1、 填空 15%（每小题 3分）

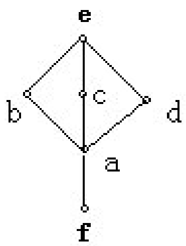
1、 n阶完全图结点v的度数d(v) = ______________ 。

2、 设n阶图G中有m条边，每个结点的度数不是k的是k+1，若G中有N_k个k度顶点，N_{k+1}个k+1度顶点，则N_k = ________________ 。

3、 算式 $((a+(b*c)*d)\div(e*f)$ 的二叉树表示为

__________________________ 。

4、 如图



给出格L，则e ___ 。

5、 一组学生，用二二扳腕子比赛法来测定臂力的大小，则幺元是 _________ 。

二、选择 15%（每小题 3分）

1、设S={0,1,2,3},≤为小于等于关系，则{S，≤}是（　　）。

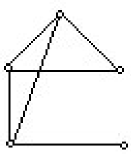
A、群；B、环；C、域；D、格。

2、设[{a , b , c}，*]为代数系统，*运算如下：

*	a	b	c
a	a	b	c
b	b	a	c
c	c	c	c

则零元为（　　）。

A、a； B、b； C、c； D、没有。

3、如右图  相对于完全图K_5的补图为（　　）。

[A]　　[B]　　[C]　　[D]

4、一棵无向树T有7片树叶，3个3度顶点，其余顶点均为4度。则T有（　　）4度结点。

A、1；　B、2；　C、3；　D、4。

5、设[A，+，·]是代数系统，其中+，·为普通加法和乘法，则A=（　　　）时，[A，+，·]是整环。

A、$\{x \mid x = 2n, n \in Z\}$；　B、$\{x \mid x = 2n+1\,, n \in Z\}$；

C、$\{x \mid x \geq 0, \square\ x \in Z\}$；　D、$\{x \mid x = a + b\sqrt[4]{5},\quad a\,, b \in R\}$。

三、证明 50%

1、设G是（n,m）简单二部图，则$m \leq \dfrac{n^2}{4}$。（10分）

2、设G为具有n个结点的简单图，且$m > \dfrac{1}{2}(n-1)(n-2)$，则G是连通图。（10分）

3、记“开”为1，“关”为0，反映电路规律的代数系统[{0，1}，+，·]的加法运算和乘法运算。如下：

+	0	1
0	0	1
1	1	0

·	0	1
0	0	0
1	0	1

证明它是一个环，并且是一个域。（14分）

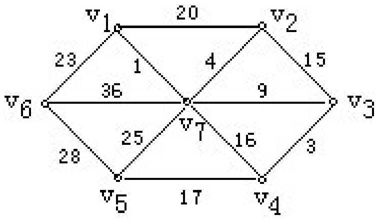
4、$[L,\otimes,\oplus]$是一代数格，“≤”为自然偏序，则[L，≤]是偏序格。（16分）

四、10%

设$E(x_1,x_2,x_3) = (x_1 \wedge x_2) \vee (x_2 \wedge x_3) \vee (\overline{x_2} \wedge x_3)$是布尔代数$[\{0,1\}, \vee, \wedge, -]$上的一个布尔表达式，试写出$E(x_1,x_2,x_3)$的析取范式和合取范式（10分）

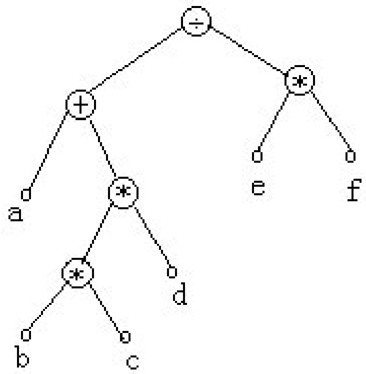
五、10%

如下图所示的赋权图表示某七个城市$v_1, v_2, \quad , v_7$及预先算出它们之间的一些直接通信成路造价（单位：万元），试给出一个设计方案，使得各城市之间既能够通信又使总造价最小。



一、填空 15%（每小题3分）

1、n-1；2、n(k+1)-2m；3、如右图；4、0；5、臂力小者



二、选择 15%（每小题 3分）

题目	1	2	3	4	5
答案	D	C	A	A	D

三、证明 50%

1、 证：设G=（V，E）

$$V = X \cup Y \ ,\left|X\right| = n_1 \quad ,\left|Y\right| = n_2 \quad ,n_1 + n_2 = n$$

对完全二部图有$m = n_1 \cdot n_2 = n_1(n - n_1) = -n_1^2 + n_1 n = -(n_1 - \frac{n}{2})^2 + \frac{n^2}{4}$

当$n_1 = \frac{n}{2}$时，完全二部图$(n\ ,m)$的边数m有最大值$\frac{n^2}{4}$

故对任意简单二部图$(n\ ,m)$有$m \le \frac{n^2}{4}$。

2、 证：反证法：若G不连通，不妨设G可分成两个连通分支G_1、G_2，假设G_1和G_2的顶点数分别为n_1和n_2，显然$n_1 + n_2 = n$

$$n_1 \ge 1 \quad n_2 \ge 1 \quad \therefore n_1 \le n-1 \quad n_2 \le n-1$$

$$\therefore m \le \frac{n_1(n_1-1)}{2} + \frac{n_2(n_2-1)}{2} \le \frac{(n-1)(n_1+n_2-2)}{2} = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

