离散数学图论部分综合练习

一、单项选择题

1．设图G的邻接矩阵为

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

则G的边数为(　).

A．6　　　B．5　　　C．4　　　D．3

2．已知图G的邻接矩阵为

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

则G有（　）.

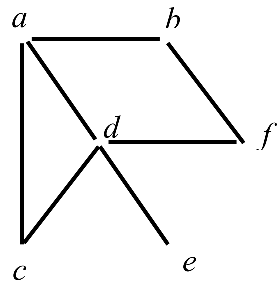
A．5点，8边　　　B．6点，7边

C．6点，8边　　　D．5点，7边

3．设图G＝<V, E>，则下列结论成立的是 (　).

A．deg(V)=2E　　　B．deg(V)=E

C．$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|$　　　D．$\sum_{v \in V} \deg(v) = |E|$



图一

4．图G如图一所示，以下说法正确的是 (　) .

A．{(a, d)}是割边

B．{(a, d)}是边割集

C．{(d, e)}是边割集

D．{(a, d) ,(a, c)}是边割集

5．如图二所示，以下说法正确的是 (　).

图二

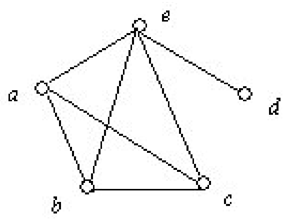
A．e是割点　　　B．{a, e}是点割集

C．{b, e}是点割集　　　D．{d}是点割集

6．如图三所示，以下说法正确的是 (　) .

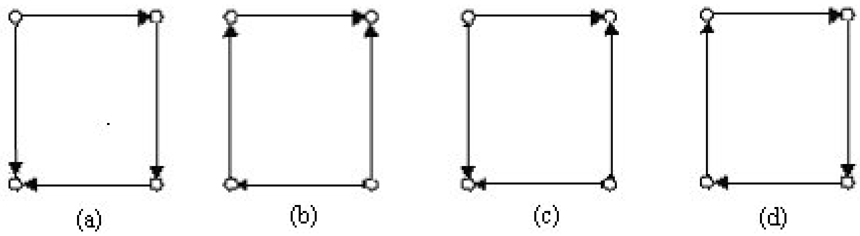
A．{(a, e)}是割边　　　B．{(a, e)}是边割集

C．{(a, e) ,(b, c)}是边割集　　　D．{(d, e)}是边割集



图三

7．设有向图（a）、（b）、（c）与（d）如图四所示，则下列结论成立的是 (　).



图四

A．（a）是强连通的　　　　B．（b）是强连通的

C．（c）是强连通的　　　　D．（d）是强连通的

应该填写：D

8．设完全图K　有n个结点(n≥2)，m条边，当（　）时，K　中存在欧拉回路．

A．m为奇数　B．n为偶数　C．n为奇数　D．m为偶数

9．设G是连通平面图，有v个结点，e条边，r个面，则r= (　).

A．$e-v+2$　B．$v+e-2$　C．$e-v-2$　D．$e+v+2$

10．无向图G存在欧拉通路，当且仅当(　).

A．G中所有结点的度数全为偶数

B．G中至多有两个奇数度结点

C．G连通且所有结点的度数全为偶数

D．G连通且至多有两个奇数度结点

11．设G是有n个结点，m条边的连通图，必须删去G的(　)条边，才能确定G的一棵生成树．

A．$m-n+1$　B．$m-n$　C．$m+n+1$　D．$n-m+1$

12．无向简单图G是棵树，当且仅当(　).

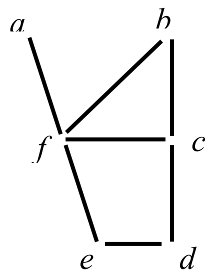
A．G连通且边数比结点数少1　　B．G连通且结点数比边数少1

C．G的边数比结点数少1　　D．G中没有回路．

二、填空题

1．已知图G中有1个1度结点，2个2度结点，3个3度结点，4个4度结点，则G的边数是________．

2．设给定图G(如图四所示)，则图G的点割集是_________．



图

3．若图G=<V, E>中具有一条汉密尔顿回路，

则对于结点集V的每个非空子集S，在G中删除S
中的所有结点得到的连通分支数为W，则S中结点数$|S|$与W满足的关系式为____________.

4．无向图G存在欧拉回路，当且仅当G连通且____________.

5．设有向图D为欧拉图，则图D中每个结点的入度__________.
应该填写：等于出度

6．设完全图K_n有n个结点(n2)，m条边，当______时，K_n中存在欧拉回路.

