

2019 级理科数学分析 (I) 期终考试试题 A 卷

座号_____班级_____学号_____姓名_____成绩_____

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
得分										
签名										

1. (8 分) 求下列极限

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^2 \ln(1+x)}$

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} (x + 2^x)^{\frac{1}{x}}$

2. (8 分) 求下列积分

(1) $\int \frac{x-4}{x^2-5x+6} dx$

(2) $\int_0^1 x e^x dx$

3. (12 分)

(1) 求由 $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$ 所确定的函数 $y = y(x)$ 的一阶导数 $\frac{dy}{dx}$ 和二阶导数 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

(2) 设函数 $y = y(x)$ 是由方程 $e^y + xy = e$ 所确定的隐函数, 求 $\frac{dy}{dx}$ 和 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

4. (12 分) 求下列微分方程的通解

(1) $y' = 2x(y+1)$

(2) $y'' + y' - 2y = e^{5x}$

5. (6 分) 证明不等式: $\frac{1-x}{1+x} \leq e^{-2x}$, $0 \leq x \leq 1$.

6. (6 分) 设 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 连续, 在 (a, b) 可导, 且 $f'(x) \leq 0, \forall x \in (a, b)$, 又

设 $F(x) = \frac{1}{x-a} \int_a^x f(t)dt$. 证明: $F(x)$ 在 (a,b) 单调递减.

7. (10 分) 设 $f(x) = \arctan x - \frac{1}{1+ax^2}$ ($a \neq 0$).

(1) 求 $f(x)$ 在 $x=0$ 的 4 阶泰勒多项式;

(2) 若 $f''(0)=1$, 求出 a 的值.

8. (10 分) 设 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 二阶可导, 且 $f(1)>0$, $\lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{f(x)}{x} = -1$. 证明:

(1) 存在 $x_0 \in (0,1)$, 使得 $f(x_0)=0$;

(2) 在 $(0,1)$ 中存在两个不同的点, 使得 $f(x)f''(x) + (f'(x))^2 = 0$.

9. (10 分) 设 $a_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x^2} dx$, $n=1,2,\dots$.

(1) 证明: $\{a_n\}$ 单调递减;

(2) 证明: $a_n = \frac{n-1}{n+2} a_{n-2}$, $n=3,4,\dots$;

(3) 求 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

10. (8 分)

(1) 设 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 连续, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. 证明: $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 有界.

(2) 证明: $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ 在 $[0, +\infty)$ 一致连续.