1. 按$\varepsilon - N$定义证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5n^2+n-2}{3n^2-2}=\frac{5}{3}$$

证
$$\left|\frac{5n^2+n-2}{3n^2-2}-\frac{5}{3}\right|$$
$$=\left|\frac{3n+4}{3(3n^2-2)}\right|$$
$$\leqslant\frac{4n}{3\cdot 2n^2}\qquad （n>4）$$
$$=\frac{2}{3n},$$

取$N=\max\left\{\left[\frac{2}{3\varepsilon}\right]+1,4\right\}$，当 n>N 时，

$$\left|\frac{5n^2+n-2}{3n^2-2}-\frac{5}{3}\right|<\varepsilon.$$

注： 扩大分式是采用扩大分子或缩小分母的方法. 这里先限定 n>4，扩大之后的分式$G(n)=\frac{2}{3n}$仍是无穷小数列.

2. 用$\varepsilon-\delta$方法验证：

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x(x^2-3x+2)}=-3.$$

解 （1）消去分式分子、分母中当$x\to 1$时的零化因子（x−1）：

$$f(x)=\frac{x^2+x-2}{x(x^2-3x+2)}=\frac{(x+2)(x-1)}{x(x-1)(x-2)}=\frac{x+2}{x(x-2)}.$$

（2）把$|f(x)-(-3)|$化为$|\varphi(x)|\cdot|x-1|$，其中$\varphi(x)$为 x 的分式：

$$|f(x)+3|=\left|\frac{x+2}{x(x-2)}+3\right|=\left|\frac{3x^2-5x+2}{x(x-2)}\right|=\frac{|3x-2|}{|x^2-2x|}|x-1|,$$

其中$\varphi(x)=\dfrac{3x-2}{x^2-2x}$.

（3）确定$x_0=1$的邻域 0<|x−1|<η，并估计$\varphi(x)$在此邻域内的上界：取$\eta=\dfrac{1}{2}$，当 0<|x−1|<$\dfrac{1}{2}$时，可得

$$|3x-2|\leqslant 3|x-1|+1<\frac{5}{2},$$

$$|x^2-2x|=|1-(x-1)^2|>\frac{3}{4},$$

于是

$$\frac{|3x-2|}{|x^2-2x|}<\frac{\frac{5}{2}}{\frac{3}{4}}=\frac{10}{3}.$$

（4）要使$|f(x)+3|=\dfrac{|3x-2|}{|x^2-2x|}|x-1|\leqslant\dfrac{10}{3}|x-1|<\varepsilon$，只要取$|x-1|<\dfrac{3}{10}\varepsilon$. 于是应取

$$\delta=\min\left\{\frac{1}{2},\frac{3\varepsilon}{10}\right\},$$

当 0<|x−1|<δ时，$|f(x)-(-3)|<\varepsilon$.

3.用$\varepsilon-M$方法验证：

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}-x}=-\frac{1}{2}.$$

解 $$\left|\frac{x}{\sqrt{x^2+1}-x}-\left(-\frac{1}{2}\right)\right|=\left|\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{2(\sqrt{x^2+1}-x)}\right|=\left|\frac{1}{2(\sqrt{x^2+1}-x)^2}\right|$$

注意到当$x\to\infty$时，上式可以充分小，但是直接解不等式

$\left|\dfrac{1}{2(\sqrt{x^2+1}-x)^2}\right|<\varepsilon$，希望由此得到 x<−M，整个过程相当繁杂，现用放大法简化求 M 的过程. 因为由

$$\frac{1}{2(\sqrt{x^2+1}-x)^2}\leq\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(-2x)^2}=\frac{1}{8x^2}<\varepsilon,$$

便可求得 $x^2 > \frac{1}{8\varepsilon}$，考虑到 $x \to -\infty$ 所需要的是 $x < -\sqrt{\frac{1}{8\varepsilon}}$．于是 $\forall \varepsilon > 0, \exists M = \sqrt{\frac{1}{8\varepsilon}}$，当 x<-M 时，

$$\left|\frac{x}{\sqrt{x^2+1}-x}-\left(-\frac{1}{2}\right)\right| < \varepsilon .$$