7．设G是连通平面图，v, e, r分别表示G的结点数，边数和面数，则v，e和r满足的关系式____________.

8．设连通平面图G的结点数为5，边数为6，则面数为_______ .

9．结点数v与边数e满足_________关系的无向连通图就是树.

10．设图G是有6个结点的连通图，结点的总度数为18，则可从G中删去_______条边后使之变成树.

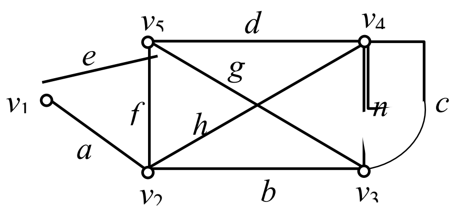
11．已知一棵无向树T中有8个结点，4度，3度，2度的分支点各一个，T的树叶数为 _________.

12．设G=<V, E>是有6个结点，8条边的连通图，则从G中删去______条边，可以确定图G的一棵生成树.

13．给定一个序列集合{000，001，01，10，0}，若去掉其中的元素_______，则该序列集合构成前缀码.

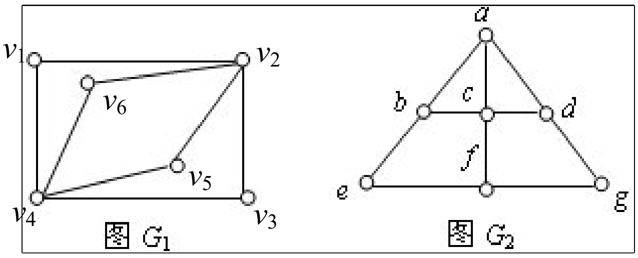
三、判断说明题

1．如图六所示的图G存在一条欧拉回路.



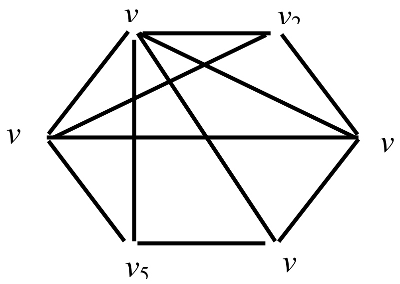
图六

2．给定两个图G_1，G_2（如图七所示）：
（1）试判断它们是否为欧拉图、汉密尔顿图？并说明理由.
（2）若是欧拉图，请写出一条欧拉回路.



图七

3．判别图G(如图八所示)是不是平面图，并说明理由．



图

4．设G是一个有6个结点14条边的连通图，则G为平面图．

四、计算题

1．设图GV，E，其中Va_1, a_2, a_3, a_4, a_5,

Ea_1, a_2，a_2, a_4，a_3, a_1，a_4, a_5，a_5, a_2

（1）试给出G的图形表示；

（2）求G的邻接矩阵；

（3）判断图G是强连通图、单侧连通图还是弱连通图？

2．设图G=<V，E>，V={ v_1，v_2，v_3，v_4，v_5}，E={ (v_1, v_2)，(v_1, v_3)，(v_2, v_3)，(v_2, v_4)，(v_3, v_4)，(v_3, v_5)，(v_4, v_5) }，试

（1）画出G的图形表示；　　　（2）写出其邻接矩阵；

（2）求出每个结点的度数；　　　（4）画出图G的补图的图形．

3．设G=<V，E>，V={ v_1，v_2，v_3，v_4，v_5}，E={ (v_1,v_3)，(v_2,v_3)，(v_2,v_4)，(v_3,v_4)，(v_3,v_5)，(v_4,v_5) }，试

（1）给出G的图形表示；　　　（2）写出其邻接矩阵；

（3）求出每个结点的度数；　　　（4）画出其补图的图形．

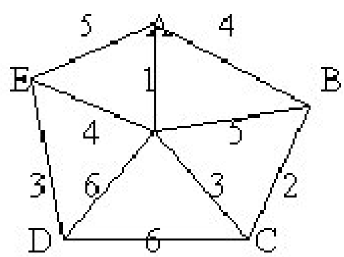
4．图G=<V, E>，其中V={ a, b, c, d, e}，E={ (a, b), (a, c), (a, e), (b, d), (b, e), (c, e), (c, d), (d, e) }，对应边的权值依次为2、1、2、3、6、1、4及5，试

