课程编号：100171019　　　北京理工大学 2019-2020 学年第二学期

2019 级理科数学分析（II）期终考试试题 A 卷

1.（10 分）

（1）给定向量 $\vec{a}=(3,2,1)$，$\vec{b}=(1,-1,2)$． 求 $\vec{a}+2\vec{b}$，$\left|\vec{a}\right|$ 和 $\vec{a}\cdot\vec{b}$．

（2）求过点 $(1,1,-1)$，$(-2,-2,2)$，$(1,-1,2)$ 的平面方程.

解：（1） $\vec{a}+2\vec{b}=(5,0,5)$，

$$\left|\vec{a}\right|=\sqrt{3^2+2^2+1^2}=\sqrt{14},$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=3-2+2=3.$$

（2）记 $\vec{a}=(-2,-2,2)-(1,1,-1)=(-3,-3,3)$，

$$\vec{b}=(1,-1,2)-(1,1,-1)=(0,-2,3),$$

平面的法向量是 $\vec{n}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1 & -1 & 1\\ 0 & -2 & 3\end{vmatrix}=(-1,3,2)$，

平面方程为 $\left(\vec{r}-(1,1,-1)\right)\cdot\vec{n}=0$，

$$-x+3y+2z=0.$$

2.（16 分）求下列函数的偏导数

（1）设 $u=(xy)^z$， 求 $\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{(1,1,1)}$， $\left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{(1,1,1)}$ 和 $\left.\dfrac{\partial u}{\partial z}\right|_{(1,1,1)}$．

解：（1） $u(x,1,1)=x$， $\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{(1,1,1)}=1$，

方法二： $\dfrac{\partial u}{\partial x}=z(xy)^{z-1}y$．

$u(1,y,1)=y$， $\left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{(1,1,1)}=1$，

$u(1,1,z)=1$， $\left.\dfrac{\partial u}{\partial z}\right|_{(1,1,1)}=0$．

(2) 设 $z=z(x,y)$ 由方程 $yz-\ln z=x+y$ 所确定的隐函数，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$， $\frac{\partial z}{\partial y}$ 和 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

解： $y\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial x}=1$，

$$z+y\frac{\partial z}{\partial y}-\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial y}=1,$$

$$y\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{1}{z^2}\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{1}{z}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0.$$

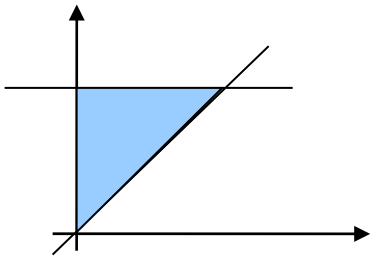
3. (15 分)

(1) 求二重积分 $I=\iint\limits_D 2y^2\sin(xy)dxdy$， 其中 D 为由 $x=0, y=2, y=x$ 所围的区域.

解：(1) $I=\iint\limits_D 2y^2\sin(xy)dxdy$

$$=\int_0^2 dy\int_0^y 2y^2\sin(xy)dx$$

$$=4-\sin 4.$$



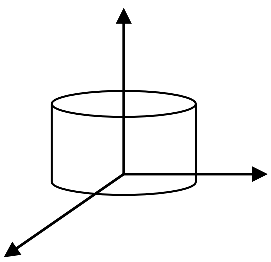
(2) 求三重积分 $I=\iiint\limits_\Omega (x+y+z)dxdydz$， 其中 $\Omega=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2\le 4, 0\le z\le 1\}$

解：记 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 4\}$.

$$I=\iiint\limits_\Omega (x+y+z)dxdydz,$$

$$=\iint\limits_D dxdy\int_0^1(x+y+z)dz=\iint\limits_D (x+y+\frac{1}{2})dxdy$$

$$=\frac{1}{2}\iint\limits_D dxdy=2\pi.$$



方法二： $I=\int_0^1 dz\iint\limits_D (x+y+z)dxdy$.

(3)证明第二型曲线积分 $I=\int_{(0,0)}^{(1,1)}(x+y)dx+(x-y)dy$ 与路径无关，并求其积分值.

解：$P(x,y)=x+y$，$Q(x,y)=x-y$，则 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=1$. 那么积分与路径无关.

记 $A(0,1),B(1,1)$. 则

$$\begin{aligned}I&=\int_{(0,0)}^{(1,1)}(x+y)dx+(x-y)dy\\&=\int_{OA}(x+y)dx+(x-y)dy+\int_{AB}(x+y)dx+(x-y)dy\\&=\int_0^1 xdx+\int_0^1(1-y)dy=1.\end{aligned}$$

4.(12 分)求幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^n}{n+1}x^n$ 的收敛半径，收敛域及和函数的表达式.

