1. (12 分) 给定向量 $\vec{a}=3\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$，$\vec{b}=\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$.

(1) 求 $\left|\vec{a}\right|$ 和 $\vec{a}\cdot\vec{b}$； (2) 计算以 $\vec{a}-2\vec{b}$ 和 $3\vec{a}+2\vec{b}$ 为边的三角形面积.

2. (25 分) (1) 设 $f(x,y)=\left(2x+y\right)^{2x+y}$，求 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial f}{\partial y}$.

(2) 设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $yz-\ln z=x+y$ 确定的隐函数，求 dz 和 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

(3) 设 $z=f(x,y)$ 是 R^2 上可微函数，它所表示的曲面与 xy 平面（即平面 $z=0$）的交线

为 $y=2x^2-3x+4$，又 $f_x(1,3)=2$，求 $f_y(1,3)$.

3. (10 分) 求下列积分 (1) $\iint\limits_D xydxdy$，其中 D 是由 $y^2=x$ 和 $y=x-2$ 围成的区域.

(2) $\iiint\limits_V \frac{x^2+y^2}{z^2}dxdydz$，其中 $V=\left\{(x,y,z)\middle|1\le z\le 2, x^2+y^2\le 2z\right\}$.

4. (10 分) 设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & x^2+y^2\ne 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$.

(1) 求 $f_x(0,0)$ 和 $f_y(0,0)$；(2) 证明： $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 不可微.

5. (10 分) 求 $f(x,y)=\sin(x^2+y^2)$ 在点 $(0,0)$ 的 6 阶带有佩亚诺型余项的泰勒公式，

并求出 $\frac{\partial^6 f}{\partial x^6}(0,0)$， $\frac{\partial^6 f}{\partial x^4\partial y^2}(0,0)$ 和 $\frac{\partial^6 f}{\partial x\partial y^5}(0,0)$.

6. (8 分) 设 $z=f(x,y)$ 是 R^2 上可微函数，$\vec{l_1}$ 和 $\vec{l_2}$ 是任意两个相互垂直的单位向量.

证明：在 R^2 上任意一点 P 处，$\left|gradf(P)\right|^2=\left(\left.\frac{\partial f}{\partial \vec{l_1}}\right|_P\right)^2+\left(\left.\frac{\partial f}{\partial \vec{l_2}}\right|_P\right)^2$.

7. (10 分) 设 $D=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2<1\right\}$，$f(x,y)$ 在 $\overline{D}=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\le 1\right\}$ 有连续的一阶偏导数，且满足

$$\left|f(x,y)\right|\le 1,\forall(x,y)\in\overline{D}.$$

证明：存在 $(x_0,y_0)\in D$，使得 $\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right)^2<16$.