $a=-8$ 时, $r(A)=r(B)=2<4$,方程组有无穷多解,且

$$B\to\begin{pmatrix}1&0&-4&1&\vdots&-1\\0&1&2&2&\vdots&1\\0&0&0&0&\vdots&0\\0&0&0&0&\vdots&0\end{pmatrix}$$

方程组的通解 $x=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix}4\\-2\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-1\\-2\\0\\1\end{pmatrix}$,其中 k_1,k_2 为任意常数;

②当 $a\neq-8$ 时, $r(A)=r(B)=3<4$,方程组有无穷多解,且

$$B\to\begin{pmatrix}1&0&0&1&\vdots&-1\\0&1&0&2&\vdots&1\\0&0&1&0&\vdots&0\\0&0&0&0&\vdots&0\end{pmatrix},$$

方程组的通解 $x=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}-1\\-2\\0\\1\end{pmatrix}$,其中 k 为任意常数.

五(10 分)、

解：把 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 按列组成矩阵，再进行初等行变换：

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ -1 & -2 & 1 & -1 \\ 3 & 6 & 3 & 9 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

由于初等行变换不改变列向量之间的线性相关性，可得$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3$是$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$的极大无关组，也是$\boldsymbol{L}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$的一个基，$\boldsymbol{L}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$的维数为 2。

将$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3$正交化：$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_3-\dfrac{(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1=\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix}$；

再将$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$单位化：$\boldsymbol{\eta}_1=\dfrac{\boldsymbol{\beta}_1}{|\boldsymbol{\beta}_1|}=\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}\sqrt{\mathbf{3}}}\begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} \\ \mathbf{3} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix},\boldsymbol{\eta}_2=\dfrac{\boldsymbol{\beta}_2}{|\boldsymbol{\beta}_2|}=\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}\sqrt{\mathbf{33}}}\begin{pmatrix} \mathbf{5} \\ \mathbf{7} \\ \mathbf{3} \\ \mathbf{-7} \end{pmatrix}$

则可得$\boldsymbol{L}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$的一组标准正交基$\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2$。

六(10 分)、

解：（1）由$\boldsymbol{r(A)=2}$，$|\boldsymbol{A}|=\mathbf{0}$，所以$\boldsymbol{A}$的另一特征值$\boldsymbol{\lambda}_3=0$。设属于$\boldsymbol{\lambda}_3=0$的特征向量$\boldsymbol{\alpha}=\left(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3\right)^{\boldsymbol{T}}$，则$\boldsymbol{\alpha}$与$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$都正交，即$\boldsymbol{\alpha}_1^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0},\boldsymbol{\alpha}_2^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$

$$\begin{cases} x_1+x_2=0, \\ 2x_1+x_2+x_3=0, \end{cases}$$

解得$\boldsymbol{\alpha}=(\mathbf{1},\mathbf{-1},\mathbf{-1})^{\boldsymbol{T}}$，所以属于$\boldsymbol{\lambda}_3=0$的特征向量为$\boldsymbol{k\alpha}$，其中$\boldsymbol{k}$是不为 0 的任意常数。

（2）设$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，则有

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix} \mathbf{6} & & \\ & \mathbf{6} & \\ & & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

则有$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix} \mathbf{6} & & \\ & \mathbf{6} & \\ & & \mathbf{0} \end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}$，其中$\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}} & -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}} & \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}} \\ \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}} & -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}} & -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}} \end{pmatrix}$

$$因此\ \boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{2} & \mathbf{2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{4} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-2} & \mathbf{4} \end{pmatrix}.$$

七(15分)、

解　二次型 f 的矩阵 $A=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&3&\lambda\\0&\lambda&3\end{bmatrix}$,

由 f 经正交替换所得的标准形为 $y_1^2+2y_2^2+5y_3^2$, 得矩阵 A 的特征值 $\lambda_1=1,\ \lambda_2=2,\ \lambda_3=5.$ 利用特征值的性质，行列式

$$|A|=\begin{vmatrix}2&0&0\\0&3&\lambda\\0&\lambda&3\end{vmatrix}=2(9-\lambda^2)=\lambda_1\lambda_2\lambda_3=10,$$

可得 $\lambda=\pm2$, 由题设已知 $\lambda>0$, 故 $\lambda=2$.

对于 $\lambda_1=1$, 求解线性方程组 $(E-A)x=0$, 得特征向量： $a_1=(0,\ 1,\ -1)^T$;

对于 $\lambda_2=2$, 求解线性方程组 $(2E-A)x=0$, 得特征向量： $a_2=(1,\ 0,\ 0)^T$;

对于 $\lambda_3=5$, 求解线性方程组 $(5E-A)x=0$, 得特征向量： $a_3=(0,\ 1,\ 1)^T$.

特征向量 a_1,a_2,a_3 已是正交向量，将其单位化，得

$$\eta_1=\frac{1}{\sqrt2}\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix},\ \eta_2=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\ \eta_3=\frac{1}{\sqrt2}\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix},$$

作正交矩阵： $Q=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=\frac{1}{\sqrt2}\begin{bmatrix}0&\sqrt2&0\\1&0&1\\-1&0&1\end{bmatrix}$,

则经正交替换 $x=Qy$, f 可化为标准形 $y_1^2+2y_2^2+5y_3^2$.

八(10分)、**证明：**设 x 是 m 阶矩阵 AB 的对应于非零特征值 λ 的特征向量，则 $ABx=\lambda x\neq 0$ 因此 $Bx\neq 0$，否则若 $Bx=0$，则 $A(Bx)=A\bullet 0=0$，矛盾，于是，有 $B(ABx)=B(\lambda x)=\lambda Bx$ 即 $(BA)\bullet Bx=\lambda(Bx)$。根据特征值与特征向量的概念，$\lambda$ 是 BA 的特征值，且 Bx 是其对应的特征向量。