4. 写出下述命题的“否定命题”的分析表述：

（1）$\{x_n\}$ 是无穷小量；

(2) $\{x_n\}$ 是正无穷大量；

(3) $f(x)$ 在 x_0 的右极限是 A；

(4) $f(x)$ 在 x_0 的左极限是正无穷大量；

(5) 当 $x \to -\infty$，$f(x)$ 的极限是 A；

(6) 当 $x \to +\infty$，$f(x)$ 是负无穷大量。

解（1）$\exists \varepsilon_0 > 0, \forall N, \exists n > N : |x_n| \geq \varepsilon_0$。

（2）$\exists G_0 > 0, \forall N, \exists n > N : x_n \leq G_0$。

（3）$\exists \varepsilon_0 > 0, \forall \delta > 0, \exists x \in (x_0, x_0 + \delta) : |f(x) - A| \geq \varepsilon_0$。

（4）$\exists G_0 > 0, \forall \delta > 0, \exists x \in (x_0 - \delta, x_0) : f(x) \leq G_0$。

（5）$\exists \varepsilon_0 > 0, \forall X > 0, \exists x \in (-\infty, -X) : |f(x) - A| \geq \varepsilon_0$。

（6）$\exists G_0 > 0, \forall X > 0, \exists x \in (X, +\infty) : f(x) \geq -G_0$。

5. 试证函数 $y = \sin x^2$，在 $[0,+\infty)$ 上是不一致连续.

分析　需确定 $\varepsilon_0 > 0, \forall \delta > 0$，可找到 x', x'' 满足 $|x' - x''| < \delta$，但

$$|f(x')-f(x'')|\geqslant\varepsilon_0.$$

由于$\sin x^2$在任意闭区间$[0,a]$（a>0）上一致连续，因此当δ很小时，必须在$U(+\infty)$中寻找x',x''，这是证明中的困难之处. 现不妨取

$x'=\sqrt{n\pi+\frac{\pi}{2}},x''=\sqrt{n\pi}$，

$$0<x'-x''=\sqrt{n\pi+\frac{\pi}{2}}-\sqrt{n\pi}=\frac{\frac{\pi}{2}}{\sqrt{n\pi+\frac{\pi}{2}}+\sqrt{n\pi}}<\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}},$$

当 n 充分大时，x',x''能满足$|x'-x''|<\delta$，但$|f(x')-f(x'')|\geqslant1$.

证　$\exists\varepsilon_0=1,\forall\delta>0$，取$x'=\sqrt{n\pi+\frac{\pi}{2}}$，$x''=\sqrt{n\pi}$，当$n>\frac{\pi}{4\delta^2}$时，使$|x'-x''|<\delta$，但$|\sin x'^2-\sin x''^2|=1\geqslant\varepsilon_0$，即$\sin x^2$在$[0,+\infty)$上不一致连续.

6. 若函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导，且 $f(0)=0$，$f(1)=1$，$f'(0)=f'(1)=0$，则存在$c\in(0,1)$使得$|f''(c)|\geq2$.

证法一：　$\forall x\in(0,1)$，把$f(x)$在 0，1 两点处分别进行泰勒展开到二阶余项，有

$$\begin{aligned}f(x)&=f(0)+f'(0)(x-0)+\frac{f''(\xi_1)}{2!}x^2,\\ f(x)&=f(1)+f'(1)(x-1)+\frac{f''(\xi_2)}{2!}(x-1)^2,\end{aligned}\qquad 0<\xi_1<x<\xi_2<1,$$

上两式相减，有

$$1=\frac{f''(\xi_1)}{2}x^2-\frac{f''(\xi_2)}{2}(x-1)^2.$$

记$|f''(c)|=\max\{|f''(\xi_1)|,|f''(\xi_2)|\}$，则有

$$1 \le \frac{1}{2}|f''(c)|[x^2+(x-1)^2]$$

$$=\frac{1}{2}|f''(c)|\left[2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\right]$$

$$\le \frac{1}{2}|f''(c)|,$$

即存在$c\in(0,1)$使得$|f''(c)|\ge 2$.

证法二： 在$[0,1]$上对$f(x)$应用拉格朗日中值定理有

$$f'(\xi)=f(1)-f(0)=1，\ 0<\xi<1.$$

当$0<\xi\le\frac{1}{2}$时，在$[0,\xi]$上对$f'(x)$应用拉格朗日中值定理有

$$1=f'(\xi)-f'(0)=f''(c)\xi \quad \Rightarrow |f''(c)|=f''(c)=\frac{1}{\xi}\ge 2 \quad ,$$

$c\in(0,\xi)\subset(0,1)$.

