课程编号：100171018　　　北京理工大学 2020-2021 学年第一学期

2020 级理科数学分析（I）期终考试试题 A 卷

座号______班级__________学号___________姓名________成绩______

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
得分										
签名										

1.（10 分）求下列极限

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$　　　　（2）$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{n+n}\right)$

2.（8 分）求下列积分

（1）$\int_0^4 \cos\sqrt{x}dx$　　　　（2）$\int_0^4 \left(x-[x]\right)dx$

3.（10 分）求微分方程 $y''+y=x^2+x$ 的通解.

4.（14 分）

（1）求由 $\begin{cases} x=t\ln t \\ y=e^t \end{cases}$ 所确定的函数 $y=y(x)$ 的一阶导数 $\dfrac{dy}{dx}$ 和二阶导数 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

（2）设 $y=(x^2+2x+3)e^x$，求 $\dfrac{d^ny}{dx^n}(n=1,2,\cdots)$.

5.（10 分）设 $a\ge 1$．证明：方程 $ae^x=1+x+\dfrac{x^2}{2}$ 恰有一个实根.

6.（8 分）求 $f(x)=\sqrt{1+x}\sin x$ 在 $x=0$ 的 4 阶泰勒多项式，并求 $f^{(4)}(0)$.

7.（10 分）

(1) 叙述 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L$ 的定义，并利用定义证明 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\dfrac{1}{2}$.

(2) 利用一致连续定义证明：$f(x)=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 一致连续.

8.（10 分）

(1) 证明：数列 $\{\sin n\}$ 发散.

(2) 设 $\{a_n\}$ 是单调数列，$\{b_n\}$ 是有界数列，且 $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n-b_n)=0$，证明：$\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ 和 $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n$ 都存在且相等.

9.（10 分）

(1) 设 $\int f'(\sqrt{x})\,dx = x(e^{\sqrt{x}}+1)+C$，求 $f(x)$.

(2) 证明：对任意的 $x>0$，都存在 $\theta\in(0,1)$，使得 $\int_0^x e^t dt = xe^{\theta x}$，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}\theta=1$.

10.（10 分）设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续，在 $(0,1)$ 二阶可导，并满足

$$f(0)=f(1)=0,\quad f''(x)<0\ (0<x<1),$$

又设 M 是 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 的最大值.

(1) 能否推出 $M>0$？只回答“能”或“不能”，不用给出证明.

(2) 设 $M>0$. 证明：

(a) 对任意的正整数 n，存在唯一的 $x_n\in(0,1)$，使得 $f'(x_n)=\dfrac{M}{n}$；

(b) 极限 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ 存在，且 $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)=M$.

座号______班级__________学号___________姓名________成绩______