

期中练习题

一. 填空题 (每小题 4 分, 共 32 分)

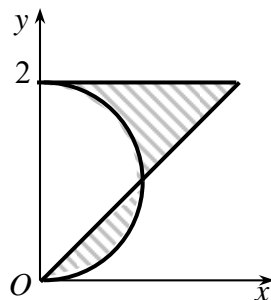
1. 已知 $|\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = 2$, 向量 \vec{a} 与 \vec{b} 的夹角 $(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{3}$, 则 $\vec{a} \cdot \vec{b} =$ _____,
 $|2\vec{a} - 3\vec{b}| =$ _____.
2. 点 $P(2,3,4)$ 到直线 $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{5} = \frac{z-3}{6}$ 的距离 $d =$ _____.
3. 设 $u = x^2y + xy^2z$, 在点 $(2,1,0)$ 处沿方向 _____ u 增加得最快, 且沿此方向 u 的变化率为 _____.
4. 曲线 $x = 2\cos\theta, y = 2\sin\theta, z = 5\theta$ 是什么曲线: _____, 此曲线上 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 的点处的切向量 $\vec{s} =$ _____.
5. 函数 $f(x, y) = e^x \ln(1+y)$ 的二阶麦克劳林公式(带佩亚诺余项)为 $f(x, y) =$ _____.
6. 设 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{x}{1+y^2}, \frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{y=0} = \sqrt{1+x}, z \Big|_{x=0} = y$, 则 $z =$ _____.
7. 设 $z = f(x^2 + y^2, e^{x+y})$, 其中 f 有二阶连续偏导数, 则 $\frac{\partial z}{\partial x} =$ _____,
 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} =$ _____.
8. 函数 $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - 5$ 在区域 $D: x^2 + y^2 \leq 1$ 上的最大值 $M =$ _____, 最小值 $m =$ _____.

二. (10 分) 设 $x^2 + y^2 + z^2 = f(xy, z - 2x)$, 其中 f 有连续偏导数, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$.

三. (12 分) 证明直线 $L_1: \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-3}{2}$ 与 $L_2: \begin{cases} x+2y=1 \\ y+z=2 \end{cases}$ 共面, 并求过直线 L_1 与 L_2 的平面方程.

四. (12 分) 计算二重积分 $\iint_D \frac{|y-x|}{x^2+y^2} dx dy$, 其中 D 是由直线 $y = x$,

$y = 2$, 与圆 $x^2 + (y-1)^2 = 1$ 所围成的阴影部分区域(如图).



五. (11 分) 在曲面 $3x^2 + y^2 + z^2 = 16$ 上求一点, 使曲面在此点的切平面与直线

$$L_1: \frac{x-3}{4} = \frac{y-6}{5} = \frac{z+1}{8} \text{ 和 } L_2: x = y = z \text{ 都平行.}$$

六. (11 分) 计算三重积分 $I = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} e^{\frac{y}{1-x-z}} dz$.

七. (12 分) 设 M 是椭圆 $\begin{cases} 2x^2 - y^2 + z^2 = 5 \\ x + y = 0 \end{cases}$ 上的点, $\frac{\partial f}{\partial \vec{e}}$ 是函数 $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ 在

点 M 处沿方向 $\{1, -1, 1\}$ 的方向导数, 求使 $\frac{\partial f}{\partial \vec{e}}$ 取得最大值和最小值的点 M 及 $\frac{\partial f}{\partial \vec{e}}$ 的最

大值和最小值.