当$\frac{1}{2}<\xi<1$时，在$[\xi,1]$上对$f'(x)$应用拉格朗日中值定理有

$$1=f'(\xi)-f'(1)=f''(c)(\xi-1) \quad \Rightarrow |f''(c)|=\frac{1}{1-\xi}\ge 2 \quad ,$$

$c\in(\xi,1)\subset(0,1)$.

综上证明知存在$c\in(0,1)$使得$|f''(c)|\ge 2$.

7. 设函数 $f(x)=\begin{cases} x^m \sin\dfrac{1}{x}, x\neq 0 \\ 0, \quad x=0 \end{cases}$ **（m 为实数），**

试问：（1）m 等于何值时，f 在 $x=0$ 连续；

（2）m 等于何值时，f 在 $x=0$ 可导；

（3）m 等于何值时，f' 在 $x=0$ 连续；

解：(1) 要使函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 点连续，即需 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$，

而当 $m\geq 0$ 时，

$0\leq |f(x)|=|x^m|\left|\sin\dfrac{1}{x}\right|\leq |x^m|$，有 $\lim\limits_{x\to 0}|f(x)|=0$，

从而 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0=f(0)$，即函数在 $x=0$ 点连续.

(2) 当 $m\geq 1$ 时，$f'(0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta x^m \sin\dfrac{1}{\Delta x}-0}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta x^{m-1}\sin\dfrac{1}{\Delta x}=0$，

由复合函数求导法则可得 $f'(x)=\begin{cases} mx^{m-1}\sin\dfrac{1}{x}-x^{m-2}\cos\dfrac{1}{x}, x\neq 0 \\ 0, \quad x=0 \end{cases}$，

即 $m\geq 1$ 时函数在 $x=0$ 点可导.

(3) 由（2）的求解过程可知要使 $f'(x)$ 在 $x=0$ 点连续，首先要求 $m\geq 1$，此时要使 $f'(x)$ 在 $x=0$ 的极限存在并且等于 $f'(0)=0$，

即需要 $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)=\lim\limits_{x\to 0}(mx^{m-1}\sin\dfrac{1}{x}-x^{m-2}\cos\dfrac{1}{x})=f'(0)$，

类似于 (1) 中的证明需要 $m\geq 2$，即当 $m\geq 2$ 时，函数的导函数在 $x=0$ 点连续.

8. 设$f(x)$在 $[a,+\infty)$ $(a>0)$ 上满足 Lipschitz 条件：$|f(x)-f(y)|\le k|x-y|$，证明$\frac{f(x)}{x}$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续.

证

$$\left|\frac{f(x_1)}{x_1}-\frac{f(x_2)}{x_2}\right|\le\left|\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1}\right|+|f(x_2)|\frac{|x_1-x_2|}{|x_1x_2|}$$

$$\le B|x_1-x_2|<\varepsilon.$$

因为

$$|f(x)-f(a)|\le k|x-a|,$$

$$|f(x_2)|\le k|x_2|+k|a|+|f(a)|,$$

$$\left|\frac{f(x_2)}{x_2}\right|\le B,$$

取$\delta=\frac{\varepsilon}{B}$，当$|x_1-x_2|<\delta$时，$\left|\frac{f(x_1)}{x_1}-\frac{f(x_2)}{x_2}\right|<\varepsilon$.

9. 设函数$f(x)$在点a具有连续的二阶导数，试证明：

$$\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2}=f''(a)$$

证明 因为f在点a处具有连续的二阶导数，所以f在点a的某邻域$U(a)$内具有一阶导数，于是由洛必达法则，分子分母分别对h求导，有

$$\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2}=\lim_{h\to0}\frac{f'(a+h)-f'(a-h)}{2h}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{h\to0}\frac{f'(a+h)-f'(a)+f'(a)-f'(a-h)}{h}$$

$$=\frac{1}{2}(\lim_{h\to0}\frac{f'(a+h)-f'(a)}{h}+\lim_{h\to0}\frac{f'(a-h)-f'(a)}{-h})=\frac{1}{2}(f''(a)+f''(a))=f''(a)$$