2012年线性代数A期末考试答案

爱学习
更爱学习部

学习部

信息与电子二学部学生会

一、解：$\left|\frac{1}{3}A^*+2I\right|=\left|\frac{1}{3}|A|A^{-1}+2AA^{-1}\right|$ ……4分

$=\left|2A^{-1}+2AA^{-1}\right|$ ……6分

$=2^3|A^{-1}||I+A|$ ……8分

$=\frac{1}{6}\cdot 2\cdot 4\cdot 3$

$=32$ ……10分

二、解：由 $AX=A+2X$ 得 $X=2(I-A)^{-1}A$ ……4分

$$(I-A)^{-1}=\begin{bmatrix}-2&5&2\\-1&3&1\\-2&5&1\end{bmatrix}$$ ……6分

所以 $X=\begin{bmatrix}-6&10&4\\-2&4&2\\-4&10&0\end{bmatrix}$ ……10分

三、解：(1) 令 $k_1+k_2(1+2x)+k_3(1+2x+3x^2)+k_4(1+2x+3x^2+4x^3)=0$

可得 $(k_1+k_2+k_3+k_4)+2(k_2+k_3+k_4)x+3(k_3+k_4)x^2+(k_1+k_2+k_3+k_4)x^3=0$

从而 $k_1=0,\ k_2=0,\ k_3=0,\ k_4=0$ ……4分

(2) 过渡矩阵为 $\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&2&2&2\\0&3&3&3\\0&0&0&4\end{bmatrix}$ ……7分

(3) $h(x)=1-x-x^2+x^3$ 在后一个基下的坐标为

$$\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&2&2&2\\0&3&3&3\\0&0&0&4\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1\\-1\\-1\\6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-\frac{1}{2}&0&0\\0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{3}&0\\0&0&\frac{1}{3}&-\frac{1}{4}\\1&0&0&\frac{1}{4}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{3}{2}\\-\frac{1}{6}\\-\frac{7}{12}\\\frac{1}{4}\end{bmatrix}$$ ……10分

四、解：$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{bmatrix}1&2&0\\0&2&1\\-1&0&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&0\\0&2&1\\0&0&0\end{bmatrix}$

所以 $r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=3$，$\alpha_1,\alpha_2$ 是一个极大无关组 ……5分

取 $\beta_1=\alpha_1$，$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\beta_1,\alpha_2)}{(\beta_1,\beta_1)}=(1,2,1)^T$

则 $\eta_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)^T$，$\eta_2=\frac{1}{2}(1,2,1)^T$

为一组正交基 …… 10分

五、解：(1) A的初等因子为 $(\lambda+1)^2,(\lambda-1),\lambda+2$ …… 4分

设 $P=[X_1,X_2,X_3,X_4]$，则 $AP=P\Lambda$

即 $[AX_1,AX_2,AX_3,AX_4]=[X_1,X_2,X_3,X_4]\begin{bmatrix}-1&1&&\\&-1&&\\&&1&\\&&&-2\end{bmatrix}$

$AX_1=(-1)X_1$，$AX_2=X_1-X_2$，$AX_3=X_3$，$AX_4=-2X_4$

所以 X_1,X_3,X_4 为A的特征向量 …… 10分

六、解：(1) 设有多项式 $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$，$g(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+b_3x^3$，则

$$\sigma(k_1f(x)+k_2g(x))=\sigma((k_1a_0+k_2b_0)+(k_1a_1+k_2b_1)x+(k_1a_2+k_2b_2)x^2+(k_1a_3+k_2b_3)x^3)$$

$$=(k_1a_3+k_2b_3)-(k_1a_0+k_2b_0)+(k_1a_2+k_2b_2)x+(k_1a_0+k_2b_0+k_1a_1+k_2b_1)x^3$$

$$=k_1(a_3-a_0)+k_2(b_3-b_0)+k_1a_2x+k_2b_2x+k_1(a_0+a_1)x^3+k_2(b_0+b_1)x^3$$

$$=k_1[a_3-a_0+a_2x+(a_0+a_1)x^3]+k_2[b_3-b_0+k_2b_2x+k_2(b_0+b_1)x^3]$$

$$=k_1\sigma(f(x))+k_2\sigma(g(x))$$ …… 4分

(2) 由于 $\sigma(1)=-1+x^3$，$\sigma(x)=x^3$，$\sigma(x^2)=x$，$\sigma(x^3)=1$

故矩阵为 $A=\begin{bmatrix}-1&0&0&1\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\1&1&0&0\end{bmatrix}$ …… 7分

