离散数学

一．选择题

1. 以下四个联结词集合中，那个不是完备集？（）

A. $\{\neg,\wedge\}$　　B. $\{\uparrow\}$　　C. $\{\wedge,\vee,\rightarrow,\leftrightarrow\}$　　D. $\{\neg,\rightarrow\}$

2. *以下四个选项中，哪个选项可能是公式 $G=\exists x\exists y\forall z\exists u\forall v\exists wP(x,y,z,u,v,w)$ 的 Skolem 范式？（）

A. $\forall z\forall vP(x,y,z,u,v,w)$

B. $\forall z\forall vP(a,f(a),z,g(z),v,h(z,v))$

C. $\forall z\forall vP(a,b,z,g(z),v,h(z,v))$

D. $\forall z\forall vP(a,b,z,f(v),v,c)$

3. 以下四个选项中，正确的是（）

A. $\exists x\exists yP(x,y)\Leftrightarrow\forall y\exists xP(x,y)$

B. $\forall x\exists yP(x,y)\Rightarrow\exists y\forall xP(x,y)$

C. $\exists y\forall xP(x,y)\Rightarrow\forall x\exists yP(x,y)$

D. $\exists x\exists yP(x,y)\neq\exists y\exists xP(x,y)$

4. 下列四个选项中，哪个选项是公式 $\exists xF(x,y)\rightarrow(H(x)\rightarrow\neg\exists yG(x,y))$ 的前束范式？（）

A. $\forall x\forall y(F(x,y)\rightarrow(H(x)\rightarrow\neg G(x,y)))$

B. $\forall x\exists y(F(x,z)\rightarrow(H(t)\rightarrow\neg G(x,y)))$

C. $\forall x\forall y(F(x,z)\rightarrow(H(t)\rightarrow\neg G(t,y)))$

D. $\forall x\forall y(F(x,z)\rightarrow(H(t)\rightarrow\neg G(r,s)))$

5.下列四个选项中，哪个选项不是集合中元素所具有的性质（）

A.无序性　B.相异性　C.可数性　D.确定性

6.下列命题中，假命题是（）

A. $\varnothing \subseteq \varnothing$　B. $\varnothing \subseteq \{\varnothing\}$　C. $\varnothing \in \varnothing$　D. $\varnothing \in \{\varnothing\}$

7.下列四个选项中，错误的是（）

A. $R \upharpoonright A \subseteq R$　B. $R[A] \subseteq ranR$

C. $F[A \cap B] = F[A] \cap F[B]$　D. $domR \subseteq fldR$

8.*设R是非空集合A上的关系,若求R的自反,传递,对称闭包，下列运算顺序中，错误的是（）

A.trs(R)　B.rts(R)　C.rst(R)

D.trs(R)

先算s后算t

9.若$|A|$=m，$|B|$=n，则$|B^A|$=（）

A.mn　B. m^n　C. n^m　D. 2^{mn}

10.

二．填空题

1.令 p：我上街，q：我去书店看看，r：我很累，则命题“如果我上街，我就去书店看看，除非我很累”可符号化为________。

p ，除非 q　　!q->p

除非 p ，　q　　q->p

2. 公式$(p \to \neg q) \to r$的主和取范式是________。

3. 公式$(p \to q) \wedge r$对应的三元真值函数是________。?

4. $A = \{\{a\},\{a,b\}\}$，计算$\cap \cup A \cup (\cup \cup A - \cup \cap A)$=________。

5. 1 到 1000000（包含 1 和 1000000 在内）既不能被 5 整除，又不能被 6 整除，也不能被 7 整除，还不能被 8 整除的数有________个。

6. 若$R = \{<a,b>,<a,c>\}$, 则 R 具有____________（性质）。

7. 已知$X = \{a,b,c,d,e\}$，$C = \{\{a,b\},\{c\},\{d,e\}\}$是 X 上的一个等价关系 R，则 R 的关系矩阵为________。

8. 设 $A = \{1,2,3,4\}$， 在 $A \times A$ 上定义二元关系 R: $<<x,y>,<u,v>> \in R \Leftrightarrow x+y=u+v$, 则 R 导出的划分对应的商集所含元素个数为_____个。

