线性代数 A 期末试题 B 卷

座号____________班级_____________学号____________姓名____________

(试卷共 6 页, 九道大题. 解答题必须有解题过程, 试卷后面空白页撕下做稿纸, 试卷不得拆散)

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	总分
得分										

得分	

一、填空题（每小题 4 分，共 20 分）

1、 已知 $A=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$， $B=\begin{pmatrix}1&2\\2&3\end{pmatrix}$， 则 $\begin{pmatrix}0&A\\B&0\end{pmatrix}^{-1}=$________________；

2、 函数 $f(x)=\begin{vmatrix}2x&x&-1&1\\-1&-x&1&2\\3&2&-x&3\\0&0&0&2\end{vmatrix}$ 中 x^3 项的系数为____________；

3、 $A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{13}&a_{12}\\a_{21}&a_{23}&a_{22}\\a_{31}&a_{33}&a_{32}\end{pmatrix}$, 若 $A^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&4&5\\0&0&6\end{pmatrix}$, 则 $B^{-1}=$______________；

4、 设 A 是一个 4×3 矩阵，若 η_1,η_2 是齐次线性方程组 $AX=0$ 的基础解系，则 $r\left(A^T\right)=$______；

5、 设 A 是 5 阶方阵，且已知存在 5 阶可逆矩阵 P，使得

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}2&0&0&0&0\\0&2&1&0&0\\0&0&2&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

则 A 的所有初等因子为____________________________。

二（10 分）、设 $\boldsymbol{A}$ 为 4 阶方阵，4 元列向量 $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{r}(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{2}$。若 $\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3,\boldsymbol{p}_4$ 都是非齐次方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的解向量，且满足

$$\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2=(\boldsymbol{2},\boldsymbol{2},\boldsymbol{0},\boldsymbol{4})^T,\quad \boldsymbol{p}_2+\boldsymbol{p}_3=(\boldsymbol{3},\boldsymbol{0},\boldsymbol{1},\boldsymbol{2})^T,\quad \boldsymbol{p}_3+\boldsymbol{p}_4=(\boldsymbol{2},\boldsymbol{1},\boldsymbol{0},\boldsymbol{1})^T$$

(1) 求齐次方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系；

(2) 求 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的通解。

三（10 分）、已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{2}&\boldsymbol{1}&\boldsymbol{1}\\\boldsymbol{1}&\boldsymbol{2}&\boldsymbol{1}\\\boldsymbol{1}&\boldsymbol{1}&\boldsymbol{2}\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{1}&\boldsymbol{0}&\boldsymbol{1}\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{1}&\boldsymbol{1}\\\boldsymbol{1}&\boldsymbol{1}&\boldsymbol{1}\end{pmatrix}$，且 $\boldsymbol{AXA}^{-1}=\boldsymbol{2XA}^{-1}+\boldsymbol{BA}^*$，求矩阵 $\boldsymbol{X}$。

四（10 分）、已知实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+4x_2x_3$，求一个正交变换将二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 化为标准形，并判断二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 是否正定。

五（12 分）、定义线性空间$\mathbf{R}^{2\times 2}$上的变换$\boldsymbol{\sigma}$如下：对任意$\boldsymbol{X}\in\mathbf{R}^{2\times 2}$，$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{AX}-\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{A}$，其中$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{2}\\ \mathbf{-2} & \mathbf{1}\end{pmatrix}$.（1）证明$\boldsymbol{\sigma}$是$\mathbf{R}^{2\times 2}$上的一个线性变换；

（2）求$\boldsymbol{\sigma}$在$\mathbf{R}^{2\times 2}$的基$\boldsymbol{E}_{11}=\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix},\boldsymbol{E}_{12}=\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{1}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix},\boldsymbol{E}_{21}=\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{1} & \mathbf{0}\end{pmatrix},\boldsymbol{E}_{22}=\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{1}\end{pmatrix}$下的矩阵。

六（12 分）、（1）求线性空间$\mathbf{R}[x]_3$中从基$(\mathbf{I})$：$1,(x-1),(x-1)^2$到基$(\mathbf{II})$：$1,(x+1),(x+1)^2$的过渡矩阵；（2）求线性空间$\mathbf{R}[x]_3$中向量$f(x)=1-2x+3x^2$在基$(\mathbf{I})$下的坐标。

七（10 分）、设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$是向量空间$\mathbf{R}^n$中一个线性无关向量组，讨论向量组$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\cdots,\alpha_n+\alpha_1$的线性相关性

八（10分）、设$\boldsymbol{A}$为$\boldsymbol{n}$阶方阵，$\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{0}$且$\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{I}$.证明:$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$的充分必要条件是$\boldsymbol{r}(\boldsymbol{A})+\boldsymbol{r}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})=\boldsymbol{n}$.

九、（6 分）设数域$\mathbf{R}$上的三维线性空间$\boldsymbol{V}$中定义的两个运算是$\oplus$和$\circ$，即$\boldsymbol{\alpha}\oplus\boldsymbol{\beta}\in\boldsymbol{V}$，$\boldsymbol{k}\circ\boldsymbol{\alpha}\in\boldsymbol{V}$，

且$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3$是$\boldsymbol{V}$的一个基，$\boldsymbol{\theta}$是$\boldsymbol{V}$的零元，若

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\varepsilon}_1\oplus(-\mathbf{1})\circ\boldsymbol{\varepsilon}_2\oplus\mathbf{2}\circ\boldsymbol{\varepsilon}_3,\boldsymbol{\alpha}_2=\mathbf{3}\circ\boldsymbol{\varepsilon}_1\oplus(-\mathbf{2})\circ\boldsymbol{\varepsilon}_2\oplus\mathbf{5}\circ\boldsymbol{\varepsilon}_3,\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{2}\circ\boldsymbol{\varepsilon}_1\oplus\boldsymbol{\varepsilon}_2\oplus\boldsymbol{\varepsilon}_3$$

求$\boldsymbol{V}$的生成子空间$\mathrm{L}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$的一组基与及维数。