课程编号：100172003　　　　北京理工大学 2018-2019 学年第一学期

2017 级概率与数理统计试题（A 卷）

座号__________ 班级__________ 学号__________ 姓名__________

（本试卷共 8 页，八个大题，满分 100 分；最后一页空白纸为草稿纸，可撕下，考试结束后不交此页草稿纸）

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分	核分
得分										
签名										

附表：

$\Phi(1.645)=0.95$, $\Phi(2)=0.9772$, $\Phi(1.96)=0.975$, $\Phi(2.83)=0.997$，$\Phi(1.04)=0.8508$，$\Phi(4.96)=1$，

$t_{0.05}(24)=1.7109$, $t_{0.025}(24)=2.0639$，$t_{0.05}(25)=1.7081$, $t_{0.025}(25)=2.0595$，$\chi^2_{0.95}(24)=13.848$，

$\chi^2_{0.05}(24)=36.415$，$\chi^2_{0.95}(25)=14.611$, $\chi^2_{0.05}(25)=37.652$

一、填空题（12 分）

得分	

1. 已知事件 A, B 满足 $P(AB)=P(\overline{A}\cap\overline{B})$，记 $P(A)=p$，则 $P(B)=$____________.

2. 一射手对同一目标独立重复地进行四次射击，若至少命中一次的概率为 $\frac{80}{81}$，则该射手进行一次射击的命中率 $p=$__________.

3. 设随机变量 X 服从参数为 1 的指数分布，已知 $P(X>a)=P(X<a)$，则 $a=$__________.

4. 设随机变量 X 服从参数为 λ 的泊松分布，且已知 $P(X=0)=e^{-3}$，则 $\lambda=$__________.

5. 设随机变量 $X\sim N(0,3)$, $Y\sim N(1,1)$，且 X, Y 相互独立，则 $P(X-Y\le 3)=$__________.

6. 设 X 服从参数为 1 的泊松分布，Y 服从参数为 2 的泊松分布，而且 X 与 Y 相互独立，则 $P(\max(X,Y)\ne 0)=$______，$P(\min(X,Y)\ne 0)=$______.

7. 设 X，Y 是两个相互独立的随机变量，且都服从 $N(1,2)$，　则 $E[(X-Y)^2]=$__________.

8. 掷一枚均匀的骰子 420 次，则得到的点数之和大于 1540 的概率近似为__________.

9. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的一个样本，其中 $\mu\in R$，$\sigma>0$ 未知，$\overline{X}, S^2$ 分别是样本均值和样本方差，则 σ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为______________.

10. 设总体 X 服从正态分布 $N(\mu,1)$，其中 $\mu\in R$ 未知，$X_1, X_2, \cdots, X_9$ 为来自总体 X 的样本，考虑假设检验问题 $H_0:\mu=0$；$H_1:\mu=1$，若检验的拒绝域由 $D=\{(X_1,\cdots,X_9):3|\overline{X}|\ge 1.96\}$ 确定，则该检验犯第一类错误的概率为________，犯第二类错误的概率为________.

二、（10 分）

得分	

口袋中有 1 个白球、1 个黑球。从中任取 1 个，若取出白球，则试验停止；若取出黑球，则把取出的黑球放回的同时，再加入 1 个黑球，如此下去，直到取出的是白球为止，试求下列事件的概率：

1. 取到第 n 次，试验没有结束；2. 取到第 n 次，试验恰好结束.

三、（10 分）

得分	

1. 设随机变量 X 服从二项分布 $b(3, 0.5)$，$Y=(X-1)^2$，求 Y 的分布律.

2. 设随机变量 X 的概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases} xe^{-\frac{x^2}{2}}, & x>0 \\ 0, & 其它 \end{cases}$$

求(1) X 的分布函数 $F(x)$；(2) $P(X>2)$.

四、（16 分）

得分	

1. 设随机变量 (X,Y) 的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} 3x, & 0<x<1,\ 0<y<x \\ 0, & 其它 \end{cases}$$

求：(1) X 和 Y 的边缘密度 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$；(2) $Z=X+Y$ 的概率密度 $f_Z(z)$.

2. 设随机变量 X 与 Y 相互独立而且同分布，其中随机变量 X 的分布律为

$$P\{X=1\}=p,\quad P\{X=0\}=1-p,$$

其中 $0<p<1$. 再设随机变量

$$Z=\begin{cases} 1 & X+Y 为偶数 \\ 0 & X+Y 为奇数 \end{cases}$$

(1) 求随机变量 $(X,\ Z)$ 的联合分布律；(2)问 p 取什么值时，随机变量 X 与 Z 相互独立？

五、（18 分）

得分	

1. 设 X 服从均匀分布 $U(0,2)$，令 $Y=|X-1|$. 求：

(1) $E(Y)$和 $D(Y)$；(2) $E(XY)$；(3) X 和 Y 的相关系数 ρ_{XY}.

2. 设某种商品每周的需求量 $X\sim U(10,30)$（单位：千克），经销商进货数量是[10,30]中的某个数。商店每销售 1 千克可获利 500 元，若供大于求，则剩余的每千克产品亏损 100 元；若供不应求，则可从外部调剂供应，此时经调剂的每千克商品仅获利 300 元。问：为了使商店每周的平均利润最大，每周的进货量是多少千克？

六、（8 分）

得分	

设总体 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，$X_1,X_2,\dots,X_n,X_{n+1}$ 是来自该总体的样本，$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，试问：$\frac{(X_{n+1}-\mu)^2}{\sigma^2}+\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$ 的分布是什么？并给出证明.

七、（12 分）

得分	

设总体 X 在$[\theta,2\theta]$上服从均匀分布，$\theta>0$ 未知，$X_1,X_2,\dots,X_n$ 是 X 的一个样本，$x_1,x_2,\dots,x_n$ 是相应的样本值，求：1. θ 的矩估计；2. θ 的最大似然估计.

八、（14 分）

得分	

1. 叙述自由度为 n 的 χ^2 分布上 α 分位点的定义.

2. 某种零件的长度服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，按规定其方差不得超过 $\sigma_0^2=0.016$. 现从一批零件中随机抽取 25 件测量其长度，得其样本方差为 0.025. 问在显著性水平 $\alpha=0.05$下，能否推断这批零件合格？