2019-2020 学年第一学期样题答案

一、填空题（每小题 4 分，共 20 分）

1、已知方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{I}=\boldsymbol{O}$，则 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})^{-1}=$______ $\dfrac{(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I})}{2}$ ______。

2、设 $\boldsymbol{A}$ 是一个 4 阶方阵，且 $r(\boldsymbol{A})=2$，则其伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 的秩为____0____ 。

3、已知 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$ 都是 4 元列向量，且 4 阶行列式 $|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1|=m$，$|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|=n$，则 4 阶行列式 $|\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2|=$ ___ $n-m$ ______。

4、已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&2&1\\0&0&2\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&3\\1&5\end{pmatrix}$，则 $\begin{vmatrix}\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}&\boldsymbol{O}\end{vmatrix}=$____84____。

5、已知 $\boldsymbol{A}$ 是一个 3 阶方阵，$\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$ 的初等因子为 $\lambda-1,(\lambda-2)^2$，则 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准形为

______ $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&1\\0&0&1\end{bmatrix}$ ______。

二(10 分)、设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&1&0\\1&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，矩阵 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{ABA}^*=2\boldsymbol{BA}^*+\boldsymbol{I}$，其中 $\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，求矩阵 $\boldsymbol{B}$ 。

解：在 $\boldsymbol{ABA}^*=2\boldsymbol{BA}^*+\boldsymbol{I}$ 两边同时右乘 $\boldsymbol{A}$ 可得

$$|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{AB}=2|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$$

由题意可得 $$|\boldsymbol{A}|=3$$

则有 $$(3\boldsymbol{A}-6\boldsymbol{I})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}$$

因此

$$\boldsymbol{B}=(3\boldsymbol{A}-6\boldsymbol{I})^{-1}\boldsymbol{A}=\frac{1}{3}(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I})^{-1}\boldsymbol{A}$$

又因为 $$(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I})^{-1}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{B}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&2&0\\2&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

三(10 分)、

已知 $\boldsymbol{E}_1=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{E}_2=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{E}_3=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$和$\boldsymbol{F}_1=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{F}_2=\begin{bmatrix}0&2\\0&-1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{F}_3=\begin{bmatrix}1&3\\0&5\end{bmatrix}$是全体2 阶上三角矩阵所构成的线性空间$\boldsymbol{V}$的两组基。

（1） 求从基 $\boldsymbol{E}_1,\boldsymbol{E}_2,\boldsymbol{E}_3$ 到基 $\boldsymbol{F}_1,\boldsymbol{F}_2,\boldsymbol{F}_3$ 的过渡矩阵；

（2） 求上三角矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2\\0&3\end{bmatrix}$在 $\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}_2$，$\boldsymbol{F}_3$ 下的坐标。

解：（1）设由矩阵 $\boldsymbol{E}_1,\boldsymbol{E}_2,\boldsymbol{E}_3$ **到** $\boldsymbol{F}_1,\boldsymbol{F}_2,\boldsymbol{F}_3$ 的过渡矩阵为 $\boldsymbol{P}$,由题意

$$\left(\boldsymbol{F}_1,\boldsymbol{F}_2,\boldsymbol{F}_3\right)=\left(\boldsymbol{E}_1,\boldsymbol{E}_2,\boldsymbol{E}_3\right)\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&3\\1&-1&5\end{pmatrix}$$

因此

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&3\\1&-1&5\end{pmatrix}$$

（2）设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2\\0&3\end{bmatrix}$在 $\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}_2$，$\boldsymbol{F}_3$ 下的坐标为$\left(y_1,y_2,y_3\right)^T$

$$\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=\boldsymbol{P}^{-1}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}，\text{其中}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$$

因为

$$\boldsymbol{P}^{-1}=\frac{1}{11}\begin{pmatrix}13&-1&-2\\3&4&-3\\-2&1&2\end{pmatrix}$$

所以

$$\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=\boldsymbol{P}^{-1}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\frac{1}{11}\begin{pmatrix}5\\2\\6\end{pmatrix}$$

四(10 分)、已知四阶方阵 $\boldsymbol{A}=\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4\right)$，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 均为四元列向量,其中 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关，且 $\boldsymbol{\alpha}_1=2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$ 。如果 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4$ ，求线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解。

解：由题意可知 $\boldsymbol{r}\left(\boldsymbol{A}\right)=3$，那么导出方程组基础解系里含有一个向量。等式 $\boldsymbol{\alpha}_1=2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$ 可以变形为

$$\alpha_1-2\alpha_2+\alpha_3+0\alpha_4=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}=0$$

则 $X=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}$ 为 $Ax=\beta$ 导出组的解，并为其基础解系。

等式 $\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$ 可以变形为

$$\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$$

则有 $X_0=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$ 为 $Ax=\beta$ 的特解。

所以方程组 $Ax=\beta$ 的通解为 X_0+kX，其中 k 为任意的常数。

五(10 分)、设向量组 $\alpha_1=(1,-1,2,1)^T,\alpha_2=(2,-2,4,2)^T,\alpha_3=(3,0,6,-1)^T,\alpha_4=(0,3,0,-4)^T$。(1) 求 $L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ 的维数和一组基；(2) 求 $L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ 的一组标准正交基。

