课程编号：MTH07054　北京理工大学 2014-2015 学年第一学期

2013 级计算机学院《数值分析》期末试卷 A 卷

班级＿＿＿＿＿＿学号＿＿＿＿＿＿姓名＿＿＿＿＿＿成绩＿＿＿＿＿

注意：① 答题方式为闭卷。　② 可以使用计算器。　$\delta_1+\delta_2$.
③ 请将填空题的答案直接填在试卷上，计算题答在答题纸上。

一、填空题（每空 2 分，共 40 分）

1. 经过四舍五入得到近似数 $x_1=1.21$，$x_2=3.65$，$x_3=9.81$，则由它们计算的 $\frac{x_1x_2}{x_3}$ 的相对误差限为【 0.6% 】。0.006. 无%

2. 要使 $\sqrt{13}$ 的近似值的相对误差不超过 0.1‰，至少要取【 5 】位有效数字。

3. 用 Taylor 级数 $\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots$ 计算 cos1，如果要有 9 位有效数字，需要在级数中计算到的最后一项为【 $\frac{(-x)^{[12]}}{[12]!}$ 】，并且级数运算中每项要取【 11 】位有效数字。

4. 为求方程 $f(x)=x^3-x^2-1=0$ 在区间[1,2]的解，首先构造迭代函数 $\varphi(x)=x+f(x)=x+x^3-x^2-1$；其次使用对分法选取初值，若要求初值的误差限不大于 0.1 要对分【 4 】次；最后使用埃特肯法，取初值 $x_0=1.45$，埃特肯迭代一次后的值 $x_1=$【 1.46668 】。(计算中保留到小数点后 5 位)

5. 若用复化梯形公式计算积分 $I=\int_0^1 e^x dx$，区间[0,1]至少应分【 213 】等分才能使截断误差不超过 0.5×10^{-5}。

6. 线性方程组 $AX=B$ 的系数矩阵 $A=\begin{bmatrix}-2 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -2\end{bmatrix}$，当采用雅克比迭代法求解时，迭代矩阵的谱半径为【 $\frac{1}{2}$ 】，该迭代法【 收~ 】(填：收敛或发散)；当采用高斯—赛德尔迭代法求解时，迭代矩阵的谱半径为【 $\frac{1}{2}$ 】，该迭代法【 收~ 】(填：收敛或不发散)。

7. $A=\begin{bmatrix}1 & 0.5 & 0.9\\ 0.4 & 1 & 0.8\\ 0.6 & 0.7 & 2\end{bmatrix}$，$\|A\|_\infty=$【 3.3 】。

8. X=(3，4，12)，$\|X\|_2$=【 13 】。

9. 使用平方根法解线性方程组的条件为【 ~~正~~对称正定 】。

10. 用迭代法求解线性方程组 $\begin{cases} 10x_1 + x_3 - 5x_4 = -7 \\ x_1 + 8x_2 - 3x_3 = 11 \\ 3x_1 + 2x_2 - 8x_3 + x_4 = 23 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 17 \end{cases}$，采用带松弛因子 ω=0.5 的逐次松弛法的迭代公式为

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = x_1^{(k)} + \frac{0.5}{10}\left(-7 - 10x_1^{(k)} - x_3^{(k)} + 5x_4^{(k)}\right) \\ x_2^{(k+1)} = x_2^{(k)} + \frac{0.5}{8}\left(11 - x_1^{(k+1)} - 8x_2^{(k)} + 3x_3^{(k)}\right) \\ x_3^{(k+1)} = x_3^{(k)} + \frac{0.5}{-8}\left(23 - 3x_1^{(k+1)} - 2x_2^{(k+1)} + 8x_3^{(k)} - x_4^{(k)}\right) \\ x_4^{(k+1)} = x_4^{(k)} + \frac{0.5}{5}\left(17 - x_1^{(k+1)} + 2x_2^{(k+1)} - 2x_3^{(k+1)} - 5x_4^{(k)}\right) \end{cases}$$

【 】。

11. 设$I(f) = \int_0^2 \frac{(x-1)^2}{x^2+1} dx$，用 3 阶代数精度的高斯求积公式计算积分近似值需要取【 2 】个结点。

12. 填写如下差商表

x_0=0.0	$f[x_0]$= 【 1 】		
x_1=0.4	$f[x_1]$= 【 3 】	$f[x_0, x_1]$= 【 5 】	
x_2=0.7	$f[x_2]$=6	$f[x_1, x_2]$=10	$f[x_0, x_1, x_2]$= $\frac{50}{7}$

13. 在用带松弛因子的逐次松弛法解线性方程组 $AX=b$ 时，若松弛因子 ω满足【 $\omega \le 0$ 或 $\omega \ge 2$ 】时，则迭代一定发散。

