课程编号：100171019　　北京理工大学 2018-2019 学年第二学期

2018 级理科数学分析（II）期终考试试题 A 卷

1.(8 分)判断下列命题是否正确（不用说明原因）.

(1)设 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点存在偏导数 $f_x(x_0,y_0)$ 和 $f_y(x_0,y_0)$，则 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 连续.

(2)设 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点可微，则 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点的偏导数 $f_x(x_0,y_0)$ 和 $f_y(x_0,y_0)$ 都存在.

(3)设 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点可微，则 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 连续.

(4)若 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=0$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛.

(5)设 $a_n>0\,(n=1,2,\cdots)$. 若 $\lim\limits_{n\to+\infty} na_n=0$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛.

(6)若 $a_n>0$ 且 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}<1$， $n=1,2,\cdots$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛.

(7)若级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ 收敛，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛.

(8)若 $\lim\limits_{A\to+\infty}\int_{-A}^{A} f(x)dx=L$（$L$ 有限数），则 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ 收敛.

2.(18 分)求下列函数的偏导数

(1)设 $z=y\cos x+e^{xy}$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$， $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 和 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

(2)设 $z=z(x,y)$ 由方程 $e^x\sin y+yz+e^z+5=0$ 所确定的隐函数，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$， $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 和 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

3.(15 分)计算下列积分

(1)求三重积分 $I=\iiint\limits_{\Omega}\dfrac{xy}{\sqrt{z}}dxdydz$，其中 Ω 是锥面 $x^2+y^2=z^2$ 与平面 $z=1$ 所围成区域在第一卦限部分，即 $\Omega=\left\{ (x,y,z)\,\middle|\, 0\le x\le 1, 0\le y\le\sqrt{1-x^2}, \sqrt{x^2+y^2}\le z\le 1 \right\}$.

(2) 求第二型曲线积分 $I=\int_L (1-2xy-y^2)dx-(x+y)^2dy$，其中 L 是曲线 $x^2+y^2=2y$ 上从点 $O(0,0)$ 到点 $A(1,1)$ 的一段.

(3) 求第一型曲面积分 $\iint_M x^2y^2dS$，其中 M 是上半球面 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}\ \left(x^2+y^2\le R^2, R>0\right)$.

4. (15 分) 判断下列广义积分或级数的收敛性

(1) $\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx$　　(2) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^n}{n!}$　　(3) $\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)$

5. (12 分) 求幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ 的收敛半径，收敛域及和函数的表达式.

6.(12 分)设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的函数，它在区间 $(-\pi,\pi]$ 上的表达式为

$$f(x)=\begin{cases} x & 0<x\le\pi \\ 0 & -\pi<x\le 0 \end{cases}.$$

(1)求 $f(x)$ 的 Fourier 级数；

(2)求 $f(x)$ 的 Fourier 级数的和函数在区间 $[-\pi,2\pi]$ 上的表达式；

(3)求 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$.

7.(10 分) 设 $y=y(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_n x^n$ 是初值问题 $\begin{cases} xy''+y'+xy=0 \\ y(0)=1, y'(0)=0 \end{cases}$ 的解，

求 $a_n(n=0,1,\cdots)$.

8.(10 分)

(1)设 $I(x)=\int_0^x \frac{\ln(1+xy)}{y}dy\ (x>0)$，求 $I'(x)$.

(2)求 $I(x)=\int_0^{2\pi} e^{x\cos\theta}\cos\left(x\sin\theta\right)d\theta$， $x\in(-\infty,+\infty)$.