课程编号：12000044　北京理工大学 2009-2010 学年第二学期

2008 级计算机学院《数值分析》期末试卷 A 卷（信二学习部整理）

班级___________学号___________姓名 ___________成绩 ____________

注意：① 答题方式为闭卷。

② 可以使用计算器。

③ 请将填空题和选择题的答案直接填在试卷上，计算题答在答题纸上。

一、填空题（每空 2 分，共 30 分）

1. 设函数 $f(x)$区间[a，b]内有二阶连续导数，且 $f(a)f(b)<0$, 当 __________时，用双点弦截法产生的解序列收敛到方程 $f(x)=0$ 的根。

2. n 个求积节点的插值型求积公式的代数精确度至少为______次，n 个求积节点的高斯求积公式的代数精度为_______________。

3. 已知 a=3.201，b=0.57 是经过四舍五入后得到的近似值，则 $a\times b$ 有__________位有效数字，$a+b$ 有__________位有效数字。

4. 当 x=1，-1，2 时，对应的函数值分别为 $f(-1)=0$，$f(0)=2$，$f(4)=10$，则 $f(x)$的拉格朗日插值多项式是 ____。

5. 设有矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$，则‖A‖$_1$＝_______。

6. 要使 $\sqrt{20}=4.472135...$ 的近似值的相对误差小于 0.2%，至少要取______位有效数字。

7. 对任意初始向量 $X^{(0)}$ 和常数项 N，有迭代公式 $\boldsymbol{x}^{(k+1)}=\boldsymbol{M}\boldsymbol{x}^{(k)}+\boldsymbol{N}$ 产生的向量序列 $\left\{X^{(k)}\right\}$ 收敛的充分必要条件是___________。

8. 已知 n=3 时的牛顿-科特斯系数 $C_0^{(3)}=\dfrac{1}{8}, C_1^{(3)}=\dfrac{3}{8}$, 则 $C_2^{(4)}=$ ______________ ，

$C_3^{(3)}=$ ___________ 。

9. 三次样条函数是在各个子区间上的___________ 次多项式。

10. 用松弛法 $(\omega=0.9)$解方程组 $\begin{cases} 5x_1+2x_2+x_3=-12 \\ -x_1+4x_2+2x_3=20 \\ 2x_2-3x_2+10x_3=3 \end{cases}$ 的迭代公式是

____。

11. 用牛顿下山法求解方程 $\frac{x^3}{3}-x=0$ 根的迭代公式是____________________，

下山条件是_______________。

二、选择填空（每题 2 分，共 10 分）

1. 已知数 $x_1=721$　$x_2=0.721$　$x_3=0.700$　$x_4=7*10^{-2}$ 是由四舍五入得到的，则它们的有效数字的位数应分别为(　)。

