线性代数 A 期末试题

（试题共 2 页，九道大题。**解答题必须有解题过程。**）

一（14 分）、已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}$.

（1）求 $|3\boldsymbol{A}^*-2\boldsymbol{I}|$ 的值，其中 $\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵；

（2）若矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$，且满足 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}$，求矩阵 $\boldsymbol{X}$.

二（**10 分**）、设方程 $x_1+2x_2+x_3=a-1$ 与线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0\\x_1+4x_2+ax_3=0\\x_1+16x_2+a^2x_3=0\end{cases}$ 有公共解，求 a 的值及所有公共解。

三（**10 分**）、已知线性空间 $\boldsymbol{R}^{2\times 2}$ 的一个基

$$\boldsymbol{A}_1=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\boldsymbol{A}_2=\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix},\boldsymbol{A}_3=\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix},\boldsymbol{A}_4=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}$$

与一组向量

$$\boldsymbol{B}_1=\begin{bmatrix}2&1\\-1&1\end{bmatrix},\boldsymbol{B}_2=\begin{bmatrix}2&3\\1&0\end{bmatrix},\boldsymbol{B}_3=\begin{bmatrix}4&3\\2&1\end{bmatrix},\boldsymbol{B}_4=\begin{bmatrix}1&1\\-1&0\end{bmatrix}.$$

（1）证明：$\boldsymbol{B}_1,\boldsymbol{B}_2,\boldsymbol{B}_3,\boldsymbol{B}_4$ 也是线性空间 $\boldsymbol{R}^{2\times 2}$ 的一个基；

（2）求基 $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_3,\boldsymbol{A}_4$ 到基 $\boldsymbol{B}_1,\boldsymbol{B}_2,\boldsymbol{B}_3,\boldsymbol{B}_4$ 的过渡矩阵；

（3）若矩阵 $\boldsymbol{C}$ 在基 $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_3,\boldsymbol{A}_4$ 下的坐标为 $X=(0,1,0,1)^T$，求 $\boldsymbol{C}$ 在基 $\boldsymbol{B}_1,\boldsymbol{B}_2,\boldsymbol{B}_3,\boldsymbol{B}_4$ 下的坐标。

四（10 分）、在 $\boldsymbol{R}^3$ 上定义变换 $\boldsymbol{\sigma}$：$\sigma((x_1,x_2,x_3))=(2x_1+x_2,x_2-x_3,3x_1)$.

（1）证明：$\boldsymbol{\sigma}$ 是 $\boldsymbol{R}^3$ 上的一个线性变换；

（2）求 $\boldsymbol{\sigma}$ 在 $\boldsymbol{R}^3$ 的自然基 $\boldsymbol{\varepsilon_1},\boldsymbol{\varepsilon_2},\boldsymbol{\varepsilon_3}$ 下的矩阵。

五（10 分）、已知

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,1,-1),\ \boldsymbol{\alpha}_2=(-2,2,-1,1),\ \boldsymbol{\alpha}_3=(2,1,-2,-1),\ \boldsymbol{\alpha}_4=(1,0,-1,0)$$

（1）求向量组$\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},\boldsymbol{\alpha_3},\boldsymbol{\alpha_4}$的秩和一个极大无关组;

（2）用所求的极大无关组线性表出向量组的其余向量。

六（10 分）、已知矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是 5 阶方阵，存在 5 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{J}=\begin{bmatrix} a & & & & \\ & b & 1 & & \\ & & b & & \\ & & & -c & 1 \\ & & & & -c \end{bmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准形 $\boldsymbol{J}$ 中未表示出的元素均为 0。

（1）请写出 $\boldsymbol{A}$ 的初等因子;（2）求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值;（3）判断 $\boldsymbol{P}$ 的哪些列向量是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量。

七（15 分）、已知实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=a(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$ 通过正交变换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{QY}$ 化为标准形 $f(x_1,x_2,x_3)=6y_1^2$.

(1) 求参数 a 的值；(2) 求正交变换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{QY}$ 中的正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$；（3）判断此二次型是否正定。

八（15 分）、已知 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶实对称矩阵，$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},\boldsymbol{\alpha_3})$，其中 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}0\\a\\2\end{pmatrix}$.

若 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{AB}+3\boldsymbol{B}=0$，且 $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ 为 $\boldsymbol{A}x=0$ 的非零解，则:

（1） 求 a 的值；

（2） 求 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{I})$；

（3） 求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ 为对角矩阵；

（4） 求 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I})^{2022}$.

九（6 分）、设 n 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值按大小排序为：$\lambda_1\ge\lambda_2\ge\cdots\ge\lambda_{n-1}\ge\lambda_n$.

证明：（1）对于 R^n 中任意非零向量 $\boldsymbol{\alpha}$，都有

$$\lambda_n\le\frac{\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}}{|\boldsymbol{\alpha}|^2}\le\lambda_1$$

（2） $\lambda_n\le a_{ii}\le\lambda_1, i=1,2,\dots,n.$