

2009 级计算机学院《数值分析》期末试卷 A 卷（信二学习部整理）

班级_____学号_____姓名_____成绩_____

注意：① 答题方式为闭卷。

② 可以使用计算器。

③ 请将填空题和选择题的答案直接填在试卷上，计算题答在答题纸上。

一、填空题

(20×2'))

1. 设 $x=0.231$ 是精确值 $x^*=0.229$ 的近似值，则 x 有_____位有效数字。
2. 设 $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$, $\|A\|_{\infty} = \underline{\hspace{2cm}}$, $\|X\|_{\infty} = \underline{\hspace{2cm}}$,
 $\|AX\|_{\infty} \leq \underline{\hspace{2cm}}$ (注意：不计算 $\|AX\|_{\infty}$ 的值)。
3. 非线性方程 $f(x)=0$ 的迭代函数 $x=\varphi(x)$ 在有解区间满足_____，则使用该迭代函数的迭代解法一定是局部收敛的。
4. 若 $f(x)=x^7 - x^3 + 1$ ，则 $f[2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6, 2^7] = \underline{\hspace{2cm}}$,
 $f[2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6, 2^7, 2^8] = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
5. 区间 $[a, b]$ 上的三次样条插值函数 $S(x)$ 在 $[a, b]$ 上具有直到_____阶的连续导数。
6. 当插值节点为等距分布时，若所求节点靠近首节点，应该选用等距节点下牛顿差商公式的_____（填写前插公式、后插公式或中心差分公式），若所求节点靠近尾节点，应该选用等距节点下牛顿差商公式的_____（填写前插公式、后插公式或中心差分公式）；如果要估计结果的舍入误差，应该选用插值公式中的_____。
7. 拉格朗日插值公式中 $f(x_i)$ 的系数 $a_i(x)$ 的特点是： $\sum_{i=0}^n a_i(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ ；所以当系数 $a_i(x)$ 满足_____，计算时不会放大 $f(x_i)$ 的误差。
8. 要使 $\sqrt{20}$ 的近似值的相对误差小于 0.1%，至少要取_____位有效数字。
9. 对任意初始向量 $X^{(0)}$ 及任意向量 g ，线性方程组的迭代公式 $x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + g (k=0, 1, \dots)$ 收敛于方程组的精确解 x^* 的充分必要条件是_____。
10. 由下列数据所确定的插值多项式的次数最高是_____。

x	0	0.5	1	1.5	2	2.5
-----	---	-----	---	-----	---	-----

$y=f(x)$	-2	-1.75	-1	0.25	2	4.25
----------	----	-------	----	------	---	------

11. 牛顿下山法的下山条件为_____。
12. 线性方程组的松弛迭代法是通过逐渐减少残差 r_i ($i=0,1,\cdots,n$)来实现的，其中的残差 $r_i=_____$ ，($i=0,1,\cdots,n$)。
13. 在非线性方程 $f(x)=0$ 使用各种切线法迭代求解时，若在迭代区间存在唯一解，且 $f(x)$ 的二阶导数不变号，则初始点 x_0 的选取依据为_____。
14. 使用迭代计算的步骤为建立迭代函数、_____、迭代计算。

二、**判断题**(在题目后的()中填上“√”或“×”。) (10×1')

- 1、若 A 是 n 阶非奇异矩阵，则线性方程组 $AX=b$ 一定可以使用高斯消元法求解。()
- 2、解非线性方程 $f(x)=0$ 的牛顿迭代法在单根 x^* 附近是平方收敛的。()
- 3、若 A 为 n 阶方阵，且其元素满足不等式

$$|a_{ii}| \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| \quad (i=1,2,\dots,n)$$

- 则解线性方程组 $AX=b$ 的高斯——塞德尔迭代法一定收敛。()
- 4、样条插值一种分段插值。()
- 5、如果插值结点相同，在满足相同插值条件下所有的插值多项式是等价的。()
- 6、从实际问题的精确解到实际的计算结果间的误差有模型误差、观测误差、截断误差及舍入误差。()
- 7、解线性方程组的平方根直接解法适用于任何线性方程组 $AX=b$ 。()
- 8、迭代解法的舍入误差估计要从第一步迭代计算的舍入误差开始估计,直到最后一步迭代计算的舍入误差。()
- 9、数值计算中的总误差如果只考虑截断误差和舍入误差，则误差的最佳分配原则是截断误差=舍入误差。()
- 10、插值计算中避免外插是为了减少舍入误差。()

三、**计算题** (5×8' +10')

- 1、用列主元高斯消元法解线性方程组。(计算时小数点后保留 5 位)。

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = -4 \\ 5x_1 - 4x_2 + 3x_3 = -12 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 11 \end{cases}$$

2、用牛顿——埃尔米特插值法求满足下列表中插值条件的四次插值多项式 $P_4(x)$ ，并写出其截断误差的表达式(设 $f(x)$ 在插值区间上具有直到五阶连续导数)。

x_i	0	1	2
$f(x_i)$	1	-1	3
$f'(x_i)$		1	5

3、对下面的线性方程组变化为等价的线性方程组，使之应用雅克比迭代法和高斯——赛德尔迭代法均收敛，写出变化后的线性方程组及雅克比迭代法和高斯——赛德尔迭代法的迭代公式，并简单说明收敛的理由。

