第一章　误差理论与数据处理

在人类的各种活动中，如科学研究、工农业生产、商业贸易、日常生活等，常常需要进行测量。由于对被测量认识的不足，加上测量中存在不确定因素，而使得测量的结果一般只是被测量的近似值或估计值。因此在报告测量结果时，必须同时给出测量的质量指标，以便使人们能知道该测量结果的可信赖程度，只有同时附上对被测量近似值或估计值的不确定度说明时，该测量结果才是完整的。

本部分将介绍与测量、测量误差有关的理论知识及测量结果的评定和表述方法，同时简述一些常用的实验数据处理方法。

第一节　误差的基本概念

1. 绝对误差

测量是利用各种方法和器具对“被测量”进行赋值的过程。

测量可分为直接测量和间接测量两类。直接测量是指可直接从仪器（或量具）上获知被测量大小的测量。间接测量是指借助于某些直接测得的量与被测量之间的函数关系，由直接测量结果通过公式计算而得到被测量的数值。

测量还可分为等精度测量和不等精度测量。等精度测量是指在测量条件不变的情况下对同一被测量进行重复测量，所得各次测量值都有相同的精度。测量条件不变是指在测量的时间内，测量仪器、测量程序和方法、测量人员及测量环境均不改变。不等精度测量是指在测量条件有变化的情况下对同一被测量进行重复测量，所得各次测量数据的精度不同。本书以下讨论中所涉及的测量均为等精度测量。

测量误差定义为测量值与被测量真值之差。记为

$$\Delta x = x - x_0$$

式中：Δx 为测量误差；x 为测量值；x_0 为被测量真值。用该式表示的测量误差常被称为绝对误差。

2. 相对误差

相对误差是测量误差的另一种表示方式，它定义为绝对误差与真值的比值，记为

$$N = \frac{\Delta x}{|x_0|}$$

由于被测量的真值是不能知道的，故常用约定真值来代替。约定真值是指理论上指定或给出的值（理论值），或是经很多人反复高精度测量并为权威组织认定的值（公认值）。例

如，阿伏加德罗常数，光速 c 等。但很多时候我们测量的被测量没有理论值或公认值。在这种情况下，真值常常用“被测量的最佳估计值”来代替。用“大数定理”可以证明，对一个多次重复等精度测量的结果，当测量次数足够多时，被测量的算术平均值收敛于它的真值，因而多次测量的算术平均值常常被作为“被测量的最佳估计值”。因此，上式可以写为

$$N = \frac{\Delta x}{|\bar{x}|}$$

3. 误差的分类

误差按性质来说可分为系统误差和随机误差两大类。

（1）系统误差

系统误差是指在相同条件下多次测量同一被测量的过程中，大小、正负恒定或按照某种确定的规律变化的测量误差。

系统误差包括：仪器误差、理论和方法误差、实验人员的误差。

对于那些已确切掌握了大小、方向的系统误差要在测量值中加以修正。例如，用螺旋测微计进行测量前，要先检查零点是否准确。若零点不准，则应读出零点数值（称零记数）的大小和正负，并在测量数据中减去该数值，得到修正后的测量结果。

（2）随机误差

随机误差是指在相同条件下多次测量同一被测量的过程中，大小、方向都难以预料或变化方式不可预知的测量误差。

随机误差是由实验过程中各种因素的随机变化引起的。当测量次数足够多时，随机误差服从一定的统计规律。

随机误差的分布形式有多种，但无论是哪种分布形式都存在着数学期望值、方差、标准偏差这样的重要参数。在实验中大量的、最常见的测量结果一般可认为服从或近似服从正态分布规律。以下对正态分布作简要介绍。

