课程编号：100171018　　北京理工大学 2018-2019 学年第一学期

2018 级理科数学分析（I）期终考试试题 A 卷解答

座号______班级__________学号___________姓名________成绩______

1.(10 分)判断下列命题是否正确，正确请画√，不正确请画×（不用说明原因）.

(1)若数列$\{a_n\}$收敛，则$\{a_n\}$有界.

答：正确.

(2)若$a_n > b_n(n=1,2,\cdots)$，且$\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = A$，$\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = B$，则$A > B$.

答：不正确. 例如: $a_n = \dfrac{1}{n}, b_n = 0$.

(3)若$\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = A$，且$a_n > 0(n=1,2,\cdots)$，则$\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$.

答：不正确. 例如: $a_n = \dfrac{1}{n!}$.

(4)设$f(x) = |x-a|\varphi(x)$，其中$\varphi(a) = 0$且$\varphi(x)$在a点连续，则$f(x)$在a点可导.

答：正确. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim\limits_{x\to a}\dfrac{|x-a|}{x-a}\varphi(x) = 0$.

(5)如果$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$连续，且$f(x)=0$，$\forall x\in Q$（Q表示有理数集），

那么$f(x)=0$，$\forall x\in(-\infty,+\infty)$.

答：正确.有理数稠密，函数连续.

(6)若$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = L$，则$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x) = \infty$

答：不正确. 例如: $f(x) = \dfrac{1}{x}, g(x) = x^2, x\to 0$.

(7)设非常数函数$f(x)$在区间(a,b)可导，x_0是$f(x)$在(a,b)的极小值点，则存在

$\delta > 0$，使得当$x\in(x_0-\delta, x_0)$时，$f'(x) < 0$；当$x\in(x_0, x_0+\delta)$时，$f'(x) > 0$.

答：不正确. 例如: $f(x) = \begin{cases} x^2\sin^2\dfrac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$.

(8)设$f(x)$在点x_0的某个邻域内有定义.若存在实数A，使得当$\Delta x\to 0$时，

$f(x_0+\Delta x) - f(x_0) - A\Delta x = o(\Delta x)$，则$f'(x_0)$存在，且$f'(x_0) = A$.

答：正确.

(9) 设$\int f(x)dx=F(x)+C$，$\int g(x)dx=G(x)+C$．若$F(x)\neq G(x)$，则$f(x)\neq g(x)$.

答：不正确．例如：$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, F(x)=\arcsin x, G(x)=-\arccos x$.

(10) $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$存在的充要条件是：任给$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，使得$\forall x_1,x_2\in(a,a+\delta)$，

都有$\left|f(x_1)-f(x_2)\right|<\varepsilon$.

答：正确.

2.(35 分)计算题

(1) 求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-(1+2x)^{\frac{1}{2}}}{x^2}$.

解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-(1+2x)^{\frac{1}{2}}}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-\frac{1}{2}(1+2x)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+\frac{1}{2}(1+2x)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2}{2}=1$

方法二.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-(1+2x)^{\frac{1}{2}}}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+x+\frac{1}{2}x^2+o\left(x^2\right)-\left(1+\frac{1}{2}2x+\frac{\frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{2}-1)}{2!}(2x)^2+o\left(x^2\right)\right)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+o\left(x^2\right)}{x^2}=1$$

(2) 求极限$\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$.

解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{-\sin x}{\cos x}}{2x}=-\dfrac{1}{2}$. 则$\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}=e^{-\frac{1}{2}}$.

(3) $\int\dfrac{3x+1}{x^2+x-2}dx$

解：$\int\dfrac{3x+1}{x^2+x-2}dx=\int\left(\dfrac{4}{3}\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{5}{3}\dfrac{1}{x+2}\right)dx=\dfrac{4}{3}\ln|x-1|+\dfrac{5}{3}\ln|x+2|+C$.

(4) $\int_1^2 x\ln x dx$

解：$\int_1^2 x\ln x dx=\dfrac{1}{2}\int_1^2\ln x dx^2=\dfrac{1}{2}x^2\ln x\Big|_1^2-\int_1^2 x^2\cdot\dfrac{1}{x}dx=2\ln 2-\dfrac{3}{2}$.

(5) $\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x}dx$

解：设 $u=e^x$.

$$\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x}dx=\int_1^e \frac{1}{1+u}du=\ln\frac{1+e}{2}.$$

(6) 设 $f(x)=x\sin x$，求 $f^{(5)}(x)$.

解： $f^{(5)}(x)=x\sin^{(5)}(x)+5\sin^{(4)}x=x\sin(x+\frac{5}{2}\pi)+5\sin(x+\frac{4}{2}\pi)$.

(7) 求由 $\begin{cases}x=2t-t^2\\ y=3t-t^3\end{cases}$ 所确定的函数 $y=y(x)$ 的一阶导数 $\frac{dy}{dx}$ 和二阶导数 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

解： $\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{3-3t^2}{2-2t}=\frac{3}{2}(1+t)$， $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\left(\frac{3-3t^2}{2-2t}\right)'}{2-2t}=\frac{3}{4(1-t)}$.

3. (15 分) 设函数 $y=y(x)$ 是由方程 $x^3+y^3-3x+3y+2=0$ 所确定的隐函数.

(1) 求 $\frac{dy}{dx}$ 和 $\frac{d^2y}{dx^2}$；

(2) 求 $y=y(x)$ 的极值.

解：(1) $3x^2+3y^2y'-3+3y'=0$，解得 $\frac{dy}{dx}=\frac{1-x^2}{y^2+1}$.

$6x+6yy'y'+3y^2y''+3y''=0$，解得 $\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{2x+2y(y')^2}{y^2+1}$.

