线性代数 A 试题 A 卷

班级 ________ 学号 _________ 姓名 __________ 成绩 ___________

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											
签名											

一、（10 分）已知矩阵 A 的伴随矩阵 $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 8 \end{pmatrix}$，且 $AXA^{-1} = XA^{-1} + 3I$，求 X。

二、（10 分）对下面线性方程组

$$\begin{cases}(2-\lambda)x_1+\quad 2x_2-\quad 2x_3=1\\ \quad 2x_1+(5-\lambda)x_2-\quad 4x_3=2\\ \quad -2x_1-\quad 4x_2+(5-\lambda)x_3=-\lambda-1\end{cases}$$

试讨论：当λ取何值时，它有唯一解？无解？有无穷多解？并在有无穷多解时求其通解。（用导出组的基础解系表示通解）

三、（10 分）求矩阵

$$\begin{pmatrix}1&1&2&2&1\\0&2&1&5&-1\\2&0&3&-1&3\\1&1&0&4&-1\end{pmatrix}$$

的列向量组的秩和一个极大无关组，并把其余列向量用极大无关组线性表示。

四、（10 分）在 $\mathbf{R}^{2\times 2}$ 中，令 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$, $\alpha_2=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$, $\alpha_3=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$, $\alpha_4=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$,

$\beta_1=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$, $\beta_2=\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}$, $\beta_3=\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}$, $\beta_4=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$

（1）证明 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 是 $\mathbf{R}^{2\times 2}$ 的一组基；

（2）求基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 到基 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 的过渡矩阵；

（3）求 $\gamma=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}$ 在基 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 下的坐标。

五、（10 分）设 6 阶方阵 A 的初等因子为 $\lambda-1,\ (\lambda-2)^2,\ \lambda^3$。

(1) 试写出 A 的 Jordan 标准形；　　　　(2) 求 A 的特征值。

六、（10 分）函数集合$V=\{(a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0)e^x \mid a_3，a_2,a_1,a_0\in\mathbf{R}\}$对于函数的线性运算构成线性空间，在$V$中取一组基

$$f_1(x)=x^3e^x,f_2(x)=x^2e^x,f_3(x)=xe^x,f_4(x)=e^x$$

求微分运算$D\big(f(x)\big)=f'(x)$在这组基下的矩阵，并判断该线性变换是否可逆。

七、（10 分）求下列实系数齐次线性方程组$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=0\\x_1+2x_2+3x_3+4x_4=0\\2x_1+3x_2+4x_3+5x_4=0\end{cases}$的解空间的一标准正交基。

八、（10 分）　已知实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=tx_1^2+tx_2^2+tx_3^2+x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3$

(1) 判断当 t 取何值时，二次型正定；

(2) 当 t=0 时，求一正交变换 $X=QY$，将二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 化为标准形。

九、（10 分）设 $A=I-ee^T$，其中 I 为 n 阶方阵，e 为 n 维非零列向量，证明

（1） $A=A^2$ 的充分必要条件为 e 为单位向量，即 $e^Te=1$；

（2）当 $e^Te=1$ 时, A 不可逆。

十、（10 分）设 3 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=-2,\ \alpha_1=(1,-1,1)^T$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于 λ_1 的特征向量。令 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^5-4\boldsymbol{A}^3+\boldsymbol{I}$

(1) 验证 α_1 也是 $\boldsymbol{B}$ 的特征向量；

(2) 求 $\boldsymbol{B}$ 的全部特征值和特征向量；

(3) 求 $\boldsymbol{B}$ 。