

1. 内容及范围主要来自 ppt, 标签对应书本
2. 可能有错, 仅供参考

说明:

定义: 红色表示。

定理性质: 橙色表示。

公式: 蓝色表示。

算法: 绿色表示

页码: 灰色表示

数理逻辑:

1. **命题公式:** 命题, 联结词($\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$), 合式公式, 子公式
2. **公式的真值:** 赋值, 求值函数, 真值表, 等值式, 重言式, 矛盾式
3. **范式:** 析取范式, 极小项, 主析取范式, 合取范式, 极大项, 主合取范式
4. **联结词的完备集:** 真值函数, 异或, 条件否定, 与非, 或非, 联结词完备集
5. **推理理论:** 重言蕴含式, 有效结论, P 规则, T 规则, CP 规则, 推理
6. **谓词与量词:** 谓词, 个体词, 论域, 全称量词, 存在量词
7. **项与公式:** 项, 原子公式, 合式公式, 自由变元, 约束变元, 辖域, 换名, 代入
8. **公式语义:** 解释, 赋值, 有效的, 可满足的, 不可满足的
9. **前束范式:** 前束范式
10. **推理理论:** 逻辑蕴含式, 有效结论, \forall -规则 (US), \forall +规则 (UG), \exists -规则 (ES), \exists +规则 (EG), 推理

集合论:

1. **集合:** 集合, 外延性原理, \in, \subseteq, \subset , 空集, 全集, 幂集, 文氏图, 交, 并, 差, 补, 对称差
2. **关系:** 序偶, 笛卡尔积, 关系, $\text{dom}R, \text{ran}R$, 关系图, 空关系, 全域关系, 恒等关系
3. **关系性质与闭包:** 自反的, 反自反的, 对称的, 反对称的, 传递的, 自反闭包 $r(R)$, 对称闭包 $s(R)$, 传递闭包 $t(R)$
4. **等价关系:** 等价关系, 等价类, 商集, 划分
5. **偏序关系:** 偏序, 哈斯图, 全序(线序), 极大元/极小元, 最大元/最小元, 上界/下界
6. **函数:** 函数, 常函数, 恒等函数, 满射, 入射, 双射, 反函数, 复合函数
7. **集合基数:** 基数, 等势, 有限集/无限集, 可数集, 不可数集

代数结构:

1. **运算及其性质:** 运算, 封闭的, 可交换的, 可结合的, 可分配的, 吸收律, 幂等的, 幺元, 零元, 逆元
2. **代数系统:** 代数系统, 子代数, 积代数, 同态, 同构。
3. **群与子群:** 半群, 子半群, 元素的幂, 独异点, 群, 群的阶数, 子群, 平凡子群, 陪集, 拉格朗日 (Lagrange) 定理
4. **阿贝尔群和循环群:** 阿贝尔群(交换群), 循环群, 生成元
5. **环与域:** 环, 交换环, 含幺环, 整环, 域
6. **格与布尔代数:** 格, 对偶原理, 子格, 分配格, 有界格, 有补格, 布尔代数, 有限布尔代数的表示定理

图论:

1. **图的基本概念:** 无向图、有向图、关联与相邻、简单图、完全图、正则图、子图、补图, 握手定理, 图的同构
2. **图的连通性:** 通路, 回路, 简单通路, 简单回路(迹) 初级通路(路径), 初级回路(圈), 点连通, 连通图, 点割集, 割点, 边割集, 割边, 点连通度, 边连通度, 弱

连通图，单向连通图，强连通图，二部图（二分图）

3. **图的矩阵表示**：关联矩阵，邻接矩阵，可达矩阵
4. **欧拉图与哈密顿图**：欧拉通路、欧拉回路、欧拉图、半欧拉图，哈密顿通路、哈密顿回路、哈密顿图、半哈密顿图
5. **无向树与根树**：无向树，生成树，最小生成树，Kruskal，根树， m 叉树，最优二叉树，Huffman 算法
6. **平面图**：平面图，面，欧拉公式，Kuratowski 定理

数理逻辑：

命题：具有确定真值的陈述句。

否定词符号 \neg ：设 p 是一个命题， $\neg p$ 称为 p 的否定式。 $\neg p$ 是真的当且仅当 p 是假的。 p 是真的当且仅当 $\neg p$ 是假的。【定义 1.1】

合取词符号 \wedge ：设 p, q 是两个命题，命题“ p 并且 q ”称为 p, q 的合取，记以 $p \wedge q$ ，读作 p 且 q 。 $p \wedge q$ 是真的当且仅当 p 和 q 都是真的。【定义 1.2】

析取词符号 \vee ：设 p, q 是两个命题，命题“ p 或者 q ”称为 p, q 的析取，记以 $p \vee q$ ，读作 p 或 q 。 $p \vee q$ 是真的当且仅当 p, q 中至少有一个是真的。【定义 1.3】

蕴含词符号 \rightarrow ：设 p, q 是两个命题，命题“如果 p ，则 q ”称为 p 蕴含 q ，记以 $p \rightarrow q$ 。 $p \rightarrow q$ 是假的当且仅当 p 是真的而 q 是假的。【定义 1.4】

等价词符号 \leftrightarrow ：设 p, q 是两个命题，命题“ p 当且仅当 q ”称为 p 等价 q ，记以 $p \leftrightarrow q$ 。 $p \leftrightarrow q$ 是真的当且仅当 p, q 或者都是真的，或者都是假的。【定义 1.5】

合式公式：

- (1) 命题常元和变元符号是合式公式；
- (2) 若 A 是合式公式，则 $(\neg A)$ 是合式公式，称为 A 的否定式；
- (3) 若 A, B 是合式公式，则 $(A \vee B), (A \wedge B), (A \rightarrow B), (A \leftrightarrow B)$ 是合式公式；
- (4) 所有合式公式都是有限次使用(1)，(2)，(3)、(4)得到的符号串。

子公式：如果 X 是合式公式 A 的一部分，且 X 本身也是一个合式公式，则称 X 为公式 A 的子公式。【定义 1.6】

赋值（指派，解释）：设 Σ 是命题变元集合，则称函数 $v: \Sigma \rightarrow \{1, 0\}$ 是一个真值赋值。【定义 1.8】

真值表：公式 A 在其所有可能的赋值下所取真值的表，称为 A 的真值表。【定义 1.9】

重言式（永真式）：任意赋值 $v, v \models A$

矛盾式（永假式）：任意赋值 $v, v \not\models A$ 【定义 1.10】

等值式：若等价式 $A \leftrightarrow B$ 是重言式，则称 A 与 B 等值，记作 $A \Leftrightarrow B$ 。【定义 2.1】

基本等值式

双重否定律 $\neg \neg A \Leftrightarrow A$

幂等律 $A \vee A \Leftrightarrow A, A \wedge A \Leftrightarrow A$

交换律 $A \vee B \Leftrightarrow B \vee A, A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$

结合律 $(A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C), (A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$

分配律 $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C), A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

德摩根律 $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B, \neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$

吸收律 $A \vee (A \wedge B) \Leftrightarrow A, A \wedge (A \vee B) \Leftrightarrow A$

零律 $A \vee \perp \Leftrightarrow A, A \wedge \perp \Leftrightarrow \perp$

同一律 $A \vee \perp \Leftrightarrow A, A \wedge \top \Leftrightarrow A$

排中律 $A \vee \neg A \Leftrightarrow \top$

矛盾律 $A \wedge \neg A \Leftrightarrow \perp$
蕴涵等值式 $A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg A \vee B$
等价等值式 $A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$
假言易位 $A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg B \rightarrow \neg A$
等价否定等值式 $A \leftrightarrow B \Leftrightarrow \neg A \leftrightarrow \neg B$
归谬论 $(A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow \neg B) \Leftrightarrow \neg A$

置换规则： 设 X 是公式 A 的子公式, $X \Leftrightarrow Y$ 。将 A 中的 X (可以是全部或部分 X) 用 Y 来置换, 所得到的公式 B , 则 $A \Leftrightarrow B$ 。

文字： 设 $A \in \Sigma$ (命题变元集), 则 A 和 $\neg A$ 都称为命题符号 A 的文字, 其中前者称为正文字, 后者称为负文字。【定义 2.2】

析取范式： 形如 $A_1 \vee A_2 \vee \dots \vee A_n$ ($n \geq 1$) 的公式称为析取范式, 其中 A_i ($i=1, \dots, n$) 是由文字组成的合取范式。

合取范式： 形如 $A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n$ ($n \geq 1$) 的公式称为合取范式, 其中 A_1, \dots, A_n 都是由文字组成的析取式。【定义 2.3】

极小项： 文字的合取式称为极小项, 其中公式中每个命题符号的文字都在该合取式中出现一次。

极大项： 文字的析取式称为极大项, 其中公式中每个命题符号的文字都在该合取式中出现一次。【定义 2.4】

主析取范式： 给定的命题公式的主析取范式是一个与之等价的公式, 后者由极小项的析取组成。

主合取范式： 给定的命题公式的主合取范式是一个与之等价的公式, 后者由极大项的合取组成。【定义 2.5】

公式的真值表中真值为 F 的指派所对应的极大项的合取, 即为此公式的主合取范式。

真值函数： 称 $F: \{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}$ 为 n 元真值函数。【定义 2.6】

联结词的完备集： 设 C 是联结词的集合, 若对于任意一个合式公式均存在一个与之等价的公式, 而后者只含有 C 中的联结词, 则称 C 是联结词的完备集。【定义 2.7】

$\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}, \{\neg, \wedge, \vee\}, \{\neg, \wedge\}, \{\neg, \vee\}, \{\neg, \rightarrow\}$ 是联结词的完备集。【定理 2.6】

异或 $P \oplus Q$: $\Leftrightarrow \neg (P \leftrightarrow Q)$

条件否定 $P \overset{C}{\rightarrow} Q$: $\Leftrightarrow \neg (P \rightarrow Q)$

与非 $P \uparrow Q$: $\Leftrightarrow \neg (P \wedge Q)$

或非 $P \downarrow Q$: $\Leftrightarrow \neg (P \vee Q)$ 【定义 2.8】

$\{\uparrow\}, \{\downarrow\}$ 都是联结词的完备集 【定理 2.7】

重言蕴含式： 当且仅当 $P \rightarrow Q$ 是一个重言式时, 称 P 重言蕴含 Q , 记为 $P \Rightarrow Q$ 。

有效结论： 设 A, C 是两个命题公式, 若 $A \Rightarrow C$, 称 C 是 A 的有效结论。【定义 3.1】

推理定律——重言蕴涵式

- | | |
|--|-------------|
| 1. $A \Rightarrow (A \vee B)$ | 附加律 |
| 2. $(A \wedge B) \Rightarrow A$ | 化简律 |
| 3. $(A \rightarrow B) \wedge A \Rightarrow B$ | 假言推理 |
| 4. $(A \rightarrow B) \wedge \neg B \Rightarrow \neg A$ | 拒取式 |
| 5. $(A \vee B) \wedge \neg B \Rightarrow A$ | 析取三段论 |
| 6. $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C) \Rightarrow (A \rightarrow C)$ | 假言三段论 |
| 7. $(A \leftrightarrow B) \wedge (B \leftrightarrow C) \Rightarrow (A \leftrightarrow C)$ | 等价三段论 |
| 8. $(A \rightarrow B) \wedge (C \rightarrow D) \wedge (A \vee C) \Rightarrow (B \vee D)$ | 构造性二难 |
| $(A \rightarrow B) \wedge (\neg A \rightarrow B) \Rightarrow B$ | 构造性二难(特殊形式) |
| 9. $(A \rightarrow B) \wedge (C \rightarrow D) \wedge (\neg B \vee \neg D) \Rightarrow (\neg A \vee \neg C)$ | 破坏性二难 |

形式系统： 一个形式系统 I 由下面四个部分组成：

- (1) 非空的字母表, 记作 $A(I)$.
- (2) $A(I)$ 中符号构造的合式公式集, 记作 $E(I)$.
- (3) $E(I)$ 中一些特殊的公式组成的公理集, 记作 $Ax(I)$.
- (4) 推理规则集, 记作 $R(I)$.

