


一、单项选择题(本大题共 15 小题, 每小题 1 分, 共 15 分)在每小题列出的四个选项中只有一个选项是符合题目要求的, 请将正确选项前的字母填在题后的括号内。

- 一个连通的无向图 G , 如果它的所有结点的度数都是偶数, 那么它具有()
 A. 汉密尔顿回路 B. 欧拉回路
 C. 汉密尔顿通路 D. 初级回路
- 设 G 是连通简单平面图, G 中有 11 个顶点 5 个面, 则 G 中的边是()
 A. 10 B. 12 C. 16 D. 14
- 在布尔代数 L 中, 表达式 $(a \wedge b) \vee (a \wedge b \wedge c) \vee (b \wedge c)$ 的等价式是()
 A. $b \wedge (a \vee c)$
 B. $(a \wedge b) \vee (a' \wedge b)$
 C. $(a \vee b) \wedge (a \vee b \vee c) \wedge (b \vee c)$
 D. $(b \vee c) \wedge (a \vee c)$
- 设 i 是虚数, \cdot 是复数乘法运算, 则 $G = \langle \{1, -1, i, -i\}, \cdot \rangle$ 是群, 下列是 G 的子群是()
 A. $\langle \{1\}, \cdot \rangle$ B. $\langle \{-1\}, \cdot \rangle$
 C. $\langle \{i\}, \cdot \rangle$ D. $\langle \{-i\}, \cdot \rangle$
- 设 Z 为整数集, A 为集合, A 的幂集为 $P(A)$, $+$, $-$, $/$ 为数的加、减、除运算, \cap 为集合的交运算, 下列系统中是代数系统的有()
 A. $\langle Z, +, / \rangle$ B. $\langle Z, / \rangle$
 C. $\langle Z, -, / \rangle$ D. $\langle P(A), \cap \rangle$
- 下列各代数系统中不含有零元素的是()
 A. $\langle Q, * \rangle$ Q 是全体有理数集, $*$ 是数的乘法运算
 B. $\langle Mn(R), * \rangle$, $Mn(R)$ 是全体 n 阶实矩阵集合, $*$ 是矩阵乘法运算
 C. $\langle Z, o \rangle$, Z 是整数集, o 定义为 $x o y = xy$, $\forall x, y \in Z$
 D. $\langle Z, + \rangle$, Z 是整数集, $+$ 是数的加法运算
- 设 $A = \{1, 2, 3\}$, A 上二元关系 R 的关系图如下:

 R 具有的性质是
 A. 自反性
 B. 对称性
 C. 传递性
 D. 反自反性
- 设 $A = \{a, b, c\}$, A 上二元关系 $R = \{ \langle a, a \rangle, \langle b, b \rangle, \langle a, c \rangle \}$, 则关系 R 的对称闭包 $S(R)$ 是()
 A. $R \cup I_A$ B. R C. $R \cup \{ \langle c, a \rangle \}$ D. $R \cap I_A$
- 设 $X = \{a, b, c\}$, I_X 是 X 上恒等关系, 要使 $I_X \cup \{ \langle a, b \rangle, \langle b, c \rangle, \langle c, a \rangle, \langle b, a \rangle \} \cup R$ 为 X 上的等价关系, R 应取()
 A. $\{ \langle c, a \rangle, \langle a, c \rangle \}$ B. $\{ \langle c, b \rangle, \langle b, a \rangle \}$
 C. $\{ \langle c, a \rangle, \langle b, a \rangle \}$ D. $\{ \langle a, c \rangle, \langle c, b \rangle \}$
- 下列式子正确的是()
 A. $\emptyset \in \emptyset$ B. $\emptyset \subseteq \emptyset$ C. $\{ \emptyset \} \subseteq \emptyset$ D. $\{ \emptyset \} \in \emptyset$
- 设解释 R 如下: 论域 D 为实数集, $a=0, f(x, y)=x-y, A(x, y): x < y$. 下列公式在 R 下为真的是()
 A. $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(A(x, y) \rightarrow A(f(x, z), f(y, z)))$
 B. $(\forall x)A(f(a, x), a)$
 C. $(\forall x)(\forall y)(A(f(x, y), x))$