与假设矛盾。所以G连通。

3、 （1）[{0，1}，+，·]是环

①[{0，1}，+]是交换群

乘：由“+”运算表知其封闭性。由于运算表的对称性知：+运算可交换。

群：（0+0）+0=0+（0+0）=0；（0+0）+1=0+（0+1）=1；

（0+1）+0=0+（1+0）=1；（0+1）+1=0+（1+1）=0；

（1+1）+1=1+（1+1）=0 ……

结合律成立。

幺：幺元为0。

逆：0，1逆元均为其本身。

②[{0，1}，·]是半群

乘：由“· ”运算表知封闭

群：（0·0）·0=0·（0·0）=0；（0·0）·1=0·（0·1）= 0；

（0·1）·0=0·（1·0）=0；（0·1）·1=0·（1·1）=0；

（1·1）·1=1·（1·1）=0 。

③·对+的分配律 $\forall x, y \in \{0,1\}$

 0·（x+y）=0=0+0=(0·x)+(0·y)；

 1·（x+y）

当x=y (x+y)=0 则

$$1\cdot(x+y)=1\cdot 0=0=\begin{cases}0+0\\1+1\end{cases}=\begin{cases}(1\cdot 0)+(1\cdot 0)\\(1\cdot 1)+(1\cdot 1)\end{cases}=(1\cdot x)+(1\cdot y);$$

当$x \neq y$（$x+y=1$）则

$$1\cdot(x+y)=1\cdot 1=1=\begin{cases}1+0\\0+1\end{cases}=\begin{cases}(1\cdot 1)+(1\cdot 0)\\(1\cdot 0)+(1\cdot 1)\end{cases}=(1\cdot x)+(1\cdot y)$$

所以$\forall x, y, z \in \{0,1\}$均有$z\cdot(x+y)=(z\cdot x)+(z\cdot y)$

同理可证：$(x+y)\cdot z=(x\cdot z)+(y\cdot z)$

所以·对+ 是可分配的。

由①②③得，[{0，1}，+，·]是环。

（2）[{0，1}，+，·]是域

因为[{0，1}，+，·]是有限环，故只需证明是整环即可。

①乘交环：由乘法运算表的对称性知，乘法可交换。

②含幺环：乘法的幺元是1

③无零因子：1·1=1≠0

因此[{0，1}，+，·]是整环，故它是域。

4、证：（1）“≤”是偏序关系， ≤自然偏序 $\forall a,b \in L \quad a\otimes b=a$

①反自反性：由代数格幂等关系：$a\otimes a=a \therefore a\le a$。

②反对称性：$\forall a,b \in L$ 若 $a\le b$,$b\le a$ 即：$a\otimes b=a,\quad b\otimes a=b$，

则 $a=a\otimes b=b\otimes a=b \quad b\le a$

③传递性：$a\le b$,$b\le c$则：

$$\begin{aligned}a\otimes c&=(a\otimes b)\otimes c && a\le b\square\ a\otimes b=a\\&=a\otimes(b\otimes c) && \square\square\square\\&=a\otimes b && b\le c\square\ b\otimes c=b\\&=a && a\le b\square\ a\otimes b=a\end{aligned}$$

$\therefore a\le c$

（2）$\forall x, y \in L$　在L中存在{x,y}的下（上）确界

设$x, y \in L$则：$x \otimes y = \inf\{x, y\}$

事实上：$x \otimes (x \otimes y) = (x \otimes x) \otimes y = x \otimes y$

$\therefore x \otimes y \le x$ □□□□　$: x \otimes y \le y$

若{x , y }有另一下界c，则$c \otimes (x \otimes y) = (c \otimes x) \otimes y = c \otimes y = c$

$\therefore c \le x \otimes y$　$\therefore x \otimes y$是{x , y }最大下界，即$x \otimes y = \inf\{x, y\}$

同理可证上确界情况。

四、14%

解：函数表为：

$\boxed{x_1}$	$\boxed{x_2}$	$\boxed{x_3}$	$E(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

析取范式：
$$E(x_1, x_2, x_3) = (\overline{x}_1 \wedge \overline{x}_2 \wedge x_3) \vee (\overline{x}_1 \wedge x_2 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge \overline{x}_2 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge \overline{x}_3) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge x_3)$$

合取范式：$E(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \vee x \vee_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_3) \wedge (\overline{x}_1 \vee x_2 \vee x_3)$

五、10%

解： 用库斯克（Kruskal）算法求产生的最优树。算法为：

$w(v_1, v_7) = 1$　□ $e_1 = v_1 v_7$

$w(v_7, v_2) = 4$　□ $e_2 = v_7 v_2$

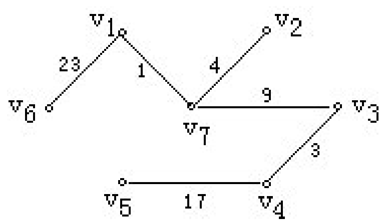
$w(v_7, v_3) = 9$　□ $e_3 = v_7 v_3$

$w(v_3, v_4) = 3$　□ $e = v_3 v_4$

$w(v_4, v_5) = 17$　□ $e = v_4 v_5$

$w(v_1, v_6) = 23$　□ $e = v_1 v_6$

结果如图：



树权C(T)=23+1+4+9+3+17=57（万元）即为总造价