正态分布是连续分布。设有连续随机变量 x，它的正态分布概率密度函数为

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-(x-m)^2/2\sigma^2}$$

式中：m 称为总体平均值（数学期望值 $E(x)$），定义为

$$m = \lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}$$

式中：n 为测量次数；x_i 是一系列测量值。

方差描述了随机变量 x 对数学期望值的分散程度。连续型随机变量的方差定义为

$$D(x) = \int_{-\infty}^{+\infty}[x - E(x)]^2 f(x)\,\mathrm{d}x$$

正态分布的标准偏差是表征测量分散性的重要参数，定义为方差的正平方根：

$$\sigma = \lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - m)^2}{n}}$$

图 1－1 是正态分布密度函数曲线，横坐标表示测量值 x，纵坐标表示测量值的概率分布密

度 $f(x)$。在正态分布曲线上，m 是对应曲线峰值处的横坐标，从曲线上可看出被测量值在 m 处的概率密度最大。σ 是曲线拐点处的横坐标与 m 值之差。

正态分布曲线有如下特点

（1）曲线在均值处有极大值（单峰性）。

（2）曲线以 $x=m$ 为轴左右对称（对称性）。

（3）曲线两端无限接近于横轴（有界性）。

（4）测量次数 $n\to\infty$ 时，随机误差的平均值为零（抵偿性）。

关于正态分布还要考虑置信区间与置信概率。

正态分布曲线与 x 轴之间所包围的面积可表示测量值落在相应范围内的概率，这个范围称置信区间，置信区间的半宽度为 $a=k\sigma$，相应的概率称置信概率 p。若取 $k=1$，测量值落在（$m-\sigma$，$m+\sigma$）区间内的概率是68.27%（图1-1中阴影部分）；取 $k=2$，测量值落在（$m-2\sigma$，$m+2\sigma$）区间内的概率是95.45%；取 $k=3$，测量值落在（$m-3\sigma$，$m+3\sigma$）区间内的概率是99.73%。k 称置信因子。k 值与分布形式及概率有关，分布不同或概率不同时，k 值也不同，表1-1中给出了正态分布 k、p 的对应值。

表1-1　正态分布包含因子 k 与概率 p 的对应值

概率 p（%）	68.27	90	95	95.45	99	99.73
包含因子 k	1	1.645	1.960	2	2.576	3

由上面的统计分析可知，测量值落在 3σ 内的概率已达99.73%，也就是说其落在 3σ 以外的可能性极小，因此可用 3σ 作为判断标准（即 3σ 准则），用于剔除异常数据，若测量数据中出现了 $|x_i-m|>3\sigma$ 的数据，则认为该数据为异常数据，应在测量数据列中将它剔除。

以上对正态分布的讨论是基于测量次数 $n\to\infty$ 的情况。实际测量中测量次数都是有限的。如对被测量进行了 n 次观测（$n\neq\infty$），得到 n 个观测值 x_1，x_2，…，x_n，此时它们的平均值（即数学期望值）为

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$$

方差为

$$V(x_i)=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$$

表征测量值分散程度的参数为实验标准偏差，用 S_x 表示，计算公式为

$$S_x=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n-1}} \tag{1-1}$$

式（1-1）称为贝塞尔公式。S_x 是任意一次测量值的实验标准偏差，是用来表征测量列中任意一次测量值的分散性的参数。

用平均值表示测量结果时，平均值的实验标准偏差用 $S_{\bar{x}}$ 表示，计算公式为

$$S_{\bar{x}}=\frac{S_x}{\sqrt{n}}$$

【例1-1】 在对某长度的测量中，共进行10次测量，各测量值 x 分别为（6.41，6.42，6.44，6.46，6.48，6.43，6.45，6.47，6.49，6.45）mm，试求 $\bar{x}$、S_x 和 $S_{\bar{x}}$。

解：
$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{10} x_i}{10} = 6.45\text{mm}$$

$$S_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{10}(x_i - \bar{x})^2}{10-1}} = \sqrt{\frac{0.006}{9}} = 0.026\text{mm}$$

$$S_{\bar{x}} = \frac{S_x}{\sqrt{n}} = \frac{0.026}{\sqrt{10}} = 0.008\text{mm}$$

4. 关于精密度、准确度及精确度的概念

（1）精密度

精密度是指对同一被测量作多次重复测量时，各次测量值之间彼此接近（或分散）的程度。它是对随机误差的描述，反映了随机误差对测量的影响程度。随机误差小，测量的精密度就高。