D. $(\forall x)(\forall y)(A(x,y) \rightarrow A(f(x,a),a))$

12. 设 B 是不含变元 x 的公式, 谓词公式 $(\forall x)(A(x) \rightarrow B)$ 等价于()

A. $(\exists x)A(x) \rightarrow B$

B. $(\forall x)A(x) \rightarrow B$

C. $A(x) \rightarrow B$

D. $(\forall x)A(x) \rightarrow (\forall x)B$

13. 谓词公式 $(\forall x)(P(x,y)) \rightarrow (\exists z)Q(x,z) \wedge (\forall y)R(x,y)$ 中变元 x()

A. 是自由变元但不是约束变元

B. 既不是自由变元又不是约束变元

C. 既是自由变元又是约束变元

D. 是约束变元但不是自由变元

14. 若 P: 他聪明; Q: 他用功; 则 “他虽聪明, 但不用功”, 可符号化为()

A. $P \vee Q$

B. $P \wedge \neg Q$

C. $P \rightarrow \neg Q$

D. $P \vee \neg Q$

15. 以下命题公式中, 为永假式的是()

A. $p \rightarrow (p \vee q \vee r)$

B. $(p \rightarrow \neg p) \rightarrow \neg p$

C. $\neg (q \rightarrow q) \wedge p$

D. $\neg (q \vee \neg p) \rightarrow (p \wedge \neg p)$

二、填空题(每空 1 分, 共 20 分)

16. 在一棵根树中, 仅有一个结点的入度为 0, 称为树根, 其余结点的入度均为 1。

17. $A = \{1, 2, 3, 4\}$ 上二元关系 $R = \{ \langle 2, 4 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 4, 2 \rangle \}$, R 的关系矩阵 M_R 中 $m_{24} = \underline{1}$, $m_{34} = \underline{0}$ 。

18. 设 $\langle s, * \rangle$ 是群, 则那么 s 中除 幺元 外, 不可能有别的幂等元; 若 $\langle s, * \rangle$ 有零元, 则 $|s| = \underline{1}$ 。

19. 设 A 为集合, $P(A)$ 为 A 的幂集, 则 $\langle P(A), \subseteq \rangle$ 是格, 若 $x, y \in P(A)$, 则 x, y 最大下界是 , 最小上界是 。

20. 设函数 $f: X \rightarrow Y$, 如果对 X 中的任意两个不同的 x_1 和 x_2 , 它们的象 y_1 和 y_2 也不同, 我们说 f 是 入射 函数, 如果 $\text{ran} f = Y$, 则称 f 是 满射 函数。

21. 设 R 为非空集合 A 上的等价关系, 其等价类记为 $[x]_R$ 。 $\forall x, y \in A$, 若 $\langle x, y \rangle \in R$, 则 $[x]_R$ 与 $[y]_R$ 的关系是 , 而若 $\langle x, y \rangle \notin R$, 则 $[x]_R \cap [y]_R = \underline{\quad}$ 。

22. 使公式 $(\exists x)(\exists y)(A(x) \wedge B(y)) \Leftrightarrow (\exists x)A(x) \wedge (\exists y)B(y)$ 成立的条件是 不含有 y, 不含有 x。

23. 设 $M(x): x$ 是人, $D(s): x$ 是要死的, 则命题 “所有的人都是要死的” 可符号化为 $(\forall x) \underline{\quad}$, 其中量词 $(\forall x)$ 的辖域是 。

24. 若 $H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n$ 是 , 则称 H_1, H_2, \cdots, H_n 是相容的, 若 $H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n$ 是 , 则称 H_1, H_2, \cdots, H_n 是不相容的。

25. 判断一个语句是否为命题, 首先要看它是否为 , 然后再看它是否具有唯一的 。

三、计算题 (共 30 分)

26. (4 分) 设有向图 $G=(V,E)$ 如下图所示, 试用邻接矩阵方法求长度为 2 的路的总数和回路总数。



27.(5) 设 $A=\{a,b\}$, $P(A)$ 是 A 的幂集, \oplus 是对称差运算, 可以验证 $\langle P(A), \oplus \rangle$ 是群. 设 n 是正整数, 求 $(\{a\}^{-1}\{b\}\{a\})^n \oplus \{a\}^{-n}\{b\}^n\{a\}^n$