记 $I = \langle A(I), E(I), Ax(I), R(I) \rangle$, 其中 $\langle A(I), E(I) \rangle$ 是 I 的形式语言系统, $\langle Ax(I), R(I) \rangle$ 是 I 的形式演算系统.

自然推理系统: 无公理, 即 $Ax(I) = \emptyset$

公理推理系统: 推出的结论是系统中的重言式, 称作定理 【定义 3.2】

P 规则: 在推导过程中, 可以随时添加前提。

T 规则: 在推导过程中, 可以引入公式 S , 它是由其前题的一个或多个公式借助重言、蕴含而得到的。

推理 (证明): 从前提 A_1, A_2, \dots, A_k 到结论 B 的推理是一个公式序列 C_1, C_2, \dots, C_l , 其中 $C_i (1 \leq i \leq l)$ 是某个 A_j , 或者可由序列中前面的公式应用推理规则得到, 并且 $C_l = B$ 。【定义 3.3】

CP 规则(演绎定理): 若 $\Gamma \cup \{R\} \vdash S$, 则 $\Gamma \vdash R \rightarrow S$, 其中 Γ 为命题公式的集合。

个体词: 用于表示命题中主语部分的符号或符号串。

个体常元 表示确指个体。

个体变元 表示不确指个体。

个体域: 个体变元的取值范围, 常用 D 表示。

量词: 限定个体数量特性的词。

全称量词 \forall : 对所有的

存在量词 \exists : 有些

谓词语言: 用符号串表示个体、谓词、量词和命题

个体变元符号: x, y, z, \dots

个体常元符号: a, b, c, \dots

函数符号: f, g, \dots

谓词符号: P, Q, R, \dots

命题常元符号: \perp ,

量词符号: \forall, \exists

连接词符号: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$

辅助符号: $()$, $($ 【定义 4.1】

项: (1) 个体常元和变元是项;

(2) 若 f 是 n 元函数符号, t_1, \dots, t_n 是项, 则 $f(t_1, \dots, t_n)$ 是项;

(3) 仅仅有限次使用(1), (2)产生的符号串是项。 【定义 4.2】

原子公式: 若 P 是一个元谓词符号, t_1, \dots, t_n 是项, 则 $P(t_1, \dots, t_n)$ 是原子公式。【定义 4.3】

合式公式: (1) 原子公式是公式;

(2) 若 A 是合式公式, 则 $(\neg A)$ 是合式公式;

(3) 若 A, B 是公式, 则 $(A \vee B)$, $(A \wedge B)$, $A \rightarrow B$, $(A \leftrightarrow B)$ 是公式;

(4) 若 A 是公式, x 是变元, 则 $\forall x A$, $\exists x A$ 是公式;

(5) 仅仅有限次使用 1 ~ 4 得到的符号串才是合式公式。 【定义 4.4】

设公式 α 的一个子公式为 $\forall x A$ 或 $\exists x A$ 。则称:

指导变元: x 是 \forall 或 \exists 的指导变元。

辖域: A 是相应量词的辖域。

约束出现: 辖域中 x 的一切出现, 以及 $(\forall x)$ 中的 x 称为 x 在 α 中的约束出现。

自由出现: 变元的非约束出现。

约束变元：约束出现的变元。

自由变元：自由出现的变元。【定义 4.5】

封闭的：一个公式 A 是封闭的，若其中不含自由变元。【定义 4.6】

变元换名：(1) 换名的范围是量词的指导变元,及其相应辖域中的变元，其余部分不变。

(2) 换名时最好选用辖域中未出现的变元名。

变元代入：代入对自由变元进行。不能改变约束关系。

解释：谓词语言的一个解释 $I = (D, \varphi)$ 包括：

(1) 非空集合 D ，称之为论域；

(2) 对应于每一个个体常元 a ， $\varphi(a) \in D$ ；

(3) 对应于每一个 n 元函数符号 f 都有一个函数 $\varphi(f): D^n \rightarrow D$ ；

(4) 对应于每一个 n 元谓词符号 A 都有一个 n 元关系 $\varphi(A) \subseteq D^n$ 。【定义 4.7】

赋值：解释 I 中的赋值 v 为每一个个体变元 x 指定一个值 $v(x) \in D$ ，即设 V 为所个体变元的集合，则赋值 v 是函数 $v: V \rightarrow D$ 。

可满足的：给定公式 A ，若在某一解释中至少有一种赋值使 A 取值为 1，则称 A 为可满足的。

否则称 A 是不可满足的。

等值式 $A \Leftrightarrow B$ ：若 $A \Leftrightarrow B$ 是有效的【定义 5.1】

几类等值式

(1) 命题公式的推广

e.g. $P(x) \rightarrow Q(x) \Leftrightarrow \neg P(x) \vee Q(x)$

(2) 否定深入

$$\neg \forall x P(x) \Leftrightarrow \exists x (\neg P(x))$$

$$\neg \exists x P(x) \Leftrightarrow \forall x (\neg P(x))$$

(3) 量词作用域的扩张与收缩

设 B 中不含 x 的自由出现，则

$$\forall x (A(x) \vee B) \Leftrightarrow \forall x A(x) \vee B$$

$$\forall x (A(x) \wedge B) \Leftrightarrow \forall x A(x) \wedge B$$

$$\forall x (A(x) \rightarrow B) \Leftrightarrow \exists x A(x) \rightarrow B$$

$$\forall x (B \rightarrow A(x)) \Leftrightarrow B \rightarrow \forall x A(x)$$

$$\exists x (A(x) \vee B) \Leftrightarrow \exists x A(x) \vee B$$

$$\exists x (A(x) \wedge B) \Leftrightarrow \exists x A(x) \wedge B$$

$$\exists x (A(x) \rightarrow B) \Leftrightarrow \forall x A(x) \rightarrow B$$

$$\exists x (B \rightarrow A(x)) \Leftrightarrow B \rightarrow \exists x A(x)$$

(4) 量词分配等值式

$$\forall x (A(x) \wedge B(x)) \Leftrightarrow \forall x A(x) \wedge \forall x B(x)$$

$$\exists x (A(x) \vee B(x)) \Leftrightarrow \exists x A(x) \vee \exists x B(x)$$

(5) 多个量词的使用

$$\forall x \forall y A(x, y) \Leftrightarrow \forall y \forall x A(x, y)$$

$$\exists x \exists y A(x, y) \Leftrightarrow \exists y \exists x A(x, y)$$

置换规则：设 $\Phi(A)$ 是含 A 的公式，那么，若 $A \Leftrightarrow B$ ，则 $\Phi(A) \Leftrightarrow \Phi(B)$ 。

换名规则：设 A 为一公式，将 A 中某量词辖域中个体变项的所有约束出现及相应的指导变元换成该量词辖域中未曾出现过的个体变项符号，其余部分不变，设所得公式为 A' ，则 $A' \Leftrightarrow A$ 。

前束范式：如果谓词公式 A 有如下形状： $Q_1 x_1 \dots Q_n x_n M$ ，其中 $Q_i x_i$ 或者是 $\forall x_i$ ，或者是 $\exists x_i$ ， $i=1, \dots, n$ ， M 是不含量词的公式， $Q_1 x_1 \dots Q_n x_n$ 称为首标， M 称为母式。【定义 5.2】

前束范式存在定理：对于任意谓词公式，都存在与它逻辑等价的前束范式。【定理 5.1】

前束范式的算法：

- 步 1. 对约束出现的变元进行必要的换名，使得约束出现的变元互不相同且不与任何自由变元同名。
- 步 2. 将所有的否定号 \neg 深入到量词后面。
- 步 3. 将量词符号移至公式最外层。

逻辑蕴含式 $A \Rightarrow C$ ：当且仅当 $A \rightarrow C$ 是有效的。

几类逻辑蕴含式

第一组 命题逻辑推理定理的代换实例

如, $\forall xF(x) \wedge \exists yG(y) \Rightarrow \forall xF(x)$

第二组 基本等值式生成的推理定理

如, $\forall xF(x) \Rightarrow \neg\neg\forall xF(x)$, $\neg\neg\forall xF(x) \Rightarrow \forall xF(x)$

$\neg\forall xF(x) \Rightarrow \exists x\neg F(x)$, $\exists x\neg F(x) \Rightarrow \neg\forall xF(x)$

第三组 其它常用推理定律

(1) $\forall xA(x) \vee \forall xB(x) \Rightarrow \forall x(A(x) \vee B(x))$

(2) $\exists x(A(x) \wedge B(x)) \Rightarrow \exists xA(x) \wedge \exists xB(x)$

(3) $\forall x(A(x) \rightarrow B(x)) \Rightarrow \forall xA(x) \rightarrow \forall xB(x)$

(4) $\forall x(A(x) \rightarrow B(x)) \Rightarrow \exists xA(x) \rightarrow \exists xB(x)$

推理规则

\forall - 规则(US): $\frac{\forall xA(x)}{\therefore A(y)}$ 或 $\frac{\forall xA(x)}{\therefore A(c)}$ x, y 个体变项, c 个体常项

\forall + 规则(UG): $\frac{A(x)}{\therefore \forall xA(x)}$ x 个体变项

\exists - 规则(ES): $\frac{\exists xA(x)}{\therefore A(c)}$ x 个体变项, c 个体常项

\exists + 规则(EG): $\frac{A(y)}{\therefore \exists xA(x)}$ 或 $\frac{B \rightarrow A(y)}{\therefore B \rightarrow \exists xA(x)}$ x, y 个体变项, c 个体常项

$\frac{A(c)}{\therefore \exists xA(x)}$ 或 $\frac{B \rightarrow A(c)}{\therefore B \rightarrow \exists xA(x)}$

先用 ES, 再用 US

自然推理系统 N_L :

1. 字母表. 同一阶语言 L 的字母表
2. 合式公式. 同 L 的合式公式
3. 推理规则:
 - (1) 前提引入规则
 - (2) 结论引入规则
 - (3) 置换规则
 - (4) 假言推理规则
 - (5) 附加规则
 - (6) 化简规则
 - (7) 拒取式
 - (8) 假言三段论规则
 - (9) 析取三段论规则
 - (10) 构造性二难推理规则

- (11) 合取引入规则
- (12) \forall -规则
- (13) \forall +规则
- (14) \exists -规则
- (15) \exists +规则 【定义 5.3】

集合论：

$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x (x \in A \rightarrow x \in B)$ 【定义 6.1】

$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$ 【定义 6.2】

$A \subset B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge A \neq B$ 【定义 6.3】