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_4 = 1 \\ x_1 - x_3 + 5x_4 = 6 \\ x_2 + 4x_3 - x_4 = 8 \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 = 3 \end{cases}$$

4、设 $y = \sin x$ ，当取 $x_0 = 1.74, x_1 = 1.76, x_2 = 1.78$ 建立拉格朗日插值公式计算 $x = 1.75$ 的函数值时，函数值 y_0, y_1, y_2 应取几位小数？

5、已知单调连续函数 $y = f(x)$ 的如下数据：

x_i	-0.11	0.00	1.50	1.80
$f(x_i)$	-1.23	-0.10	1.17	1.58

若用插值法计算， x 约为多少时 $f(x) = 1$ 。(计算时小数点后保留 5 位)。

6、应用牛顿法于方程 $f(x) = 1 - \frac{a}{x^2} = 0$ ，导出求 \sqrt{a} 的迭代公式，并用此公式求 $\sqrt{115}$ 的值。(计算时小数点后保留 4 位)。

课程编号：12000044 北京理工大学 2009-2010 学年第二学期

2009 级计算机学院《数值分析》期末试卷 A 卷

班级_____学号_____姓名_____成绩_____

注意：① 答题方式为闭卷。

② 可以使用计算器。

③ 请将填空题和选择题的答案直接填在试卷上，计算题答在答题纸上。

四、填空题（20×2'）

15. 设 $x=0.231$ 是精确值 $x^*=0.229$ 的近似值，则 x 有 2 位有效数字。

16. 设 $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$, $\|A\|_{\infty} = \underline{5}$, $\|X\|_{\infty} = \underline{3}$,

$\|AX\|_{\infty} \leq \underline{15}$ 。

17. 非线性方程 $f(x)=0$ 的迭代函数 $x=\varphi(x)$ 在有解区间满足 $|\varphi'(x)| < 1$ ，则使用该迭代函数的迭代解法一定是局部收敛的。

18. 若 $f(x)=x^7 - x^3 + 1$ ，则 $f[2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6, 2^7] = \underline{1}$ ，
 $f[2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6, 2^7, 2^8] = \underline{0}$ 。

19. 区间 $[a, b]$ 上的三次样条插值函数 $S(x)$ 在 $[a, b]$ 上具有直到 2 阶的连续导数。

20. 当插值节点为等距分布时，若所求节点靠近首节点，应该选用等距节点下牛顿差商公式的 前插公式，若所求节点靠近尾节点，应该选用等距节点下牛顿差商公式的 后插公式；如果要估计结果的舍入误差，应该选用插值公式中的 拉格朗日插值公式。

21. 拉格朗日插值公式中 $f(x_i)$ 的系数 $a_i(x)$ 的特点是： $\sum_{i=0}^n a_i(x) = \underline{1}$ ；所以当系数 $a_i(x)$ 满足 $a_i(x) > 1$ ，计算时不会放大 $f(x_i)$ 的误差。

22. 要使 $\sqrt{20}$ 的近似值的相对误差小于 0.1%，至少要取 4 位有效数字。

23. 对任意初始向量 $X^{(0)}$ 及任意向量 g ，线性方程组的迭代公式 $x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + g (k=0, 1, \dots)$ 收敛于方程组的精确解 x^* 的充分必要条件是 $\rho(B) < 1$ 。

24. 由下列数据所确定的插值多项式的次数最高是 5。

x	0	0.5	1	1.5	2	2.5
-----	---	-----	---	-----	---	-----

$y=f(x)$	-2	-1.75	-1	0.25	2	4.25
----------	----	-------	----	------	---	------

25. 牛顿下山法的下山条件为 $|f(x_{n+1})| < |f(x_n)|$ 。
26. 线性方程组的松弛迭代法是通过逐渐减少残差 r_i ($i=0,1,\dots,n$) 来实现的，其中的残差 $r_i = (b_i - a_{i1}x_1 - a_{i2}x_2 - \dots - a_{in}x_n) / a_{ii}$ ，($i=0,1,\dots,n$)。
27. 在非线性方程 $f(x)=0$ 使用各种切线法迭代求解时，若在迭代区间存在唯一解，且 $f(x)$ 的二阶导数不变号，则初始点 x_0 的选取依据为 $f(x_0)f'(x_0) > 0$ 。
28. 使用迭代计算的步骤为建立迭代函数、选取初值、迭代计算。

五、判断题 ($10 \times 1'$)

- 10、若 A 是 n 阶非奇异矩阵，则线性方程组 $AX=b$ 一定可以使用高斯消元法求解。
(×)
- 11、解非线性方程 $f(x)=0$ 的牛顿迭代法在单根 x^* 附近是平方收敛的。
(√)
- 12、若 A 为 n 阶方阵，且其元素满足不等式

$$|a_{ii}| \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| \quad (i=1,2,\dots,n)$$