（1）画出G的图形；

（2）写出G的邻接矩阵；

（3）求出G权最小的生成树及其权值．

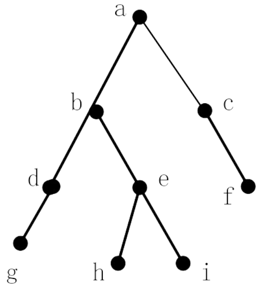
5.用Dijkstra算法求右图中A点到其它各点的最短路径。



6．设有一组权为2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,试

（1）画出相应的最优二元树；　（2）计算它们的权值．

7．给出右边所示二元有序树的三种遍历结果．



五、证明题

1．若无向图G中只有两个奇数度结点，则这两个结点一定是连通的．

2．设G是一个n阶无向简单图，n是大于等于2的奇数．证明图G与它的补图$\overline{G}$中的奇数度顶点个数相等．

3．设连通图G有k个奇数度的结点，证明在图G中至少要添加$\frac{k}{2}$条边才能使其成为欧拉图．

参考解答

一、单项选择题

1．B　2．D　3．C　4．C　5．A　6．D　7．D　8．C
9．A　10．D　11．A　12．A

二、填空题

1．15　　2．$\{f\}$，$\{c，e\}$　　3．W$|S|$

4．所有结点的度数全为偶数　　5．等于出度

6．n为奇数　7．v-e+r =2　　8．3

9．e=v−1　　10．4　　11．5

12．3　　13．0

三、判断说明题

1．**解**：正确．

因为图G为连通的，且其中每个顶点的度数为偶数．

2．**解：**（1）图G_1是欧拉图．

因为图G_1中每个结点的度数都是偶数．

图G_2是汉密尔顿图．

因为图G_2存在一条汉密尔顿回路（不惟一）：

$a(a, b)b(b, e)\ e(e, f)\ f\ (f, g)\ g(g, d)\ d(d, c)\ c(c, a)a$

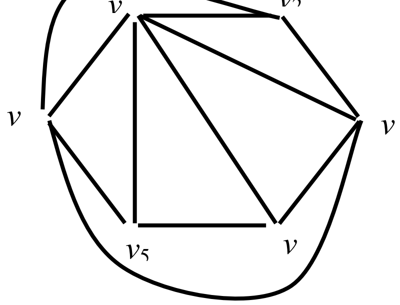
问题：请大家想一想，为什么图G_1不是汉密尔顿图，图G_2不是欧拉图。

（2）图G_1的欧拉回路为：（不惟一）：

$v_1(v_1, v_2)\ v_2\ (v_2, v_3)\ v_3\ (v_3, v_4)\ v_4\ (v_4, v_5)v_5$
$(v_5, v_2)\ v_2\ (v_2, v_6)v_6\ (v_6, v_4)\ v_4\ (v_4, v_1)v_1$

3．**解**：图G是平面图．

因为只要把结点v_2与v_6的连线(v_2, v_6)拽到结点v_1的外面，把把结点v_3与v_6的连线(v_3, v_6)拽到结点v_4, v_5的外面，就得到一个平面图，如图九所示．



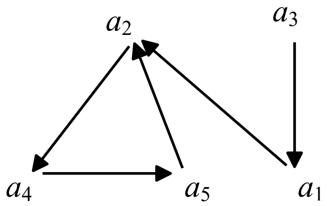
图九

4．**解**：错误．

不满足"设G是一个有v个结点e条边的连通简单平面图，若$v≥3$，则$e≤3v-6$．"

四、计算题

1．**解**：（1）图G是有向图：

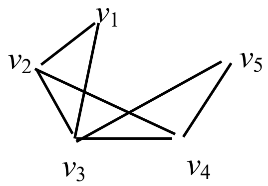


（2）邻接矩阵如下：

$$A(D)=\begin{bmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0\\1&0&0&0&0\\0&0&0&0&1\\0&1&0&0&0\end{bmatrix},$$

（3）图G是单侧连通图，也是弱连通图．

2．**解**：（1）图G如图十



图十

（2）邻接矩阵为

$$\begin{bmatrix}0&1&1&0&0\\1&0&1&1&0\\1&1&0&1&1\\0&1&1&0&1\\0&0&1&1&0\end{bmatrix}$$