A. 3，3，3，1　　　B. 3，3，3，3

C. 3，3，1，1　　　D. 3，3，3，2

2. 为求方程 $x^3-x^2-1=0$ 在区间[1. 3, 1. 6]内的一个根，把方程改写成下列形式，并建立相应的迭代公式，迭代公式不收敛的是(　)。

A. $x_{n+1}=\frac{1}{\sqrt{x_n-1}}$　　　B. $x_{n+1}=1+\frac{1}{x_n^2}$

C. $x_{n+1}=\sqrt[3]{1+x_n^2}$　　　D. $x_{n+1}=1+\frac{x_n^2}{x_n^2+x_n+1}$

3. 线性方程组 AX=B 能用高斯消元法求解的充分必要条件是（　 ）。

A. A 为对称矩阵　　　B. A 为实矩阵

C. ｜A｜≠0　　　D. A 的各阶顺序主子式不为零

4. 用选主元的方法解线性方程组 AX＝B，是为了（　）。

A. 提高计算速度　　　B. 减少舍入误差

C. 减少相对误差　　　D. 方便计算

5. 下列说法不正确的是（　）。

A. 二分法不能用于求函数 $f(x)=0$ 的复根。

B. 方程求根的迭代解法的迭代函数为φ(x)，则迭代收敛的充分条件是φ(x)<1。

C. 用高斯消元法求解线性方程组 AX＝B 时，在没有舍入误差的情况下得到的都是精确解。

D. 如果插值节点相同，在满足插值条件下用不同方法建立的插值公式是等价的。

三、计算题（共 60 分）

1. 已知单调连续函数 $y=f(x)$的如下数据，若用插值法计算，x 约为多少时 $f(x)=0.5$，要求计算结果保留小数点后 4 位。（6 分）

x_i	-1	0	2	3
$f(x_i)$	-4	-1	0	3

2. 设 a 为常数，建立计算 $\sqrt{a}$ 的牛顿迭代公式，并求 $\sqrt{115}$ 的近似值，要求计算结果保留小数点后 5 位。（6 分）

3. 用三点高斯求积公式求 $I=\int_{-1}^{1}\sqrt{x+1.5}\,dx$ ，计算结果保留小数点后 6 位（6 分）

n	$\pm t_i$	w_i
2	0.577 350 269 2	1
3	0 0.774 596 692	0.888 888 888 9 0.555 555 555 6

4. 用高斯消元法解下面的线性方程组。（6 分）

$$\begin{cases} x_1+x_2-x_3=1 \\ x_1+2x_2-2x_3=0 \\ -2x_1+x_2+x_3=1 \end{cases}$$

5. 用高斯赛德尔方法求下列方程组的解，计算结果保留 4 位小数。（6 分）

$$\begin{cases} 10x_1-2x_2-x_3=3 \\ -2x_1+10x_2-x_3=15 \\ -x_1-2x_2+5x_3=10 \end{cases}$$

6. 设函数 $f(x)$ 在区间[0,3]上具有四阶连续导数，试用埃尔米特插值法求一个次数不高于 3 的多项式 $P_3(x)$，使其满足如下数据表值，并给出截断误差估计公式。（10 分）

x	y	y'
0	0	
1	1	3
2	1	

7. 用 Euler 法和改进的欧拉法求解下述初值问题，取 $h=0.1$，计算到 $x=0.5$，要求计算结果保留小数点后 6 位。（10 分）

$$\begin{cases} y'=y-\dfrac{2x}{y}, \qquad 0<x<1 \\ y(0)=1 \end{cases}$$

8. 用复化梯形公式计算积分 $I=\int_0^1\frac{1}{1+x}dx$ ，若要使截断误差不超过 10^{-2}，则应在区间[0，1]上分成多少等份？并计算积分的近似值。（10 分）

课程编号：12000044　北京理工大学 2009-2010 学年第二学期

2008 级计算机学院《数值分析》期末试卷 A 卷

班级____________学号____________姓名 ____________成绩 ____________

注意：① 答题方式为闭卷。

② 可以使用计算器。

③ 请将填空题和选择题的答案直接填在试卷上，计算题答在答题纸上。

一、 填空题（每空 2 分，共 30 分）

1. 设函数 $f(x)$区间[a，b]内有二阶连续导数，且 $f(a)f(b)<0$, 当 __$f'(x)\neq 0$__时，用双点弦截法产生的解序列收敛到方程 $f(x)=0$ 的根。

2. n 个求积节点的插值型求积公式的代数精确度至少为______次，n 个求积节点的高斯求积公式的代数精度为________________。

3. 已知 a=3.201，b=0.57 是经过四舍五入后得到的近似值，则 $a\times b$ 有___2___位有效数字，$a+b$ 有___2___位有效数字。

