课程编号：100171018　　　北京理工大学 2020-2021 学年第一学期

2020 级理科数学分析（I）期中考试试题

1.(10 分)判断下列命题是否正确:

(1)若 $\forall\varepsilon>0$，$\{a_n\}$ 中都有无穷多项属于 $(L-\varepsilon,L+\varepsilon)$，则 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=L$.

(2)若对任意的 $\varepsilon>0$，都存在 $\delta>0$，使得当 $0<|x-x_0|\le\delta$ 时，$|f(x)-L|\le 2\varepsilon$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=L$.

(3)若极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，则极限 $\lim\limits_{x\to x_0}\ln\big(f(x)\big)$ 也存在.

(4)若 $f(x)$ 在 x_0 点连续，x_0 是 $g(x)$ 的第一类间断点，则 x_0 是 $f(x)+g(x)$ 的第一类间断点.

(5)设 $f(x)$ 是定义在 $[-a,a](a>0)$ 的连续函数，则 $g(x)=\dfrac{f(x)+f(-x)}{x-A}$ 是 $[-a,a]$ 上连续的非奇非偶函数，其中 $A>a$.

(6)若 $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(1+h)-f(1-h)}{2h}=0$，则 $f(x)$ 在 $x=1$ 点可导，且 $f'(1)=0$.

(7)设 $f(x)$ 在 x_0 点可微，则 $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}=f'(x_0)$.

(8)设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 x_0 点可导，且 $f(x_0)=g(x_0)$，则 $f'(x_0)=g'(x_0)$.

(9)若 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且有唯一的极大值和唯一的极小值，则此极大值一定是最大值，此极小值一定是最小值.

(10) 设 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上可导，则对任意的 $x_1,x_2\in(a,b)$，存在 ξ 介于 x_1,x_2 之间，使得 $f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)$.

2.(18 分)求下列极限

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos(\sin x)-\cos x}{x^4}$　　　　(2) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

(3) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+n+1}+\dfrac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n+n}\right)$

3.（18 分）

(1) 设 $y=y(x)$ 是由方程 $e^{xy}=3x^2y$ 确定的隐函数，求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

(2) 设 $y=f(x)$ 是由参数方程 $\begin{cases} x=2t-t^2 \\ y=3t-t^3 \end{cases}$ 确定的函数，求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

(3) 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 二阶可导，$F(x)=f(\dfrac{1}{x})$，求 $F''(x)$.

4.（12 分）设 $x_1>0$， $x_{n+1}=\dfrac{3(1+x_n)}{3+x_n}\ (n=1,2,\cdots)$. 证明：$\{x_n\}$ 收敛，

并求 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n$.

5.（12 分）设 $f(x)=e^x\sin 3x$.

(1) 求 $f(x)$ 在 $x=0$ 点的 4 阶 Taylor 展开式；

(2) 求 $f^{(4)}(0)$.

6.（15 分）证明下列不等式

(1) $\ln(1+x)<x$， $x>-1$ 且 $x\neq 0$.

(2) $(1+a)\ln(1+a)+(1+b)\ln(1+b)<(1+a+b)\ln(1+a+b)$， $0<a<b$.

7.（15 分） 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 连续. 证明：

(1) 若 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$， $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$，则 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 有最小值.

(2) 若存在唯一一点 x_0，使得 $f\left(f(x_0)\right)=x_0$，则存在唯一一点 ξ，使得 $f(\xi)=\xi$.