28.(6 分) 设 $A=\{1,2,3,4,5\}$, A 上偏序关系

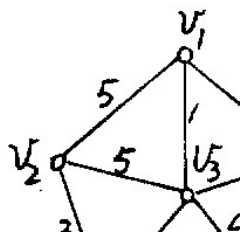
$$R=\{ \langle 1, 2 \rangle, \langle 3, 2 \rangle, \langle 4, 1 \rangle, \langle 4, 2 \rangle, \langle 4, 3 \rangle, \langle 3, 5 \rangle, \langle 4, 5 \rangle \} \cup I_A;$$

(1) 作出偏序关系 R 的哈斯图

(2) 令 $B=\{1,2,3,5\}$, 求 B 的最大, 最小元, 极大、极小元, 上界, 下确界, 下界, 下确界。

29.(6 分) 求 $\neg(P \rightarrow Q) \Leftrightarrow (P \rightarrow \neg Q)$ 的主合取范式并给出所有使命题为真的赋值。

30.(5 分) 设带权无向图 G 如下, 求 G 的最小生成树 T 及 T 的权总和, 要求写出解的过程。



31.(4 分) 求公式 $\neg((\forall x)F(x,y) \rightarrow (\exists y)G(x,y)) \vee (\exists x)H(x)$ 的前束范式。

四、证明题 (共 20 分)

32.(6 分) 设 T 是非平凡的无向树, T 中次数最大的顶点有 2 个, 它们的度数为 $k(k \geq 2)$, 证明 T 中至少有 $2k-2$ 片树叶。

33.(8 分) 设 A 是非空集合, F 是所有从 A 到 A 的双射函数的集合, \circ 是函数复合运算。

证明: $\langle F, \circ \rangle$ 是群。

34.(6 分) 在个体域 $D=\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ 中证明等价式:

$$(\exists x)(A(x) \rightarrow B(x)) \Leftrightarrow (\forall x)A(x) \rightarrow (\exists x)B(x)$$

五、应用题(共 15 分)

35.(9 分) 如果他是计算机系本科生或者是计算机系研究生, 那么他一定学过 DELPHI 语言而且学过 C++ 语言。只要他学过 DELPHI 语言或者 C++ 语言, 那么他就会编程序。因此如果他是计算机系本科生, 那么他就会编程序。请用命题逻辑推理方法, 证明该推理的有效结论。

36.(6 分) 一次学术会议的理事会共有 20 个人参加, 他们之间有的相互认识但有的相互不认识。但对任意两个人, 他们各自认识的人的数目之和不小于 20。问能否把这 20 个人排在圆桌旁, 使得任意一个人认识其旁边的两个人? 根据是什么?

参考答案

一、单项选择题(本大题共 15 小题，每小题 1 分，共 15 分)

- | | | | | |
|------|------|------|------|------|
| 1.B | 2.D | 3.A | 4.A | 5.D |
| 6.D | 7.D | 8.C | 9.D | 10.B |
| 11.A | 12.A | 13.C | 14.B | 15.C |

二、填空题

- 16.0 1
- 17.1 0
- 18.单位元 1
19. $x \cap y$ $x \cup y$
- 20.入射 满射
21. $[x]_R = [y]_R$
22. $A(x)$ $B(y)$
23. $(M(x) \rightarrow D(x))$ $M(x) \rightarrow D(x)$
- 24.可满足式 永假式(或矛盾式)
- 25.陈述句 真值

三、计算题

$$26. M = \begin{Bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{Bmatrix}$$

$$M^2 = \begin{Bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{Bmatrix}$$

$$\sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 M_{ij}^2 = 18, \quad \sum_{i=1}^4 M_{ii}^2 = 6$$

G 中长度为 2 的路总数为 18，长度为 2 的回路总数为 6。

27. 当 n 是偶数时， $\forall x \in P(A), x^n = \emptyset$

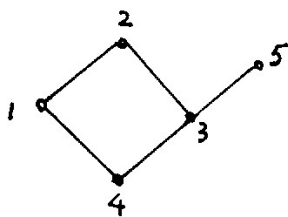
当 n 是奇数时， $\forall x \in P(A), x^n = x$

于是：当 n 是偶数， $(\{a\}^{-1} \{b\} \{a\})^n \oplus \{a\}^{-n} \{b\}^n \{a\}^n$
 $= \emptyset \oplus (\{a\}^{-1})^n \{b\}^n \{a\}^n = \emptyset \oplus \emptyset = \emptyset$

