课程编号：100171018　　　北京理工大学 2021-2022 学年第一学期

2021 级理科数学分析（I）期中考试试题（1-2）解答

班级__________学号___________姓名________成绩___________

1.(10 分)判断下列命题是否正确:

(1)设 $f(x)=x^2$，$g(x)=2^x$，则 $f\circ g(x)=4^x$.

(2)若 $f(x)$ 是定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的偶函数，则 $f(-x)$ 也是偶函数.

(3)若 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都是定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的严格单调递增的函数，

则 $f(x)\cdot g(x)$ 也是 $(-\infty,+\infty)$ 上的严格单调递增的函数.

(4)若 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=0$，则 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{x_n}=0$.

(5)若 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，则 $f\left(|x|\right)$ 在 $x=0$ 处连续但不一定可导.

(6)设 $y=f(e^x)e^{f(x)}$，其中 $f(x)$ 是可微函数，则

$$y'=f'(e^x)e^{f(x)}+f(e^x)e^{f(x)}f'(x).$$

(7)设 $\varphi(x)$ 在 $x=a$ 连续但不可导. 若 $f(x)=(x-a)\varphi(x)$，则 $f(x)$ 在 $x=a$ 可导.

(8)设 $\varphi(x)$ 在 $x=a$ 连续且 $\varphi(a)\neq 0$. 若 $f(x)=|x-a|\varphi(x)$，则 $f(x)$ 在 $x=a$ 不可导.

(9)若 $y=f(x)$ 在 x_0 的某个邻域内具有三阶连续导数，并且 $f'(x_0)=0$，$f''(x_0)=0$，$f'''(x_0)\neq 0$，则 x_0 是 $y=f(x)$ 的极值点.

(10)若 $y=f(x)$ 在 x_0 的某个邻域内具有三阶连续导数，并且 $f'(x_0)=0$，$f''(x_0)=0$，$f'''(x_0)\neq 0$，则 $\left(x_0,f(x_0)\right)$ 是 $y=f(x)$ 的拐点.

请在对应题号下方填写答案，若正确，画“√”；若不正确，画“×”.

题号	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)

2.(20 分)

(1) 设 $f(x)=\sin 2x\cos^3 3x$，求 $f'(x)$.

(2) 设 $y=f(x)$ 是由方程 $y+xe^y=1$ 确定的隐函数，求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

(3) 设 $y=f(x)$ 是由参数方程 $\begin{cases} x=\ln(1+t^2) \\ y=\arctan t \end{cases}$ 确定的函数，求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

3.(20 分) 求下列极限

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$　　(2) $\lim\limits_{n\to+\infty}\tan^n\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{n}\right)$

(3) $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n$，其中 $0<x_1<1,\ x_{n+1}=x_n(2-x_n), n=1,2,\cdots$.

4.(15 分) 证明：$\dfrac{2}{\pi}x<\sin x<x\left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$.

5.(15 分) 设 $f(x)=\begin{cases} x & x\text{有理数} \\ x^2+x & x\text{无理数} \end{cases}$.

(1) 证明：$\forall x_0\neq 0$，$f(x)$ 在 x_0 点不连续；

(2) 证明：$f(x)$ 在 $x=0$ 可导，并求出 $f'(0)$.

6.(20 分)

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导，$f'(a)=f'(b)=0$. 证明：存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $\left|f''(\xi)\right|\geq\dfrac{4}{(b-a)^2}\left|f(b)-f(a)\right|$.