$A \not\subseteq B \Leftrightarrow \exists x (x \in A \wedge x \notin B)$

空集 \emptyset ：不含有任何元素的集合 【定义 6.4】

空集是任何集合的子集。【定理 6.1】

幂集 $P(A)$ = $\{x | x \subseteq A\}$ 【定义 6.5】

如果 $|A|=n$ ，则 $|P(A)|=2^n$

全集 E ：包含了所有元素的集合 【定义 6.6】

并 $A \cup B$ = $\{x | x \in A \vee x \in B\}$

交 $A \cap B$ = $\{x | x \in A \wedge x \in B\}$

差（相对补） $A - B$ = $\{x | x \in A \wedge x \notin B\}$ 【定义 6.7】

对称差 $A \oplus B$ = $(A - B) \cup (B - A)$ 【定义 6.8】

补（绝对补） $\sim A$ = $E - A = \{x | x \notin A\}$ 【定义 6.9】

广义并 $\cup A$ = $\{x | \exists z (z \in A \wedge x \in z)\}$ 【定义 6.10】

广义交 $\cap A$ = $\{x | \forall z (z \in A \rightarrow x \in z)\}$ 【定义 6.11】

集合恒等式

1.只涉及一个运算的算律：

	\cup	\cap	\oplus
交换	$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$	$A \oplus B = B \oplus A$
结合	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	$(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$
幂等	$A \cup A = A$	$A \cap A = A$	

2. 涉及两个不同运算的算律：

	\cup 与 \cap	\cap 与 \oplus
分配	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	$A \cap (B \oplus C) = (A \cap B) \oplus (A \cap C)$
吸收	$A \cup (A \cap B) = A$ $A \cap (A \cup B) = A$	

3. 涉及补运算的算律：

	$-$	\sim
D.M 律	$A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$ $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$	$\sim(B \cup C) = \sim B \cap \sim C$ $\sim(B \cap C) = \sim B \cup \sim C$

双重否定		$\sim\sim A=A$
------	--	----------------

4. 涉及全集和空集的算律:

	\emptyset	E
补元律	$A \cap \sim A = \emptyset$	$A \cup \sim A = E$
零律	$A \cap \emptyset = \emptyset$	$A \cup E = E$
同一律	$A \cup \emptyset = A$	$A \cap E = A$
否定	$\sim \emptyset = E$	$\sim E = \emptyset$

序偶 (有序对): 由两个元素 x 和 y , 按照一定的顺序组成的二元组, 记作 $\langle x, y \rangle$. 【定义 7.1】

笛卡儿积: 设 A, B 为集合, A 与 B 的笛卡儿积记作 $A \times B$ 定义为 $A \times B = \{\langle x, y \rangle \mid x \in A \wedge y \in B\}$. 【定义 7.2】

笛卡尔积性质: $A = \emptyset$ 或 $B = \emptyset$ 时, $A \times B = \emptyset$

“ \times ”不满足结合律

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$$

关系: (两个定义)

(1) 序偶的一个集合, 确定了一个二元关系 R 。 R 中任一序偶 $\langle x, y \rangle$, 可记作 $\langle x, y \rangle \in R$ 或 xRy 【定义 7.3】

(2) 笛卡尔积的子集: $R \subseteq A \times B$ 【定义 7.4】

空关系: \emptyset

全域关系: $A \times B$

恒等关系 $I_A = \{\langle x, x \rangle \mid x \in A\}$ 【定义 7.5】

关系矩阵: 若 $A = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$, $B = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$, R 是从 A 到 B 的关系, R 的关系矩阵是布尔矩阵 $M_R = [r_{ij}]_{m \times n}$, 其中 $r_{ij} = 1 \Leftrightarrow \langle x_i, y_j \rangle \in R$.

关系图: 若 $A = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$, R 是从 A 上的关系, R 的关系图是 $G_R = \langle A, R \rangle$, 其中 A 为结点集, R 为边集. 如果 $\langle x_i, x_j \rangle$ 属于关系 R , 在图中就有一条从 x_i 到 x_j 的有向边.

前域(定义域) $\text{dom}(R) = \{x \mid \exists y. \langle x, y \rangle \in R\}$

值域 $\text{ran}(R) = \{y \mid \exists x. \langle x, y \rangle \in R\}$

域 $\text{fld}(R) = \text{dom}R \cup \text{ran}R$ 【定义 7.6】

逆关系 $R^{-1} = \{\langle y, x \rangle \mid \langle x, y \rangle \in R\}$ 【定义 7.7】

互逆 $(R^{-1})^{-1} = R$

$$(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}$$

$$(R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}$$

$$(A \times B)^{-1} = B \times A$$

$$(R - S)^{-1} = R^{-1} - S^{-1}$$

复合关系 $R \circ S = \{\langle x, z \rangle \mid \exists y (\langle x, y \rangle \in R \wedge \langle y, z \rangle \in S)\}$ 【定义 7.8】

$$(R \circ S) \circ P = R \circ (S \circ P)$$

$$R^m = R \circ R \circ \dots \circ R$$

设 $R \subseteq X \times Y, S \subseteq Y \times Z$, 则 $(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$ 【定理 7.2】

R 在 A 上的**限制** $R \upharpoonright A = \{\langle x, y \rangle \mid xRy \wedge x \in A\}$

A 在 R 下的**像** $R[A] = \text{ran}(R \upharpoonright A)$ 【定义 7.9】

自反的：若 $\forall x \in A$, 都有 $\langle x, x \rangle \in R$, 则称 R 是自反的

反自反的：若 $\forall x \in A$, 都有 $\langle x, x \rangle \notin R$, 则称 R 是反自反的. 【定义 7.11】

对称的：对任意 $x, y \in A$, 满足, 若 $\langle x, y \rangle \in R$, 则 $\langle y, x \rangle \in R$

反对称的：对任意 $x, y \in A$, 满足, 若 $\langle x, y \rangle \in R$ 且 $\langle y, x \rangle \in R$, 则 $x = y$ 【定义 7.12】

传递的：对任意的 $x, y, z \in A$, 满足: 若 $\langle x, y \rangle \in R$ 且 $\langle y, z \rangle \in R$, 则 $\langle x, z \rangle \in R$, 则称 R 是传递的 【定义 7.13】

自反闭包 (对称、传递)：

设 R 是 A 上的二元关系, 如果有另一个关系 R' 满足:

- ① R' 是自反 (对称、传递) 的;
- ② $R' \supseteq R$;
- ③ 对于任何自反的关系 R'' , 若 $R'' \supseteq R$, 则有 $R'' \supseteq R'$.

则称关系 R' 为 R 的自反闭包. 记为 $r(R)$ (对称闭包 $s(R)$ 和传递闭包 $t(R)$). 【定义 7.14】

设 R 为 A 上的关系, 则有

- (1) $r(R) = R \cup I_A$
- (2) $s(R) = R \cup R^{-1}$
- (3) $t(R) = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \dots$ (若 $|A| = n$, 则 $t(R) = R \cup R^2 \cup \dots \cup R^n$)

等价关系：设 R 为集合 A 上的一个二元关系。若 R 是自反的, 对称的, 传递的, 则称 R 为 A 上的等价关系 【定义 7.15】

等价类：设 R 为集合 A 上的等价关系, 对 $\forall a \in A$, 定义: $[a]_R = \{x | x \in A \text{ 且 } \langle a, x \rangle \in R\}$ 称之为元素 a 关于 R 的等价类。【定义 7.16】

给定 A 上的等价关系 R , 对于 $a, b \in A$ 有 $\langle a, b \rangle \in R$ 当且仅当 $[a]_R = [b]_R$ 【定理 17.4】

商集：设 R 是 A 上的等价关系, 定义 $A/R = \{[a]_R | a \in A\}$ 称之为 A 关于 R 的商集. 【定义 7.17】

划分：设 A 为非空集合, 若 A 的子集族 $\pi (\pi \subseteq P(A))$ 满足:

- (1) $\emptyset \notin \pi$
- (2) $\forall x \forall y (x, y \in \pi \wedge x \neq y \rightarrow x \cap y = \emptyset)$
- (3) $\bigcup \pi = A$

则称 π 是 A 的一个划分, 称 π 中的元素为 A 的划分块. 【定义 7.18】

给定集合 A 上的等价关系 R , 则商集 A/R 是 A 的一个划分.

集合 A 的一个划分 π 诱导出 A 上的一个等价关系 R . R 定义为 $R = \{\langle x, y \rangle | x, y \in A \text{ 且 } x, y \text{ 在 } \pi \text{ 的同一分块中}\}$

设 R_1 和 R_2 为非空集合 A 上的一个等价关系, 则 $R_1 = R_2$ 当且仅当 $A/R_1 = A/R_2$.

偏序：设 A 是一个集合. 如果 A 上的二元关系 R 是自反的, 反对称的和传递的, 则称 R 是 A 上的一个偏序关系. 记 R 为“ \leq ”, 且称序偶 $\langle A, \leq \rangle$ 为**偏序集**。【定义 7.19】 【定义 7.22】

全序 (线序)：设 $\langle A, \leq \rangle$ 为偏序集, 若对任意的 $x, y \in A$ 满足: $x \leq y$ 或 $y \leq x$ 则称 \leq 为全序关系. $\langle A, \leq \rangle$ 为全序集. 【定义 7.21】

覆盖：设 $\langle A, \leq \rangle$ 为偏序集, 若 $x, y \in A$, $x \leq y, x \neq y$ 且没有其它元素 z 满足 $x \leq z, z \leq y$, 则称 y 覆盖 x . 记 $\text{cov}A = \{\langle x, y \rangle | x, y \in A \text{ 且 } y \text{ 覆盖 } x\}$ 【定义 7.23】

哈斯图：作图规则

- ① 用小元圈 \circ 代表元素;
- ② 若 $x \leq y$ 且 $x \neq y$, 则将代表 y 的小元圈画在代表 x 的小元圈之上;
- ③ 若 $\langle x, y \rangle \in \text{cov}A$, 则在 x, y 之间用直线连接。

你

极小元/极大元：设 $\langle A, \leq \rangle$ 为偏序集, $B \subseteq A$

- (1) 对 $b \in B$, 若 B 中不存在 x 满足: $b \neq x$ 且 $x \leq b$ 则称 b 为 B 的极小元.

(2) 对 $b \in B$, 若 B 中不存在 x 满足: $b \neq x$ 且 $b \leq x$ 则称 b 为 B 的极大元.

最小元/最大元: 设 $\langle A, \leq \rangle$ 为偏序集, $B \subseteq A$, 若有某个 $b \in B$

(1) 对于 B 中每一个元素 x 都有 $b \leq x$, 则称 b 为 B 的最小元.

(2) 对于 B 中每一个元素 x 都有 $x \leq b$, 则称 b 为 B 的最大元. 【定义 7.24】

下界/上界: 设 $\langle A, \leq \rangle$ 为偏序集, $B \subseteq A$

(1) 若有 $a \in A$, 且对 $\forall x \in B$ 满足 $a \leq x$, 则称 a 为 B 的**下界**。

进一步: 设 a 为 B 的下界, 若 B 的所有下界 y 均有 $y \leq a$, 则称 a 为 B 的**下确界**, 记为 $\text{glb } B$ 。

(2) 若有 $a \in A$, 且对 $\forall x \in B$ 满足 $x \leq a$, 则称 a 为 B 的**上界**。

进一步: 设 a 为 B 的上界, 若 B 的所有上界 y 均有 $a \leq y$, 则称 a 为 B 的**上确界**, 记为 $\text{lub } B$. 【定义 7.25】

函数: 设 X, Y 为两个集合, $f \subseteq X \times Y$, 若对 $\forall x \in X, \exists!$ (唯一的) $y \in Y$, 满足: $\langle x, y \rangle \in f$, 则称 f 为函数. 记为: $f: X \rightarrow Y$

定义域: $\text{dom } f = X$

值域: $\text{ran } f$ (有时记为 $f(X)$) = $\{f(x) | x \in X\}$ 【定义 8.1】

函数相等: 设 f 和 g 都是从 A 到 B 的函数, 若对任意 $x \in A$, 有 $f(x) = g(x)$, 则称 f 和 g 相等. 记为 $f = g$ 【定义 8.2】

函数的个数: 设 $f: A \rightarrow B, |A| = m, |B| = n$. 记 $B^A = \{f | f: A \rightarrow B\}$, 则 $|B^A| = n^m$

满射(到上映射): 设 $f: X \rightarrow Y$, 若 $\text{ran } f = Y$, 则称 f 为满射的.

