课程编号：MTH07054　北京理工大学 2016-2017 学年第一学期

2015 级计算机学院《数值分析》期末试卷 A 卷

班级____________学号____________姓名 ____________成绩 __________

注意： ① 答题方式为闭卷。　② 可以使用计算器。
③ 将填空题的答案直接填在试卷上，计算题答在答题纸上。

题号	一	二	三	四	五	六	七	总分
得分								

-12.34

一、填空题（每空 2 分，共 40 分）

1. 近似值 $a=-12.341$ 有 4 位有效数字，则其绝对误差限为【 0.5×10^{-2} 】，相对误差限为【 0.04% 】。

x^p　$|px^{p-1}|\cdot dx$

2. 已知 $x=2.14\pm0.005$，用 $\tilde{y}=\sqrt{2.14}$ 作为 $y=\sqrt{x}$ 的近似值，则其绝对误差限为【 1.7×10^{-3} 】，近似值有【 3 】位有效数字。$dc=\frac{1}{2}\cdot(2.14)^{-\frac{1}{2}}\cdot0.005$

$1.7\times10^{-3}<5\times10^{-3}=0.5\times10^{-2}$

3. 求 $\sqrt[3]{a}$ 的牛顿迭代格式为【 $x_{n+1}=x_n-\frac{x_n^3-a}{3x_n^2}$ 】。$x^3-a=0.$

4. 单点弦截法不动点 x_0 应满足【 $f(x_0)\cdot f''(x_0)>0$ 】。

0.9　x　$\pi=180.$　$\frac{180\cdot0.9}{\pi}$

题目有误

5. 用迭代法求解 $x=\sin x+0.25$ 在区间[0.9,1.5]上的根，要求误差限为 0.01，则需迭代【 8 】步。

51°　0.6216　0.9　85°

$\varphi(x)=\sin x+0.25$

$\varphi'(x)=\cos x\le\cos(0.9)=0.6216$

$\frac{q^n}{1-q}|x_1-x_0|<0.01$

$x_0=0.9$

$x_1=\sin0.9+0.25=1.0333$

$|x_1-x_0|=0.13333$

$\frac{q^n}{1-q}\cdot\Delta<0.01$

$q^n<\frac{0.01\cdot(1-q)}{\Delta}$

$n<\log_q\frac{0.01\cdot(1-q)}{\Delta}$

6. 用平方根法解线性方程组 $\begin{cases}4x+2y+5z=12\\2x+3y+2z=10\\5x+2y+10z=1\end{cases}$ 时，$u_{11}=$【 2 】。

7. $A=\begin{bmatrix}-2&-5&4\\-1&0&3\\4&2&-2\end{bmatrix}$，$||A||_1=$【 9 】，$||A||_\infty=$【 11 】。

8. 线性方程组 $\begin{cases}5x+2y+z=-12\\-x+4y+2z=10\\2x-5y+10z=1\end{cases}$ 用 Jacobi 迭代法求解，迭代过程是否收敛？【 是 】，

$I-D^{-1}A$

$\begin{bmatrix}\frac{1}{5}&&\\&\frac{1}{4}&\\&&\frac{1}{10}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5&2&1\\-1&4&2\\2&5&10\end{bmatrix}$

迭代矩阵是【 $\begin{bmatrix}0&-0.4&-0.2\\0.25&0&-0.5\\-0.2&0.5&0\end{bmatrix}$ 】。

0.5

$\begin{bmatrix}1&0.4&0.2\\-0.25&1&0.5\\0.2&0.5&1\end{bmatrix}$

9. 向量 X=(1,-2,3)，Y=(3,4,0)，则向量 X 的 1-范数$\|X\|_1$=【 6 】，向量 Y 的 2-范数$\|Y\|_2$=【 5 】。

10. 设 $f(x)=x^3+x-1$，则差商 $f[3,2,1,0]$=【 1 】。

11. 已知 $f[4,3,2,1]=2$，则 $x=1$ 点的 3 阶差分值为【 ~~96~~ 12 】。

12. 对于积分 $I(f)=\int_{-1}^{1}f(x)dx$，求积公式 $I(f)\approx\frac{1}{3}[f(-1)+4f(0)+f(1)]$ 的代数精确度为【 3 】。

13. 已知 n=4 时的牛顿-科特斯系数 $C_0^{(4)}=\frac{7}{90}, C_3^{(4)}=\frac{16}{45}$, 则 $C_2^{(4)}$ =【 $\frac{2}{15}$ 】。

