一、 填空 10% （每小题 2 分）

1、 设$<A,\vee,\wedge,->$是由有限布尔格$<A,\leq>$诱导的代数系统，S 是布尔格$<A,\leq>$，中所有原子的集合，则$<A,\vee,\wedge,->$ ～ ________________________________ 。

2、 集合 S={α，β，γ，δ}上的二元运算*为

*	α	β	γ	δ
α	δ	α	β	γ
β	α	β	γ	δ
γ	β	γ	γ	γ
δ	α	δ	γ	δ

那么，代数系统<S, *>中的幺元是 __________ ，α 的逆元是 __________ 。

3、 设 I 是整数集合，Z_3是由模 3 的同余类组成的同余类集，在Z_3上定义$+_3$如下：

$[i]+_3[j]=[(i+j)\bmod 3]$，则$+_3$的运算表为 ____________________________ ；

$<Z_+,+_3>$是否构成群 ____________________ 。

4、 设 G 是 n 阶完全图，则 G 的边数 m= ____________________ 。

5、 如果有一台计算机，它有一条加法指令，可计算四数的和。现有 28 个数需要计算和，它至少要执行 ________________ 次这个加法指令。

二、 选择 20% （每小题 2 分）

1、 在有理数集 Q 上定义的二元运算*，$\forall x,y\in Q$有$x*y=x+y-xy$，

则 Q 中满足（　　　　　）。

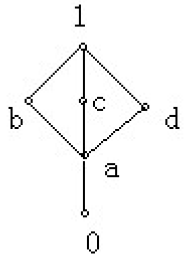
A、 所有元素都有逆元；　　　　B、只有唯一逆元；

C、$\forall x\in Q, x\neq 1$时有逆元x^{-1}；　D、所有元素都无逆元。

2、 设 S={0，1}，*为普通乘法，则< S , * >是（　　　　　　）。

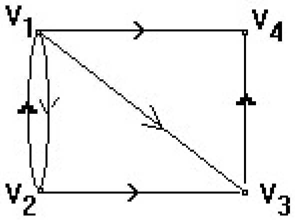
A、 半群，但不是独异点；　B、只是独异点，但不是群；

C、群；　　　　　　　　　　D、环，但不是群。

3、图 

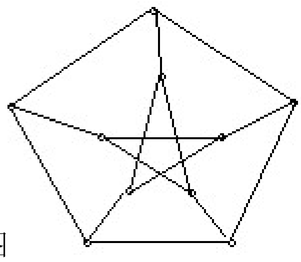
给出一个格 L，则 L 是（　　　　　　）。

A、分配格；　B、有补格；　C、布尔格；　D、 A,B,C 都不对。

3、 有向图 D=<V , E> 

，则 v_1到v_4长度为 2 的通路有（　　　）条。

A、0；　　B、1；　　C、2；　　D、3 。

4、 在 Peterson 图  中，至少填加（　　　　）条边才能构成 Euler 图。

A、1；　　B、2；　　C、4；　　D、5 。

三、　　判断 10% （每小题 2 分）

1、 在代数系统<A,*>中如果元素 $a \in A$ 的左逆元 a_e^{-1} 存在，

则它一定唯一且 $a^{-1} = a_e^{-1}$。（　　　　　）

2、 设<S,*>是群<G,*>的子群，则<G,*>中幺元 e 是<S,*>中幺元。（　　　　　　）

3、 设 $A = \{x \mid x = a + b\sqrt{3},\quad a,b\text{均为有理数}\}$， +, • 为普通加法和乘法，则代数系统<A，+，• >是域。（　　　　　）

4、 设 G=<V ,E >是平面图，|V|=v, |E|=e，r 为其面数，则 v-e + r=2。（　　　　　）

5、 如果一个有向图 D 是欧拉图，则 D 是强连通图。（　　　　　）

四、证明 46%

1、 设<A,*>，是半群，e 是左幺元且 $\forall x \in A, \exists \hat{x} \in A$，使得 $\hat{x} * x = e$，

