课程编号：MTH07054　北京理工大学 2012-2013 学年第一学期

2011 级计算机学院《数值分析》期末试卷 A 卷（信二学习部整理）

班级____________ 学号____________ 姓名 ____________ 成绩 __________

注意：① 答题方式为闭卷。　② 可以使用计算器。

③ 请将填空题的答案直接填在试卷上，计算题答在答题纸上。

一、填空题（每空 2 分，共 40 分）

$100\Delta + 100\Delta \le 1$　$\Delta \le 0.005$

1. 正方形的边长约为 100cm，为了使其面积的误差不超过 1cm^2，则在测量边长时允许的最大误差是__0.005__cm.

$\frac{\Delta}{\sqrt{20}} = 0.1\%$　5×10^{-3}　$\Delta = 4.5\times10^{-3}$　0.5×10^{-2}

2. 设 $\sqrt{20}$ 的一个近似值的相对误差为 0.1%，则该近似值具有__3__位有效数字.

3. 计算模型的近似解相对于参数模型的精确解的总误差由__截断__误差和__舍入__误差构成；两类误差合理的配置原则是__$R = \epsilon$__。

4. 设 $f(x)=a_n x^n+1$ ($a_n \neq 0$)，则 $f[x_0, x_1, \ldots, x_n]=$__$a_n$__.

5. 用对分法求方程 $f(x)=2x^2-5x-1=0$ 在区间[1,3]内的根。进行两步对分后根所在区间为__[2.5，3]__。

$X = X - \frac{X^2-2}{2X}$

6. 用牛顿下山法解 $f(x)=x^2-2=0$ 时，取 $x_0=0.5$，按其牛顿迭代公式 $x_{n+1}=$__$x_n - \frac{x_n^2-2}{2x_n}$__计算出 $x_1=2.25$，此时下山条件不满足，当下山因子 $\lambda=$__$\frac{1}{2}$__时，下山条件满足。

$f(0.5) = -1.75$　$(1-\lambda)x_0 + \lambda \cdot y_1$

7. 向量 X=(1,-2,3)，Y=(3,4,0)，则 X 的 1-范数$\|X\|_1=$__6__，Y 的 2-范数$\|Y\|_2=$__5__。

8. 设有矩阵 $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 4 & 3\end{bmatrix}$，则 $\|A\|_\infty=$__7__，$\|A\|_2=$__5.398__。$\begin{bmatrix}1 & 2\\ 4 & 3\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}1 & 4\\ 2 & 3\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}5 & 10\\ 10 & 20\end{bmatrix}$

9. 对任意初始向量 $X^{(0)}$ 及任意向量 N，线性方程组的迭代公式 $X^{(k+1)}=MX^{(k)}+N$ (k=0,1,⋯) 收敛于方程组的精确解的充分必要条件是__$\rho(M)<1$__。

10. 用带松弛因子的松弛法($\boldsymbol{\omega = 1.03}$)解方程组 $\begin{cases}4x_1 - x_2 = 1\\ -x_1 + 4x_2 - x_3 = 4\\ -x_2 + 4x_3 = -3\end{cases}$ 的迭代公式是____________________。

11. 设 $f(0)=0$，$f(1)=16$，$f(2)=46$，则 $f[0,1]=$__16__，$f[0,1,2]=$__7__，$f(x)$的二次牛顿基本差商公式为__$7x^2+9x$__　$16x+7x^2-7x$

12. 已知 $f[4,3,2,1]=2$，则 $x=1$ 点的 3 阶差分值为__12__。

$3! \cdot h^3 = 2$

13. 已知 n=4 时的牛顿-科特斯系数则 $\boldsymbol{C_0^{(4)} = \frac{7}{90}, C_3^{(4)} = \frac{16}{45}, C_2^{(4)} =}$__$\frac{2}{15}$__。

$\frac{2}{18}$　$\frac{12}{90}$　$\frac{7}{90}$　$\frac{32}{90}$　$\frac{32}{90}$　$\frac{2}{5}$

二、 计算题（每题 10 分，共 60 分）

1. 方程 $x^3-x^2-1=0$ 在 $x=1.5$ 附近有一个实根，若将该方程变换成下列三种形式进行迭代计算：

（1）$x=\sqrt{\dfrac{1}{x-1}}$　　（2）$x=1+\dfrac{1}{x^2}$　　（3）$x=\sqrt[3]{1+x^2}$

试判断这三种迭代格式在 $x_0=1.5$ 附近的收敛性，并选择一种收敛格式计算出 1.5 附近的实根，要求误差不超过 10^{-3}.