9. *设 R 为 A 上的关系, 则 R 在 A 上传递的充要条件是________。

10. 设偏序集<A, R>，其中$A = \{2,3,4,\ldots,1000\}$，R 表示整除关系，那么该偏序集的所有极大元构成的集合为________________。

三．判断题

1. 公式$((\neg p \wedge q) \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q) \leftrightarrow (r \to \neg s)$是 6 层公式。

2. 存在一个公式使得它既是合取范式又是析取范式。

3. *n 个命题变项最多可以构成2^{2^n}个命题公式。(无穷个)

4.*任何命题都可以看作谓词。

5.*闭式在任何解释下都是命题。

6.*在一阶逻辑中,判断任意给定公式类型的问题是可判定的,即重言式(永真式),矛盾式和可满足式三种。（不可判定）

7.公式的前束范式唯一。

8.*公式G和其Skolem范式等价。

9.数集上的小于等于关系和整除关系都是全序关系。

10.恒等关系确定的自然映射是双射的。

四．简答题

1.在某班班委成员的选举中，已知王小红，李强，丁金生三位同学被选进了班委会，该班的甲乙丙三位同学预言：

甲说：王小红是班长，李强是生委。

乙说：丁金生是班长，王小红是生委。

丙说：李强是班长，王小红是学委。

班委会分工名单公布后发现，甲乙丙三人都恰好猜对了一半，问三人各任何职？

2. 在自然推理系统中，构造以下推理证明：

人都喜欢吃蔬菜．但不是所有的人都喜欢吃鱼．所以，存在喜欢吃蔬菜而不喜欢吃鱼的人．

3. 证明：$R\circ(R_1\cap R_2\cap\ldots\cap R_n)\subseteq R\circ R_1\cap R\circ R_2\cap\ldots\cap R\circ R_n$

4. 设偏序集〈A,R〉和〈B,S〉，定义 A　B 上二元关系 T:

$$<x,y>T<u,v>\Leftrightarrow xRu\wedge yRv$$

证明 T 为偏序关系.

5. 设 $A=\{a,b,c,d,e,f\}$，R 是 A 上的关系，且 $R=\{<a,b>,<a,c>,<e,f>\}$

(1) 求 domR, ranR, fldR;

(2) 设 $R^{*}=tsr(R)$，写出 R^{*} 的关系矩阵;

(3) 写出商集 A/R^{*}.

离散试题答案

一．选择题

CCCCCCCCCC

二．填空题

1. $p \to (\neg r \to q)$或$\neg r \to (p \to q)$

2. $M_0 \wedge M_2 \wedge M_4$

3. $F_{41}^{(3)}$

4. b

5. 514286

6. 反自反、反对称，传递

7. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

8. 7

9. $R \circ R \subseteq R$

10. $\{x \mid \mathrm{x} \in A, 501 \le x \le 1000\}$

三．判断题

错 对 错 对 对 错 错 错 错 对

四. 简答题

1.解.设 p1:王小红是班长 p2:丁金生是班长

p3:李强是班长　q1:王小红是生委

q3:李强是生委　r1:王小红是学委

则

$$
\begin{aligned}
F &\Leftrightarrow ((p1\wedge\neg q3)\vee(\neg p1\wedge q3))\wedge((p2\wedge\neg q1)\vee(\neg p2\wedge q1))\wedge((p3\wedge\neg r1)\vee(\neg p3\wedge r1)) \\
&\Leftrightarrow ((p1\wedge\neg q3\wedge p2\wedge\neg q1)\vee(p1\wedge\neg q3\wedge\neg p2\wedge q1)\vee(\neg p1\wedge q3\wedge p2\wedge\neg q1) \\
&\vee(\neg p1\wedge q3\wedge\neg p2\wedge q1))\wedge((p3\wedge\neg r1)\vee(\neg p3\wedge r1)) \\
&\Leftrightarrow (p2\wedge p3)\wedge((p3\wedge\neg r1)\vee(\neg p3\wedge r1)) \\
&\Leftrightarrow (p2\wedge q3\wedge p3\wedge\neg r1)\vee(p2\wedge q3\wedge\neg p3\wedge r1) \\
&\Leftrightarrow r1\wedge p2\wedge q3
\end{aligned}
$$