则<A , *>是群。（10 分）

2、 循环群的任何非平凡子群也是循环群。（10 分）

3、 设 aH 和 bH 是子群 H 在群 G 中的两个左陪集，证明：要末 $aH \cap bH = \Phi$，要末 $aH = bH$。（8 分）

4、 设<A ,+ , • >，是一个含幺环，|A|>3，且对任意 $\forall a \in A$，都有 $a \cdot a = a$，则<A ,+ , • >不可能是整环（这时称<A，+，• >是布尔环）。（8 分）

5、 若图 G 不连通，则 G 的补图 $\overline{G}$ 是连通的。（10 分）

五、布尔表达式 8%

设 $E(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \wedge x_2) \vee (x_2 \wedge x_3) \vee (\overline{x_2} \wedge x_3)$ 是布尔代数 $< \{0,1\}, \vee, \wedge, ^{-} >$ 上的一个布尔表达式，试写出其的析取范式和合取范式。

六、图的应用 16%

1、 构造一个结点 v 与边数 e 奇偶性相反的欧拉图。（6 分）

2、 假设英文字母，a，e，h，n，p，r，w，y 出现的频率分别为 12%，8%，15%，7%，6%，10%，5%，10%，求传输它们的最佳前缀码，并给出 happy new year 的编码信息。（10 分）

一、　填空 10%（每小题 2 分）

1、<𝒫(S)，∪,∩,～>；2、β，γ；3、

$+_3$	[0]	[1]	[2]
[0]	[0]	[1]	[2]
[1]	[1]	[2]	[0]
[2]	[2]	[0]	[1]

是；

4、$\frac{1}{2}n(n-1)$；5、9

二、 **选择 10%（每小题 2 分）**

题目	1	2	3	4	5
答案	C	B	D	B	D

三、 **判断 10%（每小题 2 分）**

题目	1	2	3	4	5
答案	N	Y	Y	N	Y

四、 **证明 46%**

1、（10 分）证明：

（1）$\forall a,b,c \in A$，若 $a*b=a*c$ 则 $b=c$

事实上：$\Theta\ a*b=a*c\ \therefore \exists \hat{a}$ 使 $\hat{a}*(a*b)=\hat{a}*(a*c)$
$(\hat{a}*a)*b=(\hat{a}*a)*c, \therefore e*b=e*c$
即：$b=c$

(2) e 是<A，*>之幺元。

事实上：由于 e 是左幺元，现证 e 是右幺元。

$\forall x \in A, x*e \in A, \exists \hat{x}$ 使 $\hat{x}*(x*e)=(\hat{x}*x)*e=e*e=e=\hat{x}*x$
由(1)即 $x*e=x$， $\therefore e$ 为右幺元

（3）$\forall x \in A$，则 $x^{-1} \in A$

事实上：$\forall x \in A\ \ (x*\hat{x})*x=x*(\hat{x}*x)=x*e=x=e*x$
$x*\hat{x}=e$ 故有 $\hat{x}*x=x*\hat{x}=e\quad \therefore x$ 有逆元 $\hat{x}$

由（2），（3）知：<A,*>为群。

2、（10 分）证明：

设<G,*>是循环群,G=(a)，设<S,*>是<G,*>的子群。且 $S \neq \{e\}, S \neq G$，则存在最小正整数 m，使得：$a^m \in S$，对任意 $a^l \in S$，必有 $l=tm+r,\quad 0 \le r < m,\quad t>0$，

故：$a^r=a^{l-tm}=a^l*a^{-tm}=a^l*(a^m)^{-t} \in S$　即：$a^l=a^r*(a^m)^t \in S$

所以 $a^r \in S$ 但 m 是使 $a^m \in S$ 的最小正整数，且 $0 \le r < m$，所以 r=0 即：$a^l=(a^m)^t$

这说明 S 中任意元素是 a^m 的乘幂。 所以<G,*>是以 a^m 为生成元的循环群。

3、（8 分）证明：

对集合 aH 和 bH，只有下列两种情况：

（1）$aH \cap bH \neq \Phi$ ； （2）$aH \cap bH = \Phi$

对于 $aH \cap bH \neq \Phi$，则至少存在 $h_1, h_2 \in H$，使得 $ah_1 = bh_2$，即有 $a = bh_2h_1^{-1}$，这时任意 $ah \in aH$，有 $ah = bh_2h_1^{-1}h \in bH$，故有 $aH \subseteq bH$