2. 用列主元素法解线性方程组，计算结果保留小数点后 3 位。

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 12 & -3 & 3\\ -18 & 3 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\ 15\\ -15\end{bmatrix}$$

3. 对如下方程组

$$\begin{bmatrix}10 & -1 & 2 & 0\\ -1 & 11 & -1 & 3\\ 2 & -1 & 10 & -1\\ 0 & 3 & -1 & 8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\ 25\\ -11\\ 15\end{bmatrix}$$

分别写出雅克比迭代法和高斯-赛德尔迭代法的迭代计算公式，并采用高斯-赛德尔迭代法进行计算，取 $x_0=(0,0,0,0)^T$，计算过程中保留小数点后 4 位，迭代到 $\dfrac{\left\|x^{(k+1)}-x^{(k)}\right\|_\infty}{\left\|x^{(k+1)}\right\|_\infty}<10^{-3}$ 为止。

4. 已知函数表如下：

x_i	1	3	4	6
$f(x_i)$	-7	5	8	14

用三阶拉格朗日（Lagrange）插值多项式计算 $f(2)$ 的近似值。

5. 求满足下表条件的埃尔米特（Hermite）插值多项式

x_i	0	1	2
y_i	0	1	1
y_i'	0	1	

6. 用复化辛卜生（Simpson）公式计算积分 $I=\int_0^1\dfrac{\sin x}{x}dx$，并**估计舍入误差**，函数 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ 的值可以参考下表数据。

x	0	1/8	1/4	3/8	1/2	5/8	3/4	7/8	1
$f(x)$	1	0.9973978	0.9896158	0.9767267	0.9588510	0.9361556	0.9088516	0.8771925	0.8414709

1.

$f(1.5) > 0 \quad f(1.4) < 0$

$x^* \in (1.4, 1.5)$

(1) $\varphi(x) = \sqrt{\frac{1}{x-1}}$

$\varphi(x) = \left((x-1)^{-1}\right)^{\frac{1}{2}}$

$= (x-1)^{-\frac{1}{2}}$

$\varphi'(x) = -\frac{1}{2}(x-1)^{-\frac{3}{2}}$

$|\varphi'(x)| \geq |\varphi'(1.5)| = 1.414 > 1$

(2) $\varphi(x) = 1 + \frac{1}{x^2}$

$\varphi'(x) = \frac{-2}{x^3}$

$|\varphi'(x)| \leq |\varphi'(1.4)| \approx 0.73 < 1 \quad (x \in [1.4, 1.5])$

(3)

$\varphi(x) = (1+x^2)^{\frac{1}{3}}$

$\varphi'(x) = \frac{1}{3}(1+x^2)^{-\frac{2}{3}} \cdot 2x$

$\varphi'(1.5) = 0.46 < 1$

选择(2)，$\varphi'(x) \leq 0.73$

$x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n^2}$

$x_0 = 1.5$

$x_1 = 1.4444$

$x_2 = 1.4799$

$x_3 = 1.4698$

$x_4 = 1.4711$

$x_5 = 1.4621$

$x_6 = 1.4678$

$x_7 = 1.4642$

$x_8 = 1.4665$

$x_9 = 1.4650$

$x_{10} = 1.4659$

$x_{11} = 1.4653$

$|x_{11} - \alpha| < \frac{q}{1-q}|x_{11} - x_{10}|$

$= \frac{0.73}{1-0.73} \cdot 0.0006$

$= 1.6 \times 10^{-3}$

$x_{12} = 1.4657$

$x_{13} = 1.4655$

$|x_{13} - \alpha| \leq \frac{0.73}{1-0.73} \times 0.0002$

$= 5.4 \times 10^{-4} < 10^{-3}$

$x = 1.4655$

2.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 & 1 \\ 12x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 15 & 2 \\ -18x_1 + 3x_2 - x_3 = -15 & 3 \end{cases}$$

以-18作为主元

$$\begin{cases} -18x_1 + 3x_2 - x_3 = -15 & ① \\ 12x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 15 & ② \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6 & ③ \end{cases}$$

$l_{21} = \frac{12}{-18} = -0.6667$, $l_{31} = \frac{1}{-18} = -0.0556$

② − l_{21}①, ③ − l_{31}①

$$\begin{cases} -0.9999x_2 + 2.3333x_3 = 4.9995 \\ 1.1668x_2 + 0.9444x_3 = 5.1660 \end{cases}$$

以1.1668作为主元

$$\begin{cases} 1.1668x_2 + 0.9444x_3 = 5.1660 & ④ \\ -0.9999x_2 + 2.3333x_3 = 4.9995 & ⑤ \end{cases}$$

$l_{32} = \frac{-0.9999}{1.1668} = -0.8570$

⑤ − l_{32}④

$3.1427x_3 = 9.4268$

$$\begin{cases} -18x_1 + 3x_2 - x_3 = -15 \\ 1.1668x_2 + 0.9444x_3 = 5.1660 \\ 3.1427x_3 = 9.4268 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 1.000 \\ x_2 = 2.000 \\ x_3 = 3.000 \end{cases}$$

3.

$$\begin{cases} 10x_1 - x_2 + 2x_3 = 6 & 1 \\ -x_1 + 11x_2 - x_3 + 3x_4 = 25 & 2 \\ 2x_1 - x_2 + 10x_3 - x_4 = -11 & -1 \\ 3x_2 - x_3 + 8x_4 = 15 & 1 \end{cases}$$

