

## 2018 级理科数学分析 (I) 期中考试试题解答 (1-2)

1. (10 分) 下列各组函数相同吗? 为什么?

(1)  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + x - 2}$  和  $g(x) = \frac{x+1}{x+2}$ .

(2)  $f(x) = x$  和  $g(x) = \arcsin(\sin x)$ .

2. (10 分) 利用极限定义证明

(1)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n-1}{3n+2} = \frac{1}{3}$       (2)  $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 3x + 5) = 3$

3. (20 分) 求下列极限

(1)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{5}{3^n}\right)^{3^n}$       (2)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{\sin 3x}$       (3)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}\right)$

4. (15 分) 设  $x_1 = \sqrt{2}$ ,  $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$  ( $n=1, 2, \dots$ ). 证明:  $\{x_n\}$  收敛, 并求

$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$ .

5. (20 分)

(1) 设  $y = f(x)$  是由方程  $e^{x+y} = xy$  确定的隐函数, 求  $\frac{d^2 y}{dx^2}$ .

(2) 设  $y = f(x)$  是由参数方程  $\begin{cases} x = \ln(1+t^2) \\ y = \arctan t \end{cases}$  确定的函数, 求  $\frac{d^2 y}{dx^2}$ .

6. (10 分) 证明:  $e^{-x} + \sin x < 1 + \frac{x^2}{2}, 0 < x < \frac{\pi}{2}$ .

7. (15 分) 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  连续.

(1) 证明: 若  $f(x) \neq 0, \forall x \in [a, b]$ , 则  $f(x)$  在  $[a, b]$  恒正或恒负.

(2) 证明: 若存在  $[a, b]$  中的数列  $\{x_n\}$ , 满足  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = L$ , 则存在  $\xi \in [a, b]$ , 使得  $f(\xi) = L$ .

8. 附加题 (15 分)

设  $f(x), g(x)$  都是定义在  $[0, 1]$  上的函数, 且  $g(x)$  在  $[0, 1]$  连续, 而  $f(0) > 0, f(1) < 0$ . 证明: 若  $f(x) + g(x)$  在  $[0, 1]$  单调递增, 则存在  $\xi \in (0, 1)$ , 使得  $f(\xi) = 0$ .