入射(单射)(一对一映射): 设 $f: X \rightarrow Y$, 对 $\forall x_1, x_2 \in X$, 满足: 若 $x_1 \neq x_2$, 则 $f(x_1) \neq f(x_2)$, 称 f 为入射的.

双射(一一对应映射): 设 $f: X \rightarrow Y$, 若 f 既是满射的, 又是入射的. 则称 f 是双射的. 【定义 8.6】

常函数: 设 $f: A \rightarrow B$, 如果存在 $c \in B$ 使得对所有的 $x \in A$ 都有 $f(x) = c$, 则称 $f: A \rightarrow B$ 是常函数.

恒等函数: 称 A 上的恒等关系 I_A 为 A 上的恒等函数, 对所有的 $x \in A$ 都有 $I_A(x) = x$.

单调递增: 设 $\langle A, \leq \rangle, \langle B, \leq \rangle$ 为偏序集, $f: A \rightarrow B$, 如果对任意的 $x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2$, 就有 $f(x_1) \leq f(x_2)$, 则称 f 为单调递增的;

严格单调递增: 如果对任意的 $x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2$, 就有 $f(x_1) < f(x_2)$, 则称 f 为严格单调递增的.

类似的也可以定义**单调递减**和**严格单调递减的函数**

特征函数: 设 A 为集合, 对于任意的 $A' \subseteq A$, A' 的特征函数 $\chi_{A'}: A \rightarrow \{0, 1\}$ 定义为 $\chi_{A'}(a) = 1, a \in A'; \chi_{A'}(a) = 0, a \in A - A'$

自然映射: 设 R 是 A 上的等价关系, 令 $g: A \rightarrow A/R; g(a) = [a], \forall a \in A$ 称 g 是从 A 到商集 A/R 的自然映射 【定义 8.7】

复合函数: 设 $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$, 定义: $f \circ g = \{\langle x, z \rangle | x \in X \text{ 且 } z \in Z \text{ 且可找到 } y \in Y \text{ 使 } y = f(x), z = g(y)\}$

称 $f \circ g$ 为 f 与 g 的复合函数.

设 $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow C$

(1) 如果 $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow C$ 是满射的, 则 $f \circ g: A \rightarrow C$ 也是满射的

(2) 如果 $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow C$ 是单射的, 则 $f \circ g: A \rightarrow C$ 也是单射的

(3) 如果 $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow C$ 是双射的, 则 $f \circ g: A \rightarrow C$ 也是双射的 【定理 8.2】

反函数(逆函数): 设 $f: X \rightarrow Y$ 是一个双射函数, 那么 f^{-1} 是 $Y \rightarrow X$ 的双射函数. 称 f^{-1} 为 f 的反函数.

互逆 $(f^{-1})^{-1} = f$

设 $f: A \rightarrow B$ 是双射的, 则 $f^{-1} \circ f = I_B, f \circ f^{-1} = I_A$ 【定理 8.5】

基数: 用来衡量集合大小的一个概念. 对于有限集来说, 集合的基数就是其中所含元素的个

数.

等势的: 设 A, B 是集合, 如果存在着从 A 到 B 的双射函数, 就称 A 和 B 是等势的, 记作 $A \approx B$.

如果 A 不与 B 等势, 则记作 $A \not\approx B$. 注: 通常将 A 的基数记为 $|A|$. 【定义 8.8】

$N \approx Z \approx Q \approx N \times N$

任何实数区间都与实数集合 R 等势

$\{0,1\}^N \approx R$

康托定理

(1) $N \not\approx R$;

(2) 对任意集合 A 都有 $A \not\approx P(A)$. 【定义 8.7】

有限集(有穷集)/无限集(无穷集):

设 A 为一个集合. 若存在某个自然数 n , 使得 A 与集合 $\{0,1,\dots,n-1\}$ 等势, 则称 A 是有限的.

若集合 A 不是有限的, 则称 A 是无限的. 【定义 8.11】

\aleph : 实数集 R 的基数记作 \aleph , 即 $\text{card} R = \aleph$ 【定义 8.12】

可数集(可列集): 设 A 为集合, 若 $\text{card} A \leq \aleph_0$, 则称 A 为可数集或可列集. 【定义 8.14】

与自然数集 N 等势的任意集合称为可数的. 其基数为 \aleph_0 .

结论:

(1) A 为可数的当且仅当可排列成 $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$ 的形式.

(2) 任一无限集必含有可数子集.

(3) 可数集的任何无限子集是可数的.

(4) 可数个两两不相交的可数集合的并集, 仍是一个可数集.

(5) $N \times N$ 是可数集.

(6) 有理数的全体组成的集合是可数集.

(7) 全体实数构成的集合 R 是不可数的.

基数的常识:

① 对于有穷集合 A , 基数是其元素个数 n , $|A| = n$;

② 没有最大的基数. 将已知的基数按从小到大的顺序排列就得到:

$0, 1, 2, \dots, n, \dots, \aleph_0, \aleph, \dots$

代数结构

运算: 对于集合 A , f 是从 A^n 到 A 的函数, 称 f 为集合 A 上的一个 n 元运算. 【定义 9.1】

交换律: 已知 $\langle A, * \rangle$, 若 $\forall x, y \in A$, 有 $x*y = y*x$, 称 $*$ 在 A 上是可交换的. 【定义 9.3】

结合律: 已知 $\langle A, * \rangle$, 若 $\forall x, y, z \in A$, 有 $x*(y*z) = (x*y)*z$, 称 $*$ 在 A 上是可结合的. 【定义 9.4】

幂等律: 已知 $\langle A, * \rangle$, 若 $\forall x \in A$, $x*x = x$ 则称满足幂等律. 【定义 9.5】

分配律: 设 $\langle A, *, \Delta \rangle$, 若 $\forall x, y, z \in A$ 有: $x*(y \Delta z) = (x*y) \Delta (x*z)$; $(y \Delta z)*x = (y*x) \Delta (z*x)$ 称运算 $*$ 对 Δ 是可分配的. 【定义 9.6】

吸收律: 设 $*, \Delta$ 是定义在集合 A 上的两个可交换二元运算, 若对 $\forall x, y \in A$, 都有: $x*(x \Delta y) = x$; $x \Delta (x*y) = x$ 则称运算 $*$ 和 Δ 满足吸收律. 【定义 9.7】

单位元 (幺元): 设 $*$ 是 A 上二元运算, $e_l, e_r, e \in A$

左幺元: 若 $\forall x \in A$, 有 $e_l*x = x$, 称 e_l 为运算 $*$ 的左幺元;

右幺元: 若 $\forall x \in A$, 有 $x*e_r = x$, 称 e_r 为运算 $*$ 的右幺元;

若 e 既是左幺元又是右幺元, 称 e 为运算 $*$ 的幺元 【定义 9.8】

设 $*$ 是 A 上的二元运算, 具有左幺元 e_l , 右幺元 e_r , 则 $e_l = e_r = e$ 【定理 9.1】

零元: 设 $*$ 是 A 上二元运算, $\theta_l, \theta_r, \theta \in A$

左零元: 若 $\forall x \in A$, 有 $\theta_l*x = \theta_l$, 称 θ_l 为运算 $*$ 的左零元;

右零元：若 $\forall x \in A$, 有 $x * \theta_r = \theta_r$, 称 θ_r 为运算 $*$ 的右零元；
若 θ 既是左零元又是右零元，称 θ 为运算 $*$ 的零元。【定义 9.9】

设 $*$ 是 A 上的二元运算，具有左零元 θ_l ，右零元 θ_r ，则 $\theta_l = \theta_r = \theta$ 【定理 9.2】

逆元：设 $*$ 是 A 上的二元运算， e 是运算 $*$ 的么元，若 $x * y = e$ 那对于运算 $*$ ， x 是 y 的左逆元， y 是 x 的右逆元 存在逆元(左逆无，右逆元)的元素称为可逆的（左可逆的，右可逆的）【定义 9.10】

对于可结合运算 \circ ，如果元素 x 有 左逆元 l ，右逆元 r ，则 $l=r=x^{-1}$ 【定理 9.4】

消去律：已知 $\langle A, * \rangle$ ，若 $\forall x, y, z \in A$ ，有

(1) 若 $x * y = x * z$ 且 $x \neq \theta$, 则 $y = z$; (左消去律)

(2) 若 $y * x = z * x$ 且 $x \neq \theta$, 则 $y = z$; (右消去律)

那么称 $*$ 满足消去律。【定义 9.11】

代数系统：设 A 为非空集合， Ω 为 A 上运算的集合，称 $\langle A, \Omega \rangle$ 为一个代数系统。【定义 9.12】

同类型的代数系统：如果两个代数系统中运算的个数相同，对应运算的元数相同，且代数常数的个数也相同，则称它们是同类型的代数系统。【定义 9.13】

子代数：设 $V = \langle S, f_1, f_2, \dots, f_k \rangle$ 是代数系统， B 是 S 的非空子集，如果 B 对 f_1, f_2, \dots, f_k 都是封闭的，且 B 和 S 含有相同的代数常数，则称 $\langle B, f_1, f_2, \dots, f_k \rangle$ 是 V 的子代数系统，简称子代数【定义 9.14】

最大的子代数：就是 V 本身

最小的子代数：如果令 V 中所有代数常数构成的集合是 B ，且 B 对 V 中所有的运算都是封闭的，则 B 就构成了 V 的最小的子代数

平凡子代数：最大和最小的子代数称为 V 的平凡子代数

真子代数：若 B 是 S 的真子集，则 B 构成的子代数称为 V 的真子代数。

因子代数：设 $V_1 = \langle A, \circ \rangle$ 和 $V_2 = \langle B, * \rangle$ 是同类型的代数系统， \circ 和 $*$ 为二元运算，在集合 $A \times B$ 上如下定义二元运算 \square ， $\forall \langle a_1, b_1 \rangle, \langle a_2, b_2 \rangle \in A \times B$, 有 $\langle a_1, b_1 \rangle \square \langle a_2, b_2 \rangle = \langle a_1 \circ a_2, b_1 * b_2 \rangle$ 称 $V = \langle A \times B, \square \rangle$ 为 V_1 与 V_2 的积代数，记作 $V_1 \times V_2$ 。这时也称 V_1 和 V_2 为 V 的因子代数。【定义 9.15】

设 $V_1 = \langle A, \circ \rangle$ 和 $V_2 = \langle B, * \rangle$ 是同类型的代数系统， $V_1 \times V_2 = \langle A \times B, \square \rangle$ 是它们的积代数。