（2）准确度

准确度是指被测量的整体平均值与其真值接近（或偏离）的程度。它是对系统误差的描述，反映了系统误差对测量的影响程度。系统误差小，测量的准确度就高。

（3）精确度

同时具备高精密度和高准确度的测量，表现为各测量值之间分散度小且总体平均值与真值的接近程度高。反映了随机误差和系统误差对测量结果的影响都非常小的情况。通过图1-2所示的打靶情况可较形象地理解上述概念。

图1-2a 表示打靶的精密度较高，各击中点比较集中，但打得不准，各击中点偏离靶心较远，说明随机误差小，却有一较大的系统误差。

图1-2b 精密度不如图1-2a，各击中点相互之间较分散，但各击中点总的平均位置距离靶心较近，所以准确度高于图1-2a，即系统误差相对图1-2a 情况要小。

图1-2c 表示精密度和准确度都高，说明随机误差和系统误差都较小，各击中点不但集中，而且都比较接近靶心。

第二节 不确定度及其评定方法

不确定度是测试计量技术领域中一个极为重要的概念，用不确定度来表示测量结果的质量和水平已经是国际、国内的标准方法。例如，在国际贸易中的量值比对和裁定，在出具检定、校准证书、撰写学术报告、技术规范和产品标准，在签订产品合同和加工协议，在实验数据的比较与核对等方面，都应提供约定置信水准下的测量结果和测量不确定度的报告，而且应具有一致的表示方式。下面介绍测量不确定度的概念、表示方式及评定方法。

1. 不确定度的概念

不确定度表示由于测量误差的存在而对被测量值不能确定的程度，是表征被测量的真值

所处量值范围的评定。

不确定度按照其评定的方法可分为"A类"和"B类"，以下称A类不确定度和B类不确定度。A类不确定度是指用统计方法计算得出的不确定度分量；B类不确定度是指用其他方法（非统计方法）计算得出的不确定度分量。

不确定度的表示形式有标准不确定度和扩展不确定度。

标准不确定度表记符号为u，它是用标准偏差给出的不确定度值。它表示被测量的测量值以低概率（约为68.3%）落于（$x-u$，$x+u$）区间内。

扩展不确定度表记符号为U，它是用标准不确定度乘上一个包含因子k给出的不确定度值，即$U=ku$。它表示被测量的测量值以较高的概率落于（$x-U$，$x+U$）区间内。

标准不确定度和扩展不确定度都可用于测量结果的报告，两者在国际上同样通用。本书约定采用标准不确定度表示形式。

2. 标准不确定度的评定方法

（1）标准不确定度的A类评定方法

用A类方法评定的标准不确定度简称为A类标准不确定度，本书记为u_A。

对被测量X在等精度条件下进行n次独立、重复的观测，它的观测值记为x_i（$i=1$，2，3，…，n），在剔除了明显的异常数据并修正了已定系统误差后，得到被测量的算术平均值

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i \tag{1-2}$$

当报告上述观测数据列x_i（$i=1$，2，3，…，n）中的任一次测量值时，它的A类不确定度用贝塞尔公式计算得到

$$u_A(x)=S_x=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n-1}} \tag{1-3}$$

当报告算术平均值$\bar{x}$时（算数平均值作为被测量的最终测量结果），平均值的A类不确定度计算为

$$u_A(\bar{x})=S_{\bar{x}}=\frac{S_x}{\sqrt{n}}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n(n-1)}} \tag{1-4}$$

观测次数越多，测量数据的算术平均值就越接近被测量的真值，A类不确定度的评定也就越可靠，一般认为测量次数n应大于5。

（2）标准不确定度的B类评定方法

用B类方法评定的标准不确定度简称为B类标准不确定度，本书记为u_B。

B类标准不确定度评定的依据或信息一般来源于以前的测量数据或积累的测量经验、对有关技术资料及测量仪器特性的了解和经验、仪器生产部门提供的技术说明书或检定校准证书上给出的准确度等级或级别、由专业手册查到的参考数据，等等。引起B类不确定度的因素是来自多方面的，评定起来也比较复杂，本书对标准不确定度的B类评定采取了简化处理的方法，即一般情况下只考虑测量仪器本身的允许误差极限Δ_{ins}，则B类不确定度为

$$u_B=\frac{\Delta_{ins}}{k}$$

式中：k 是置信因子（前面对其做过介绍）。本书约定上式中的 k 采用均匀分布、100%概率对应的值，即 $k=\sqrt{3}$。（在测量中服从均匀分布的有：电子计数器的量化、仪器刻度盘示值的分辨力、平衡指示仪的调零、度盘与齿轮的空程差、数据切尾……）