解析：

η(ab)= η(a)+ η(b)= $\dfrac{0.0005}{3.201}+\dfrac{0.005}{0.57}\approx 0.009$，

ε(ab)= η(ab)×ab＝0.009×3.201×0.57≈0.016<0.05

ε(a+b)= ε(a)+ ε(b)=0.0005+0.005=0.0055<0.05

4. 当 x=1，-1，2 时，对应的函数值分别为 $f(-1)=0$，$f(0)=2$，$f(4)=10$，则 $f(x)$的拉格朗日插值多项式是 ____。

解析：

$$l(x)=\frac{(x-0)(x-4)}{(-1-0)(-1-4)}\times 0+\frac{(x+1)(x-4)}{(0+1)(0-4)}\times 2+\frac{(x+1)(x-0)}{(4+1)(4-0)}\times 10$$

$$=-\frac{1}{2}(x+1)(x-4)+\frac{1}{2}x(x+1)$$

5. 设有矩阵 $A=\begin{bmatrix}2 & -3\\ 0 & 4\end{bmatrix}$，则‖A‖$_1$＝_______。

解析：$\|A\|_1=\max\{2+0,3+4\}=7$

6. 要使 $\sqrt{20}=4.472135...$ 的近似值的相对误差小于 0.2%，至少要取__3___位有效数字。

解析： $\dfrac{\varepsilon(\sqrt{20})}{\sqrt{20}}<0.2\%,\varepsilon(\sqrt{20})<\sqrt{20}\times0.2\%\approx0.009$

0.005<0.009

7. 对任意初始向量 $X^{(0)}$ 和常数项 N，有迭代公式 $\boldsymbol{x}^{(k+1)}=\boldsymbol{M}\boldsymbol{x}^{(k)}+\boldsymbol{N}$ 产生的向量序列 $\left\{X^{(k)}\right\}$ 收敛的充分必要条件是___$\rho(M)<1$_________。

8. 已知 n=3 时的牛顿-科特斯系数 $\boldsymbol{C_0^{(3)}=\frac{1}{8},C_1^{(3)}=\frac{3}{8}}$, 则 $\boldsymbol{C_2^{(4)}=}$______________，

$\boldsymbol{C_3^{(3)}=}$___________。

9. 三次样条函数是在各个子区间上的___3_____ 次多项式。

10. 用松弛法（$\boldsymbol{\omega=0.9}$）解方程组 $\begin{cases}5x_1+2x_2+x_3=-12\\-x_1+4x_2+2x_3=20\\2x_2-3x_2+10x_3=3\end{cases}$ 的迭代公式是

$$\begin{cases}x_1^{k+1}=x_1^k+\dfrac{0.9}{5}(-12-5x_1^k-2x_2^k-x_3^k)\\ x_2^{k+1}=x_2^k+\dfrac{0.9}{4}(20+x_1^{k+1}-4x_2^k-2x_3^k)\\ x_3^{k+1}=x_3^k+\dfrac{0.9}{10}(3-2x_1^{k+1}+3x_2^{k+1}-10x_3^k)\end{cases}$$

____。

11. 用牛顿下山法求解方程 $\dfrac{x^3}{3}-x=0$ 根的迭代公式是

$$x_{n+1}=x_n-\frac{3\lambda(x_n^2-1)}{x_n^3-3x}$$

__________________________，下山条件是___$|f(x_{n+1})|<|f(x_n)|$___________。

解析：牛顿迭代公式：**$x_{n+1}=x_n-f(x_n)/f'(x_n)$**

牛顿下山法迭代公式：**$x_{n+1}=x_n-\lambda f'(x_n)/f(x_n)$**

$f'(x)=x^2-1$

$x_{n+1}=x_n-\lambda(x_n^3/3-x_n)/(x_n^2-1)=x_n-\lambda x_n(x_n^3-3)/(3x_n^2-3)$

二、选择填空（每题 2 分，共 10 分）

1. 已知数 $x_1=721$　$x_2=0.721$　$x_3=0.700$　$x_4=7*10^{-2}$ 是由四舍五入得到的，则它们的有效数字的位数应分别为（ A ）。