(1) 如果 \circ 和 $*$ 运算是可交换（可结合、幂等）的，那么 \square 运算也是可交换（可结合、幂等）的

(2) 如果 e_1 和 e_2 (θ_1 和 θ_2) 分别为 \circ 和 $*$ 运算的单位元（零元），那么 $\langle e_1, e_2 \rangle$ ($\langle \theta_1, \theta_2 \rangle$) 也是 \square 运算的单位元（零元）

(3) 如果 x 和 y 分别为 \circ 和 $*$ 运算的可逆元素，那么 $\langle x, y \rangle$ 也是 \square 运算的可逆元素，其逆元就是 $\langle x^{-1}, y^{-1} \rangle$ 【定理 9.5】

同态：设 $V_1 = \langle A, \circ \rangle$ 和 $V_2 = \langle B, * \rangle$ 是同类型的代数系统， $f: A \rightarrow B$ ，对 $\forall x, y \in A$ 有 $f(x \circ y) = f(x) * f(y)$ ，则称 f 是 V_1 到 V_2 的同态映射，简称同态

(1) f 如果是单射，则称为单同态。

(2) 如果是满射，则称为满同态，这时称 V_2 是 V_1 的同态像，记作 $V_1 \sim V_2$ 。

(3) 如果是双射，则称为同构，也称代数系统 V_1 同构于 V_2 ，记作 $V_1 \cong V_2$ 。

(4) 如果 $V_1 = V_2$ ，则称作自同态。【定义 9.16】

半群：设 $V = \langle S, \circ \rangle$ 是代数系统， \circ 为二元运算，如果 \circ 运算是可结合的，则称 V 为半群。

独异点：设 $V = \langle S, \circ \rangle$ 是半群，若 $e \in S$ 是关于 \circ 运算的单位元，则称 V 是含么半群，也叫独异点。有时也将独异点 V 记作 $V = \langle S, \circ, e \rangle$ 。

群: 设 $V=\langle G, \circ \rangle$ 是独异点, $e \in G$ 关于 \circ 运算的单位元, 若 $\forall a \in G, a^{-1} \in G$, 则称 V 是群(Group). 通常将群记作 G . 【定义 10.1】

群的阶数: 设 $\langle G, * \rangle$ 是一个群

有限群: 如果 G 是有限集, 那么称 $\langle G, * \rangle$ 为有限群

阶数: $|G|$ 为该有限群的阶数;

无限群: 如果 G 是无限集, 则称 $\langle G, * \rangle$ 为无限群。

平凡群: 阶数为 1 (即只含单位元) 的群称为平凡群 【定义 10.2】

群的性质: 设 $\langle G, * \rangle$ 是一个群。

- (1) 非平凡群中不可能有零元.
- (2) 对于 $\forall a, b \in G$, 必存在唯一的 $x \in G$, 使得 $a * x = b$.
- (3) 对于 $\forall \{a, b, c\} \in G$ 若: $a * b = a * c$ 或 $b * a = c * a$ 则必有 $b = c$ (消去律)。
- (4) 运算表中的每一行或每一列都是一个置换。
- (5) 除幺元 e 外, 不可能有任何别的幂等元。

元素的幂: 设 G 是群, $a \in G, n \in \mathbb{Z}$, 则 a 的 n 次幂 $a^n = \begin{cases} e & n = 0 \\ a^{n-1}a & n > 0 \\ (a^{-1})^m & n < 0, n = -m \end{cases}$ 【定

义 10.3】

元素的阶: 设 G 是群, $a \in G$, 使得等式 $a^k = e$ 成立的最小正整数 k 称为元素 a 的阶, 记作 $|a| = k$, 称 a 为 k 阶元。若不存在这样的正整数 k , 则称 a 为无限阶元。【定义 10.4】

幂运算性质: (1) $\forall a \in G, (a^{-1})^{-1} = a$

(2) $\forall a, b \in G, (ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$

(3) $\forall a \in G, a^n a^m = a^{n+m}, n, m \in \mathbb{Z}$

(4) $\forall a \in G, (a^n)^m = a^{nm}, n, m \in \mathbb{Z}$

(5) 若 G 为交换群, 则 $(ab)^n = a^n b^n$. 【定理 10.1】

元素的阶的性质: G 为群, $a \in G$ 且 $|a| = r$. 设 k 是整数, 则

(1) $a^k = e$ 当且仅当 $r \mid k$ (r 整除 k)

(2) $|a^{-1}| = |a|$ 【定理 10.3】

子群: 设 G 是群, H 是 G 的非空子集, 如果 H 关于 G 中的运算构成群, 则称 H 是 G 的子群, 记作 $H \leq G$ 。

真子群: 若 H 是 G 的子群, 且 $H \subset G$, 则称 H 是 G 的真子群, 记作 $H < G$.

平凡子群: 对任何群 G 都存在子群 G 和 $\{e\}$ 都是 G 的子群, 称为 G 的平凡子群. 【定义 10.5】

子群判定定理一: 设 G 为群, H 是 G 的非空子集, 则 H 是 G 的子群当且仅当

(1) $\forall a, b \in H$ 有 $ab \in H$;

(2) $\forall a \in H$ 有 $a^{-1} \in H$. 【定理 10.4】

子群判定定理二: 设 G 为群, H 是 G 的非空子集. H 是 G 的子群当且仅当 $\forall a, b \in H$ 有 $ab^{-1} \in H$. 【定理 10.5】

子群判定定理三: 设 G 为群, H 是 G 的非空有穷子集, 则 H 是 G 的子群当且仅当 $\forall a, b \in H$ 有 $ab \in H$. 【定理 10.6】

生成子群: 设 G 为群, $a \in G$, 令 $H = \{a^k \mid k \in \mathbb{Z}\}$, 则 H 是 G 的子群, 称为由 a 生成的子群, 记作 $\langle a \rangle$.

陪集: 设 $\langle H, * \rangle$ 是群 $\langle G, * \rangle$ 的一个子群, $a \in G$ 则:

左陪集: $aH ::= \{a * h \mid h \in H\}$, 由 a 所确定的 H 在 G 中的左陪集.

右陪集: $Ha ::= H * \{a\}$

陪集是左陪集与右陪集的统称. 【定义 10.6】

陪集性质: 设 H 是群 G 的子群, 则

- ① $He = H$
- ② $\forall a \in G$ 有 $a \in Ha$
- ③ $\forall a, b \in G$ 有: $a \in Hb \Leftrightarrow ab^{-1} \in H \Leftrightarrow Ha = Hb$
- ④ 在 G 上定义二元关系 R : $\forall a, b \in G, aRb \Leftrightarrow ab^{-1} \in H$ 则 R 是 G 上的等价关系, 且 $[a]_R = Ha$.
- ⑤ $|Ha| = |H|$ 【定理 10.7】 【定理 10.8】

拉格朗日定理: 设 G 是有限群, H 是 G 的子群, 则 $|G| = |H| \cdot [G:H]$ 其中 $[G:H]$ 是 H 在 G 中的不同右陪集(或左陪集)数, 称为 H 在 G 中的指数. 【定理 10.10】

推论:

- (1) 设 G 是 n 阶群, 则 $\forall a \in G$, $|a|$ 是 n 的因子, 且 $a^n = e$.
- (2) 对阶为素数的群 G , 必存在 $a \in G$ 使得 $G = \langle a \rangle$.

阿贝尔群 (交换群): 若群 G 中的运算是可交换的, 则称 G 为交换群或阿贝尔群。

循环群: 设 G 是群, 若存在 $a \in G$ 使得 $G = \{a^k | k \in \mathbb{Z}\}$ 则称 G 是循环群, 记作 $G = \langle a \rangle$, 称 a 为 G 的生成元.

n 阶循环群: 设 $G = \langle a \rangle$ 是循环群, 若 a 是 n 阶元, 则 $G = \{a^0 = e, a^1, a^2, \dots, a^{n-1}\}$

无限循环群: 若 a 是无限阶元, 则 $G = \{a^0 = e, a^{\pm 1}, a^{\pm 2}, \dots\}$ 【定义 10.7】

循环群的生成元: 设 $G = \langle a \rangle$ 是循环群

- (1) 若 G 是无限循环群, 则 G 只有两个生成元, 即 a 和 a^{-1} .
- (2) 若 G 是 n 阶循环群, 则 G 含有 $\phi(n)$ 个生成元. 对于任何小于 n 且与 n 互质的数 $r \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, a^r 是 G 的生成元. 【定理 10.11】

循环群的子群:

- (1) 设 $G = \langle a \rangle$ 是循环群, 则 G 的子群仍是循环群;
- (2) 若 $G = \langle a \rangle$ 是无限循环群, 则 G 的子群除 $\{e\}$ 以外都是无限循环群;
- (3) 若 $G = \langle a \rangle$ 是 n 阶循环群, 则对 n 的每个正因子 d , G 恰好含有一个 d 阶子群. 【定理 10.12】

环: 设 $\langle R, +, \cdot \rangle$ 是代数系统, $+$ 和 \cdot 是二元运算. 如果满足以下条件:

- (1) $\langle R, + \rangle$ 构成交换群;
- (2) $\langle R, \cdot \rangle$ 构成半群;
- (3) \cdot 运算关于 $+$ 运算适合分配律,

则称 $\langle R, +, \cdot \rangle$ 是一个环. 【定义 10.11】

环的运算性质: 设 $\langle R, +, \cdot \rangle$ 是环, 则

- (1) $\forall a \in R, a0 = 0a = 0$
- (2) $\forall a, b \in R, (-a)b = a(-b) = -ab$
- (3) $\forall a, b, c \in R, a(b-c) = ab-ac, (b-c)a = ba-ca$
- (4) $\forall a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_m \in R (n, m \geq 2) \left(\sum_{i=1}^n a_i \right) \left(\sum_{j=1}^m b_j \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_i b_j$ 【定理 10.14】

设 $\langle R, +, \cdot \rangle$ 是环

交换环: 若环中乘法 \cdot 适合交换律, 则称 R 是交换环;

含幺环: 若环中乘法 \cdot 存在单位元, 则称 R 是含幺环;

无零因子环: 若 $\forall a, b \in R, ab=0 \Rightarrow a=0 \vee b=0$, 则称 R 是无零因子环。

整环: 设 $\langle R, +, \cdot \rangle$ 是一个代数系统, 若满足:

- (1) $\langle R, + \rangle$ 是阿贝尔群;
- (2) $\langle R, \cdot \rangle$ 是可交换独异点, 且无零因子, 即对 $\forall a, b \in R, a \neq 0, b \neq 0$ 则 $a \cdot b \neq 0$;

(3) 运算 \bullet 对 $+$ 是可分配的,

则称 $\langle R, +, \bullet \rangle$ 是整环

域: 设 $\langle R, +, \bullet \rangle$ 是一个代数系统,若满足:

(1) $\langle R, + \rangle$ 是阿贝尔群;

(2) $\langle R - \{0\}, \bullet \rangle$ 是阿贝尔群;

(3) 运算 \bullet 对 $+$ 是可分配的,

则称 $\langle R, +, \bullet \rangle$ 是域。【定义 10.12】

格: 设 $\langle S, \leq \rangle$ 是偏序集, 如果 $\forall x, y \in S$, $\{x, y\}$ 都有最小上界和最大下界, 则称 S 关于偏序 \leq 作成一格 【定义 11.1】

格的代数系统定义: 设 $\langle S, *, \circ \rangle$ 是代数系统, $*$ 和 \circ 是二元运算, 如果 $*$ 和 \circ 满足交换律、结合律和吸收律, 则 $\langle S, *, \circ \rangle$ 构成格 【定义 11.3】

对偶命题: 设 f 是含有格中元素以及符号 $=, \leq, \geq, \vee$ 和 \wedge 的命题. 令 f^* 是将 f 中的 \leq 替换成 \geq, \geq 替换成 \leq, \vee 替换成 \wedge, \wedge 替换成 \vee 所得到的命题. 称 f^* 为 f 的对偶命题 【定义 11.2】

格的对偶原理: 设 f 是含有格中元素以及符号 $=, \leq, \geq, \vee$ 和 \wedge 等的命题. 若 f 对一切格为真, 则 f 的对偶命题 f^* 也对一切格为真.