二、 计算题（每题 10 分，共 60 分）

1. 用 Newton 法求方程 x-ln$x$=2 在区间（2，+∞）内的近似解。(计算中保留到小数点后 5 位)

2. 已知函数 $f(x)$的如下数据，根据表中数据利用斯梯林插值公式计算 $f(0.42)$的近似值。(计算中保留到小数点后 5 位)

x_i	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8
$f(x_i)$	1.00000	1.22140	1.49182	1.82212	2.22554

3. 用高斯-赛德尔迭代法解下列线性方程组，初始向量 $X^{(0)}=(0,0,0)^T$，计算过程保留小数后 4 位。

$$\begin{cases} -5x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_1 + 6x_2 - 3x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + 7x_3 = 32 \end{cases}$$

4. 利用龙贝格公式计算定积分 $I=\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}dx$ ，计算结果保留小数点后 5 位。

5. 用高斯消元法解下列方程。

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 6x_4 = 9 \\ 4x_1 + 9x_2 + 6x_3 + 15x_4 = 23 \\ 2x_1 + 6x_2 + 9x_3 + 18x_4 = 22 \\ 6x_1 + 15x_2 + 18x_3 + 40x_4 = 47 \end{cases}$$

6. 已知函数 $y=f(x)$有关数据如下：

x_i	0	1	2
$f(x_i)$	0	1	1
$f'(x_i)$	0	1	

构造埃尔米特插值多项式。

1, 2, ..., n.

1. $\frac{x}{y}$

$$|\delta c| = \frac{|dc|}{\frac{x}{y}} = \left|\frac{x\cdot dy - y\cdot dx}{y^2}\right| \cdot \frac{y}{x}$$
$$= \left|\frac{dy}{y} - \frac{dx}{x}\right|$$
$$\le |\delta x| + |\delta y|$$

xy

$$dc = xdy + ydx$$
$$|\delta c| = \left|\frac{xdy + ydx}{xy}\right|$$
$$\le |\delta x| + |\delta y|$$

$$\delta(x_1 x_2) \le \frac{0.5\times 10^{-2}}{1.21} + \frac{0.5\times 10^{-2}}{3.65}$$

$$\delta\left(\frac{x_1 x_2}{x_3}\right) \le \frac{0.5\times 10^{-2}}{1.21} + \frac{0.5\times 10^{-2}}{3.65} + \frac{0.5\times 10^{-2}}{9.81}$$

$$= 0.60\%$$

2. $$\frac{\Delta}{\sqrt{13}} \le 0.1‰$$

$$\Delta \le 3.61 \times 10^{-4}$$

$$0.5 \times 10^{-4} < 3.61 \times 10^{-4}$$

5位有效数

3. $$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + \frac{(-x)^{2n}}{2n!}$$

$$|R_{2n}| \le \frac{1}{(2n+2)!}$$

$$\varepsilon = 0.5 \times 10^{-9}$$

令 $|\epsilon| = |R_{2n}| = 0.25 \times 10^{-9}$

$$\frac{1}{(2n+2)!} < 0.25 \times 10^{-9}.$$

$n = 5$, $|R| = 2.1 \times 10^{-9}$

$n = 6$, $|R_{2n}| = 1.1 \times 10^{-11}$

$6 \cdot \Delta \le 0.25 \times 10^{-9}$

$\Delta \le 4.2 \times 10^{-11}$

$0.5 \times 10^{-11} < 4.2 \times 10^{-11}$

11位, 7项

$\frac{(-x)^{14}}{14!}$, 11

5. $$R = \frac{(b-a)^3}{12m^2} f''(\xi) < 0.5 \times 10^{-5}$$

$$\frac{e}{12m^2} < 0.5 \times 10^{-5}$$

$$m > \left\lfloor \sqrt{\frac{e}{12 \times 0.5 \times 10^{-5}}} \right\rfloor + 1$$

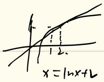
6. $G = I - D^{-1}A$

$$|\lambda I - (I - D^{-1}A)|$$

$$|D^{-1}| \cdot |\lambda D - D + A|$$

$$\begin{vmatrix} -2\lambda & -1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & -2\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

1.



$x = \ln x + 2$

$f(x) = x - \ln x - 2$

$\varphi(x) = x - \dfrac{x - \ln x - 2}{1 - \frac{1}{x}}$

$= \dfrac{x - 1 - (x - \ln x - 2)}{1 - \frac{1}{x}}$

$= \dfrac{\cancel{x} - 1 - \cancel{x} + \ln x + 2}{1 - \frac{1}{x}}$

$= \dfrac{\ln x + 1}{1 - \frac{1}{x}}$

$f'(x) = 1 - \frac{1}{x}$

$f''(x) = \frac{2}{x^2}$

取 $x_0 = 4$

$x_1 = 3.18173$

$x_2 = 3.14628$

$x_3 = 3.14619$

$x_4 = 3.14619$

2.