解：(1) 因为向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的任意一个极大无关组都可以作为 $L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ 的一组基，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的秩为 $L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ 的维数，故求 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的秩和它的一个极大无关组

$$\begin{pmatrix}1&2&3&0\\-1&-2&0&3\\2&4&6&0\\1&2&-1&-4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&3&0\\0&0&3&3\\0&0&0&0\\0&0&-4&-4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&3&0\\0&0&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

可得 $L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ 的维数为 2，而 α_1,α_3 为 $L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ 的一组基；

(2) 把 α_1,α_3 正交化、单位化

正交化： $\beta_1=\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\1\end{pmatrix}$

$$\beta_2=\alpha_3-\frac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=\begin{pmatrix}3\\0\\6\\-1\end{pmatrix}-\frac{14}{7}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\2\\-3\end{pmatrix}$$

单位化：
$$\eta_1=\frac{\beta_1}{|\beta_1|}=\frac{1}{\sqrt{7}}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\1\end{pmatrix},\eta_2=\frac{\beta_2}{|\beta_2|}=\frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\2\\2\\-3\end{pmatrix}$$

则η_1,η_2为$L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$的一组标准正交基。

六(15 分)、已知$A=\begin{pmatrix}2&a&2\\5&b&3\\-1&1&-1\end{pmatrix}$有特征值$\pm1$。问$A$能否对角化？并说明理由。

解：由题意
$$|I-A|=\begin{vmatrix}-1&-a&-2\\-5&1-b&-3\\1&-1&2\end{vmatrix}=-7a-7=0$$

可得$a=-1$；
$$|-I-A|=\begin{vmatrix}-3&1&-2\\-5&-1-b&-3\\1&-1&0\end{vmatrix}=-2b-6=0$$

可得$b=-3$；
因此
$$A=\begin{pmatrix}2&-1&2\\5&-3&3\\-1&1&-1\end{pmatrix}$$

设A的另一个特征值为λ_3，则由已知有
$$tr(A)=2-3-1=1+(-1)+\lambda_3$$

可得$\lambda_3=-2$；

综上，A是 3 阶方阵，有 3 个不同的特征值，A可以对角化。

七(15 分)、二次型$f(x_1, x_2, x_3)=4x_2^2-3x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3+8x_2x_3$经过正交替换$X=QY$化为标准形$y_1^2+6y_2^2+qy_3^2$，求实参数$q$及所用的正交矩阵$Q$，并进一步判断此二次型是否正定。

解：（1）由于二次型$f(x_1, x_2, x_3)=4x_2^2-3x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3+8x_2x_3$对应的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 4 \\ -2 & 4 & -3 \end{pmatrix}$$

又因为正交变换所得标准形的平方项系数为矩阵 A 的特征值，所以

$$tr(A)=0+4+(-3)=1+6+q$$

可得 $q=-6$，也就是 λ_3=-6

当 λ_1=1时，解方程组 $\left(I-A\right)X=0$ 可得基础解系为 $X_1=\left(-2 \quad 0 \quad 1\right)^T$，则 X_1 为 λ_1=1对应的特征向量；

当 λ_2=6 时，解方程组 $\left(6I-A\right)X=0$ 可得基础解系为 $X_2=\left(1 \quad 5 \quad 2\right)^T$，则 X_2 为 λ_2=6 对应的特征向量；

当 λ_3=-6 时，解方程组 $\left(-6I-A\right)X=0$ 可得基础解系为 $X_3=\left(1 \quad -1 \quad 2\right)^T$，则 X_3 为 λ_3=-6 对应的特征向量；

由于正交矩阵不同特征值对应的特征向量彼此正交，只需对 X_1,X_2,X_3 单位化，可得

$$\eta_1=\frac{X_1}{|X_1|}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(-2 \quad 0 \quad 1\right)^T,\eta_2=\frac{X_2}{|X_2|}=\frac{1}{\sqrt{30}}\left(1 \quad 5 \quad 2\right)^T,\eta_3=\frac{X_3}{|X_3|}=\frac{1}{\sqrt{6}}\left(1 \quad -1 \quad 2\right)^T$$

则所求的正交矩阵为

$$Q=\begin{pmatrix} \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{5}{\sqrt{30}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{30}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

（2）因为矩阵 A 的特征值不全大于 0，所以二次型不正定。

八(10 分)、设 A 为 3 阶方阵，λ_1，λ_2，λ_3 是 A 的三个不同特征值，对应的特征向量分别为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$，令 $\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$ 。证明：β，$A\beta$，$A^2\beta$ 线性无关。

证明：由已知可得

$$A\beta=A\left(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3\right)=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\lambda_3\alpha_3$$

$$A^2\beta=A^2\left(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3\right)=\lambda_1^2\alpha_1+\lambda_2^2\alpha_2+\lambda_3^2\alpha_3$$

$$\left(\beta,A\beta,A^2\beta\right)=\left(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\lambda_3\alpha_3,\lambda_1^2\alpha_1+\lambda_2^2\alpha_2+\lambda_3^2\alpha_3\right)$$

$$=\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right)\begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 \\ 1 & \lambda_3 & \lambda_3^2 \end{pmatrix}$$

因为$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$属于不同特征值，所以$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$，又因为

$$\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \lambda_1 & {\lambda_1}^2 \\ \mathbf{1} & \lambda_2 & {\lambda_2}^2 \\ \mathbf{1} & \lambda_3 & {\lambda_3}^2 \end{vmatrix} = (\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2) \neq \mathbf{0}$$

所以$\boldsymbol{\beta}$，$\boldsymbol{A\beta}$，$\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\beta}$ 线性无关。