解：记 $a_n=\frac{2^n}{n+1}$，$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\frac{2^{n+1}}{n+2}}{\frac{2^n}{n+1}}\to 2,n\to+\infty.$

则收敛半径 $R=\frac{1}{2}$.

当 $x=\frac{1}{2}$ 时，级数 $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n+1}$ 发散；当 $x=-\frac{1}{2}$ 时，级数 $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$ 收敛；

则收敛域是 $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$.

记 $S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^n}{n+1}x^n$.

$$\forall x\in(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}),\quad xS(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^n}{n+1}x^{n+1},$$

$$\left(xS(x)\right)'=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{2^n}{n+1}x^{n+1}\right)'=\sum_{n=0}^{+\infty}(2x)^n=\frac{1}{1-2x},$$

$$xS(x)=-\frac{1}{2}\ln(1-2x),$$

$$S(x)=\begin{cases}-\dfrac{\ln(1-2x)}{2x} & x\neq 0\\ 1 & x=0\end{cases}.$$

5.(15 分)设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的函数，它在区间 $(-\pi,\pi]$ 上的表达式为 $f(x)=x^2$.

(1)求 $f(x)$ 的 Fourier 级数；

(2)求 $f(x)$ 的 Fourier 级数的和函数在区间 $[-\pi,2\pi]$ 上的表达式；

(3)求 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$， $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}$.

解： $a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2dx=\frac{2\pi^2}{3}$.

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\cos nxdx=\frac{4(-1)^n}{n^2}.$$

$b_n=0$.

(1) $f(x)$ 的 Fourier 级数为

$$f(x)\sim\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4(-1)^n}{n^2}\cos nx;$$

(2) $\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4(-1)^n}{n^2}\cos nx=\begin{cases}x^2 & x\in[-\pi,\pi]\\(x-2\pi)^2 & x\in(\pi,2\pi]\end{cases}$;

(3)取 $x=\pi$， $\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4(-1)^n}{n^2}\cos n\pi=\pi^2$，

则 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$；

利用 Parseval 等式， $\frac{a_0^{\ 2}}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n^{\ 2}+b_n^{\ 2}\right)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx$，

$$\frac{1}{2}\left(\frac{2\pi^2}{3}\right)^2+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{16}{n^4}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^4dx,$$

则 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}$.

6.(12 分)证明：$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x\arctan x}{x^p}dx$ 当$1<p<3$时绝对收敛，当$0<p\le 1$时条件收敛，其余情况下发散.

证明：$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x\arctan x}{x^p}dx=\int_0^{1}\frac{\sin x\arctan x}{x^p}dx+\int_1^{+\infty}\frac{\sin x\arctan x}{x^p}dx\ =I_1+I_2$

(1) $x^{p-2}\frac{\sin x\arctan x}{x^p}=\frac{\sin x}{x}\frac{\arctan x}{x}\to 1, x\to 0^+$,

则I_1收敛当且仅当$p-2<1$，即$p<3$.

(2)设$p>1$.

$$\left|\frac{\sin x\arctan x}{x^p}\right|\le\frac{\pi}{2}\frac{1}{x^p},\forall x\ge 1,$$

由比较判别法，此时I_2绝对收敛.

(3)设$0<p\le 1$.

$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}dx$ 收敛，$\arctan x$在$[1,+\infty)$单调递增，且$\frac{\pi}{4}\le\arctan x<\frac{\pi}{2},\forall x\ge 1$，利用 Abel 判别法，$I_2$收敛.

$$\left|\frac{\sin x\arctan x}{x^p}\right|\ge\frac{\pi}{4}\left|\frac{\sin x}{x^p}\right|,\forall x\ge 1,$$

当$0<p\le 1$时，$\int_1^{+\infty}\left|\frac{\sin x}{x^p}\right|dx$ 发散，则$\int_1^{+\infty}\left|\frac{\sin x\arctan x}{x^p}\right|dx$ 发散.

故当$0<p\le 1$时，I_2条件收敛.

(4)设$p\le 0$.

因为$p\le 0$，所以$\forall x\ge 1$，$\frac{1}{x^p}\ge 1$. 于是$\forall n\in\mathbb{N}$，

$$\int_{2n\pi+\frac{\pi}{4}}^{2n\pi+\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x\arctan x}{x^p}dx\ge\int_{2n\pi+\frac{\pi}{4}}^{2n\pi+\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\pi}{4}dx=\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\pi}{4}\frac{\pi}{4},$$

根据柯西收敛原理，此时I_2发散.

方法二：假设$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x\arctan x}{x^p}dx$ 收敛，$\frac{1}{\arctan x}$在$[1,+\infty)$单调递减，且

$$\frac{2}{\pi}\le\frac{1}{\arctan x}<\frac{4}{\pi},\forall x\ge 1,$$

利用 Abel 判别法，$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x\arctan x}{x^p}\frac{1}{\arctan x}dx$ 收敛，而$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}dx$ 当 $p\le 0$时发散. 假设不成立.