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
0	1	C_{t+2}^1			
		0.22140	C_{t+2}^2		
0.2	1.22140	C_{t+1}^1	0.04902		
		0.27042	C_{t+1}^2	0.01086	
0.4	1.49182	C_t^1	0.05988	C_{t+1}^3	0.00238
		0.33030	C_t^2	0.01324	
0.6	1.82212	C_{t-1}^1	0.07312	C_t^3	
		0.40342	C_{t-1}^2		
0.8	2.22554				

$t = \dfrac{0.42 - 0.4}{0.2} = 0.1$

$f(0.42) = 1.49182 + \dfrac{0.1}{1} \cdot \left(\dfrac{0.27042 + 0.33030}{2}\right)$

$+ \dfrac{0.1^2}{2!} \cdot 0.05988 + \dfrac{0.1(0.1^2-1)}{3!}\left(\dfrac{0.01086 + 0.01324}{2}\right)$

$+ \dfrac{0.1^2(0.1^2-1)}{4!}(0.00238)$

$= 1.52196$

3.

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = -\frac{1}{5}(1 + x_2^{(k)} - 2x_3^{(k)}) & 1 \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{6}(2 - 2x_1^{(k+1)} + 3x_3^{(k)}) & 2 \\ x_3^{(k+1)} = \frac{1}{7}(32 - 2x_1^{(k+1)} - x_2^{(k+1)}) & 4 \end{cases}$$

0	0	0
-0.2	0.4	4.57143
1.54857	2.10286	3.82857
0.91086	1.94400	4.03347
1.02459	2.00854	3.99175
0.99499	1.99755	4.00178
1.00120	2.00049	3.99959
0.99974	1.99988	4.00009
1.00006	2.00003	3.99998
0.99999	1.99999	4.00000
1.00000	2.00000	4.00000

4.

$T_1 = \frac{1}{2}(f(0) + f(1)) = \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{2}) = 0.75$

$T_2 = \frac{1}{2}T_1 + \frac{1}{2}(f(\frac{1}{2})) = 0.775$

$S_1 = \frac{4}{4-1}T_2 - \frac{1}{4-1}T_1 = 0.78333$

$T_4 = \frac{1}{2}T_2 + \frac{1}{4}(f(\frac{1}{4}) + f(\frac{3}{4})) = 0.78279$

$S_2 = \frac{4}{4-1}T_4 - \frac{1}{4-1}T_2 = 0.78539$

$C_1 = \frac{4^2}{4^2-1}C_2 - \frac{1}{4^2-1}C_1 = 0.78553$

$T_8 = \frac{1}{2}T_4 + \frac{1}{8}(f(\frac{1}{8}) + f(\frac{3}{8}) + f(\frac{5}{8}) + f(\frac{7}{8}))$

$= 0.78478$

$S_4 = \frac{4}{4-1}T_8 - \frac{1}{4-1}T_4 = 0.78540$

$C_2 = \frac{4^2}{4^2-1}C_4 - \frac{1}{4^2-1}C_2 = 0.78540$

5.

$$\begin{matrix} 0.5 \\ 2 \\ 3 \\ -1 \end{matrix}$$

$u_{11} = 2$ $\quad u_{12} = 4 \quad u_{13} = 2 \quad u_{14} = 6 \quad z_1 = 9$

$l_{11} = 1$

$l_{21} = 2 \quad u_{22} = 9 - 2 \times 4 = 1 \quad u_{23} = 6 - 4 = 2 \quad u_{24} = 15 - 12 = 3 \quad z_2 = 5$

$l_{22} = 1$

$l_{31} = 1 \quad l_{32} = \frac{6 - 1 \times 4}{1} = 2 \quad u_{33} = \frac{9-2-4}{1} = 3 \quad u_{34} = 18 - 6 - 6 = 6 \quad z_3 = 22 - 9 - 10 = 3$

$l_{33} = 1$

$l_{41} = 3 \quad l_{42} = \frac{15-12}{1} = 3 \quad l_{43} = \frac{18 - 6 - 6}{3} = 2 \quad u_{44} = 40 - 18 - 9 - 12 = 1 \quad z_4 = 47 - 27 - 18 - 6 = -1$

$20 - 21$

$l_{44} = 1$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 6x_4 = 9 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 5 \\ 3x_3 + 6x_4 = 3 \\ x_4 = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = 0.5 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 3 \\ x_4 = -1 \end{cases}$$

6.

x	y				
0	0				
		0			
			1		
0	0				
				-1	
		1			
1	1		0		0.25
		1		-0.5	
1	1		-1		
		0			
2	1				

$$P_4(x) = (x-0) \cdot 0 + (x-0)^2 \cdot 1 + (x-0)^2 \cdot (x-1) \cdot (-1) + (x-0)^2 (x-1)^2 \cdot 0.25$$