2021 级数学分析（II）期终考试试题 A 卷解答

1.(23 分)求下列函数的偏导数或全微分

(1)设 $z=e^{\cos xy}$，求 dz.

(2)设 $z=z(x,y)$ 由方程 $x+y+z=e^z$ 所确定的隐函数，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

(3)设 $z=\frac{1}{x}f(xy)+yg(x+y)$，其中 f 和 g 在 R 上有连续的二阶导数，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$ 和

$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$

解：(1) $dz=e^{\cos xy}d(\cos xy)$

$$=e^{\cos xy}(-\sin xy)d(xy)$$

$$=-\sin xy e^{\cos xy}(ydx+xdy).$$

(2)方程关于 x 求导， y 是常数， z 是 x 的函数，

$$1+z_x=e^z z_x,\quad z_x=\frac{1}{e^z-1}.$$

$$z_{xx}=-\frac{e^z z_x}{(e^z-1)^2}=-\frac{e^z}{(e^z-1)^3}.$$

方法二. $z_{xx}=e^z z_x z_x+e^z z_{xx}$， $z_{xx}=-\frac{e^z {z_x}^2}{e^z-1}=-\frac{e^z}{(e^z-1)^2}$.

(3) $$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{1}{x^2}f(xy)+\frac{1}{x}f'(xy)\cdot y+yg'(x+y)$$

$$=-\frac{1}{x^2}f(xy)+\frac{y}{x}f'(xy)+yg'(x+y),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{x}f'(xy)\cdot x+g(x+y)+yg'(x+y)$$

$$=f'(xy)+g(x+y)+yg'(x+y),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=f''(xy)\cdot y+g'(x+y)+yg''(x+y)$$

$$=yf''(xy)+g'(x+y)+yg''(x+y).$$

2.（15 分）

(1) 求二重积分 $I=\iint\limits_D \frac{y^2}{x^2}dxdy$，其中 D 为由 $y=\frac{1}{x}, y=2, y=x$ 所围的区域.

(2) 求三重积分 $I=\iiint\limits_\Omega x\, dxdydz$，其中 Ω 由 $x=0, y=0, z=0, x+2y+z=1$ 所围成.

(3) 求第一型曲面积分 $I=\iint\limits_M (x+y+z)dS$，其中 M 为上半球面：$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$，$x^2+y^2\le R^2\ (R>0)$.

解：(1) $I=\iint\limits_D \frac{y^2}{x^2}dxdy=\int_1^2 dy\int_{\frac{1}{y}}^{y}\frac{y^2}{x^2}dx$

$$=\int_1^2 y^2(-\frac{1}{x})\Big|_{\frac{1}{y}}^{y}dy$$

$$=\int_1^2 y^2(y-\frac{1}{y})dy=\int_1^2 (y^3-y)dy$$

$$=\frac{9}{4}.$$

方法二. $I=\iint\limits_D \frac{y^2}{x^2}dxdy=\int_{\frac{1}{2}}^{1}dx\int_{\frac{1}{x}}^{2}\frac{y^2}{x^2}dy+\int_1^2 dx\int_x^2\frac{y^2}{x^2}dy$.

(2) 设 D 为 $xy-$ 平面上由 $x=0, y=0, x+2y=1$ 所围成区域.

$$I=\iiint\limits_\Omega x\, dxdydz=\iint\limits_D dxdy\int_0^{1-x-2y}xdz$$

$$=\iint\limits_D x(1-x-2y)dxdy$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^{\frac{1}{2}(1-x)}\left[x(1-x)-2xy\right]dy$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^1 x(1-x)^2dx=\frac{1}{48}.$$

方法二. 对任意的 $x\in[0,1]$，D_x 为 $yz-$ 平面上由 $y=0, z=0, 2y+z=1-x$ 所围成区域.

$$I=\iiint\limits_\Omega x\, dxdydz=\int_0^1 dx\iint\limits_{D_x} xdydz$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^1 x(1-x)^2dx=\frac{1}{48}$$

