课程编号：100171018　　北京理工大学 2018-2019 学年第一学期

2018 级理科数学分析（I）期终考试试题 A 卷

座号______班级__________学号___________姓名________成绩______

1.(10 分)判断下列命题是否正确，正确请画√，不正确请画×（不用说明原因）.

(1)若数列$\{a_n\}$收敛，则$\{a_n\}$有界.

(2)若$a_n > b_n(n=1,2,\cdots)$，且$\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = A$，$\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = B$，则$A > B$.

(3)若$\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = A$，且$a_n > 0(n=1,2,\cdots)$，则$\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$.

(4)设$f(x)=|x-a|\varphi(x)$，其中$\varphi(a)=0$且$\varphi(x)$在a点连续，则$f(x)$在a点可导.

(5)如果$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$连续，且$f(x)=0$，$\forall x\in Q$（Q表示有理数集），

那么$f(x)=0$，$\forall x\in(-\infty,+\infty)$.

(6)若$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=L$，则$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x)=\infty$

(7)设非常数函数$f(x)$在区间(a,b)可导，x_0是$f(x)$在(a,b)的极小值点，则存在

$\delta>0$，使得当$x\in(x_0-\delta,x_0)$时，$f'(x)<0$；当$x\in(x_0,x_0+\delta)$时，$f'(x)>0$.

(8)设$f(x)$在点x_0的某个邻域内有定义.若存在实数A，使得当$\Delta x\to 0$时，

$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)-A\Delta x=o(\Delta x)$，则$f'(x_0)$存在，且$f'(x_0)=A$.

(9)设$\int f(x)dx=F(x)+C$，$\int g(x)dx=G(x)+C$. 若$F(x)\neq G(x)$，则$f(x)\neq g(x)$.

(10)$\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$存在的充要条件是：任给$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，使得$\forall x_1,x_2\in(a,a+\delta)$，

都有$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$.

2.(35 分)计算题

(1) 求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-(1+2x)^{\frac{1}{2}}}{x^2}$.

(2) 求极限$\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$.

(3) $\displaystyle\int\frac{3x+1}{x^2+x-2}dx$

(4) $\displaystyle\int_1^2 x\ln x dx$

(5) $\displaystyle\int_0^1\frac{e^x}{1+e^x}dx$

(6) 设$f(x)=x\sin x$，求$f^{(5)}(x)$.

(7) 求由$\begin{cases} x = 2t - t^2 \\ y = 3t - t^3 \end{cases}$所确定的函数$y = y(x)$的一阶导数$\dfrac{dy}{dx}$和二阶导数$\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

3. (15 分) 设函数$y = y(x)$是由方程$x^3 + y^3 - 3x + 3y + 2 = 0$所确定的隐函数.

(1) 求$\dfrac{dy}{dx}$和$\dfrac{d^2y}{dx^2}$;

(2) 求$y = y(x)$的极值.

4. (6 分) 证明不等式：$\dfrac{x}{1+x^2} < \arctan x < x$，$x > 0$.

5. (8 分) 设$f(x)$在区间$[0,3]$连续，且$f(2) + f(3) = 2\int_0^1 f(x)dx$. 证明：在$[0,3]$中存在两个点$\xi$，$\eta$，使得$f(\xi) = f(\eta)$.

6. (10 分) 设$F(x) = x^2 f(x)$.

(1) 若$f(x) = \ln(1+x)$，求$F(x)$在$x = 0$的5阶泰勒多项式，并求$F^{(5)}(0)$.

(2) 若$f(x)$在区间$[0,a]$二阶可导，且$f(a) = 0$，证明:存在$\eta \in (0,a)$，使得$F''(\eta) = 0$.

7. (8 分)

(1) 设$f(x)$在区间I可导，且$f'(x)$在区间I有界. 证明: $f(x)$在区间I一致连续.

(2) 设$f(x)$在$[a,b]$可积，$F(x)$是$f(x)$在(a,b)的一个原函数. 证明：$F(x)$在(a,b)一致连续，且$\lim\limits_{x\to a+0} F(x)$和$\lim\limits_{x\to b-0} F(x)$都存在.

8. (8 分) 设$f(x)$在区间$[0,1]$可导，且$\left\{x \in [0,1] \,\middle|\, f(x) = 0, f'(x) = 0\right\}$是空集. 证明：$f(x)$在$[0,1]$最多只有有限个零点.