北京理工大学 2020-2021 学年第二学期

线性代数 A 期末试题 A 卷

座号______________班级____________学号____________姓名______________

（试卷共 6 页，八道大题.解答题必须有解题过程,试卷后空白页撕下做稿纸,试卷不得拆散）

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
得分									
签名									

得分	

一、填空题（每小题 4 分，共 20 分）

1、已知 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 都是 3 元列向量，且 3 阶行列式 $|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3|=m$，则 3 阶行列式 $|2\alpha_3,\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3,-\alpha_1|=$ ________________

2、已知矩阵 A 为 $m\times n$ 矩阵，A^T 是 A 的转置，若 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\dots,\alpha_t$ 是齐次线性方程组 $A^TX=0$ 的基础解系，则 A 的秩 $r(A)=$________________。

3、已知矩阵 $A=\begin{bmatrix}2&7&0\\1&4&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ 和 $B=\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&2&4\\3&2&5\end{bmatrix}$，则 $\begin{vmatrix}0&A^*\\2B&0\end{vmatrix}=$______________。

4、已知矩阵 A 的 Jordan 标准形为 $\begin{bmatrix}a&1&&&\\&a&&&\\&&a&&\\&&&b&1\\&&&&b\end{bmatrix}$，则 A 的初等因子为

__________________________________。

5、在多项式空间 $R[x]_3$ 中定义变换 σ：$\sigma(a_0+a_1x+a_2x^2)=-a_0+a_2x+a_1x^2$，

则 σ 在 $R[x]_3$ 的自然基 $1,x,x^2$ 下的矩阵为__________________________________。

得分	

二(10 分)、已知矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$，矩阵 $\boldsymbol{X}$ 满足$\frac{1}{3}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}$，

其中$\boldsymbol{A}^*$是$\boldsymbol{A}$的伴随矩阵，求矩阵$\boldsymbol{X}$。

得分	

三（10 分）、已知线性空间$\boldsymbol{F}[x]_4$的自然基为$1, x, x^2, x^3$。

(1) 证明：$1, 1+x, 1+x+x^2, 1+x+x^2+x^3$为$F[x]_4$的一个基；

(2) 求自然基$1, x, x^2, x^3$到基$1, 1+x, 1+x+x^2, 1+x+x^2+x^3$的过渡矩阵；

(3) 求$h(x)=1+3x-x^3$在基$1, 1+x, 1+x+x^2, 1+x+x^2+x^3$下的坐标。

得分	

四(15 分)、已知线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 6x_3 + 4x_4 = -1 \\ 3x_1 + 2x_2 + ax_3 + 7x_4 = -1 \\ x_1 - x_2 - 6x_3 - x_4 = b \end{cases}$$

讨论参数a,b取何值时，方程组有解，无解；当有解时，请用其导出组的基础解系表示通解。

得分	

五(10 分)、

设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,-1,3,1)^T, \boldsymbol{\alpha}_2 = (2,-2,6,2)^T, \boldsymbol{\alpha}_3 = (2,1,3,-1)^T, \boldsymbol{\alpha}_4 = (4,-1,9,1)^T$ 。

(1)求$\boldsymbol{L}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$的维数和一组基；(2) 求 $\boldsymbol{L}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$的一组标准正交基。

得分	

六(10 分)、设三阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 2，并且 $\lambda_1=\lambda_2=6$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的二重特征值。若 $\boldsymbol{\alpha}_1=(\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{0})^T$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(\mathbf{2},\mathbf{1},\mathbf{1})^T$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 6 的特征向量。

（1） 求 $\boldsymbol{A}$ 的另一特征值和与其对应的特征向量；

（2） 求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 。

得分	

七(15分)、已知实二次型 $f\left(x_1, x_2, x_3\right)=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+2ax_2x_3\left(a>0\right)$,

经过正交替换 $X=QY$，化为标准形 $y_1^2+2y_2^2+5y_3^2$。

（1） 求实参数 a 以及正交矩阵 Q；

（2） 判断此二次型是否正定。

得分	

八(10 分)、设$\lambda \neq 0$是m阶矩阵$A_{m\times n}B_{n\times m}$的特征值，证明：$\lambda$也是$n$阶矩阵$B_{n\times m}A_{m\times n}$的特征值。