2011 年线性代数 A 期末考试答案

一 解　在方程 $A^*X = 2A^{-1} + 2X$ 两端左乘 A 得

$$|A|X = 2I + 2AX \text{ ……………………………………..4 分}$$

计算得 $|A| = 4$，则 $X = (4I - 2A)^{-1} \cdot 2I$，即

$$X = (2I - A)^{-1} \text{ ……………………………...……..8 分}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ ………………….……..10 分}$$

二、解方程组的系数行列式为

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ \lambda & 5 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ \lambda+10 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \lambda + 10 \text{ ………………………...4 分}$$

所以当 $\lambda \neq -10$ 方程组有唯一解…………………..…………..6 分

当 $\lambda = -10$ 方程组有无穷多解，此时增广矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ -10 & 5 & -5 & -10 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

则 $X_0 = (1,0,0)^T$ 为方程组的一个特解，$X_1 = (-1,3,5)^T$ 是导出组的一个基础解系，

则一般解为 $X = X_0 + k_1X_1$ ………………………….………………..10 分

三 解

（1）由（$x^3, x^2+x^3, x+x^2+x^3, 1+x^3$）=（$1, x, x^2, x^3$）$\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$

且$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$满秩知 $x^3, x^2+x^3, x+x^2+x^3, 1+x^3$ 为一组基……………3 分

(2)由（1）知过渡矩阵为$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$…………………………….………6 分

(3) $\boldsymbol{h(x)=1+2x+4x^2+6x^3}$在后一个基下的坐标为

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$ ………………….……..10 分

四 解

$$[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4]=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ 6 分

所以 $\boldsymbol{r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=3,}$ 7 分

极大无关组为$\boldsymbol{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,}$ 8 分

剩余向量的表出 $\boldsymbol{\alpha_4=-\frac{3}{2}\alpha_1-\frac{3}{2}\alpha_2+\frac{1}{2}\alpha_3.}$ 10 分

五、解

(1) $\boldsymbol{A}$ 的初等因子为

$\boldsymbol{\lambda+1, (\lambda-6)^2,\ \lambda^3}$ ……………………..……………………………………..5 分

(2) $\boldsymbol{A}$ 的特征值为

-1, 6, 6, 0, 0, 0……………………………………………………….10 分

六、解σ在$\mathbf{R}^3$的自然基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$下的矩阵为

$$\begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{3} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$ ……………………………………10 分

七、证明：2×2的实矩阵A的特征值都为实数的充要条件为$|A|\le\left(\frac{\mathrm{tr}A}{2}\right)^2$（其中$\mathrm{tr}A$为$A$的迹）。

证明：我们知道

$$|\lambda I-A|=\lambda^2-(\mathrm{tr}A)+|A|.$$ 6 分

所以

$$\lambda=\frac{\mathrm{tr}A\pm\sqrt{(\mathrm{tr}A)^2-4|A|}}{2}.$$ 8 分

故而A的特征值都为实数的充要条件为$(\mathrm{tr}A)^2-4|A|\ge0$, 即

$$|A|\le\left(\frac{\mathrm{tr}A}{2}\right).^2$$ 10 分

八、解

（1） $$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda-1 & -2 \\ -2 & -2 & \lambda-1 \end{vmatrix}=(\lambda+1)^2(\lambda-5)$$

特征值为$\lambda_1=-1$(二重)，$\lambda_2=5$。……………………………………4 分

当$\lambda=-1$时，$$(\lambda I-A)=\begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

相应的特征向量为

$$\alpha_1=(-1,1,0),\ \alpha_2=(-1,0,1)$$

正交化得

$$\beta_1=(-1,1,0),\ \beta_2=\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1\right),$$

单位化得

$$\gamma_1=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right),\quad \gamma_2=\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$$

当 $\lambda=5$ 时，$(\lambda I-A)=\begin{pmatrix}4&-2&-2\\-2&4&-2\\-2&-2&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-2\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$

特征向量为

$$\alpha_3=(1,1,1),$$

单位化得

$$\gamma_3=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$ ……………………6 分

所以取

$$Q=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\0&-\frac{2}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix},$$

令 $X=QY$, 二次型化为

$$f=-y_1^2-y_2^2+5y_3^2$$ ………………………8 分

（2）二次型不是正定的。…………………………………………………10 分

九、证明：充分性.设 A 可逆，则对任意 b，$X = A^{-1}b$ ………………5 分

必要性:

解法一:

使 b 取遍所有单位向量后， 原方程组都有解, 以这些解向量作为列向量构做矩阵 B, 显然 $AB=I$, 其中 I 为单位阵, 此知, A 可逆.

解法二:

由题目假设知: 任何 n 维向量 b 都能由 A 的列向量组线性表出, 所以向量空间 R^n 的维数不会超过 A 的列向量组的秩, 由此得出: A 的列向量组的秩为 n, 即 A 可逆. ……………………………………..10 分

十、证：设 $A \quad \Lambda=\text{diag}\{\underbrace{\lambda_0, \quad ,\lambda_0}_{k},\lambda_{k+1}, \quad ,\lambda_n\}$, $\lambda_i \neq \lambda_0, i = k+1, \quad ,n.$

则 $A-\lambda_0 I \quad \Lambda-\lambda_0 I$, $(A-\lambda_0 I)^2 \quad (\Lambda-\lambda_0 I)^2$………………………………2 分

故

$$rank(A-\lambda_0 I) = rank(\Lambda-\lambda_0 I) = rank(\text{diag}\{\underbrace{0, \quad ,0}_{k},\lambda_{k+1}-\lambda_0, \quad ,\lambda_n-\lambda_0\}$$

$= n-k$ ……………………………………………………………………4 分

同理，

$$rank(A-\lambda_0 I)^2 = rank(\Lambda-\lambda_0 I)^2 = rank(\text{diag}\{\underbrace{0, \quad ,0}_{k},(\lambda_{k+1}-\lambda_0)^2, \quad ,(\lambda_n-\lambda_0)^2\}$$

$= n-k = rank(A-\lambda_0 I)$.………………….……………….5 分

（2）如存在 Y，使得 $(A-\lambda_0 I)Y = X_0$，则

$(A-\lambda_0 I)^2 Y = (A-\lambda_0 I)X_0 = \theta$，…………………………………………6 分

由（1）知方程组 $(A-\lambda_0 I)^2 X = \theta$ 与 $(A-\lambda_0 I)X = \theta$ 同解。……………...9 分

从而 $(A-\lambda_0 I)Y = \theta$，即 $X_0 = \theta$，与 X_0 为特征向量矛盾。………….10 分