格的性质: 设 $\langle L, \leq \rangle$ 是格, 则运算 \vee 和 \wedge 适合交换律、结合律、幂等律和吸收律, 即

(1) $\forall a, b \in L$ 有 $a \vee b = b \vee a, a \wedge b = b \wedge a$

(2) $\forall a, b, c \in L$ 有 $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c), (a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$

(3) $\forall a \in L$ 有 $a \vee a = a, a \wedge a = a$

(4) $\forall a, b \in L$ 有 $a \vee (a \wedge b) = a, a \wedge (a \vee b) = a$ 【定理 11.1】

格的序与运算性质: 设 L 是格, 则 $\forall a, b \in L$ 有 $a \leq b \Leftrightarrow a \wedge b = a \Leftrightarrow a \vee b = b$ 【定理 11.3】

格的保序性质: 设 L 是格, $\forall a, b, c, d \in L$, 若 $a \leq b$ 且 $c \leq d$, 则 $a \wedge c \leq b \wedge d, a \vee c \leq b \vee d$ 【定理 11.4】

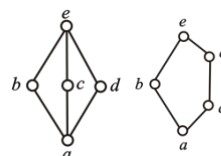
子格: 设 $\langle L, \wedge, \vee \rangle$ 是格, S 是 L 的非空子集, 若 S 关于 L 中的运算 \wedge 和 \vee 仍构成格, 则称 S 是 L 的子格 【定义 11.4】

分配格: 设 $\langle L, \wedge, \vee \rangle$ 是格, 若 $\forall a, b, c \in L$, 有

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$$

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$$

则称 L 为分配格. 【定义 11.5】



分配格的判别: 设 L 是格, 则 L 是分配格当且仅当 L 不含有与**钻石格**或**五角格**同构的子格 【定理 11.5】

全下界: 设 L 是格, 若存在 $a \in L$ 使得 $\forall x \in L$ 有 $a \leq x$, 则称 a 为 L 的全下界;

全上界: 设 L 是格, 若存在 $b \in L$ 使得 $\forall x \in L$ 有 $x \leq b$, 则称 b 为 L 的全上界。【定义 11.6】

有界格: 设 L 是格, 若 L 存在全下界和全上界, 则称 L 为有界格, 一般将有界格 L 记为 $\langle L, \wedge, \vee, 0, 1 \rangle$. 【定义 11.7】

有界格的性质: 设 $\langle L, \wedge, \vee, 0, 1 \rangle$ 是有界格, 则 $\forall a \in L$ 有 $a \wedge 0 = 0, a \vee 0 = a, a \wedge 1 = a, a \vee 1 = 1$

补元: 设 $\langle L, \wedge, \vee, 0, 1 \rangle$ 是有界格, $a \in L$, 若存在 $b \in L$ 使得 $a \wedge b = 0$ 和 $a \vee b = 1$ 成立, 则称 b 是 a 的补元 【定义 11.8】

有界分配格的补元惟一性定理: 设 $\langle L, \wedge, \vee, 0, 1 \rangle$ 是有界分配格. 若 L 中元素 a 存在补元, 则存在惟一的补元. 【定理 11.6】

有补格: 设 $\langle L, \wedge, \vee, 0, 1 \rangle$ 是有界格, 若 L 中所有元素都有补元存在, 则称 L 为有补格. 【定义 11.9】

布尔格 (布尔代数): 如果一个格是有补分配格, 则称它为布尔格或布尔代数. 布尔代数标记为 $\langle B, \wedge, \vee, ', 0, 1 \rangle$, ' $'$ 为求补运算. 【定义 11.10】

布尔代数的代数系统定义：设 $\langle B, *, \circ \rangle$ 是代数系统, $*$ 和 \circ 是二元运算. 若 $*$ 和 \circ 运算满足：

- (1) 交换律, 即 $\forall a, b \in B$ 有 $a * b = b * a, a \circ b = b \circ a$
- (2) 分配律, 即 $\forall a, b, c \in B$ 有 $a * (b \circ c) = (a * b) \circ (a * c), a \circ (b * c) = (a \circ b) * (a \circ c)$
- (3) 同一律, 即存在 $0, 1 \in B$, 使得 $\forall a \in B$ 有 $a * 1 = a, a \circ 0 = a$
- (4) 补元律, 即 $\forall a \in B$, 存在 $a' \in B$ 使得 $a * a' = 0, a \circ a' = 1$

则称 $\langle B, *, \circ \rangle$ 是一个布尔代数. 【定义 11.11】

布尔代数的性质：设 $\langle B, \wedge, \vee, ', 0, 1 \rangle$ 是布尔代数, 则

- (1) $\forall a \in B, (a')' = a$.
- (2) $\forall a, b \in B, (a \wedge b)' = a' \vee b', (a \vee b)' = a' \wedge b'$ (德摩根律) 【定理 11.7】

原子: 设 L 是格, $0 \in L, a \in L$ 若 $\forall b \in L$ 有 $0 < b \leq a \Leftrightarrow b = a$, 则称 a 是 L 中的原子【定义 11.12】

有限布尔代数的表示定理：设 B 是有限布尔代数, A 是 B 的全体原子构成的集合, 则 B 同构于 A 的幂集代数 $P(A)$. 【定理 11.8】

推论 1：任何有限布尔代数的基数为 $2^n, n \in \mathbb{N}$.

推论 2：任何等势的有限布尔代数都是同构的

图论

无序积： $A \& B = \{(x, y) \mid x \in A \wedge y \in B\}$

无向图 $G = \langle V, E \rangle$, 其中

- (1) $V \neq \emptyset$ 为顶点集, 元素称为**顶点**;
- (2) E 为 $V \& V$ 的多重集, 其元素称为无向边, 简称**边**。【定义 14.1】

有向图 $D = \langle V, E \rangle$, 只需注意 E 是 $V \times V$ 的多重子集 【定义 14.2】

n 阶图：顶点个数为 n .

零图：边的个数为 0. n 阶零图记为 N_n

平凡图：1 阶零图 N_1

空图： \emptyset

标定图与非标定图：依据顶点和边是否命名标识。

有向图的基图：有向边改为无向边后的图。

顶点与边的关联关系 $e_k = (v_i, v_j)$

关联： e_k 与 v_i, v_j 关联

关联次数：0(不关联), $1(v_i \neq v_j)$, $2(v_i = v_j)$

环：与同一顶点关联次数为 2 的边；

孤立点：不与任何边关联的顶点。

顶点相邻：两个顶点之间有边。

边相邻：两条边有公共端点。

平行边：关联的端点相同的两条边（有向图中方向相同）。

$v \in V(G)$ (G 为无向图)

v 的邻域： $N(v) = \{u \mid u \in V(G) \wedge (u, v) \in E(G) \wedge u \neq v\}$

v 的闭邻域： $\bar{N}(v) = N(v) \cup \{v\}$

v 的关联集： $I(v) = \{e \mid e \in E(G) \wedge e \text{ 与 } v \text{ 关联}\}$

$v \in V(D)$ (D 为有向图)

v 的后继元集： $\Gamma_D^+(v) = \{u \mid u \in V(D) \wedge \langle v, u \rangle \in E(D) \wedge u \neq v\}$

v 的先驱元集： $\Gamma_D^-(v) = \{u \mid u \in V(D) \wedge \langle u, v \rangle \in E(D) \wedge u \neq v\}$

v 的邻域: $N_D(v) = \Gamma_D^+(v) \cup \Gamma_D^-(v)$

v 的闭邻域: $\bar{N}_D(v) = N_D(v) \cup \{v\}$

多重图: 含平行边的图;

简单图: 即不含平行边又不含环的图。【定义 14.3】

度 (度数): 设 $G=\langle V,E \rangle$ 为无向图, $\forall v \in V$, $d(v)$ —v 的度数, 简称度

设 $D=\langle V,E \rangle$ 为有向图, $\forall v \in V$,

出度 $d^+(v)$: v 作为边的始点的次数

入度 $d^-(v)$: v 作为边的终点的次数

度 (度数) $d(v)$: $d^+(v) + d^-(v)$

最大度 $\Delta(G)$: $\max\{d(v) | v \in V(G)\}$

最小度 $\delta(G)$: $\min\{d(v) | v \in V(G)\}$

最大出度 $\Delta^+(D)$: $\max\{d^+(v) | v \in V(D)\}$

最小出度 $\delta^+(D)$: $\min\{d^+(v) | v \in V(D)\}$

最大入度 $\Delta^-(D)$: $\max\{d^-(v) | v \in V(D)\}$

最小入度 $\delta^-(D)$: $\min\{d^-(v) | v \in V(D)\}$

最大度 $\Delta(D)$: $\max\{d(v) | v \in V(D)\}$

最小度 $\delta(D)$: $\min\{d(v) | v \in V(G)\}$

奇顶点度: 度为奇数的顶点

偶度顶点: 度为偶数的顶点 【定义 14.4】

握手定理: 设 $G=\langle V,E \rangle$ 为任意无向图, $V=\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, $|E|=m$, 则 $\sum_{i=1}^n d(v_i) = 2m$

设 $D=\langle V,E \rangle$ 为任意有向图, $V=\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, $|E|=m$, 则

$$\sum_{i=1}^n d(v_i) = 2m \quad \text{且} \quad \sum_{i=1}^n d^+(v_i) = \sum_{i=1}^n d^-(v_i) = m \quad \text{【定理 14.1】 【定理 14.2】}$$

推论: 任何图 (无向或有向) 中, 奇度顶点的个数是偶数.