当 n 是奇数时，

$(\{a\}^{-1} \{b\} \{a\})^n \oplus \{a\}^{-n} \{b\}^n \{a\}^n$
 $= \{a\}^{-1} \{b\} \{a\} \oplus (\{a\}^{-1})^n \{b\}^n \{a\}^n$
 $= \{a\}^{-1} \{b\} \{a\} \oplus \{a\}^{-1} \{b\} \{a\} = \emptyset$

28.(1) 偏序关系 R 的哈斯图为



(2)B 的最大元：无，最小元：无；

极大元：2，5，极小元：1，3

下界：4，下确界 4；

上界：无，上确界：无

$$\begin{aligned}
 29. \text{原式} &\Leftrightarrow (\neg(P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow \neg Q)) \wedge ((P \rightarrow \neg Q) \rightarrow \neg(P \rightarrow Q)) \\
 &((P \rightarrow Q) \vee (P \rightarrow \neg Q)) \wedge (\neg(P \rightarrow \neg Q) \vee \neg(P \rightarrow Q)) \\
 &(\neg P \vee Q \vee \neg P \vee \neg Q) \wedge (\neg(\neg P \vee \neg Q) \vee (P \wedge \neg Q)) \\
 &(\neg(P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge \neg Q)) \\
 &(P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q) \\
 &P \wedge (Q \vee \neg Q) \\
 &P \vee (Q \wedge \neg Q) \\
 &(P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q)
 \end{aligned}$$

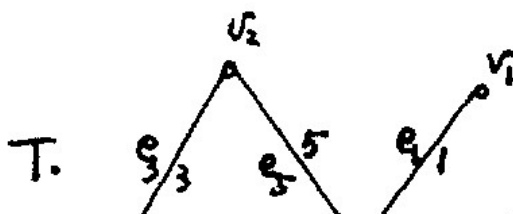
命题为真的赋值是 $P=1, Q=0$ 和 $P=1, Q=1$

$$\begin{aligned}
 30. \text{令 } e_1 &= (v_1, v_3), & e_2 &= (v_4, v_6) \\
 e_3 &= (v_2, v_5), & e_4 &= (v_3, v_6) \\
 e_5 &= (v_2, v_3), & e_6 &= (v_1, v_2) \\
 e_7 &= (v_1, v_4), & e_8 &= (v_4, v_3) \\
 e_9 &= (v_3, v_5), & e_{10} &= (v_5, v_6)
 \end{aligned}$$

令 a_i 为 e_i 上的权，则

$$a_1 < a_2 < a_3 < a_4 = a_5 = a_6 = a_7 = a_8 < a_9 = a_{10}$$

取 a_1 的 $e_1 \in T, a_2$ 的 $e_2 \in T, a_3$ 的 $e_3 \in T, a_4$ 的 $e_4 \in T, a_5$ 的 $e_5 \in T$, 即,



T 的总权和 $= 1+2+3+4+5=15$

$$\begin{aligned}
 31. \text{原式} &\Leftrightarrow \neg(\forall x_1 F(x_1, y) \rightarrow \exists y_1 G(x, y_1)) \vee \exists x_2 H(x_2) \quad (\text{换名}) \\
 &\Leftrightarrow \neg \exists x_1 \exists y_1 (F(x_1, y) \rightarrow G(x, y_1)) \vee \exists x_2 H(x_2) \\
 &\Leftrightarrow \forall x_1 \forall y_1 \neg (F(x_1, y_1) \rightarrow G(x, y_1)) \vee \exists x_2 H(x_2) \\
 &\Leftrightarrow \forall x_1 \forall y_1 \exists x_2 (\neg (F(x_1, y_1) \rightarrow G(x, y_1)) \vee H(x_2))
 \end{aligned}$$