A. 3，3，3，1　　　　B. 3，3，3，3

C. 3，3，1，1　　　　D. 3，3，3，2

2. 为求方程 $x^3-x^2-1=0$ 在区间[1.3,1.6]内的一个根，把方程改写成下列形式，并建立相应的迭代公式，迭代公式不收敛的是(A,D)。

A. $x_{n+1}=\dfrac{1}{\sqrt{x_n-1}}$　　　　B. $x_{n+1}=1+\dfrac{1}{x_n^2}$

C. $x_{n+1}=\sqrt[3]{1+x_n^2}$　　　　D. $x_{n+1}=1+\dfrac{x_n^2}{x_n^2+x_n+1}$

解析：A:

$$\varphi'(x)=\frac{1}{-2\sqrt{(x-1)^3}}$$

|φ'(1.3)|≈3.1　|φ'(1.6)| ≈1.1

B:

$$\varphi'(x)=\frac{-2}{x^3}$$

|φ'(1.3)|≈0.9

C:

$$\varphi'(x)=\frac{-2x}{3\sqrt[3]{(1+x^2)^2}}$$

D:

$$\varphi'(x)=\frac{2x(x^2+x+1)+x^2(2x+1)}{(x^2+x+1)^2}=\frac{4x^3+3x^2+2x}{(x^2+x+1)^2}$$

3. 线性方程组 AX=B 能用高斯消元法求解的充分必要条件是（D ）。

A. A 为对称矩阵　　　　B. A 为实矩阵

C. ｜A｜≠0　　　　D. A 的各阶顺序主子式不为零

4. 用选主元的方法解线性方程组 AX＝B，是为了（ B ）。

A. 提高计算速度　　　　B. 减少舍入误差

C. 减少相对误差　　　　D. 方便计算

5. 下列说法不正确的是（ B ）。

A. 二分法不能用于求函数 $f(x)=0$ 的复根。

B. 方程求根的迭代解法的迭代函数为φ(x)，则迭代收敛的充分条件是φ(x)<1。

C. 用高斯消元法求解线性方程组 AX＝B 时，在没有舍入误差的情况下得到的都是精确解。

D. 如果插值节点相同，在满足插值条件下用不同方法建立的插值公式是等价的。

三、计算题（共 60 分）

1. 已知单调连续函数 $y=f(x)$的如下数据，若用插值法计算，x 约为多少时 $f(x)=0.5$，要

求计算结果保留小数点后 4 位。（6 分）

x_i	-1	0	2	3
$f(x_i)$	-4	-1	0	3

解答：

用反插值法：

$$l(y)=\frac{(y+1)(y-0)(y-3)}{(-4+1)(-4)(-4-3)}\times(-1)+\frac{(y+4)(y-0)(y-3)}{(-1+4)(-1)(-1-3)}\times 0$$

$$+\frac{(y+4)(y+1)(y-3)}{(0+4)(0+1)(0-3)}\times 2+\frac{(y+4)(y+1)(y-0)}{(3+4)(3+1)3}\times 3$$

$$=-\frac{1}{84}y(y+1)(y-3)-\frac{1}{6}(y+4)(y+1)(y-3)+\frac{1}{28}y(y+4)(y+1)$$

l(0.5)=2.91667

2. 设 a 为常数，建立计算 $\sqrt{a}$ 的牛顿迭代公式，并求 $\sqrt{115}$ 的近似值，要求计算结果保留小数点后 5 位。（6 分）

解答：

令 $p(x)=x^2-a$，则 $p(x)=0$ 的解即为 $\sqrt{a}$ 。

其牛顿迭代公式为：

$x_{n+1}=x_n-f(x_n)/f'(x_n)$

$=x_n-(x_n^2-a)/\ 2x_n$

$=\frac{1}{2}(x_n+a/x_n)$

取 $a=115$，$x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+115/x_n)$

f’(x)=2>0 取 x0=11

$x_1=\frac{1}{2}(11+115/11)=10.72727$

$x_2=\frac{1}{2}(10.72727+115/10.72727)=10.72381$

$x_2=\frac{1}{2}(10.72381+115/10.72381)=10.72381$

3. 用三点高斯求积公式求 $I=\int_{-1}^{1}\sqrt{x+1.5}\,dx$ ，计算结果保留小数点后 6 位（6 分）

n	$\pm t_i$	w_i
2	0.577 350 269 2	1
3	0 0.774 596 692	0.888 888 888 9 0.555 555 555 6