此时B类标准不确定度为

$$u_{\mathrm{B}}=\frac{\Delta_{\mathrm{ins}}}{k}=\frac{\Delta_{\mathrm{ins}}}{\sqrt{3}} \tag{1-5}$$

“Δ_{ins}”是仪器的允许误差极限，它的取值可参考以下几方面得到：

①对标准计量器具或仪表，参照国家计量部门颁布的技术指标或有关的标准；

②对其他仪器（非标准计量器具或仪表），参照仪器说明书、计量检定书给出的数据（仪器检定证书通常是以该仪器的准确度等级给出它的最大允许误差）；

③在以上信息都缺乏的情况下，可近似地按仪器最小分度值的一半给出；

④有时也可结合测量的具体情况给出 Δ_{ins} 的一个估计值（$\Delta_{估计}$）。

【例1-2】 模拟式电表的标准不确定度的B类评定。

步骤一：计算模拟式电表的允许误差极限 Δ_{ins}。

模拟式电表的误差可分为基本误差和附加误差。它的附加误差在正常使用条件下对实验测量的影响较小，故常取基本误差，并按下式简化计算电表的 Δ_{ins}。

$$\Delta_{\mathrm{ins}}=\frac{A}{100}\times 量程$$

式中：“A”为国家标准规定的模拟式电表的准确度等级。

步骤二：计算电表的B类标准不确定度。

$$u_{\mathrm{B}}=\frac{\Delta_{\mathrm{ins}}}{\sqrt{3}}$$

【例1-3】 旋钮式电阻箱的标准不确定度的B类评定。

在正常使用条件下，旋钮式电阻箱的B类标准不确定度为

$$u_{\mathrm{B}}=\frac{\Delta_{\mathrm{ins}}}{k}=\frac{A\%\times R+nR_{\mathrm{b}}}{\sqrt{3}}$$

式中：A 是电阻箱的准确度等级；R 是取用的电阻值；n 是所用旋钮的个数；R_{b} 是常数（0.1级电阻箱 $R_{\mathrm{b}}=0.001\Omega$）。

上式分子中的第一项 $A\%\times R$ 是电阻箱的基本误差；第二项 nR_{b} 是接触电阻，属于附加误差。

（3）合成标准不确定度

合成标准不确定度（符号为 u_{C}）包括A类标准不确定度分量和B类标准不确定度分量两部分。如果有若干个彼此相互独立的不确定分量 u_{A_i} 和 u_{B_i} 对测量结果有影响，则测量结果的合成标准不确定度为

$$u_{\mathrm{C}}=\sqrt{\sum_i\left(u_{\mathrm{A}_i}^2+u_{\mathrm{B}_i}^2\right)} \tag{1-6}$$

第三节　测量结果的表示

对于一个测量结果，不论它是直接测量得到的还是间接测量得到的，只有同时给出它的

最佳估计值（包括单位）和不确定度时，这个结果才是完整和有价值的。因此，对测量结果的正确表示应该同时包括测量最佳估计值、不确定度数值和单位三部分。

常见的表示测量结果的格式有三种。例如，对某长度量进行测量，测量的最佳估计值 $L=31.42\text{mm}$，合成标准不确定度 $u_C=0.05\text{mm}$，测量结果可表示为：