(3) $z_x=\dfrac{-x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$， $z_y=\dfrac{-y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$，

$$I=\iint\limits_M (x+y+z)dS=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}(x+y+\sqrt{R^2-x^2-y^2})\sqrt{1+z_x{}^2+z_y{}^2}dxdy$$

$$=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}(x+y+\sqrt{R^2-x^2-y^2})\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}dxdy$$

$$=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}Rdxdy$$

$$=\pi R^3.$$

3.（8 分）设 $z=z(x,y)$ 在 R^2 有连续偏导数，并且

$$dz=\left[axy^3+\cos(x+2y)\right]dx+\left[3x^2y^2+b\cos(x+2y)\right]dy$$

其中 a,b 是常数，求 a,b 的值和 $z=z(x,y)$ 的表达式.

解：由条件

$z_x=axy^3+\cos(x+2y)$， $z_y=3x^2y^2+b\cos(x+2y)$，

则

$$z_{xy}=3axy^2-2\sin(x+2y),$$

$$z_{yx}=6xy^2-b\sin(x+2y).$$

因为 z_{xy} 和 z_{yx} 都连续，所以 $z_{xy}=z_{yx}$，

$$3axy^2-2\sin(x+2y)=6xy^2-b\sin(x+2y),$$

取 $x=\dfrac{\pi}{2},y=0$，解得 $b=2$，进而得出 $a=2$.

再由 $z_x=2xy^3+\cos(x+2y)$，

$$z(x,y)=x^2y^3+\sin(x+2y)+\varphi(y),$$

$$z_y=3x^2y^2+2\cos(x+2y)+\varphi'(y),$$

于是 $\varphi'(y)=0$， $\varphi(y)=C$. 故

$$z(x,y)=x^2y^3+\sin(x+2y)+C.$$

4. (10 分) 求幂级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n n}{(2n+1)!}x^{2n-1}$ 的收敛域及和函数的表达式.

解：记 $u_n(x)=\frac{(-1)^n n}{(2n+1)!}x^{2n-1}$. 对任意的 $x\neq 0$，

$$\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|}=\frac{|x|^2}{2n(2n+3)}\to 0,\quad n\to+\infty\,,$$

则 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n n}{(2n+1)!}x^{2n-1}$ 收敛. 即得 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n n}{(2n+1)!}x^{2n-1}$ 的收敛域为 $(-\infty,+\infty)$.

记 $S(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n n}{(2n+1)!}x^{2n-1}$，定义域为 $(-\infty,+\infty)$.

容易求得 $S(0)=0$.

对任意的 $x\neq 0$，利用幂级数的性质，

$$S(x)=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(x^{2n})'=\frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n}\right)'$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}\right)'=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}(\sin x-x)\right)'$$

$$=\frac{x\cos x-\sin x}{2x^2}.$$

5. (10 分) 设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的函数，它在区间 $(-\pi,\pi]$ 上的表达式为

$$f(x)=\begin{cases}0 & -\pi<x\le 0\\ 2 & 0<x\le\pi\end{cases}.$$

(1) 求 $f(x)$ 的 Fourier 级数；

(2) 求 $f(x)$ 的 Fourier 级数的和函数在区间 $[0,2\pi]$ 上的表达式；

(3) 求 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$.

解：(1) 先计算 $f(x)$ 的 Fourier 系数，

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}2dx=2\,,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}2\cos nxdx=0,\quad n=1,2,\cdots,$$
$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}2\sin nxdx=\frac{2}{n\pi}\left(1-(-1)^n\right)$$
$$=\begin{cases}0 & n=2k\\ \frac{4}{(2k-1)\pi} & n=2k-1\end{cases},\quad k=1,2,\cdots.$$

$f(x)$ 的 Fourier 级数为

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right)$$

$$=1+\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}.$$

(2) $1+\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}=\begin{cases}2 & x\in(0,\pi)\\ 0 & x\in(\pi,2\pi)\\ 1 & x=0,\pi,2\pi\end{cases}$.

(3) 令 $x=\frac{\pi}{2}$,

$$1+\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{2k-1}\sin\left((2k-1)\frac{\pi}{2}\right)=2,$$

解得 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}=\frac{\pi}{4}$.