度数列: $V=\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ 为无向图 G 的顶点集, 称 $d(v_1), d(v_2), \dots, d(v_n)$ 为 G 的度数列

$V=\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ 为有向图 D 的顶点集

度数列: $d(v_1), d(v_2), \dots, d(v_n)$

出度列: $d^+(v_1), d^+(v_2), \dots, d^+(v_n)$

入度列: $d^-(v_1), d^-(v_2), \dots, d^-(v_n)$

可图化的: 非负整数列 $d=(d_1, d_2, \dots, d_n)$, 若存在以 $V=\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ 为顶点集的 n 阶无向图 G , 使得 $d(v_i)=d_i$, 则称 d 是可图化的。特别的, 若得到的图是简单图, 则称 d 是**可简单图化**的。

非负整数列 $d=(d_1, d_2, \dots, d_n)$ 是可图化的当且仅当 $\sum_{i=1}^n d_i$ 为偶数. 【定理 14.3】

设 G 为任意 n 阶无向简单图, 则 $\Delta(G) \leq n-1$. 【定理 14.4】

图的同构: 设 $G_1=\langle V_1, E_1 \rangle$, $G_2=\langle V_2, E_2 \rangle$ 为两个无向图 (两个有向图), 若存在双射函数 $f: V_1 \rightarrow V_2$, 对于 $v_i, v_j \in V_1$, $(v_i, v_j) \in E_1$ 当且仅当 $(f(v_i), f(v_j)) \in E_2$ ($\langle v_i, v_j \rangle \in E_1$ 当且仅当 $\langle f(v_i), f(v_j) \rangle \in E_2$) 并且, (v_i, v_j) ($\langle v_i, v_j \rangle$) 与 $(f(v_i), f(v_j))$ ($\langle f(v_i), f(v_j) \rangle$) 的重数相同, 则称 G_1 与 G_2 是同构的, 记作 $G_1 \cong G_2$. 【定义 14.5】

n ($n \geq 1$) 阶无向完全图: 每个顶点与其余顶点均相邻的无向简单图, 记作 K_n .

$$\text{边数 } m = \frac{n(n-1)}{2}, \Delta = \delta = n-1$$

$n(n \geq 1)$ 阶有向完全图：每对顶点之间均有两条方向相反的有向边的有向简单图。

$$\text{边数 } m = n(n-1), \Delta = \delta = 2(n-1), \Delta^+ = \delta^+ = n-1$$

$n(n \geq 1)$ 阶竞赛图：基图为 K_n 的有向简单图。【定义 14.6】

$$\text{边数 } m = \frac{n(n-1)}{2}, \Delta = \delta = n-1$$

n 阶 k 正则图： $\Delta = \delta = k$ 的无向简单图。【定义 14.7】

$$\text{边数 } m = \frac{nk}{2}$$

$G = \langle V, E \rangle, G' = \langle V', E' \rangle$

子图： $V' \subseteq V$ 且 $E' \subseteq E$, 则称 G' 为 G 的子图, 记为 $G' \subseteq G$, 称 G 为 G' 的**母图**;

生成子图：若 $G' \subseteq G$ 且 $V' = V$, 则称 G' 为 G 的生成子图;

真子图：若 $V' \subset V$ 或 $E' \subset E$, 称 G' 为 G 的真子图;

导出子图： V' ($V' \subseteq V$ 且 $V' \neq \emptyset$) 的导出子图, 记作 $G[V']$;

E' ($E' \subseteq E$ 且 $E' \neq \emptyset$) 的导出子图, 记作 $G[E']$. 【定义 14.8】

补图：设 $G = \langle V, E \rangle$ 为 n 阶无向简单图, 以 V 为顶点集, 以所有使 G 成为完全图 K_n 的添加边组成的集合为边集的图, 称为 G 的补图, 记作 \bar{G} . 若 $G \cong \bar{G}$, 则称 G 是**自补图** 【定义 14.9】

$G-v$ ：从 G 中将 v 及关联的边去掉

$G-V'$ ：从 G 中删除 V' 中所有的顶点

$G-e$ ：将 e 从 G 中去掉

$G-E'$ ：删除 E' 中所有边 【定义 14.10】

通路与**回路**：给定图 $G = \langle V, E \rangle$ (无向或有向的), G 中顶点与边的交替序列 $\Gamma = v_0 e_1 v_1 e_2 \dots e_l v_l$ 称为从 v_0 到 v_l 的**通路**, 其中 v_{i-1}, v_i 是 e_i 的端点.; 若 $v_0 = v_l$, Γ 为**回路**。 Γ 中的边数称为通路的**长度**。

简单通路与**简单回路**：所有边各异。

初级通路(路径)与**初级回路(圈)**： Γ 中所有顶点各异 ($v_0 = v_l$ 除外), 所有边也各异

复杂通路与**复杂回路**：有边重复出现 【定义 14.11】

在 n 阶图 G 中, 若从顶点 v_i 到 v_j ($v_i \neq v_j$) 存在通路, 则从 v_i 到 v_j 存在长度小于或等于 $n-1$ 的通路。【定理 14.5】

推论：在 n 阶图 G 中, 若从顶点 v_i 到 v_j ($v_i \neq v_j$) 存在通路, 则从 v_i 到 v_j 存在长度小于或等于 $n-1$ 的初级通路 (路径)

在一个 n 阶图 G 中, 若存在 v_i 到自身的回路, 则一定存在 v_i 到自身长度小于或等于 n 的回路。【定理 14.6】

推论：在一个 n 阶图 G 中, 若存在 v_i 到自身的简单回路, 则一定存在长度小于或等于 n 的初级回路。

顶点的连通性： $G = \langle V, E \rangle$ 为无向图, 若 v_i 与 v_j 之间有通路, 则称 v_i 与 v_j 是连通的, 记为 $v_i \sim v_j$

连通图：若 $\forall u, v \in V, u \sim v$, 则称 G 是连通的; 【定义 14.12】

连通分支： $V/R = \{V_1, V_2, \dots, V_k\}$, 称 $G[V_1], G[V_2], \dots, G[V_k]$ 为连通分支, 其个数称为连通分支数, 记为 $p(G)$ 【定义 14.13】

短程线 $u \sim v$ ： u 与 v 之间长度最短的通路

距离 $d(u,v)$: 短程线的长度 【定义 14.14】

$d(u,v) \geq 0$, $u \sim v$ 时 $d(u,v) = \infty$

$d(u,v) = d(v,u)$

$d(u,v) + d(v,w) \geq d(u,w)$

$G = \langle V, E \rangle$, $V' \subset V$

点割集: $p(G - V') > p(G)$, 且对任意 $V'' \subset V'$ 均有 $p(G - V'') = p(G)$, 则 V' 为点割集

割点: $\{v\}$ 为点割集, 则 v 为割点 【定义 14.15】

$G = \langle V, E \rangle$, $E \subseteq E$

边割集: $p(G - E) > p(G)$ 且有极小性则 E 是边割集

割边 (桥): $\{e\}$ 为边割集 e 是割边 (桥) 【定义 14.16】

G 为连通非完全图

点连通度 $\kappa(G)$ $= \min\{|V'| \mid V' \text{ 为点割集}\}$ 。规定 $\kappa(K_n) = n-1$; 若 G 非连通, $\kappa(G) = 0$

k -连通图: 若 $\kappa(G) \geq k$, 则称 G 为 k -连通图 【定义 14.17】

设 G 为连通图

边连通度 $\lambda(G)$ $= \min\{|E| \mid E \text{ 为边割集}\}$ 规定: 若 G 非连通, 则 $\lambda(G) = 0$

r 边-连通图: 若 $\lambda(G) \geq r$, 则称 G 是 r 边-连通图 【定义 14.18】

κ, λ, δ 之间的关系: $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$ 【定理 14.7】

$D = \langle V, E \rangle$ 为有向图

可达 $v_i \rightarrow v_j$: 存在从 v_i 到 v_j 有通路

相互可达 $v_i \leftrightarrow v_j$: $v_i \rightarrow v_j$ 且 $v_j \rightarrow v_i$ 【定义 14.19】

$D = \langle V, E \rangle$ 为有向图

弱连通(连通): 基图为无向连通图

单向连通: $\forall v_i, v_j \in V$, $v_i \rightarrow v_j$ 或 $v_j \rightarrow v_i$

强连通: $\forall v_i, v_j \in V$, $v_i \leftrightarrow v_j$ 【定义 14.21】

有向图的连通性判别法:

(1) D 强连通当且仅当 D 中存在经过每个顶点至少一次的回路; 【定理 14.8】

(2) D 单向连通当且仅当 D 中存在经过每个顶点至少一次的通路。【定理 14.9】

二部图 (二分图) (偶图): 设 $G = \langle V, E \rangle$ 为一个无向图, 若能将 V 分成 V_1 和 V_2 ($V_1 \cup V_2 = V$, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$), 使得 G 中的每条边的两个端点都是一个属于 V_1 , 另一个属于 V_2 , 则称 G 为二部图 (或称二分图、偶图等), 称 V_1 和 V_2 为互补顶点子集, 常将二部图 G 记为 $\langle V_1, V_2, E \rangle$.

完全二部图: 若 G 是简单二部图, V_1 中每个顶点均与 V_2 中所有的顶点相邻, 则称 G 为完全二部图, 记为 $K_{r,s}$, 其中 $r = |V_1|$, $s = |V_2|$. 【定义 14.22】

二部图的判别法: 无向图 $G = \langle V, E \rangle$ 是二部图当且仅当 G 中无奇圈。【定理 14.10】

关联矩阵 $M(G)$: 无向图 $G = \langle V, E \rangle$, $|V| = n$, $|E| = m$, 令 m_{ij} 为 v_i 与 e_j 的关联次数, 称 $(m_{ij})_{n \times m}$ 为 G 的, 记为 $M(G)$. 【定义 14.23】

$$(1) \sum_{i=1}^n m_{ij} = 2 \quad (j = 1, 2, \dots, m)$$

$$(2) \sum_{j=1}^m m_{ij} = d(v_i) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

$$(3) \sum_{i,j} m_{ij} = 2m$$

(4) 平行边的列相同

关联矩阵 $M(D)$: 有向图 $D = \langle V, E \rangle$, 令则称 $(m_{ij})_{n \times m}$ 为 D 的关联矩阵, 记为.

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, & v_i \text{ 为 } e_j \text{ 的始点} \\ 0, & v_i \text{ 与 } e_j \text{ 不关联} \\ -1, & v_i \text{ 为 } e_j \text{ 的终点} \end{cases} \quad \text{【定义 14.24】}$$

$$(1) \sum_{i=1}^n m_{ij} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, m)$$

$$(2) \sum_{j=1}^m (m_{ij} = 1) = d^+(v_i), \quad \sum_{j=1}^m (m_{ij} = -1) = d^-(v_i), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$(3) \sum_{i,j} m_{ij} = 0$$

(4) 平行边对应的列相同

邻接矩阵: 设 $D=(V,E)$ 是有向图, $V=\{v_1, \dots, v_n\}$, 构造矩阵 $A=[a_{ij}]$ 如下: $\forall i, j (1 \leq i, j \leq n)$

$$a_{ij} = \begin{cases} k & \text{若从 } v_i \text{ 到 } v_j \text{ 有 } k \text{ 条边} \\ 0 & \text{若从 } v_i \text{ 到 } v_j \text{ 没有边} \end{cases} \quad \text{称 } A \text{ 为图 } D \text{ 的邻接矩阵。【定义 14.25】}$$

$$(1) \sum_{j=1}^n a_{ij}^{(1)} = d^+(v_i), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$(2) \sum_{i=1}^n a_{ij}^{(1)} = d^-(v_j), \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$$(3) \sum_{i,j} a_{ij}^{(1)} = m - \dots - D \text{ 中长度为 } 1 \text{ 的通路数}$$

$$(4) \sum_{i=1}^n a_{ii}^{(1)} = \dots - D \text{ 中长度为 } 1 \text{ 的回路数}$$

邻接矩阵的含义: 设 A 为有向图 D 的邻接矩阵, $V=\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ 为顶点集, 则 A 的 l 次幂 A^l

($l \geq 1$) 中元素 $a_{ij}^{(l)}$ 为 D 中 v_i 到 v_j 长度为 l 的通路数, 其中 $a_{ii}^{(l)}$ 为 v_i 到自身长度为 l 的回路数,

而 $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^{(l)}$ 为 D 中长度为 l 的通路总数, $\sum_{i=1}^n a_{ii}^{(l)}$ 为 D 中长度为 l 的回路总数。【定理 14.11】

可达矩阵 $P(D)$: 设 $D=<V,E>$ 为有向图. $V=\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, 令 $p_{ij} = \begin{cases} 1, & v_i \text{ 可达 } v_j \\ 0, & \text{否则} \end{cases}$ 称

