课程编号：100171019　　　北京理工大学 2020-2021 学年第二学期

2020 级理科数学分析（II）期终考试试题 A 卷解答

1.（10 分）

(1) 已知 ΔABC 的三个顶点为 $A(1,1,0)$，$B(1,-1,2)$ 和 $C(2,3,1)$．求 ΔABC 的面积.

(2) 求过点 $(-3,2,4)$ 且垂直于平面 $2x+y-z-4=0$ 的直线方程，并求出此直线与平面 $x-2y+3z=0$ 的交点.

解：

(1) $\overrightarrow{AB}=(0,-2,2)$，$\overrightarrow{AC}=(1,2,1)$，

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & -2 & 2\\ 1 & 2 & 1\end{vmatrix}=(-6,2,2),$$

ΔABC 的面积 $S=\dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\dfrac{1}{2}\sqrt{(-6)^2+2^2+2^2}=\sqrt{11}$.

(2) 平面 $2x+y-z-4=0$ 法向量 $\vec{n}=(2,1,-1)$，

过点 $(-3,2,4)$ 且垂直于平面 $2x+y-z-4=0$ 的直线方程为

$$\vec{r}=(-3,2,4)+t(2,-1,1),$$

也可写成 $\begin{cases}x=-3+2t\\ y=2+t\\ z=4-4\end{cases}$，

代入方程 $x-2y+3z=0$，解得 $t=\dfrac{5}{3}$.

则交点为 $(\dfrac{1}{3},\dfrac{11}{3},\dfrac{7}{3})$.

2.（16 分）求下列函数的偏导数

（1）设 $z=\ln(x+y^2)$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$， $\frac{\partial z}{\partial y}$ 和 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

（2）设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $x^2+2y^2+3z^2+xy-z-9=0$ 所确定的隐函数，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$， $\frac{\partial z}{\partial y}$

和 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

解：

（1） $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{x+y^2}$，

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2y}{x+y^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{2y}{(x+y^2)^2}.$$

（2） $2x+6z\frac{\partial z}{\partial x}+y-\frac{\partial z}{\partial x}=0$，

$$4y+6z\frac{\partial z}{\partial y}+x-\frac{\partial z}{\partial y}=0,$$

$$2+6\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial x}+6z\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0.$$

3. (15 分) 求下列积分

(1) 求二重积分 $I=\iint\limits_{D}(x+y)dxdy$，其中 D 为由 $xy=1, x+y=\dfrac{5}{2}$ 所围的区域.

解：$I=\int_{\frac{1}{2}}^{2}dx\int_{\frac{1}{x}}^{\frac{5}{2}-x}(x+y)dy$

$$=\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left[x(\frac{5}{2}-x-\frac{1}{x})+\frac{1}{2}\left((\frac{5}{2}-x)^2-\frac{1}{x^2}\right)\right]dx$$

$$=\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left[\frac{17}{8}-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}\frac{1}{x^2}\right]dx=\frac{9}{8}.$$

(2) 求三重积分 $I=\iiint\limits_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz$，其中 Ω 为由 $x^2+y^2=z^2, z=1$ 所围区域.

解：记 $D=\left\{(x,y)\middle|\, x^2+y^2\le 1\right\}$.

$$I=\iint\limits_{D}dxdy\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1}\sqrt{x^2+y^2}\,dz$$

$$=\iint\limits_{D}\sqrt{x^2+y^2}(1-\sqrt{x^2+y^2})dxdy$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r(1-r)rdr=\frac{\pi}{6}.$$

方法二. 记 $D_z=\left\{(x,y)\middle|\, x^2+y^2\le z^2\right\}$.

$$I=\int_0^1 dz\iint\limits_{D_z}\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$$

$$=\int_0^1 dz\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^z r(1-r)rdr.$$

(3) 求 第 二 型 曲 面 积 分 $I=\iint\limits_{S}x^2dydz+y^2dzdx+3zdxdy$，其 中 S 是 曲 面 $x^2+y^2+z^2=1$，定向为外侧.

