

2019 级理科数学分析 (II) 期终考试试题 A 卷

1. (10 分)

(1) 给定向量 $\vec{a} = (3, 2, 1)$, $\vec{b} = (1, -1, 2)$. 求 $\vec{a} + 2\vec{b}$, $|\vec{a}|$ 和 $\vec{a} \cdot \vec{b}$.(2) 求过点 $(1, 1, -1)$, $(-2, -2, 2)$, $(1, -1, 2)$ 的平面方程.

2. (16 分) 求下列函数的偏导数

(1) 设 $u = (xy)^z$, 求 $\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{(1,1,1)}$, $\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{(1,1,1)}$ 和 $\left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{(1,1,1)}$.(2) 设 $z = z(x, y)$ 由方程 $yz - \ln z = x + y$ 所确定的隐函数, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ 和 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

3. (15 分)

(1) 求二重积分 $I = \iint_D 2y^2 \sin(xy) dx dy$, 其中 D 为由 $x = 0, y = 2, y = x$ 所围的区域.(2) 求三重积分 $I = \iiint_{\Omega} (x + y + z) dx dy dz$, 其中 $\Omega = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq z \leq 1\}$.(3) 证明第二型曲线积分 $I = \int_{(0,0)}^{(1,1)} (x + y) dx + (x - y) dy$ 与路径无关, 并求其积分值.4. (12 分) 求幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{n+1} x^n$ 的收敛半径, 收敛域及和函数的表达式.

5. (15 分) 设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的函数, 它在区间 $(-\pi, \pi]$ 上的表达式为 $f(x) = x^2$.

(1) 求 $f(x)$ 的 Fourier 级数;

(2) 求 $f(x)$ 的 Fourier 级数的和函数在区间 $[-\pi, 2\pi]$ 上的表达式;

(3) 求 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$.

6. (12 分) 证明: $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x \arctan x}{x^p} dx$ 当 $1 < p < 3$ 时绝对收敛, 当 $0 < p \leq 1$ 时条件收敛, 其余情况下发散.

7. (10 分)

(1) 设 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ 都收敛, 且 $a_n \leq u_n \leq b_n$ ($n=1, 2, \dots$). 证明: $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 收敛.

(2) 证明: $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2 x^2}$ 是定义在区间 $(0, +\infty)$ 上的连续函数.

8. (10 分)

(1) 设 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 在点 (x_0, y_0) 连续, $\frac{\partial f}{\partial y}$ 在点 (x_0, y_0) 存在. 证明: $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0)

可微.

(2) 设 $f(x, y)$ 在 R^2 可微, 且 $f(0, 0) = 0$. 证明:

$$f(x, y) = x \int_0^1 f_x(tx, ty) dt + y \int_0^1 f_y(tx, ty) dt.$$