故丁金生是班长，王小红是学委，李强是生委。

2.解.令 F(x)：x 为人，G(x):x 喜欢吃蔬菜，H(x):x 喜欢吃鱼

前提：$\forall x(F(x)\to G(x))$，$\neg\forall x(F(x)\to H(x))$

结论：$\exists x(F(x)\wedge G(x)\wedge\neg H(x))$

证明：

(1) $\neg\exists x(F(x)\wedge G(x)\wedge\neg H(x)$　结论否定引入

(2) $\forall x\neg(F(x)\wedge G(x)\wedge\neg H(x)$　(1)置换

(3) $\neg(F(y)\wedge G(y)\vee\neg H(y))$　(2) $\forall^-$

(4) $G(y)\to\neg F(y)\vee H(y)$　(3)置换

(5) $\forall x(F(x)\to G(x))$　前提引入

(6) $F(y)\to G(y)$　(5) $\forall^-$

(7) $F(y)\to\neg F(y)\vee H(y)$　　(4)(6)假言三段论

(8) $F(y)\to H(y)$　　(7)置换

(9) $\forall y(F(y)\to H(y))$　　(8) $\forall^{+}$

(10) $\forall x(F(x)\to H(x))$　　(9)置换

(11) $\neg\forall x(F(x)\to H(x))$　　前提引入

(12)0　　(10)(11)合取

3.任取<x,y>

$$
\begin{aligned}
&<x,y>\in R\circ(R_1\cap\ldots\cap R_n)\\
&\Leftrightarrow \exists t(<x,t>\in R\wedge <t,y>\in(R_1\cap\ldots\cap R_n))\\
&\Leftrightarrow \exists t((<x,t>\in R\wedge <t,y>\in R_1)\wedge\ldots\wedge(<x,t>\in R\wedge <t,y>\in R_n))\\
&\Leftrightarrow \exists t(<x,t>\in R\wedge <t,y>\in R_1)\wedge\ldots\wedge\exists t(<x,t>\in R\wedge <t,y>\in R_n)\\
&\Leftrightarrow <x,y>\in R\circ R_1\wedge\ldots\wedge <x,y>\in R\circ R_n\\
&\Leftrightarrow <x,y>\in R\circ R\cap\ldots\cap R\circ R_n
\end{aligned}
$$

故 $R\circ(R_1\cap\ldots\cap R_n)\subseteq R\circ R_1\cap\ldots\cap R\circ R_n$

4.(1) 自反性 任取<x,y>,

$$<x,y>\in A\times B\Rightarrow x\in A\wedge y\in B\Rightarrow xRx\wedge ySy\Rightarrow <x,y>T<x,y>$$

(2) 反对称性 任取<x,y>,<u,v>

$$<x,y>T<u,v>\wedge <u,v>T<x,y>\Rightarrow xRu\wedge ySv\wedge uRx\wedge vSy$$
$$\Rightarrow(xRu\wedge uRx)\wedge(ySv\wedge vSy)\Rightarrow x=u\wedge y=v\Rightarrow <x,y>=<u,v>$$

(3) 传递性 任取<x,y>,<u,v>, <w,t>

$$<x,y>T<u,v>\wedge <u,v>T<w,t>\Rightarrow xRu\wedge ySv\wedge uRw\wedge vSt$$
$$\Rightarrow(xRu\wedge uRw)\wedge(ySv\wedge vSt)\Rightarrow xRw\wedge ySt$$
$$\Rightarrow <x,y>T<w,t>$$

5.(1) $\mathrm{d}omR=\{a,e\}, ranR=\{b,c,f\}, fldR=\{a,b,c,e,f\}$

(2) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(3) $A / R^{*} = \{\{a, b, c\}, \{d\}, \{e, f\}\}$