解：记 $\Omega=\left\{(x,y,z)\middle|\, x^2+y^2+z^2\le 1\right\}$.

$$I=\iiint\limits_{\Omega}(2x+2y+3)dxdydz$$

$$=\iiint\limits_{\Omega}3dxdydz=4\pi.$$

4.（14 分）求 $f(x,y)=x^3-y^3+3x^2+3y^2-9x$ 的极值.

解：$\begin{cases} f_x=3x^2+6x-9=0 \\ f_y=-3y^2+6y=0 \end{cases}$

解得稳定点 $(1,0),(1,2),(-3,0),(-3,2)$.

$f_{xx}=6x+6, f_{xy}=0, f_{yy}=-6y+6$.

在 $(1,0)$ 点， $A=12>0, B=0, C=6$， $AC-B^2>0$，

则 $(1,0)$ 是极小值点，极小值为 $f(1,0)=-5$.

在 $(1,2)$ 点， $A=12>0, B=0, C=-6$， $AC-B^2<0$，

则 $(1,2)$ 不是极值点 .

在 $(-3,0)$ 点， $A=-12<0, B=0, C=6$， $AC-B^2<0$，

则 $(-3,0)$ 不是极值点 .

在 $(-3,2)$ 点， $A=-12<0, B=0, C=-6$， $AC-B^2>0$，

则 $(-3,2)$ 是极大值点，极大值为 $f(-3,2)=31$.

5.（15 分）(1) 求幂级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{n}(x+1)^n$ 的收敛半径，收敛域.

(2) 求幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)x^{2n}$ 的和函数表达式.

解：(1) 记 $a_n=\frac{3^n+(-2)^n}{n}$.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n}{n+1}\frac{3+(-2)(-\frac{2}{3})^n}{1+(-\frac{2}{3})^n}\to 3,\quad n\to+\infty.$$

则收敛半径 $R=\frac{1}{3}$，

当 $x=-1-\frac{1}{3}$ 时，级数为 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{n}(-\frac{1}{3})^n=\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{(-1)^n}{n}+\frac{1}{n}(\frac{2}{3})^n\right]$，它收敛.

当 $x=-1+\frac{1}{3}$ 时，级数为 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{n}(\frac{1}{3})^n=\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{1}{n}+\frac{1}{n}(-\frac{2}{3})^n\right]$，它发散.

则收敛域 $[-1-\frac{1}{3},-1+\frac{1}{3})$.

(2) 记 $a_{2n}=n+1,a_{2n+1}=0$.

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[2n]{a_{2n}}=\lim_{n\to+\infty}(n+1)^{\frac{1}{2n}}=1.$$

则收敛半径 $R=1$，

当 $x=\pm1$ 时，级数为 $\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)(\pm1)^{2n}$，它发散.

则收敛域 $(-1,1)$.

记 $T(y)=\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)y^n$， $S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)x^{2n}=T(x^2)$.

$$T(y)=\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)y^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(y^{n+1}\right)'=\left(\sum_{n=0}^{+\infty}y^{n+1}\right)'$$

$$=\left(y\sum_{n=0}^{+\infty}y^n\right)'=\frac{1}{(1-y)^2}.$$

则 $S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)x^{2n}=T(x^2)=\frac{1}{(1-x^2)^2},x\in(-1,1)$.

6. (8 分) 设 $f(x)=\dfrac{1}{x^2+4x+7}$.

(1) 求 $f(x)$ 在 $x=-2$ 的 Taylor 级数展开式;

(2) 求 $f^{(10)}(-2)$.