6. (12 分)

(1) 判别下列广义积分的收敛性，若收敛，是绝对收敛还是条件收敛？

(a) $\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}\,|x-1|^{\frac{3}{4}}}dx$ (b) $\int_0^{+\infty}\sin x^2dx$

(2) 设 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 收敛，并且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=L$. 证明： $L=0$.

解：(1) (a) $x=0,x=1$ 为瑕点，

考虑 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}\,|x-1|^{\frac{3}{4}}}dx$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{x}|x-1|^{\frac{3}{4}}}dx+\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{1}{\sqrt{x}|x-1|^{\frac{3}{4}}}dx+\int_1^2\frac{1}{\sqrt{x}|x-1|^{\frac{3}{4}}}dx+\int_2^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}|x-1|^{\frac{3}{4}}}dx\ .$$

因为

$$\lim_{x\to 0+0}\sqrt{x}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}|x-1|^{\frac{3}{4}}}=\lim_{x\to 0+0}\frac{1}{|x-1|^{\frac{3}{4}}}=1,$$

$$\lim_{x\to 1}|x-1|^{\frac{3}{4}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}|x-1|^{\frac{3}{4}}}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x}}=1,$$

$$\lim_{x\to +\infty}x^{\frac{1}{2}+\frac{3}{4}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}|x-1|^{\frac{3}{4}}}=\lim_{x\to +\infty}\frac{x^{\frac{3}{4}}}{|x-1|^{\frac{3}{4}}}=1,$$

而其中$\frac{1}{2}+\frac{3}{4}=\frac{5}{4}>1$，所以

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{x}|x-1|^{\frac{3}{4}}}dx,\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{1}{\sqrt{x}|x-1|^{\frac{3}{4}}}dx,\int_1^2\frac{1}{\sqrt{x}|x-1|^{\frac{3}{4}}}dx,\int_2^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}|x-1|^{\frac{3}{4}}}dx$$

都收敛，于是$\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}|x-1|^{\frac{3}{4}}}dx$ 收敛，又被积函数非负，故是绝对收敛.

(b) $x=0$不是瑕点，$\int_0^{+\infty}\sin x^2dx$ 与$\int_1^{+\infty}\sin x^2dx$ 具有相同的收敛性，只讨论 $\int_1^{+\infty}\sin x^2dx$ 即可.

令$t=x^2$，则

$$\int_1^{+\infty}\sin x^2dx=\frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt,$$

$\int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt$条件收敛.

那么$\int_0^{+\infty}\sin x^2dx$ 条件收敛.

(2) 假设$L\neq 0$，不妨设$L>0$. 由$\lim_{x\to +\infty}f(x)=L$，根据极限性质，存在$X>0$，使得当$x>X$时，

$$f(x)>\frac{L}{2}.$$

则$\forall A>X$，

$$\int_a^A f(x)dx=\int_a^X f(x)dx+\int_X^A f(x)dx$$

$$>\int_a^X f(x)dx+\frac{L}{2}(A-X),$$

由此推出 $\lim\limits_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)dx=+\infty$，与 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛矛盾.

假设不成立，即 $L=0$.

7.（12 分）

(1) 证明：函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} ne^{-nx}$ 在 $[\delta,+\infty)(\delta>0)$ 一致收敛，但在 $(0,+\infty)$ 不一致收敛.

(2) 证明：$f(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty} ne^{-nx}$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上连续且可导.

证：(1) 对任意的 $x\in[\delta,+\infty)$ 和任意的正整数 n，

$$0<ne^{-nx}<ne^{-\delta n},$$

而

$$\sqrt[n]{ne^{-\delta n}}=\sqrt[n]{n}e^{-\delta}\to e^{-\delta}<1,\quad n\to+\infty,$$

说明 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} ne^{-\delta n}$ 收敛，根据 M 判别法，函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} ne^{-nx}$ 在 $[\delta,+\infty)(\delta>0)$ 一致收敛.