(2) 由 $\frac{dy}{dx}=\frac{1-x^2}{y^2+1}=0$，解得 $x=1,x=-1$. $\frac{dy}{dx}>0$， $x\in(-1,1)$； $\frac{dy}{dx}<0$， $x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$. 则当 $x=1$ 时，$y=0$，这是极大值. 当 $x=-1$ 时，$y=-1$，这是极小值.

4. (6 分) 证明不等式：$\frac{x}{1+x^2}<\arctan x<x$， $x>0$.

证：设 $f(x)=\arctan x$. $\forall x>0$, 存在 $\xi\in(0,x)$，使得

$$\arctan x-\arctan 0=\frac{1}{1+\xi^2}(x-0).$$

则$\dfrac{x}{1+x^2}<\arctan x=\dfrac{x}{1+\xi^2}<x$.

5. (8 分) 设 $f(x)$ 在区间$[0,3]$可导，且 $f(2)+f(3)=2\int_0^1 f(x)dx$. 证明：在$[0,3]$中存在两个点$\xi$，$\eta$，使得 $f(\xi)=f(\eta)$.

证：因为 $f(x)$ 在$[0,3]$可导，所以它$[2,3]$连续，能取到$[2,3]$的最大值M 和最小值m. 由于$m\le\dfrac{f(2)+f(3)}{2}\le M$ ，利用中间值定理，存在$\xi\in[2,3]$，使得

$$f(\xi)=\frac{f(2)+f(3)}{2}.$$

利用积分中值定理，存在$\eta\in[0,1]$，使得 $f(\eta)=\int_0^1 f(x)dx$. 即得 $f(\xi)=f(\eta)$.

6. (10 分) 设 $F(x)=x^2f(x)$.

(1) 若 $f(x)=\ln(1+x)$，求 $F(x)$ 在 $x=0$ 的5阶泰勒多项式，并求 $F^{(5)}(0)$.

(2) 若 $f(x)$ 在区间$[0,a]$二阶可导，且 $f(a)=0$，证明：存在$\eta\in(0,a)$，使得 $F^{//}(\eta)=0$.

证：(1) $F(x)=x^2\left(x-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{3}x^3+o(x^3)\right)=x^3-\dfrac{1}{2}x^4+\dfrac{1}{3}x^5+o(x^5)$.

$F^{(5)}(0)=5!\cdot\dfrac{1}{3}=40$.

(2) $F(0)=0$，$F(a)=a^2f(a)=0$，$F(x)$在$[0,a]$连续，在$(0,a)$可导，利用 Rolle 定理，存在$\xi\in(0,a)$，使得$F^{/}(\xi)=0$；

利用$F^{/}(\xi)=0$，而$F^{/}(x)=x^2f^{/}(x)+2xf(x)$，发现$F^{/}(0)=0$. 在利用 Rolle 定理，存在$\eta\in(0,a)$，使得$F^{//}(\eta)=0$.

7. (8 分)

(1) 设 $f(x)$ 在区间I可导，且 $f^{/}(x)$ 在区间I有界. 证明：$f(x)$ 在区间I一致连续.

⑵ 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 可积，$F(x)$ 是 $f(x)$ 在 (a,b) 的一个原函数. 证明：$F(x)$ 在 (a,b) 一致连续，且 $\lim\limits_{x\to a+0}F(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to b-0}F(x)$ 都存在.

证：(1) 因为 $f'(x)$ 在区间 I 有界，所以存在 $M>0$，使得

$$\left|f'(x)\right|\le M,\forall x\in I.$$

那么 $\forall x_1,x_2\in I$，存在 ξ 介于 x_1,x_2 之间使得 $f(x_1)-f(x_2)=f'(\xi)(x_1-x_2)$，进而

$$\left|f(x_1)-f(x_2)\right|\le M\left|x_1-x_2\right|.$$

于是 $\forall\varepsilon>0$，取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{M}$，$\forall x_1,x_2\in I$，只要 $\left|x_1-x_2\right|<\delta$，

$$\left|f(x_1)-f(x_2)\right|\le M\left|x_1-x_2\right|<M\frac{\varepsilon}{M}=\varepsilon.$$

则 $f(x)$ 在区间 I 一致连续.

⑵ 因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 可积，所以 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 有界，又 $F'(x)=f(x),x\in(a,b)$，利用(1)，$F(x)$ 在 (a,b) 一致连续，从而 $\lim\limits_{x\to a+0}F(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to b-0}F(x)$ 都存在.

8. (8 分) 设 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 可导，且 $\left\{x\in[0,1]\,\middle|\,f(x)=0,f'(x)=0\right\}$ 是空集. 证明：$f(x)$ 在 $[0,1]$ 最多只有有限个零点.

证：假设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 有无限多个零点. 存在 $\{x_n\}$ 满足：

$$x_n\in[0,1],f(x_n)=0,n=1,2,\cdots.$$

$\{x_n\}$ 有界. 利用 BW 定理，它有收敛子列，不妨就是 $\{x_n\}$，记 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=\xi$. 显然 $\xi\in[0,1]$. 利用 $f(x)$ 的连续性，$\lim\limits_{n\to+\infty}f(x_n)=f(\xi)$，故 $f(\xi)=0$. $f(x)$ 在 ξ 可导，则

$$f'(\xi)=\lim_{n\to+\infty}\frac{f(x_n)-f(\xi)}{x_n-\xi}=0.$$

$\xi\in\left\{x\in[0,1]\,\middle|\,f(x)=0,f'(x)=0\right\}$ 与 $\left\{x\in[0,1]\,\middle|\,f(x)=0,f'(x)=0\right\}$ 是空集矛盾. 假设不成立，$f(x)$ 在 $[0,1]$ 最多只有有限个零点.