$(p_{ij})_{n \times n}$ 为 D 的可达矩阵, 记作 $P(D)$, 简记为 P 。【定义 14.26】

欧拉通路: 经过图 (无向图或有向图) 中每条边一次且仅一次行遍所有顶点的通路。

欧拉回路: 经过图中每条边一次且仅一次行遍所有顶点的回路。

欧拉图: 具有欧拉回路的图。

半欧拉图: 具有欧拉通路而无欧拉回路的图 【定义 15.1】

平凡图是欧拉图。

欧拉通路是简单通路, 欧拉回路是简单回路

无向欧拉图的判别法:

(1) 无向图 G 是欧拉图当且仅当 G 连通且无奇度数顶点。【定理 15.1】

(2) 无向图 G 是半欧拉图当且仅当 G 连通且恰有两个奇度顶点。【定理 15.2】

有向欧拉图的判别法:

(1) 有向图 D 是欧拉图当且仅当 D 是强连通的且每个顶点的入度都等于出度。【定理 15.3】

(2) 有向图 D 是半欧拉图当且仅当 D 是单向连通的, 且 D 中恰有两个奇度顶点, 其中一个的入度比出度大 1, 另一个的出度比入度大 1, 而其余顶点的入度都等于出度。【定理 15.4】

Fleury 算法(求欧拉回路):

(1) 任取 $v_0 \in V(G)$, 令 $P_0 = v_0$ 。

(2) 设 $P_i = v_0 e_1 v_1 e_2 \dots e_i v_i$ 已经行遍, 按下面方法从 $E(G) - \{e_1, e_2, \dots, e_i\}$ 中选取 e_{i+1} :

(a) e_{i+1} 与 v_i 相关联;

(b) 除非无别的边可供行遍, 否则 e_{i+1} 不应该为 $G_i = G - \{e_1, e_2, \dots, e_i\}$ 中的桥。

(3) 当 (2) 不能进行时, 算法停止。

哈密顿通路：经过图（无向图或有向图）中所有顶点一次仅一次的通路。

哈密顿回路：经过图中所有顶点一次仅一次的回路。

哈密顿图：具有哈密顿回路的图。

半哈密顿图：具有哈密顿通路且无哈密顿回路的图。【定义 15.2】

平凡图是哈密顿图。

哈密顿通路是初级通路，哈密顿回路是初级回路。

哈密顿图的必要条件：设无向图 $G=\langle V,E \rangle$ 是哈密顿图，对于任意 $V_1 \subset V$ 且 $V_1 \neq \emptyset$ ，均有 $p(G-V_1) \leq |V_1|$ 【定理 15.6】

推论：设无向图 $G=\langle V,E \rangle$ 是半哈密顿图，对于任意的 $V_1 \subset V$ 且 $V_1 \neq \emptyset$ 均有 $p(G-V_1) \leq |V_1|+1$

哈密顿通路的充分条件：设 G 是 n 阶无向简单图，若对于任意不相邻的顶点 v_i, v_j ，均有 $d(v_i)+d(v_j) \geq n-1$ 则 G 中存在哈密顿通路。【定理 15.7】

推论（哈密顿图的充分条件）：设 G 为 $n(n \geq 3)$ 阶无向简单图，若对于 G 中任意两个不相邻的顶点 v_i, v_j ，均有 $d(v_i)+d(v_j) \geq n$ 则 G 中存在哈密顿回路，从而 G 为哈密顿图

带权图：设 $G=(V,E)$ 是图，若 G 的边 e 被赋予一个非负实数 $w(e)$ ，则称 $w(e)$ 是边 e 的权。若 G 的每条边都带有权，则称 G 为带权图。【定义 15.3】

无向树：连通且无初级回路的无向图。

树叶：1 度顶点

分支点：度数 ≥ 2 的顶点

森林：每个连通分支都是树的无向图。【定义 16.1】

无向树的等价定义：设 $G=\langle V,E \rangle$ 是 n 阶 m 条边的无向图，则下面各命题是等价的：

- (1) G 是树。
- (2) G 中任意两个顶点之间存在惟一的路径。
- (3) G 中无圈且 $m=n-1$ 。
- (4) G 是连通的且 $m=n-1$ 。
- (5) G 是连通的且 G 中任何边均为桥。
- (6) G 中没有圈，但在任何两个不同的顶点之间加一条新边，在所得图中得到惟一的一个含新边的圈。【定理 16.1】

无向树的性质：设 T 是 n 阶非平凡的无向树，则 T 中至少有两片树叶。【定理 16.2】

生成树：如果无向图 G 为无向图的生成子图 T 是树，则称 T 是 G 的生成树。

树枝： T 中的边

弦：不在 T 中的边

余树：全体弦组成的集合的导出子图 【定义 16.2】

生成树存在条件：无向图 G 具有生成树当且仅当 G 连通。【定理 16.3】

推论： G 为 n 阶 m 条边的无向连通图，则 $m \geq n-1$ 。

T 是 $G=\langle V,E,W \rangle$ 的生成树

$W(T)$ ： T 各边权之和

最小生成树： G 的所有生成树中权最小的。【定义 16.5】

避圈法（Kruskal 算法）：设 $G=\langle V,E,W \rangle$ ，将 G 中非环边按权从小到大排序： e_1, e_2, \dots, e_m 。

- (1) 取 e_1 在 T 中；
- (2) 查 e_2 ，若 e_2 与 e_1 不构成回路，取 e_2 也在 T 中，否则弃 e_2 ；
- (3) 再查 e_3, \dots ，直到得到生成树为止。

根树：基图为无向树的有向图称为有向树；若有向树中一个顶点入度为 0，其余的入度均为 1，则称之为根树。

树根：入度为 0 的顶点

树叶：入度为 1，出度为 0 的顶点

内点：入度为 1，出度不为 0 的顶点

分支点：树根与内点的总称

层数：从树根到 v 的通路长度

树高： T 中层数最大顶点的层数

平凡根树：平凡图 【定义 16.6】

父亲与儿子：假若从 a 到 b 有一条边，则结点 b 称为 a 的“儿子”，或称 a 为 b 的“父亲”。

祖先与后代：假若从 a 到 c 有一条单向通路，称 a 为 c 的“祖先”或 c 是 a 的“后裔”。

兄弟：同一个分枝点的“儿子”称为“兄弟”。 【定义 16.7】

根子树： T 为非平凡根树，设 v 为根树 T 中任意一顶点，称 v 及其后代的导出子图为以 v 为根的根子树 【定义 16.8】

r 叉树：每个分支点至多有 r 个儿子

r 叉有序树： r 树是有序的

r 叉正则树：每个分支点恰有 r 个儿子

r 叉完全正则树：树叶层数相同的 r 叉正则树

最优二叉树：设 2 叉树 T 有 t 片树叶 v_1, v_2, \dots, v_t ，权分别为 w_1, w_2, \dots, w_t ，称 $W(t) = \sum_{i=1}^t w_i l(v_i)$

为 T 的权，其中 $l(v_i)$ 是 v_i 的层数。在所有有 t 片树叶，带权 w_1, w_2, \dots, w_t 的 2 叉树中，权最小的 2 叉树称为最优 2 叉树 【定义 16.9】

Huffman 算法（求最优 2 叉树）：

给定实数 w_1, w_2, \dots, w_t ，且 $w_1 \leq w_2 \leq \dots \leq w_t$ 。

(1) 连接权为 w_1, w_2 的两片树叶，得一个分支点，其权为 $w_1 + w_2$ 。

(2) 在 $w_1 + w_2, w_3, \dots, w_t$ 中选出两个最小的权，连接它们对应的顶点(不一定是树叶)，得新分支点及所带的权。

(3) 重复(2)，直到形成 $t-1$ 个分支点， t 片树叶为止。

设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_n$ 是长度为 n 的符号串

前缀： $\alpha_1, \alpha_1\alpha_2, \dots, \alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{n-1}$

前缀码： $\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m\}$ 中任何两个元素互不为前缀

二元前缀码： $\beta_i (i=1, 2, \dots, m)$ 中只出现两个符号，如 0 与 1。 【定义 16.10】

行遍或周游根树 T ——对 T 的每个顶点访问且仅访问一次。对 2 叉有序正则树的周游方式

中序行遍法：次序为左子树、根、右子树

前序行遍法：次序为根、左子树、右子树

后序行遍法：次序为左子树、右子树、根

波兰符号法：按前序行遍法访问存放算式的 2 叉有序正则树，其结果不加括号，规定每个运算符号与其后面紧邻两个数进行运算，运算结果正确。称此算法为波兰符号法或前缀符号法。

逆波兰符号法：按后序行遍法访问，规定每个运算符与前面紧邻两数运算，称为逆波兰符号法或后缀符号法。

平面图：设 $G = \langle V, E \rangle$ 是一个无向图，如果能够画在平面上，它的边恰在顶点相交，则称 G 是平面图。(或 G 能“嵌入平面”)

平面嵌入：画出的无边相交的平面图

非平面图：无平面嵌入的无向图 【定义 17.1】

面：由 G 的平面嵌入的边将平面化分成的区域

边界：包围 R_i 的回路的所有边。

次数 $\deg(R)$: R 边界的长度, 用 $\deg(R)$ 表示 【定义 17.2】

平面图中, 面的次数之和等于其边数的两倍. 【定理 17.3】

欧拉公式: 设 G 为 n 阶 m 条边 r 个面的连通平面图, 则 $n-m+r=2$ 【定理 17.6】

欧拉公式的推广: 设 G 是具有 k ($k \geq 2$) 个连通分支的平面图, 则 $n-m+r=k+1$ 【定理 17.7】

欧拉公式应用实例:

(1) 设 G 为连通的平面图, 且 $\deg(R) \geq l, l \geq 3$, 则 $m \leq \frac{l}{l-2}(n-2)$ 【定理 17.9】

(2) 设 G 为 n ($n \geq 3$) 阶 m 条边的简单平面图, 则 $m \leq 3n-6$. 【定理 17.10】

(3) 设 G 为简单平面图, 则 $\delta(G) \leq 5$. 【定理 17.12】

插入消去: 设 $e=(u,v)$ 为图 G 的一条边, 在 G 中删除 e , 增加新的顶点 w , 使 u,v 均与 w 相邻, 称为在 G 中插入 2 度顶点 w 。设 w 为 G 中一个 2 度顶点, w 与 u,v 相邻, 删除 w , 增加新边 (u,v) , 称为在 G 中消去 2 度顶点 w . 【定义 17.5】

边的收缩: 设 $e=(u,v) \in E$, 用 $G \setminus e$ 表示从 G 中删除 e 后, 将 e 的两个端点 u,v 用一个新的顶点 w (可以用 u 或 v 充当 w) 代替, 并使 w 关联除 e 以外 u,v 关联的所有边, 称为 e 的收缩。【定义 14.10】

图的同胚: 若 $G_1 \cong G_2$, 或经过反复插入或消去 2 度顶点后所得 $G'_1 \cong G'_2$, 则称 G_1 与 G_2 同胚.

Kuratoski 定理:

(1) G 是平面图 $\Leftrightarrow G$ 中不含与 K_5 或 $K_{3,3}$ 同胚的子图 【定理 17.13】.

(2) G 是平面图 $\Leftrightarrow G$ 中无可收缩为 K_5 或 $K_{3,3}$ 的子图 【定理 17.14】