14. 高斯求积公式 $\int_{-1}^{1}f(t)dt\approx\sum_{i=1}^{n}\omega_i y_i$ 具有【 2n-1 】次代数精确度。

15. 用带松弛因子的松弛法 (ω=0.5)解方程组 $\begin{cases}5x_1+2x_2+x_3=-12\\-x_1+4x_2+2x_3=20\\2x_1-3x_2+10x_3=3\end{cases}$ 的迭代公式是【 $\begin{cases}x_1^{(k+1)}=x_1^{(k)}+\frac{0.5}{5}(-12-5x_1^{(k)}-2x_2^{(k)}-x_3^{(k)})\\x_2^{(k+1)}=x_2^{(k)}+\frac{0.5}{4}(20+x_1^{(k+1)}-4x_2^{(k)}-2x_3^{(k)})\\x_3^{(k+1)}=x_3^{(k)}+\frac{0.5}{10}(3-2x_1^{(k+1)}+3x_2^{(k+1)}-10x_3^{(k)})\end{cases}$ 】。

$$\begin{cases}x_1^{(k+1)}=x_1^{(k)}-\frac{0.5}{5}(5x_1^{(k)}+2x_2^{(k)}+x_3^{(k)}+12)\\x_2^{(k+1)}=x_2^{(k)}-\frac{0.5}{4}(-x_1^{(k+1)}+4x_2^{(k)}+2x_3^{(k)}-20)\\x_3^{(k+1)}=x_3^{(k)}-\frac{0.5}{10}(2x_1^{(k+1)}-3x_2^{(k+1)}+10x_3^{(k)}-3)\end{cases}$$

二、采用牛顿下山法求方程 $x^3=4$ 的根，初始值 $x_0=1$，计算过程保留小数点后 4 位。（10 分）

三、设有方程组 $AX=B$，其中

$$A=\begin{bmatrix}2&3&1\\4&2&3\\7&1&-1\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}4\\17\\1\end{bmatrix}$$

用高斯消元法求方程组的解。（8 分）

四、设方程组 $\begin{cases}x_1+0.4x_2+0.4x_3=1\\0.4x_1+x_2+0.8x_3=2\\0.4x_1+0.8x_2+x_3=3\end{cases}$，试判断此方程组的雅可比迭代法及高斯一赛德尔迭代法的收敛性，并用能够收敛的方法进行计算，初值 $x_0^{(0)}=0, x_1^{(0)}=0, x_2^{(0)}=0$，计算结果保留小数点后 3 位。（12 分）

五、已知函数表如下：

x_i	0	1	2	4
$f(x_i)$	1	9	23	3

用三阶拉格朗日（Lagrange）插值多项式计算 $f(2.2)$ 的近似值，假设 $\left|f^{(4)}(x)\right| \le 1$，估计结果的误差。（12 分）

六、 求满足下表条件的埃尔米特（Hermite）插值多项式。（8 分）

x_i	0	1	2
y_i	0	2	1
y_i'	1	1	

七、 用龙贝格方法计算积分 $I=\int_{-1}^{1} x^2 dx$，计算过程保留小数点后 4 位。（10 分）

二、 $x^3 = 4$

$f(x) = x^3 - 4$

$\varphi(x) = x - \frac{x^3-4}{3x^2}$

$x_{n+1} = (1-\lambda)x_n + \lambda\cdot\left(x_n - \frac{x_n^3-4}{3x_n^2}\right)$

$x_0 = 1$, $y_1 = 2$, $f(1) = -3$

$\lambda = 1$, $x_1 = 2$, $|f(2)| > |f(1)|$

$\lambda = \frac{1}{2}$, $x_1 = \frac{1}{2}\times 1 + \frac{1}{2}\times 2 = \frac{3}{2}$, $f(\frac{3}{2}) = -0.625$, $|f(\frac{3}{2})| < |f(1)|$

$x_1 = 1.5$, $y_2 = 1.5925$, $f(1.5) = -0.625$

$\lambda = 1$, $x_2 = 1.5925$, $f(1.5925) = 0.0387$, $|f(1.5925)| < |f(1.5)|$

$x_2 = 1.5925$, $y_3 = 1.5874$

$\lambda = 1$, $x_3 = 1.5874$, $f(1.5874) = -8\times 10^{-6}$, $|f(1.5874)| < |f(1.5925)|$

$x_3 = 1.5874$ $y_4 = 1.5874$

$\lambda = 1$, $x_4 = 1.5874$

$x = 1.5874$

四.
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0.4 & 0.4 \\ 0.4 & 1 & 0.8 \\ 0.4 & 0.8 & 1 \end{bmatrix}$$