四、证明题

32. 设 T 中有 x 片树叶， y 个分支点。于是 T 中有 $x+y$ 个顶点，有 $x+y-1$ 条边，由握手定理知 T 中所有顶点的度数之和

$$\sum_{i=1}^{x+y} d(v_i) = 2(x+y-1).$$

又树叶的度为 1，任一分支点的度大于等于 2

且度最大的顶点必是分支点，于是

$$\sum_{i=1}^{x+y} d(v_i) \geq x \cdot 1 + 2(y-2) + k + k = x + 2y + 2K - 4$$

从而 $2(x+y-1) \geq x+2y+2k-4$

$$x \geq 2k-2$$

33. 从定义出发证明: 由于集合 A 是非空的, 故显然从 A 到 A 的双射函数总是存在的, 如 A 上恒等函数, 因此 F 非空

(1) $\forall f, g \in F$, 因为 f 和 g 都是 A 到 A 的双射函数, 故 $f \circ g$ 也是 A 到 A 的双射函数, 从而集合 F 关于运算 \circ 是封闭的。

(2) $\forall f, g, h \in F$, 由函数复合运算的结合律有 $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$ 故运算 \circ 是可结合的。

(3) A 上的恒等函数 I_A 也是 A 到 A 的双射函数即 $I_A \in F$, 且 $\forall f \in F$ 有 $I_A \circ f = f \circ I_A = f$, 故 I_A 是 $\langle F, \circ \rangle$ 中的幺元

(4) $\forall f \in F$, 因为 f 是双射函数, 故其逆函数是存在的, 也是 A 到 A 的双射函数, 且有 $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = I_A$, 因此 f^{-1} 是 f 的逆元

由此上知 $\langle F, \circ \rangle$ 是群

34. 证明 $(\exists x)(A(x) \rightarrow B(x)) \Leftrightarrow \exists x(\neg A(x) \vee B(x))$

$$\Leftrightarrow (\neg A(a_1) \vee B(a_1)) \vee (\neg A(a_2) \vee B(a_2)) \vee \cdots \vee (\neg A(a_n) \vee B(a_n))$$

$$\Leftrightarrow (\neg A(a_1) \vee A(a_2) \vee \cdots \vee \neg A(a_n) \vee (B(a_1) \vee B(a_2) \vee \cdots \vee B(a_n)))$$

$$\Leftrightarrow \neg (A(a_1) \wedge A(a_2) \wedge \cdots \wedge A(a_n)) \vee (\neg B(a_1) \vee B(a_2) \vee \cdots \vee B(a_n))$$

$$\Leftrightarrow \neg (\forall x)A(x) \vee (\exists x)B(x) \Leftrightarrow (\forall x)A(x) \rightarrow (\exists x)B(x)$$

五、应用题

35. 令 p : 他是计算机系本科生

q : 他是计算机系研究生

r : 他学过 DELPHI 语言

s : 他学过 C++ 语言

t : 他会编程序

前提: $(p \vee q) \rightarrow (r \wedge s), (r \vee s) \rightarrow t$

结论: $p \rightarrow t$

证① p P(附加前提)

② $p \vee q$ T①I

③ $(p \vee q) \rightarrow (r \wedge s)$ P(前提引入)

④ $r \wedge s$ T②③I

⑤ r T④I

⑥ $r \vee s$ T⑤I

⑦ $(r \vee s) \rightarrow t$ P(前提引入)

⑧ t T⑥⑦I

36. 可以把这 20 个人排在圆桌旁, 使得任一人认识其旁边的两个人。

根据: 构造无向简单图 $G = \langle V, E \rangle$, 其中 $V = \{v_1, v_2, \dots, v_{20}\}$ 是以 20 个人为顶点的集合, E 中的边是若任两个人 v_i 和 v_j 相互认识则在 v_i 与 v_j 之间连一条边。

$\forall v_i \in V, d(v_i)$ 是与 v_i 相互认识的人的数目, 由题意知 $\forall v_i, v_j \in V$ 有 $d(v_i) + d(v_j) \geq 20$, 于是 G 中存在汉密尔顿回路。

设 $C = v_{i1}v_{i2}\cdots v_{i20}v_{i1}$ 是 G 中一条汉密尔顿回路, 按这条回路的顺序按其排座位即符合要求。