由于 $|A|=0$，故 σ 不可逆。 …… 10分

七、证明：只需证明：$r(A^TA)=r(A)$

考虑齐次方程组 $AX=0$ ①

$A^TAX=0$ ②

任取方程组①的一个解 X_1，则 $AX_1=0$，此式两边同时左乘 A^T，得

$$A^TAX_1=A^T0=0$$

所以，X_1是方程组②的解。反之，任取方程组②的一个解X_2，则$A^TAX_2=0$，此式两边同时左乘X_2^T，得 $X_2^TA^TAX_2=(AX_2)^T(AX_2)=X_2^T0=0$

根据例1.1.20，可得$AX_2=0$，故X_2也是方程组①的解 ··· 6分

综上所述，方程组①与方程组②同解。若方程组①②都只有零解，则显然 $r(A)=r(A^TA)$，否则，两个齐次方程组有相同的基础解系。根据定理2.3.2，可得 $n-r(A)=n-r(A^TA)$

于是，$r(A)=r(A^TA)$ ··· 10分

八、解：设λ为对应的特征值$A\xi=\lambda\xi$，即

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & a & 3 \\ -1 & b & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

所以 $\lambda=-1$，$a=-3$，$b=0$ ··· 4分

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix} \lambda-2 & 1 & -2 \\ -5 & \lambda+3 & -3 \\ 1 & 0 & \lambda+2 \end{vmatrix}=(\lambda+1)^3$$

所以$\lambda=-1$是三重特征值，但$r(\lambda I-A)\neq 0$，故A不可对角化。 ··· 10分

九、解：(1) $A=\begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{bmatrix}$ $\Delta_1=a$ $\Delta_2=\begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix}=a^2-1$，$\Delta_3=\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}=(a+2)(a-1)$

$\Delta_2>0 \Rightarrow a<-1$ 或 $a>1$，$\Delta_3>0 \Rightarrow a>1$ 或 $a<-2$

所以A正定的范围是$a>1$或$a<-2$

(2) $|\lambda I-A|=\begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda-2 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda-2 \end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-4)$

特征值为$\lambda_1=1$（二重），$\lambda_2=4$。 ⋯ 4分

当$\lambda_1=1$时，$(\lambda I-A)=\begin{bmatrix}-1&-1&-1\\-1&-1&-1\\-1&-1&-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$

相应的特征向量为$\alpha_1=(-1,1,0)$，$\alpha_2=(-1,0,1)$

正交化得$\beta_1=(-1,1,0)$，$\beta_2=(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1)$，

单位化得$\gamma_1=(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0)$，$\gamma_2=(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{2}{\sqrt{6}})$

$\lambda=4$时，$(\lambda I-A)=\begin{bmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&-2\\0&1&-1\\0&0&0\end{bmatrix}$

特征向量为$\alpha_3=(1,1,1)$，单位化为$\gamma_3=(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})$ ⋯ 8分

所以取 $Q=\begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\0&-\frac{2}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}$

令$X=QY$，二次型化为$f=y_1^2+y_2^2+4y_3^2$ ⋯ 10分

十、解：令$P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，显然$P$可逆。记$\Lambda=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$，则依题意得$AP=P\Lambda$。

于是有$A=P\Lambda P^{-1}$，从而得$|A|=1$，即A可逆。⋯ 4分

由$A\alpha_1=\alpha_1$，$A\alpha_2=\alpha_1+\alpha_2$，$A\alpha_3=\alpha_2+\alpha_3$知

$A^{-1}\alpha_1=\alpha_1$，$A^{-1}(\alpha_1-\alpha_2)=2\alpha_1-\alpha_2$，$A^{-1}\alpha_3=\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3$.

则$A^{-1}(\alpha_1,\alpha_1-\alpha_2,\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_1-\alpha_2,\alpha_3)\Lambda$，令$Q=(\alpha_1,\alpha_1-\alpha_2,\alpha_3)$

则$|Q|=|P|\neq0$，从而其可逆且 $A^{-1}=Q\Lambda Q^{-1}$ ⋯ 8分

故A与A^{-1}均与Λ相似。 ⋯ 10分