同理可证：$bH \subseteq aH$ 所以 $aH = bH$

4、（8 分）证明：

反证法：如果<A，+，• >，是整环，且有三个以上元素，则存在 $a \in A, a \neq \theta, a \neq 1$ 且 $a \cdot a = a$

即有：$a \neq \theta, a-1 \neq \theta$ 但 $a \cdot (a-1) = a \cdot a - a = a - a = \theta$ 这与整环中无零因子条件矛盾。因此<A，+，• >不可能是整环。

5、（10 分）证明：

因为 G=< V，E>不连通，设其连通分支是 $G(V_1), \Lambda\ , G(V_k) \quad (k \geq 2)$，$\forall u, v \in V$，则有两种情况：

（1） u , v，分别属于两个不同结点子集 V_i. V_j，由于 $G(V_i)$, $G(V_j)$是两连通分支，故(u , v)在不 G 中，故 u , v 在 $\overline{G}$ 中连通。

（2） u ,v ，属于同一个结点子集 V_i，可在另一结点子集 V_j 中任取一点 w，故(u , w),(w , v)均在 $\overline{G}$ 中，故邻接边(u ,w) (w , v) 组成的路连接结点 u 和 v，即 u , v 在 $\overline{G}$ 中也是连通的。

五、布尔表达式 8%

函数表为：

x_1	x_2	x_3	$E(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0

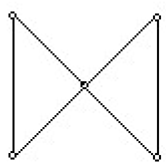
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

析取范式：$E(x_1,x_2,x_3)=(\bar{x}_1\wedge\bar{x}_2\wedge x_3)\vee(\bar{x}_1\wedge x_2\wedge x_3)\vee(x_1\wedge\bar{x}_2\wedge x_3)$
$\vee(x_1\wedge x_2\wedge\bar{x}_3)\vee(x_1\wedge x_2\wedge x_3)$

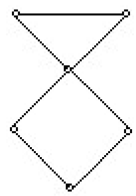
合取范式：$E(x_1,x_2,x_3)=(x_1\vee x\vee_2 x_3)\wedge(x_1\vee\bar{x}_2\vee x_3)\wedge(\bar{x}_1\vee x_2\vee x_3)$

六、 树的应用 16%

1、（6 分）解：



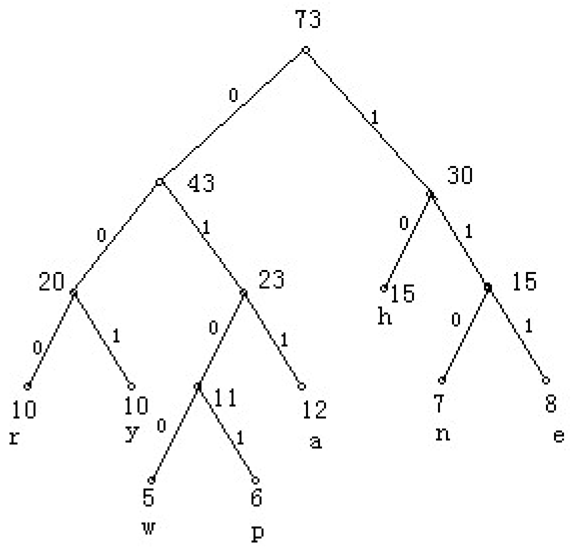
结点数5，边数6，每个结点度数均为偶数，所以它是欧拉图。



结点数6，边数7，每个结点度数均为偶数，所以它是欧拉图。

2、（10 分）解：

根据权数构造最优二叉树：



传输它们的最佳前缀码如上图所示，happy new year 的编码信息为：

10 011 0101 0101 001 110 111 0100 001 111 011 000

附：最优二叉树求解过程如下：

5 6 7 8 10 10 12 15

11 7 8 10 10 12 15

11 15 10 10 12 15

11 15 20 12 15

15 20 23 15

20 23 30

43 30

73