课程编号：100171018　　　北京理工大学 2019-2020 学年第一学期

2019 级理科数学分析（I）期中考试试题

1. (10 分) 求下列极限

(1) $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{3^n+4^n+5^n}$　　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+2x)^x-1}{x^2}$

2. (5 分) 利用极限定义证明：$\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{3+x}=2$

3. (22 分) 解下列各题

(1) 设 $y=f(x)$ 是由方程 $\sin y=x\cos(x+y)$ 确定的隐函数，求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

(2) 设 $y=f(x)$ 是由参数方程 $\begin{cases} x=t^2+4t \\ y=\ln(t+2) \end{cases}$ 确定的函数，求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

(3) 设 $y=\dfrac{\sqrt{x+2}\,(3-x)^4}{(x+1)^5}$，求 $\dfrac{dy}{dx}$.

4. (12 分) 设 $x_1=\sqrt{2}$，$x_{n+1}=\sqrt{3+2x_n}\ (n=1,2,\cdots)$. 证明：$\{x_n\}$ 收敛，

并求 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n$.

5. (15 分) 设 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\ (a\neq 0)$.

(1) 证明：若 $b^2-3ac<0$，则 $f(x)$ 没有极值点.

(2) 若 $x=-1$ 是极大值点，$x=2$ 是极小值点，并且 $f(-1)=9$，$f(2)=-18$，

求 a,b,c,d 的值.

6. (12 分) 设 $f(x)=e^{\frac{x}{1+x}}$.

(1) 求 $f(x)$ 在 $x=0$ 点的 3 阶 Taylor 展开式；

(2) 求 $f'''(0)$.

7.（12 分）设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 连续，在 $(0,+\infty)$ 可导，并且

$$f(0)<0,\quad f'(x)>A>0,\quad \forall x\in(0,+\infty).$$

证明：$f(x)=0$ 在 $(0,+\infty)$ 有唯一实根.

8.（12 分）设 $f(x)$ 在 x_0 连续，$\left|f(x)\right|$ 在 x_0 可导. 证明：$f(x)$ 在 x_0 可导.