雅克比: $X^{(k+1)} = (I - D^{-1}A)X^{(k)} + D^{-1}B$

$D = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$, $|D^{-1}| \neq 0$

$|\lambda I - (I - D^{-1}A)| = |D^{-1}|\cdot|\lambda D - D + A| = 0$

$$|\lambda D - D + A| = \begin{vmatrix} \lambda & 0.4 & 0.4 \\ 0.4 & \lambda & 0.8 \\ 0.4 & 0.8 & \lambda \end{vmatrix}$$

$= \lambda(\lambda^2 - 0.8^2) - 0.4(0.4\lambda - 0.32) + 0.4(0.32 - 0.4\lambda)$

$= \lambda^3 - 0.64\lambda - 0.16\lambda + 0.128 + 0.128 - 0.16\lambda$

$= \lambda^3 - 0.96\lambda + 0.256 = 0$

$f(-1) > 0$, $f(-\infty) < 0$

$\exists \lambda \in (-\infty, -1)$，故 $\rho > 1$

高斯~: $X^{(k+1)} = -(D+L)^{-1}U X^{(k)} + (D+L)^{-1}B$

$|\lambda I + (D+L)^{-1}U| = 0$, $|(D+U)^{-1}| \neq 0$

$|(D+L)^{-1}|\cdot|\lambda(D+L) + U| = 0$

$$\begin{vmatrix} \lambda & 0.4 & 0.4 \\ 0.4\lambda & \lambda & 0.8 \\ 0.4\lambda & 0.8\lambda & \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

$-0.08\lambda^2$

$0 = \lambda(\lambda^2 - 0.64\lambda) - 0.4(0.4\lambda^2 - 0.32\lambda) + 0.4\cancel{(0.32\lambda^2 - 0.4\lambda^2)}$

$= \lambda^3 - 0.64\lambda^2 - 0.16\lambda^2 + 0.128\lambda - 0.032\lambda^2 = 0$

$\lambda(\lambda^2 - 0.832\lambda + 0.128) = 0.$

$\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0.628$, $\lambda_3 = 0.203$

$\rho < 1$

三.
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 4 \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 17 \\ 7x_1 + x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$$

1

-1

5

$u_{11} = 2$

$l_{11} = 1$ $u_{12} = 3$ $u_{13} = 1$ $z_1 = 4$

$l_{21} = 2$ $u_{22} = 2 - 2\times 3 = -4$ $u_{23} = \frac{3 - 1\times 2}{1} = 1$ $z_2 = \frac{17 - 2\times 4}{1} = 9$

$l_{22} = 1$

$l_{31} = 3.5$ $l_{32} = \frac{1 - 3.5\times 3}{-4} = 2.375$ $u_{33} = \frac{-1 - 3.5\times 1 - 2.375\times 1}{1} = -6.875$ $z_3 = 1 - 3.5\times 4 - 2.375\times 9 = -34.375$

$l_{33} = 1$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 4 \\ -4x_2 + x_3 = 9 \\ -6.875x_3 = -34.375 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = (1 - 0.4x_2^{(k)} - 0.4x_3^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} = (2 - 0.4x_1^{(k+1)} - 0.8x_3^{(k)}) \\ x_3^{(k+1)} = (3 - 0.4x_1^{(k+1)} - 0.8x_2^{(k+1)}) \end{cases}$$

-0.135

-1.081

3.919

$x_1^{(0)} = 0$, $x_2^{(0)} = 0$, $x_3^{(0)} = 0$

$x_1^{(1)} = 1$ $x_2^{(1)} = 1.6$ $x_3^{(1)} = 1.32$

-0.168	1.0112	2.258	-0.229	-0.515	3.804	-0.148	-1.026	3.878	-0.136	-1.078	3.916
-0.308	0.317	2.870	-0.195	-0.725	3.658	-0.141	-1.046	3.893	-0.136	-1.079	3.917
-0.275	-0.186	3.259	-0.173	-0.857	3.755	-0.139	-1.059	3.903	-0.135	-1.080	3.918
			-0.159	-0.940	3.816	-0.137	-1.067	3.909	-0.138	-1.080	3.918
			-0.150	-0.993	3.854	-0.137	-1.072	3.913			
						-0.136	-1.076	3.915			

五.

