2010年线性代数A期末考试答案



一、(10句)

解: 方程两边同时左乘A, 得 AX+X=AA*+I

Min
$$X = -(A+I)^{-1} = -\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

信息与电子二学部学生会

二、(10分)

解:用机等行变换将方程组的增广矩阵似为阶梯形儿

$$\widehat{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & P \\ q & 2 & 6 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{4f} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -5 & P-2 \\ 0 & 0 & -4+49 & 2P-1+9(1-P) \end{bmatrix}$$

由方程组有解,且其导出组 AX=0 的基础解只有一个向量 欠口

11

解得
$$\begin{cases} X_1 = -1 + 4 \times 3 \\ X_2 = 2 - 5 \times 3 \\ X_3 = X_3 \end{cases}$$
 故通解为 $X = (-1, 2, 0)^T + R(4, -5, 1)^T$, k为仕意、常数

三、(10分)

1)证明: 己知失 [阵空间 R^{2X^2} 的维数为4,要证 β1, β2, β3, β4为 R^{2X^2} 的一个型,只需证其线/性元类 设 R_1 β1+ R_2 β2+ R_3 β3+ R_4 β4=0

(3)解: 法一: ΣV= X1β1+ X2β2+ X3β3+ X4β4

解之饲 (x1, x2, x3, x4)T=(至,-1,-至,0)T

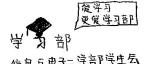
法二:7在自然整改1,32,83,84下白9生标为

火=(1,2,3,4)Τ,于足,由坐标变换公式,γ在整βι,β2,β3,β4下的坐标。

四、(10分)

解:(1)将d1,d2,d3作为例构造矢户阵,再用机等行变换将之化为阶梯形/

$$\begin{bmatrix} \phi_1 ^\mathsf{T} \,,\, \phi_2 ^\mathsf{T} \,,\, \phi_3 ^\mathsf{T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{45} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



信息与电子二学部学生员

由上可庆口,向量组分1,分2,分的秩为2,其中任意两个向量者阿作为 何量组的一个极大无关组。不妨取分,分之

(2)由(1)矢口, 的, 62为上(31, 62, 63)的一个整

于是只要将其正友似,单位仪积可

正友他, 任
$$\beta_1 = \delta_1$$
 , $\beta_2 = \delta_2 - \frac{(\delta_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1 = \delta_2 + \beta_1 = (1, 2, 1)$

粒似, 5η= <u>β</u> = (-±, ο, ±)

$$N_{2} = \frac{\beta_{2}}{|\beta_{2}|} = (\frac{1}{16}, \frac{2}{16}, \frac{1}{16})$$

n,, n2为Lld1,d2,d3)的一个标准正友基

五、(10分)

解:(1)初等因于入十1,(X-2)产,入2对应自与Jordan块分别为

$$J_1 = \begin{bmatrix} -1 \end{bmatrix}, J_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, J_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

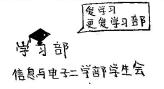
J足,A的Jordan标准形

(2)由 A~J Ko, A与J有相同的特征值

六 (10年)

- 解: 根据定义 6(1)=0

故有 [
$$6(1)$$
, $6(1+x)$, $6(1+x+x^2)$, $6(1+x+x^2+x^3)$]
$$= [[, 1+x, 1+x+x^2, 1+x+x^2+x^3] \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$



又自然整到整1,1+x,1+x+x2,1+x+x3的过渡失巨阵为

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

七、证明:若n阶 矢E阵 A可相似对角似,则有在可逆矩阵户,使

或AP= P diag (li, li, li, li, ln)

将P按列行扶 P=Ex,,X2,、、,Xn]并代入上式得

A[x1, x2, ... xn] = [x1, x2, ..., xn] diag (x1, x2 \n)

积 [AX1, AX2, ..., AXn]=[\(\)1X1, \(\)2X2, ..., \(\)n Xn]

从而有 AXt = Xt Xt , 七二, 2, ..., n



反之, 若 n pri 失巨阵 A 有 n 个线性 无关的 中寺 征向 星, 不妨设为 X,, X2, ~~ Xn,

则有在相应的特征值, A,, A2, ~~ An, 使得

AX1= 11 X1, 1=1,2, ~~ N

此日寸, 至 P= [x1, x2, -\, xn]

P回进,且有 P-IAP= diag(λ,,λ2,····λn)

即A可相似人对角的

八、(10分)

解:11)法一:由f的标准形则可知其则限性指数为2.

故行而正义

法二: 且己知条件知道, A自引持 征值 为 1,2,0), 故f正定

(2)由己乐几条件乐口道, A的特征值为1,2,0,

故 |A|=|X2X0=0

131由己朱L条件代1 道 (NTAQ = diag (1, 2,0)

TR A=Qdiag(1,2,0)QT

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

九.110分)

证明: 由 Otj = Atj 及伴随矩阵的 定义知 AT = A*, 则有 |A| = |AT| = |A*| = |A|², 于艮有 |A|(|A|-1) = 0 又因 A+0, 不妨设 Q11+0, 贝1有 | A|= a11 A11 + a12 A12 + a13 A13 = a11+ a12+a13 70



故 |A|=\ 于足 AAT = AA × = | A|I = I 从而 A 为正交矢巨 阵

十、(10分)

解:(1)据己知条件,有

A[&1,62,63] = [A&1, A&2, A&3]

= [-6,-362-363,46,+462+63,-26,+363]

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

记B=
$$\begin{bmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$
 , $P_1 = [\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

则由δι.δ2,δ3线1性天关矢0Pi可益,且 Pi-APi=B RPA~B 求B的特征值 |λI-B|=(λ-1)(λ-2)(λ-3)

古αB的特征值为1,2,3,从而从白的特征值也为1,2,3

(2)由(II-B)X=0,解得基础解約X1=(1,1,1)T 由(2I-B)X=0,解得基础解約X2=(2,3,3)T 由(3I-B)X=0,解得基础解积X3=(1,3,4)T 即特性値1,2,3 对应的特性向量分別対X1,X2,X3 及P2=[X1,X2,X3],则有 P2-1 BP2=diag(1,2,3),于足生



= [0,+62+63,20,+362+303,01+362+463]

収1有P-1AP=(P,P2)-1A(P,P2)=P2-1BP2=diag(1,2,3)

所以矩阵A属于特征值1,2,3的特征向量分别为

 $R_{1}(\theta_{1}+\theta_{2}+\theta_{3})$, $R_{2}(2\theta_{1}+3\theta_{2}+3\theta_{3})$,

k3(+1+3+2+4+3), k2+0, t=1,2,3