雅

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{10}(6 + x_2^{(k)} - 2x_3^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{11}(25 + x_1^{(k)} + x_3^{(k)} - 3x_4^{(k)}) \\ x_3^{(k+1)} = \frac{1}{10}(-11 - 2x_1^{(k)} + x_2^{(k)} + x_4^{(k)}) \\ x_4^{(k+1)} = \frac{1}{8}(15 - 3x_2^{(k)} + x_3^{(k)}) \end{cases}$$

高

$$
\begin{cases}
x_1^{(k+1)} = \frac{1}{10}\left(6 + x_2^{(k)} - 2x_3^{(k)}\right) \\
x_2^{(k+1)} = \frac{1}{11}\left(25 + x_1^{(k+1)} + x_3^{(k)} - 3x_4^{(k)}\right) \\
x_3^{(k+1)} = \frac{1}{10}\left(-11 - 2x_1^{(k+1)} + x_2^{(k+1)} + x_4^{(k)}\right) \\
x_4^{(k+1)} = \frac{1}{8}\left(15 - 3x_2^{(k+1)} + x_3^{(k+1)}\right)
\end{cases}
$$

	$x_1^{(0)} = 0$	$x_2^{(0)} = 0$	$x_3^{(0)} = 0$	$x_4^{(0)} = 0$
1	0.6	2.3273	-0.9873	0.8789
2	1.0302	2.0369	-1.0145	0.9843
3	1.0066	2.0036	-1.0025	0.9984
4	1.0009	2.0003	-1.0003	0.9998
5	1.0001	2.0000	-1.0003	1.0000

$$X^{(5)} = \begin{bmatrix} 1.0001 \\ 2.0000 \\ -1.0003 \\ 1.0000 \end{bmatrix} \qquad X^{(4)} = \begin{bmatrix} 1.0009 \\ 2.0003 \\ -1.0003 \\ 0.9998 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\|X^{(5)} - X^{(4)}\|_\infty}{\|X^{(5)}\|_\infty} = \frac{0.0008}{2} = 4 \times 10^{-4} < 10^{-3}$$

$$
\begin{cases}
x_1 = 1.0001 \\
x_2 = 2.0000 \\
x_3 = -1.0003 \\
x_4 = 1.0000
\end{cases}
$$

4.

$$f(2) = \frac{(2-3)(2-4)(2-6)}{(1-3)(1-4)(1-6)} \times (-7)$$
$$+ \frac{(2-1)(2-4)(2-6)}{(3-1)(3-4)(3-6)} \times 5$$
$$+ \frac{(2-1)(2-3)(2-6)}{(4-1)(4-3)(4-6)} \times 8$$
$$+ \frac{(2-1)(2-3)(2-4)}{(6-1)(6-3)(6-4)} \times 14$$
$$= 0.26667 \times (-7) + 1.33333 \times 5 - 0.66667 \times 8 + 0.06667 \times 14$$
$$= 0.39998$$

5.

x	y	一阶差商	2阶差商	3阶差商	4阶差商
0	0				
		0			
0	0		1		
		1		-1	
1	1		0		0.25
		1		-0.5	
1	1		-1		
		0			
2	1				

$$P_4(x) = 0 + x \cdot 0 + x^2 + x^2(x-1)(-1) + x^2(x-1)^2 \cdot 0.25$$
$$= x^2 - x^2(x-1) + 0.25x^2(x-1)^2$$

6. $\frac{1}{6}$ $\frac{4}{6}$ $\frac{1}{6}$

取 $m = 4$, $n = 8$, $h = \frac{1}{8}$

$$I = \frac{2h}{6}\left(\left(f(0) + 4f(\tfrac{1}{8}) + f(\tfrac{1}{4})\right) + \cdots\right)$$
$$= \frac{h}{3}\left(\left(f(0) + f(1)\right) + 4\left(f(\tfrac{1}{8}) + f(\tfrac{3}{8}) + f(\tfrac{5}{8}) + f(\tfrac{7}{8})\right) + 2\left(f(\tfrac{1}{4}) + f(\tfrac{1}{2}) + f(\tfrac{3}{4})\right)\right)$$
$$= 0.0416667 \times 22.7059981$$
$$= 0.946084011$$

$$\delta_1 = 0.5 \times 10^{-7}$$
$$\delta_2 = 0.5 \times 10^{-7}(2 + 4 \times 4 + 2 \times 3) = 12 \times 10^{-7}$$
$$= 1.2 \times 10^{-6}$$

$$|E| = 0.0416667 \times 1.2 \times 10^{-6} + 22.7059981 \times 0.5 \times 10^{-7}$$
$$= 1.2 \times 10^{-6}$$

$$0.5 \times 10^{-6} < 1.2 \times 10^{-6}$$

$$I \approx 0.946084$$