（1）$L=31.42$（5）mm（括号中为 u_C 的数值，与测量结果的最后位对齐）

（2）$L=31.42$（0.05）mm

（3）$L=$（31.42 ± 0.05）mm

虽然以上三种格式的表示方式都可以用，但应注意，其中第一种格式常被用来公布常数或常量，第三种格式传统上常用以表示高置信水准的区间，用扩展不确定度表示测量结果时常用“±”格式，所以用“±”格式表示合成标准不确定度时，很可能与扩展不确定度混淆。从不易混淆、误解和表达方便的角度考虑，似乎以第二种格式表示较妥，故本书约定使用第二种格式表示测量结果，即

$$X = \bar{x}(u_C) \qquad (\text{单位})$$

式中：X 为被测量（名称或符号）；$\bar{x}$是被测量的最佳估计值（平均值）；u_C 是合成标准不确定度的数值。

1. 直接测量结果的表示

（1）单次直接测量结果的表示

如果对被测量只进行了一次测量，其结果表示为：

$$X = x(u_B) \qquad (\text{单位})$$

式中：x 是单次测量值；u_B 是 B 类标准不确定度。

（2）多次直接测量结果的表示

在等精度条件下对一个物理量进行多次测量，其测量结果表示为

$$X = \bar{x}(u_C) \qquad (\text{单位})$$

式中：$\bar{x}$是多次测量的平均值，u_C 是合成标准不确定度。

【例 1-4】 用螺旋测微计测量小钢球的直径 D，共测 7 次，测量值 d_i 是（6.995，6.998，6.997，6.994，5.995，6.993，6.994）mm，螺旋测微计零点读数值（零记数）为 -0.003mm，螺旋测微计的允许误差限 $\Delta_{ins}=0.004\text{mm}$，写出测量结果。

解：（1）经审查判断，第 5 个数据 5.995mm 明显为异常数据，予以剔除。

（2）计算剩下 6 个数据的算术平均值

$$\overline{d'} = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} d_i = 6.99517\text{mm}$$

（3）对已定系统误差进行修正，得到钢球直径的最佳测量值（平均值）：

$$\bar{d} = \overline{d'} - (-0.003) = 6.99817\text{mm}$$

（4）用贝塞尔公式计算实验标准偏差

$$S_d = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{6}(d_i - \bar{d})^2}{n-1}} = 0.0019\text{mm}$$

（5）计算平均值（修正后的）的实验标准偏差

$$S_{\bar{d}} = \frac{S_d}{\sqrt{n}} = 0.00078\text{mm}$$

（6）按公式（1－4）钢球直径的 A 类标准不确定度

$$u_A = S_{\bar{d}} = 0.00078\text{mm}$$

（7）按公式（1－5）计算 B 类标准不确定度

$$u_B = \frac{\Delta_{\text{ins}}}{\sqrt{3}} = \frac{0.004}{\sqrt{3}} = 0.0023\text{mm}$$

（8）按公式（1－6）计算合成标准不确定度

$$u_C = \sqrt{u_A^2 + u_B^2} = 0.00243\text{mm}$$

（9）写出测量结果

$$D = 6.9982(0.0024)\text{mm}$$

2. 间接测量结果的表示

设某物理量为间接测量量 Φ，与 N 个相互独立的直接测量量（x_1，x_2，x_3，…，x_N）之间成某种确定的函数关系

$$\Phi = F(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_N)$$

间接测量结果的标准不确定度传递公式

$$u_C(\Phi) = \sqrt{\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}\right)^2 u_C^2(x_i)} \tag{1-7}$$

式中：u_C（x_i）为 x_i 的标准不确定度。间接测量结果最后表示为：

$$\Phi = \phi[u_C(\Phi)] \quad \text{（单位）}$$

3. 标准相对不确定度的表示

标准相对不确定度定义为标准不确定度与测量结果最佳估计值之比

$$E = \frac{u_C}{x} \tag{1-8}$$

相对不确定度一般用百分数表示。

间接测量结果的标准相对不确定度传递公式

$$E = \frac{u_C(\Phi)}{\Phi} = \sqrt{\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial \ln\Phi}{\partial x_i}\right)^2 u_C^2(x_i)} \tag{1-9}$$

【例 1－5】 用流体静力法测固体密度的公式为 $\rho = \frac{m}{m - m_1}\rho_0$，测得 $m = 27.06$（0.02）g，$m_1 = 17.03$（0.02）g，$\rho_0 = 0.9997$（0.0003）g/cm^3，计算标准相对不确定度 E，并写出测量结果。