则解线性方程组 $AX=b$ 的高斯——塞德尔迭代法一定收敛。 (×)

- 13、样条插值一种分段插值。
(√)
- 14、如果插值结点相同，在满足相同插值条件下所有的插值多项式是等价的。
(√)
- 15、从实际问题的精确解到实际的计算结果间的误差有模型误差、观测误差、截断误差及舍入误差。
(√)

- 16、解线性方程组的平方根直接解法适用于任何线性方程组 $AX=b$ 。
(×)
- 17、迭代解法的舍入误差估计要从第一步迭代计算的舍入误差开始估计,直到最后一步迭代计算的舍入误差。
(×)

- 18、数值计算中的总误差如果只考虑截断误差和舍入误差，则误差的最佳分配原则是截断误差 = 舍入误差。

(√)

10、插值计算中避免外插是为了减少舍入误差。

(×)

六、计算题 (5×10')

1、用列主元高斯消元法解线性方程组。

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = -4 \\ 5x_1 - 4x_2 + 3x_3 = -12 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 11 \end{cases}$$

解答：

(1, 5, 2) 最大元 5 在第二行，交换第一与第二行：

$$\begin{cases} 5x_1 - 4x_2 + 3x_3 = -12 \\ x_1 - x_2 + x_3 = -4 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 11 \end{cases}$$

$L_{21}=1/5=0.2, l_{31}=2/5=0.4$ 方程化为：

$$\begin{cases} 5x_1 - 4x_2 + 3x_3 = -12 \\ -0.2x_2 + 0.4x_3 = -1.6 \\ 2.6x_2 - 0.2x_3 = 15.8 \end{cases}$$

(-0.2, 2.6) 最大元在第三行，交换第二与第三行：

$$\begin{cases} 5x_1 - 4x_2 + 3x_3 = -12 \\ 2.6x_2 - 0.2x_3 = 15.8 \\ -0.2x_2 + 0.4x_3 = -1.6 \end{cases}$$

$L_{32}=-0.2/2.6=-0.076923$, 方程化为：

$$\begin{cases} 5x_1 - 4x_2 + 3x_3 = -12 \\ 2.6x_2 - 0.2x_3 = 15.8 \\ 0.38462x_3 = -0.38466 \end{cases}$$

回代得：

$$\begin{cases} x_1 = 3.00005 \\ x_2 = 5.99999 \\ x_3 = -1.00010 \end{cases}$$

2、用牛顿——埃尔米特插值法求满足下列表中插值条件的四次插值多项式 $P_4(x)$ ，并写出其截断误差的表达式(设 $f(x)$ 在插值区间上具有直到五阶连续导数)。

x_i	0	1	2
$f(x_i)$	1	-1	3
$f'(x_i)$		1	5

解答：

做差商表

x_i	$F(x_i)$	$F[x_i, x_{i+1}]$	$F[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$F[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}]$	$F[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}, x_{i+4}]$
0	1				
1	-1	-2			
1	-1	1	3		
2	3	4	3	0	
2	3	5	1	-2	-1

$$P_4(x) = 1 - 2x - 3x(x-1) - x(x-1)(x-1)(x-2)$$

$$R_4(x) = f(5)(\xi)/5!x(x-1)(x-1)(x-2)(x-2)$$

3、对下面的线性方程组变化为等价的线性方程组，使之应用雅克比迭代法和高斯——赛德尔迭代法均收敛，写出变化后的线性方程组及雅克比迭代法和高斯——赛德尔迭代法的迭代公式，并简单说明收敛的理由。

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_4 = 1 \\ x_1 - x_3 + 5x_4 = 6 \\ x_2 + 4x_3 - x_4 = 8 \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 = 3 \end{cases}$$

解答：

交换第二和第四个方程，使系数矩阵为严格对角占优：

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_4 = 1 \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 = 3 \\ x_2 + 4x_3 - x_4 = 8 \\ x_1 - x_3 + 5x_4 = 6 \end{cases}$$

雅克比迭代公式：

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_4 = 1 \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 = 3 \\ x_2 + 4x_3 - x_4 = 8 \\ x_1 - x_3 + 5x_4 = 6 \end{cases}$$

4、设 $y=\sin x$ ，当取 $x_0=1.74, x_1=1.76, x_2=1.78$ 建立拉格朗日插值公式计算 $x=1.75$ 的函数值时，函数值 y_0, y_1, y_2 应取几位小数？

5、已知单调连续函数 $y=f(x)$ 的如下数据：

x_i	-0.11	0.00	1.50	1.80
$f(x_i)$	-1.23	-0.10	1.17	1.58

若用插值法计算， x 约为多少时 $f(x)=1$ 。(计算时小数点后保留 5 位)。

6、应用牛顿法于方程 $f(x) = 1 - \frac{a}{x^2} = 0$ ，导出求 \sqrt{a} 的迭代公式，并用此公式求 $\sqrt{115}$ 的值。(计算时小数点后保留 4 位)。