解: (1) $f(x)=\dfrac{1}{(x+2)^2+3}=\dfrac{1}{3}\dfrac{1}{1+(\dfrac{x+2}{\sqrt{3}})^2}$

$$=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\left[(\frac{x+2}{\sqrt{3}})^2\right]^n$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}(x+2)^{2n},\quad \left|(\frac{x+2}{\sqrt{3}})^2\right|<1 \text{ 即 } x\in(-2-\sqrt{3},-2+\sqrt{3})$$

(2) $\dfrac{f^{(10)}(-2)}{10!}=\dfrac{(-1)^5}{3^{5+1}}$,

则 $f^{(10)}(-2)=-\dfrac{10!}{3^6}$.

7.(12 分)证明：$\int_1^{+\infty}\frac{e^{\sin x}\cos x}{x^p}dx$当$p>1$时绝对收敛；当$0<p\le 1$时条件收敛；当$p\le 0$时发散.

证明：(1)设$p>1$.

$$\left|\frac{e^{\sin x}\cos x}{x^p}\right|\le\frac{e}{x^p},\quad x\ge 1.$$

$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx$收敛，由比较判别法，$\int_1^{+\infty}\frac{e^{\sin x}\cos x}{x^p}dx$绝对收敛.

(2) 设$0<p\le 1$.

$$\frac{1}{x^p}\text{在}[1,+\infty)\text{单调递减，}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^p}=0\text{；}$$

$$\left|\int_1^A e^{\sin x}\cos x dx\right|=\left|e^{\sin x}\Big|_1^A\right|\le 2e,\quad \forall A\ge 1.$$

由 Dirichlet 判别法，$\int_1^{+\infty}\frac{e^{\sin x}\cos x}{x^p}dx$收敛.

$$\left|\frac{e^{\sin x}\cos x}{x^p}\right|\ge e^{-1}\left|\frac{\cos x}{x^p}\right|\ge e^{-1}\frac{\cos^2 x}{x^p}=e^{-1}\left(\frac{1}{2x^p}+\frac{\cos 2x}{2x^p}\right),\quad x\ge 1$$

$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx$发散，同上可证，$\int_1^{+\infty}\frac{\cos 2x}{2x^p}dx$收敛，则$\int_1^{+\infty}\left|\frac{\cos x}{x^p}\right|dx$发散，由比较判别法，$\int_1^{+\infty}\left|\frac{e^{\sin x}\cos x}{x^p}\right|dx$发散.

(3)设$p\le 0$.

$$x\ge 1\Rightarrow\frac{1}{x^p}\ge 1,\qquad \forall n\ge 1,\ x\in\left[2n\pi,2n\pi+\frac{\pi}{4}\right],\ \cos x\ge\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\int_{2n\pi}^{2n\pi+\frac{\pi}{4}}\frac{e^{\sin x}\cos x}{x^p}dx\ge\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\pi}{4},$$

根据 Cauchy 收敛原理，$\int_1^{+\infty}\frac{e^{\sin x}\cos x}{x^p}dx$发散.

8. (10 分) 设 $a_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x dx$

(1) 求 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}(a_n+a_{n+2})$.

(2) 证明：对任意的正数 p， $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{n^p}$ 收敛.

(3) 判断级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ 的收敛性，并给出证明.

证明：(1) $a_n+a_{n+2}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\tan^n x+\tan^{n+2} x\right)dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\sec^2 xdx$

$$=\frac{1}{n+1}\tan^{n+1}x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{n+1},$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}(a_n+a_{n+2})=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\lim_{N\to+\infty}\left(1-\frac{1}{N+1}\right)=1.$$

(2) 令 $t=\tan x$，

$$0<a_n=\int_0^1\frac{t^n}{1+t^2}dt<\int_0^1 t^n dt=\frac{1}{n+1}<\frac{1}{n},$$

对任意的正数 p， $p+1>1$，而 $\frac{a_n}{n^p}<\frac{1}{n^{p+1}}$，则 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{n^p}$ 收敛.

(3) $a_n=\int_0^1\frac{t^n}{1+t^2}dt>\frac{1}{2}\int_0^1 t^n dt=\frac{1}{2}\frac{1}{n+1}$,

则 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ 发散.