解：ρ 取对数　　$\ln\rho = \ln m - \ln(m - m_1) + \ln\rho_0$

用公式（1－9）计算标准相对不确定度：

$$E = \sqrt{\left(\frac{\partial \ln\rho}{\partial m}\right)^2 u^2(m) + \left(\frac{\partial \ln\rho}{\partial m_1}\right)^2 u^2(m_1) + \left(\frac{\partial \ln\rho}{\partial \rho_0}\right)^2 u^2(\rho_0)}$$

$$= \sqrt{\frac{m_1^2 u^2(m)}{m^2(m-m_1)^2} + \frac{u^2(m_1)}{(m-m_1)^2} + \frac{u^2(\rho_0)}{\rho_0^2}}$$

$$= 2.35 \times 10^{-3} = 0.24\%$$

计算密度： $\rho = \frac{27.06}{27.06 - 17.03} \times 0.9997 = 2.697 \mathrm{g/cm^3}$

计算标准不确定度： $u(\rho) = \rho \times E = 0.006 \mathrm{g/cm^3}$

测量结果： $\rho = 2.697(0.006) \mathrm{g/cm^3}$

第四节　有效数字及其运算

1. 有效数字的概念

有效数字是指可靠数字（能够准确读出的数字）加上一位可疑数字（估计读出的数字）的全体数字。有效数字位数的多少反映了测量的精确程度。

注意：

（1）常数的有效数字

进行有效数字的运算时，如果遇到常数，其有效位数至少比参与运算的有效数字位数最多的测量数据多取 1 位。

（2）数据中的“0”

测量数据中第一个非零数字左边的“0”不是有效数字，而第一个非零数字右边的“0”则是有效数字。如 0.04060 是四位有效数字，可疑位在末位的“0”上。作为有效数字的“0”不能随意添减。

（3）有效数字的位数与单位无关

进行单位变换时，有效数字的位数不应随之改变。例如，235.4mm = 23.54cm = 0.2354m，尽管单位改变了，但它始终都是四位有效数字。

（4）有效数字的科学记数法

如果测量值很大或很小时，通常用 10 的指数形式（科学记数法）表示数据，指数的系数部分是有效数字，小数点一般放在第一位数字的后面（即整数部分取一位）。例如，地球的质量为 $m_d = 5.98 \times 10^{24}\mathrm{kg}$，电子电量为 $e = 1.602 \times 10^{-19}\mathrm{C}$。

（5）有效数字尾数的截取法则

对有效数字进行尾数的截取常称为数字“修约”。本书约定使用“四舍六入五凑偶”法则进行数字修约。即尾数小于“5”则舍去（四舍），尾数大于“5”则进“1”（六入），尾数等于“5”则看要保留的末位数是偶数还是奇数，是偶数就舍去尾数，保留末位上原有的偶数，是奇数就进“1”，把末位上的奇数增 1 变成偶数（五凑偶）。