7.（10 分）(1) 设$\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ 和$\sum_{n=1}^{+\infty}b_n$ 都收敛，且$a_n\le u_n\le b_n\ (n=1,2,\cdots)$. 证明：$\sum_{n=1}^{+\infty}u_n$ 收敛.

证明：因为$\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ 和$\sum_{n=1}^{+\infty}b_n$ 都收敛，利用柯西收敛原理，$\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbb{N}$，当$n>N$时，$\forall p\in\mathbb{N}$，

$$-\varepsilon<a_{n+1}+\cdots+a_{n+p}<\varepsilon,\quad -\varepsilon<b_{n+1}+\cdots+b_{n+p}<\varepsilon.$$

再根据$a_n\le u_n\le b_n\ (n=1,2,\cdots)$，

$$-\varepsilon<a_{n+1}+\cdots+a_{n+p}\le u_{n+1}+\cdots+u_{n+p}\le b_{n+1}+\cdots+b_{n+p}<\varepsilon,$$

根据柯西收敛原理，$\sum_{n=1}^{+\infty}u_n$ 收敛.

(2) 证明：$f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{1+n^2x^2}$是定义在区间$(0,+\infty)$上的连续函数.

证明：$\forall x\in(0,+\infty)$，$\frac{\frac{1}{1+n^2x^2}}{\frac{1}{n^2}}\to\frac{1}{x^2},n\to+\infty$，

则$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{1+n^2x^2}$收敛，即 $f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{1+n^2x^2}$定义域是$(0,+\infty)$.

$\forall x_0\in(0,+\infty)$，$\exists 0<a<b$，使得$x_0\in[a,b]$.

$$\frac{1}{1+n^2x^2}\le\frac{1}{1+n^2a^2},\qquad \forall x\in[a,b],\forall n,$$

而$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{1+n^2a^2}$收敛，由 M 判别法，则$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{1+n^2x^2}$在$[a,b]$一致收敛，

又$\frac{1}{1+n^2x^2}$连续，那么$f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{1+n^2x^2}$在区间$[a,b]$上连续，它在$x_0$连续.

即得$f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{1+n^2x^2}$是定义在区间$(0,+\infty)$上的连续函数.

8.（10 分）（1）设$\frac{\partial f}{\partial x}$在点$(x_0,y_0)$连续，$\frac{\partial f}{\partial y}$在点$(x_0,y_0)$存在. 证明：$f(x,y)$在$(x_0,y_0)$可微.

证明：（1）$\forall(\Delta x,\Delta y)\neq(0,0)$，

$$f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$$

$$=\left[f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0+\Delta y)\right]+\left[f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)\right]$$

利用一元函数的微分中值定理，存在$0<\theta<1$使得，

$$f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$$

$$=f_x(x_0+\theta\Delta x,y_0+\Delta y)\Delta x+f_y(x_0,y_0)\Delta y+o(\Delta y)$$

$$=f_x(x_0,y_0)\Delta x+f_y(x_0,y_0)\Delta y+\left[f_x(x_0+\theta\Delta x,y_0+\Delta y)-f_x(x_0,y_0)\right]\Delta x+o(\Delta y)$$

因为f_x在点(x_0,y_0)连续，所以

$$\left[f_x(x_0+\theta\Delta x,y_0+\Delta y)-f_x(x_0,y_0)\right]\to 0,\rho\to 0$$

其中$\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$，又$\left|\frac{\Delta x}{\rho}\right|\le 1$，则

$$\frac{\left[f_x(x_0+\theta\Delta x,y_0+\Delta y)-f_x(x_0,y_0)\right]\Delta x}{\rho}\to 0,\rho\to 0.$$

$$f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=f_x(x_0,y_0)\Delta x+f_y(x_0,y_0)\Delta y+o(\rho),\rho\to 0,$$

即得$f(x,y)$在(x_0,y_0)可微.

⑵设 $f(x,y)$ 在 R^2 可微，且 $f(0,0)=0$．证明：

$$f(x,y)=x\int_0^1 f_x(tx,ty)dt+y\int_0^1 f_y(tx,ty)dt.$$

证明：给定 $(x,y)\in R^2$．令 $\varphi(t)=f(tx,ty)$． $\varphi(t)$ 在 $[0,1]$ 连续，在 $(0,1)$ 可导，利用一元函数性质，

$$\varphi(1)-\varphi(0)=\int_0^1 \varphi'(t)dt,$$

而

$$\varphi'(t)=f_x(tx,ty)x+f_y(tx,ty)y,$$

代入上式即得结论.