

课程编号: A073122

北京理工大学 2010-2011 学年第一学期

线性代数 A 试题 A 卷

班级 _____ 学号 _____ 姓名 _____ 成绩 _____

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											
签名											

一、(10 分) 已知矩阵 X 满足 $X + A^{-1}X = A^* + A^{-1}$ ，其中 $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ，求矩阵 X 。

信息与电子二学部学生会
学习部

二、(10 分) 已知方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = p \\ qx_1 + 2x_2 + 6x_3 = 3 \end{cases}$$

有解，且其导出组基础解系有一个向量。(1) 求 p, q 的值；(2) 求方程组的一般解。

(用导出组的基础解系表示通解)

三、(10 分) 在 $\mathbf{R}^{2 \times 2}$ 中，令 $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\alpha_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$,

$$\beta_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \beta_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \beta_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \beta_4 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

(1) 证明 $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ 为 $\mathbf{R}^{2 \times 2}$ 的一个基；

(2) 求自然基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 到基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ 的过渡矩阵；

(3) 求 $\gamma = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ 在基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ 下的坐标。

四、（10 分）已知 $\alpha_1 = (-1, 0, 1)$, $\alpha_2 = (2, 2, 0)$, $\alpha_3 = (0, 1, 1)$ 。

- (1) 求向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的一个极大无关组；
- (2) 求生成子空间 $L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 的一个标准正交基。

信息与电子二学部学生会
学习部

五、（10 分）设 5 阶方阵 A 的初等因子为 $\lambda+1, (\lambda-2)^2, \lambda^2$ 。

(1) 试写出 A 的 Jordan 标准形；(2) 求 A 的特征值。

六、（10 分）在 $F[x]_4$ 中定义线性变换 $\sigma: \sigma[f(x)] = f'(x)$ 。求 σ 在基

$1, 1+x, 1+x+x^2, 1+x+x^2+x^3$ 下的矩阵。

信息

信息与电子二学部学生会

学习部

七、(10 分) 证明： n 阶方阵 A 可相似对角化的充分必要条件是 A 有 n 个线性无关的特征向量。

八、(10 分) 已知实二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = X^T A X$ 经过正交变换 $X = QY$ 化为 $y_1^2 + 2y_2^2$ ，其中 $X = (x_1, x_2, x_3)^T, Y = (y_1, y_2, y_3)^T$ 。

(1) 判断二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 是否正定； (2) 求行列式 $|A|$ 的值；

(3) 若 $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ ，求矩阵 A 。

九、(10 分) 设 $A = (a_{ij})$ 是 3 阶非零矩阵，且满足 $a_{ij} = A_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3)$ ，其中 A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式。证明： A 为正交矩阵。

十、(10 分) 已知 A 是 3 阶矩阵， $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是线性无关的 3 元列向量组，满足

$$A\alpha_1 = -\alpha_1 - 3\alpha_2 - 3\alpha_3, \quad A\alpha_2 = 4\alpha_1 + 4\alpha_2 + \alpha_3, \quad A\alpha_3 = -2\alpha_1 + 3\alpha_3。$$

(1) 求矩阵 A 的特征值；(2) 求矩阵 A 的特征向量。

信息与电子二学部学生会
学习部