（3）$\deg(v_1)=2$

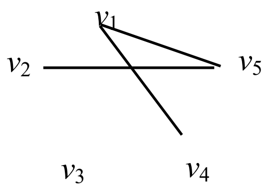
$\deg(v_2)=3$

$\deg(v_3)=4$

$\deg(v_4)=3$

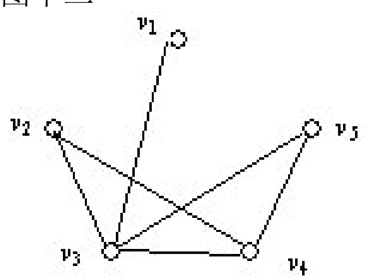
$\deg(v_5)=2$

（4）补图如图十一



图十一

3．**解**：（1）G的图形如图十二



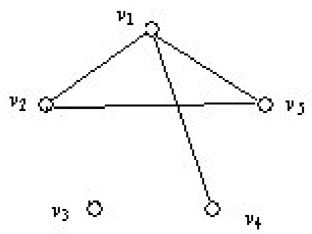
（2）邻接矩阵：

图十二

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

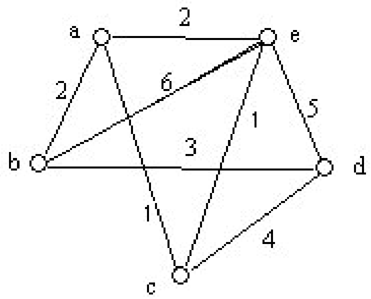
（3）v_1，v_2，v_3，v_4，v_5结点的度数依次为1，2，4，3，2

（4）补图如图十三：



图十三

4．**解**：（1）G的图形表示如图十四：

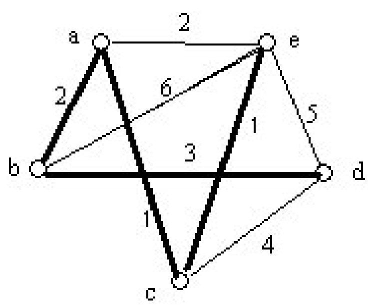


图十四

（2）邻接矩阵：

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

（3）粗线表示最小的生成树，如图十五



如图十五

最小的生成树的权为1+1+2+3=7：

5. **解**：注意算法执行过程的数据要完整的表示。

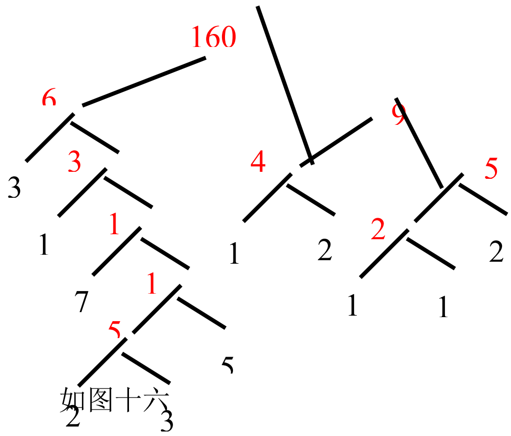
6. **解**：（1）最优二叉树如图十六所示：

方法（Huffman）：从2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31中选2,3为最低层结点，并从权数中删去，再添上他们的和数，即5,5,7,11,13,17,19,23,29,31；

再从5,5,7,11,13,17,19,23,29,31中选5,5为倒数第2层结点，并从上述数列中删去，再添上他们的和数，即7,10,11,13,17,19,23,29,31；

然后，从7,10,11,13,17,19,23,29,31中选7,10和11,13为倒数第3层结点，并从上述数列中删去，再添上他们的和数，即17,17,24,19,23,29,31；

……



如图十六

（2）权值为：26+36+55+74+114+134+173+193+233+293+312

=12+18+25+28+44+52+51+57+69+87+62=505

7. **解**：a）前根：a，b，d，g，e，h，i，c，f

b）中根：g，d，b，h，e，i，a，c，f

c）后根：g，d，h，i，e，b，f，c，a

五、证明题

1. **证明**：用反证法．设G中的两个奇数度结点分别为u和v．假设u和v不连通，即它们之间无任何通路，则G至少有两个连通分支G_1，G_2，且u和v分别属于G_1和G_2，于是G_1和G_2各含有一个奇数度结点．这与定理3.1.2的推论矛盾．因而u和v一定是连通的．

2. **证明**：设$G=<V,E>$，$\overline{G}=<V,E'>$．则E'是由n阶无向完全图K_n的边删去E所得到的．所以对于任意结点$u\in V$，u在G和$\overline{G}$中的度数之和等于u在K_n中的度数．由于n是大于等于2的奇数，从而K_n的每个结点都是偶数度的（$n-1\ (\geq 2)$度），于是若$u\in V$在G中是奇数度结点，则它在$\overline{G}$中也是奇数度结点．故图G与它的补图$\overline{G}$中的奇数度结点个数相等．

3. **证明**：由定理3.1.2，任何图中度数为奇数的结点必是偶数，可知k是偶数．

又根据定理4.1.1的推论，图G是欧拉图的充分必要条件是图G不含奇数度结点．因此只要在每对奇数度结点之间各加一条边，使图G的所有结点的度数变为偶数，成为欧拉图．

故最少要加$\dfrac{k}{2}$条边到图G才能使其成为欧拉图．