课程编号：A073003　　　　北京理工大学 2015-2016 学年第一学期

线性代数 B 试题 A 卷

班级 ________学号_________ 姓名 __________ 成绩 ___________

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											
签名											

一、（10 分）设 3 阶方阵 A, B 满足 $A^2B-A-B=I$,其中 I 为 3 阶单位矩阵, 若

$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}$, 求 $|B|$.

二、（10 分）已知线性方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = \lambda - 3 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = -2 \\ x_1 + \ x_2 + \lambda x_3 = -2 \end{cases}$$

讨论参数λ取何值时，方程组无解，有唯一解和无穷多个解？在方程组有无穷多个解时，用导出组的基础解系表示解.

三、（10 分）已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 & 5 \\ 3 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 14 & 0 & 6 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

（1）求 A 的列向量组的秩和它的一个极大无关组;

（2）用所求的极大无关组线性表出剩余列向量.

四、（10 分）已知$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是向量空间$\mathbf{R}^3$的一个基,

$$\beta_1=2\alpha_1+\alpha_2,\beta_2=3\alpha_1+2\alpha_2,\beta_3=\alpha_3$$

（1）证明β_1,β_2,β_3为$\mathbf{R}^3$的一个基;

（2）求基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$到基$\beta_1,\beta_2,\beta_3$的过渡矩阵;

（3）求向量$\gamma=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$关于基$\beta_1,\beta_2,\beta_3$的坐标.

五、（10 分）用施密特正交化方法, 由向量组

$$\alpha_1=(0,1,-1)^{\mathrm{T}},\quad \alpha_2=(2,2,0)^{\mathrm{T}},\quad \alpha_3=(1,0,-1)^{\mathrm{T}}$$

构造一组标准正交向量组.

六、（10 分）已知矩阵 $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & 2 \end{pmatrix}$.

(1) 求 A 的特征值和特征向量;

(2) 判断 A 是否可以相似对角化.

七、（10 分）如果 $\mathbf{F}^n$ 中的向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$ 是线性无关的，并且向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t,\beta$ 是线性相关的，那么 b 可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$ 线性表示，并且表示的方法是唯一的.

八、（10 分）已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=4x_2^2-3x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3+8x_2x_3$.

（1）用正交变换将它化为标准形，并给出所用的正交变换；（2）该二次型是否正定?

九、（10 分）设 $A=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ 1 & 1 & \lambda\end{pmatrix}$，$b=\begin{pmatrix}a\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$，已知线性方程组 $AX=b$ 存在两个不同的解.　（1）求 λ, a；　（2）求 $AX=b$ 的通解.

十、（10 分）设

$$A=\begin{pmatrix} 2a & 1 & & & & \\ a^2 & 2a & 1 & & & \\ & a^2 & 2a & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & a^2 & 2a & 1 \\ & & & & a^2 & 2a \end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

（1）证明行列式$|A|=(n+1)a^n$;

（2）当a为何值时，方程组$AX=b$有唯一解？当$AX=b$有唯一解时，求x_1;

（3）当a为何值时，方程组$AX=b$有无穷多个解？　当$AX=b$有无穷多个解时，求它的通解.