进行数字修约时不许连续修约。

（6）不确定度的位数及测量结果有效数字的确定

不确定度的位数只允许取 1 位或 2 位。本书约定，当不确定度的第一位数字（非零数字）是 1 或 2 时，应取 2 位，是 3 或 3 以上时则只取 1 位。

确定测量结果有效数字的位数关键是找出其可疑数字在哪一位，而可疑数字所在的数位

又是由不确定度的数位决定，即不确定度数字所在位就是测量结果有效数字的可疑位，它们彼此具有相同的数量级。

对没有标明不确定度的测量数据，则认为该数据的末位就是有效数字的可疑位。

2. 有效数字的运算

有效数字运算的总原则：可靠数字与可靠数字运算后仍为可靠数字，可疑数字与可疑数字运算后仍为可疑数字，可疑数字与可靠数字运算后成为可疑数字，进位数字视为可靠数字。

（1）加减运算

找出参与运算的可疑位数位最高的有效数字，计算结果的可疑位应与该有效数字的可疑位对齐。

例：$A=13.65$，$B=0.0082$，$C=1.6035$，求 $A+B-C=?$

解：$A+B-C=13.65+0.0082-1.6035=12.0547$

运算结果的可疑位应与 A 的可疑位对齐，因此最后结果为 $A+B-C=12.05$。

（2）乘除运算

找出参与运算的有效数字位数最少的那个分量，计算结果的有效数字位数与该分量的有效数字位数相同。

例：$A=22.35$，$B=1.2$，求 $A\times B=?$

解：$A\times B=22.35\times1.2=26.820$

计算结果的有效数字位数应该与 B 分量的有效数字位数相同。因此最后结果为 $A\times B=27$（两位有效数字）。

（3）乘方、开方运算

运算结果的有效数字位数与原底数的有效数字位数相同。

例如 $A=4.25$，$A^2=18.0625$，最后结果应该为：$A^2=18.1$。

（4）对数运算

运算结果的有效数字位数与测量数据有效数字位数相同或多取一位。

例如 $A=3.27$，$\lg A=0.51454\cdots$，

最后结果应该为：$\lg A=0.514$，或 $\lg A=0.5145$。

上述只是几种最简单的运算形式，而实际的运算情况会比较复杂，计算过程往往包括几种不同形式的运算，因此还要结合各种情况综合考虑。

第五节　实验数据的处理方法

1. 列表法

列表法是记录数据的基本方法，即把测量获得的数据一一对应地排列在表格中，它能简单明确地表示出有关物理量之间的对应关系。

注意：表格设计要简明、合理；物理量名称（符号）和单位规范完整；填写的测量数据应符合有效数字的要求。

2. 作图法

用曲线描述各物理量之间的变化关系，称为作图法，是科学论文中发表数据最通用的方法。常用作图软件有多种，如 Origin，Matlab 等。这些软件具备大量的功能，如数据的各种统计，曲线的拟合同时给出经验公式，误差的分析，等等。

注意：

（1）应标明坐标轴代表的物理量和单位。

（2）坐标原点数值不一定都是“0”，可根据具体的测量数据确定。

（3）标明坐标轴单位长度代表的物理量值。

（4）注明实验曲线名称。

3. 逐差法

当自变量与因变量之间呈线性关系，自变量按等间隔变化，且自变量的误差远小于因变量的误差时，可使用逐差法计算因变量变化的平均值。方法是把测量数据分为前后两组，并对前后两组的对应项进行逐差。

例：钢丝上端固定，下端施加砝码，随砝码质量（P）的变化，下端位置变化如表 1－2 所示。

表 1－2　钢丝的下端位置变化情况

P（kg）	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
L（mm）	L_0	L_1	L_2	L_3	L_4	L_5	L_6	L_7	L_8	L_9

计算砝码质量变化 1kg，钢丝伸长量变化的平均值 ΔL 时，首先将数据分为两组，0～4 为第一组，5～9 为第二组，然后对应项进行逐差并取平均值，于是得到：

$$\Delta L = \frac{\frac{1}{5}[(L_5 - L_0) + (L_6 - L_1) + (L_7 - L_2) + (L_8 - L_3) + (L_9 - L_4)]}{5}$$

4. 最小二乘法与一元线性回归

最小二乘法是一种比较精确的曲线拟合方法。

原理：利用已获得的一组测量数据（x_i，y_i），求出误差最小的最佳经验公式，使测量值 y_i 与用最佳经验公式计算出的 Y 值之间的偏差平方和最小；或者由已知的公式，求函数式 f 中一些未知参量，把这些参量代入后使它们与实验数据之差的平方和为最小，即

$$\sum_{i=1}^{k}[y_i - f(x_i)]^2 = \min$$

一元线性回归就是直线拟合。对实验数据（x_i，y_i）用最小二乘法原理求出最佳的系数 a、b，称回归系数；建立最佳的直线方程 $Y = ax_i + b$，称一元线性回归方程。

计算 a 和 b 的公式

$$a = \bar{y} - b\bar{x} \tag{1-10}$$

$$b = \frac{\overline{xy} - \bar{x}\cdot\bar{y}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2} \tag{1-11}$$

式中：$\bar{x}=\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}x_i$；$\overline{x^2}=\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}x_i^2$；$\bar{y}=\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}y_i$；$\overline{xy}=\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}x_iy_i$。

计算相关系数 r 的公式

$$r=\frac{\overline{xy}-\bar{x}\cdot\bar{y}}{\sqrt{\left(\overline{x^2}-\bar{x}^2\right)\left(\overline{y^2}-\bar{y}^2\right)}} \tag{1-12}$$