4. 用高斯消元法解下面的线性方程组。（6 分）

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

解答：

l11=1,u11=1	**u12=1**	**u13=-1**	**z1=1**
l21=1/1=1	**l22=1,u22=2-1×1=1**	**u23=-2-1×(-1)=-1**	**z2=0-1×1=-1**
l31=-2/1=-2	**l32=1-(-2) ×1=3**	**l33=1,u33=1-(-2)×(-1)-3×(-1)=2**	**z3=1-(-2)×1-3×(-1)=6**

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_2 - x_3 = -1 \\ 2x_3 = 6 \end{cases}$$ 解得： $$\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 3 \end{cases}$$

5. 用高斯赛德尔方法求下列方程组的解，计算结果保留 4 位小数。（6 分）

$$\begin{cases} 10x_1 - 2x_2 - x_3 = 3 \\ -2x_1 + 10x_2 - x_3 = 15 \\ -x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 10 \end{cases}$$

解答：

$$\begin{cases} x_1^{k+1} = \frac{1}{10}(3 + 2x_2^k + x_3^k) \\ x_2^{k+1} = \frac{1}{10}(15 + 2x_1^{k+1} + x_3^k) \\ x_3^{k+1} = \frac{1}{5}(10 + x_1^{k+1} + 2x_2^{k+1}) \end{cases} \quad \begin{cases} x_1^{k+1} = 0.3 + 0.2x_2^k + 0.1x_3^k) \\ x_2^{k+1} = 1.5 + 0.2x_1^{k+1} + 0.1x_3^k) \\ x_3^{k+1} = 2 + 0.2x_1^{k+1} + 0.4x_2^{k+1}) \end{cases}$$

取 x0=(0,0,0)
x1=(0.3,1.56,2.684)
x2=(0.8804,1.9445,2.9539)
x3=(0.9843,1.9923,2.9938)
x4=(0.9978,1.9989,2.9991)
x5=(0.9997,1.9999,2.9999)

x6=(1.0000,2.0000,3.0000)
x7=(1.0000,2.0000,3.0000)

6. 设函数 $f(x)$ 在区间[0,3]上具有四阶连续导数，试用埃尔米特插值法求一个次数不高于 3 的多项式 $P_3(x)$，使其满足如下数据表值，并给出截断误差估计公式。（10 分）

x	y	y'
0	0	
1	1	3
2	1	

解答：

构造差商表：

x	y	$f[x_i,x_{i+1}]$	$f[x_i,x_{i+1},x_{i+2}]$	$f[x_i,x_{i+1},x_{i+2},x_{i+3}]$
0	0			
1	1	(1-0)/(1-0)=1		
1	1	y'/1!=3	(3-1)/(1-0)=2	
2	1	(1-1)/(2-1)=0	(0-3)/(2-1)=-3	(-3-2)/(2-0)=-2.5

$P_3(x)=0+x\times 1+x(x-1)\ \times 2+x(x-1)^2\times(-2.5)=-2.5x^3-3x^2-3.5x$

截断误差公式：$R(x)=f'(\xi)/4!\ \times x\times(x-1)^2(x-2)\quad \xi\in[0,2]$

7. 用 Euler 法和改进的欧拉法求解下述初值问题，取 $h=0.1$，计算到 $x=0.5$，要求计算结果保留小数点后 6 位。（10 分）

$$\begin{cases} y' = y - \dfrac{2x}{y}, & 0 < x < 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

8. 用复化梯形公式计算积分 $I=\int_0^1 \frac{1}{1+x}dx$ ，若要使截断误差不超过 10^{-2}，则应在区间[0，1]上分成多少等份？并计算积分的近似值。（10 分）