0.054

$$f(2.2) = \frac{(2.2-1)(2.2-2)(2.2-4)}{(0-1)(0-2)(0-4)}\cdot 1$$

-0.264

$$+ \frac{(2.2-0)(2.2-2)(2.2-4)}{(1-0)(1-2)(1-4)}\cdot 9$$

1.188

$$+ \frac{(2.2-0)(2.2-1)(2.2-4)}{(2-0)(2-1)(2-4)}\cdot 23$$

0.022

$$+ \frac{(2.2-0)(2.2-1)(2.2-2)}{(4-0)(4-1)(4-2)}\cdot 3$$

$$= 25.068$$

0.76408

$$|\epsilon| = |0.054 + 0.264 + 1.188 + 0.022| \times 0.5 = \cancel{0.863}$$

$$|R_3(x)| = \left|(2.2-0)(2.2-1)(2.2-2)(2.2-4)\cdot\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}\right|$$

$$= 0.0396$$

0.80368

$$\delta = |\epsilon| + |R_3| = \cancel{0.9026} < 5.$$

$$0.5\times 10^1 < 0.0396$$

$$f(2.2) \approx 25.1 \qquad f(2.2) \approx 3\times 10^1$$

$\frac{1}{7}$,

1.8

x	y				
0	0				
		1			
0	0		1		
		2		-2	
1	2		-1		0.75
		1		-0.5	
1	2		-2		
		-1			
2	1				

$$P_4(x) = 0 + x\cdot 1 + x^2\cdot 1 + x^2(x-1)\cdot(-2) + x^2(x-1)^2\cdot 0.75$$

$$= x + x^2 - 2(x^3 - x^2) + 0.75(x^4 - 2x^3 + x^2)$$

$$= 0.75x^4 + (-2-1.5)x^3 + (1+2+0.75)x^2 + x$$

$$= 0.75x^4 - 3.5x^3 + 3.75x^2 + x$$

七.

$$f(x) = x^2$$

$-1+\frac{1}{2}$ $\quad -1+\frac{1}{4}$ $\quad -\frac{3}{4}+\frac{2}{4}$ $\quad -\frac{1}{4}+2$

T_1			
T_2	S_1		
T_4	S_2	C_1	
T_8	S_4	C_2	T

$$T_1 = \frac{2}{2}(f(-1) + f(1)) = 1$$

$$T_2 = \frac{1}{2}T_1 + \frac{1}{2}\left(f(-\tfrac{1}{2}) + f(\tfrac{3}{2})\right) = 1.75$$

$$S_1 = \frac{4}{4-1}T_2 - \frac{1}{4-1}T_1 = 2$$

$$T_4 = \frac{1}{2}T_2 + \frac{1}{4}\left(f(-\tfrac{3}{4}) + f(-\tfrac{1}{4}) + f(\tfrac{1}{4}) + f(\tfrac{3}{4})\right)$$

$$= 1.1875$$

$-1+\frac{1}{8}$

$$S_2 = \frac{4}{4-1}\cdot T_4 - \frac{1}{4-1}\cdot T_2 = 1$$

$$C_1 = \frac{4^2}{4^2-1}\cdot S_2 - \frac{1}{4^2-1}S_1 = 0.9333$$

$$T_8 = \frac{1}{2}T_4 + \frac{1}{8}\left(f(-\tfrac{7}{8}) + f(-\tfrac{5}{8}) + f(-\tfrac{3}{8}) + f(-\tfrac{1}{8})\right)\times 2$$

$$= 0.9219$$

$$S_4 = \frac{4}{4-1}\cdot 0.9219 - \frac{1}{4-1}\cdot 1.1875 = 0.8334$$

$$C_2 = \frac{4^2}{4^2-1}\cdot S_4 - \frac{1}{4^2-1}\cdot S_2 = 0.8223$$

$$T_1 = \frac{4^3}{4^3-1}\cdot C_2 - \frac{1}{4^3-1}C_1 = 0.8205$$

$$T_{2^k} = \frac{1}{2}T_{2^{k-1}} + h\cdot\sum f(a + h\cdot(2i-1))$$

七.

$$T_1 = \frac{b-a}{2}(f(-1) + f(1)) = 2$$

$$T_2 = \frac{1}{2}T_1 + \frac{2}{2}\cdot(f(0)) = 1$$

$$S_1 = \frac{4}{4-1}T_2 - \frac{1}{4-1}T_1 = 0.6667$$

$$T_4 = \frac{1}{2}T_2 + \frac{2}{4}\left(f(-\tfrac{1}{2}) + f(\tfrac{1}{2})\right) = 0.75$$

$$S_2 = \frac{4}{4-1}T_4 - \frac{1}{4-1}T_2 = 0.6667$$