相关系数 r 表征两变量 y 与 x 的线性相关程度。r 的取值范围 $0\leqslant|r|\leqslant1$。$r=0$，说明 y 与 x 之间不存在线性关系；$|r|=1$，说明 y 与 x 之间具有完全的线性关系。

练 习 题

1. 计算下列数据的 $\bar{x}$，S，$S_{\bar{x}}$。

（1）测量某物体的质量共 8 次，测得数据为：$x=$（23.54，23.46，23.51，23.45，23.50，23.48，23.53，23.49）kg。

（2）测量钢球直径 10 次，测得数据为：$x=$（12.005，12.007，11.997，11.998，11.995，12.003，12.004，12.000，12.008，12.006）mm。

2. 用螺旋测微计测量一个圆柱体的直径 D，测量次数 7 次，测得数据分别为：（8.345，8.348，8.344，5.346，8.343，8.347，8.343）mm，螺旋测微计零点读数值（即已定系统误差）为 -0.003mm，螺旋测微计的示值误差限 $\Delta_{ins}=0.004$mm，求圆柱体直径的测量结果。

3. $N=3x^2-2y^4$，求不确定度 u 及相对不确定度 $\frac{u}{N}$ 表达式。

4. 求 $R=\frac{r^2}{2h}+\frac{h}{2}$ 的不确定度 u 及相对不确定度 $\frac{u}{R}$ 的表达式。

5. 利用单摆测重力加速度 g，当摆角很小时，有 $T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ 的关系。式中 $l=97.67$（0.02）cm，$T=1.9842$（0.0002）s，求重力加速度 g 的标准相对不确定度和最后的测量结果。

6. 计算 $\rho=\frac{4M}{\pi D^2H}$ 的结果及不确定度 u，并分析 M、D、H 三个直接测量量中哪个量的不确定度对间接测量量 ρ 的不确定度影响最大。

其中 $M=236.1241$（0.0020）g，$D=2.345$（0.005）cm，$H=8.210$（0.010）cm。

7. 纠正下列错误，写出正确结果：

（1）$U=2.415$（0.03）V

（2）$R=3.489\times10^3$（40）Ω

（3）$L=4.58$（0.005）mm

（4）$I=0.836$（3.3×10^{-3}）A

（5）$g=979.87$（1.4）cm/s^2

（6）5.24s $=$ 5240ms $=$ 5240000μs

（7）360mm $=$ 36cm

（8）$m=8600$（150）mg

8. 指出下列各量是几位有效数字：

（1）$g=980.122$cm/s^2

(2) $L=0.904\text{m}$

(3) $\lambda=5.893\times10^{2}\text{nm}$

9. 用有效数字运算规则计算下列各式：

(1) $98.645+1.03$

(2) $76.000\div(40.00-2.0)$

(3) $170.50-2.5$

(4) $x_1=231.2\ (0.9)$，$x_2=22.15\ (0.07)$，求 $x_1+x_2=?$

(5) $x=2.48$，$\sqrt{x}=?$

(6) $x=8.49$，$\ln x=?$

10. 用科学记数法表示下列数字：

(1) 0.008654 (0.000002)

(2) 6700.00kg (5×10g)

(3) 5420×10^{2}

(4) $c=299792.458$km/s (12m/s)

(5) 0.05060

11. 用表 1－3 中的数据计算回归系数和相关系数，建立回归方程 $Y=a+bX$。

表 1－3

X	2.0	4.0	6.0	8.0	10.0	12.0	14.0	16.0
Y	15.34	18.50	21.30	23.80	26.12	29.44	33.06	35.34

12. 用伏安法测未知电阻，测量数据如表 1－4 所示。

表 1－4

U (V)	0.00	2.00	4.01	5.90	7.86	9.73	11.80	13.75	15.90	16.86
I (mA)	0.00	1.00	2.00	3.00	4.00	5.00	6.00	7.00	8.00	9.00

(1) 用作图法求 R（作出 $U-I$ 曲线）。

(2) 用逐差法求 R。

(3) 用线性回归求 R。