课程编号：100171019　　　北京理工大学 2021-2022 学年第二学期

2021 级数学分析（II）期终考试试题 A 卷

座号______班级__________学号___________姓名________成绩______

题号	1	2	3	4	5	6	7	8		
得分										
签名										

1. (23 分) 求下列函数的偏导数或全微分

(1) 设 $z=e^{\cos xy}$，求 dz.

(2) 设 $z=z(x,y)$ 由方程 $x+y+z=e^z$ 所确定的隐函数，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

(3) 设 $z=\frac{1}{x}f(xy)+yg(x+y)$，其中 f 和 g 在 R 上有连续的二阶导数，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$ 和 $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$

2. (15 分)

(1) 求二重积分 $I=\iint\limits_D \frac{y^2}{x^2}dxdy$，其中 D 为由 $y=\frac{1}{x}, y=2, y=x$ 所围的区域.

(2) 求三重积分 $I=\iiint\limits_{\Omega} x\,dxdydz$，其中 Ω 由 $x=0,y=0,z=0,x+2y+z=1$ 所围成.

(3) 求第一型曲面积分 $I=\iint\limits_M (x+y+z)dS$，其中 M 为上半球面：$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$，$x^2+y^2\le R^2\ (R>0)$.

3. (8 分) 设 $z=z(x,y)$ 在 R^2 有连续偏导数，并且

$$dz=\left[axy^3+\cos(x+2y)\right]dx+\left[3x^2y^2+b\cos(x+2y)\right]dy$$

其中 a,b 是常数，求 a,b 的值和 $z=z(x,y)$ 的表达式.

4. (10 分) 求幂级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n n}{(2n+1)!}x^{2n-1}$ 的收敛域及和函数的表达式.

5. (10 分) 设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的函数，它在区间 $(-\pi,\pi]$ 上的表达式为

$$f(x)=\begin{cases}0 & -\pi<x\le 0\\ 2 & 0<x\le\pi\end{cases}.$$

(1) 求 $f(x)$ 的 Fourier 级数；

(2) 求 $f(x)$ 的 Fourier 级数的和函数在区间 $[0,2\pi]$ 上的表达式；

(3) 求 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$.

6. (12 分)

(1) 判别下列广义积分的收敛性，若收敛，是绝对收敛还是条件收敛？

(a) $\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}\,|x-1|^{\frac{3}{4}}}dx$　　(b) $\int_0^{+\infty}\sin x^2 dx$

(2) 设 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 收敛，并且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=L$. 证明： $L=0$.

7. (12 分)

(1) 证明：函数项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}ne^{-nx}$ 在 $[\delta,+\infty)(\delta>0)$ 一致收敛，但在 $(0,+\infty)$ 不一致收敛.

(2) 证明： $f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}ne^{-nx}$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上连续且可导.

8. (10 分) 设 $\alpha>1$， $0<a_n\le a_{n+1}$， $n=0,1,2,\cdots$. 证明： $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n-a_{n-1}}{a_n a_{n-1}^{\alpha}}$ 收敛.