课程编号：A073122　　　　　　北京理工大学 2013-2014 学年第一学期

线性代数 A 试题 B 卷(信二学习部整理)

班级 ________ 学号 _________ 姓名 __________ 成绩 ___________

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											
签名											

一、（10 分）已知矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 8 \end{pmatrix}$，且 $\boldsymbol{AXA}^{-1} = \boldsymbol{XA}^{-1} + 3\boldsymbol{I}$，求 $\boldsymbol{X}$。

二、（10 分）对下面线性方程组

$$\begin{cases} (2-\lambda)x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1 \\ 2x_1 + (5-\lambda)x_2 - 4x_3 = 2 \\ -2x_1 - 4x_2 + (5-\lambda)x_3 = -\lambda - 1 \end{cases}$$

试讨论：当 λ 取何值时，它有唯一解？无解？有无穷多解？并在有无穷多解时求其通解。（用导出组的基础解系表示通解）

三、（10 分）利用初等行变换求下列矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 & -1 \\ 2 & 0 & 3 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

的列向量组的一个极大无关组，并把其余列向量用极大组线性表示。

四、（10 分）在 $\mathbf{R}^{2\times 2}$ 中，令 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, \alpha_2=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}, \alpha_3=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}, \alpha_4=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix},$

$\beta_1=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}, \beta_2=\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}, \beta_3=\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}, \beta_4=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$

(1) 求基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 到基 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 的过渡矩阵；

(2) 求 $\gamma=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}$ 在基 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 下的坐标。

五、（10 分）设 6 阶方阵 A 的初等因子为 $\lambda-1,\ (\lambda-2)^2,\ \lambda^3$ 。

(1) 试写出 A 的 Jordan 标准形；(2) 判断 A 的哪些列是特征向量。

六、（10 分）函数集合 $V_3=\{(a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0)e^x \mid a_3,\ a_2,a_1,a_0\in\mathbf{R}\}$ 对于函数的线性运算构成三维线性空间，在 V_3 中取一组基 $\alpha_1=x^3e^x,\alpha_2=x^2e^x,\alpha_3=xe^x,\alpha_4=e^x$，求微分运算 D 在这组基下的矩阵，并判断该线性变换是否可逆。

七、（10 分）求下列实系数齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1+\ x_2+\ x_3+\ x_4=0 \\ x_1+2x_2+3x_3+4x_4=0 \\ 2x_1+3x_2+4x_3+5x_4=0 \end{cases}$ 的解空间的一标准正交基。

八、（10 分）　已知实二次型 $\boldsymbol{f(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3}$

(1) 求一正交变换 $\boldsymbol{X=QY}$，将二次型 $\boldsymbol{f(x_1,x_2,x_3)}$化为标准形;

(2) 判断二次型 $\boldsymbol{f(x_1,x_2,x_3)}$的定性。

九、（10 分）设 $\boldsymbol{A=I-ee^T}$，其中 $\boldsymbol{I}$ 为 $\boldsymbol{n}$ 阶方阵，$\boldsymbol{e}$ 为 $\boldsymbol{n}$ 维非零列向量，证明

（1） $\boldsymbol{A=A^2}$的充分必要条件为$\boldsymbol{e}$ 为单位向量，即$\boldsymbol{e^Te=1}$；

（2）当$\boldsymbol{e^Te=1}$时, $\boldsymbol{A}$ 不可逆。

十、（10 分）设 3 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=-3,\ \alpha_1=(1,-1,1)^T$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于 λ_1 的特征向量。令 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^5-4\boldsymbol{A}^3+\boldsymbol{I}$

(1) 验证 α_1 也是 $\boldsymbol{B}$ 的特征向量；

(2) 求 $\boldsymbol{B}$ 的全部特征值和特征向量；

(3) 求 $\boldsymbol{B}$；

(4) 求 $\boldsymbol{A}$