记 $u_n(x)=ne^{-nx}$，对任意的正整数 n，取 $x_n=\frac{1}{n}\in(0,+\infty)$，

$$u_n(x_n)=ne^{-1}\nrightarrow 0,\quad n\to+\infty,$$

则 $u_n(x)=ne^{-nx}$ 在 $(0,+\infty)$ 不一致收敛于 0. 故函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} ne^{-nx}$ 在 $(0,+\infty)$ 不一致收敛.

(2) $\forall x\in(0,+\infty)$，存在 $\delta>0$，使得 $x\in(\delta,+\infty)$.

因为 $u_n(x)=ne^{-nx}$ 在 $(0,+\infty)$ 连续 $(n=1,2,\cdots)$，利用(1)，函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} ne^{-nx}$ 在 $[\delta,+\infty)(\delta>0)$ 一致收敛，所以和函数 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty} ne^{-nx}$ 在 $[\delta,+\infty)$ 上连续，于是它在 x 连续. 由 x 的任意性，$f(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty} ne^{-nx}$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上连续.

对任意的 $\delta>0$，

$$\left|u_n'(x)\right|=\left|-n^2e^{-nx}\right|\le n^2e^{-n\delta},\quad \forall x\in[\delta,+\infty),n=1,2,\cdots,$$

而

$$\sqrt[n]{n^2e^{-\delta n}}=\sqrt[n]{n^2}e^{-\delta}\to e^{-\delta}<1,\quad n\to+\infty,$$

说明$\sum_{n=1}^{+\infty}n^2e^{-\delta n}$收敛，根据 M 判别法，函数项级数$\sum_{n=1}^{+\infty}u_n'(x)$在$[\delta,+\infty)(\delta>0)$一致收敛.

根据一致收敛的函数项级数的逐项可导性，$f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}ne^{-nx}$在区间$[\delta,+\infty)(\delta>0)$可导. 同理可得，$f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}ne^{-nx}$在区间$(0,+\infty)$上可导.

8.(10 分)设$\alpha>1$，$0<a_n\le a_{n+1}$，$n=0,1,2,\cdots$. 证明：$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n-a_{n-1}}{a_na_{n-1}^{\alpha}}$收敛.

证：由条件，$\{a_n\}$单调递增，则要么$\{a_n\}$有上界要么$\{a_n\}$趋于$+\infty$.

(1)设$\{a_n\}$有上界. 则$\{a_n\}$收敛，记$A=\lim_{n\to+\infty}a_n$，显然$A>0$.

利用极限性质，存在N_0，当$n>N_0$时，

$$a_n>\frac{A}{2}.$$

则当$n>N_0+1$时，由条件$\alpha>1$，那么

$$0\le\frac{a_n-a_{n-1}}{a_na_{n-1}^{\alpha}}<\frac{a_n-a_{n-1}}{\frac{A}{2}(\frac{A}{2})^{\alpha}}=(\frac{2}{A})^{\alpha+1}(a_n-a_{n-1}).$$

由于

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k-a_{k-1})=a_n-a_0\to A-a_0,\quad n\to+\infty,$$

说明$\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n-a_{n-1})$收敛. 利用比较判别法，$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n-a_{n-1}}{a_na_{n-1}^{\alpha}}$收敛.

(2) 设$\{a_n\}$无上界，即$\lim_{n\to+\infty}a_n=+\infty$.

利用极限性质，存在N_0，当$n>N_0$时，

$$a_n>1.$$

则当$n>N_0+1$时，由条件$\alpha>1$，那么

$$0 \le \frac{a_n - a_{n-1}}{a_n a_{n-1}^{\alpha}} \le \frac{a_n - a_{n-1}}{a_n a_{n-1}} = \frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_n}.$$

由于

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{a_{k-1}} - \frac{1}{a_k}\right) = \frac{1}{a_0} - \frac{1}{a_n} \to \frac{1}{a_0}, \quad n \to +\infty,$$

说明$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_n}\right)$收敛．利用比较判别法，$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n - a_{n-1}}{a_n a_{n-1}^{\alpha}}$收敛.