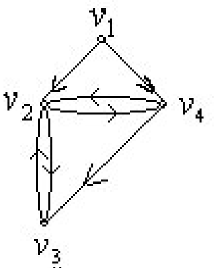
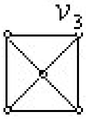
1、 填空 15%（每小题 3分）

1、 n阶完全图K_n的边数为 __________ 。

2、 右图



的邻接矩阵A= ______________ 。

3、 图  的对偶图为 ________________ 。

4、 完全二叉树中，叶数为n_t，则边数m= _______________ 。

5、 设< {a,b,c}, * >为代数系统，* 运算如下：

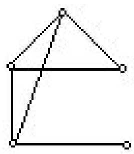
*	a	b	c
a	a	b	c
b	b	a	c
c	c	c	c

则它的幺 第3题 元为 ______ ；零元为 _____ ；

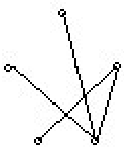
a、b、c的逆元分别为 __________________ 。

2、 选择 15% （每小题 3分）

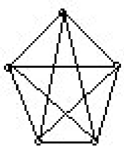
1、 图



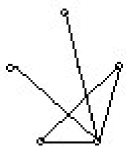
相对于完全图的补图为（ ）。



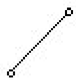
[A]



[B]

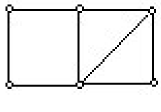


[C]



[D]

2、 对图G



则$k(G), \lambda(G), \delta(G)$分别为（ ）。

A、2、2、2； B、1、1、2； C、2、1、2； D、1、2、2 。

3、 一棵无向树T有8个顶点，4度、3度、2度的分枝点各1个，其余顶点均为树叶，则T中有（ ）片树叶。

A、3； B、4； C、5； D、6

4、 设<A，+，·>是代数系统，其中+，·为普通的加法和乘法，则A=（ ）时<A，

+，·>是整环。

A、$\{x \mid x = 2n, n \in Z\}$； B、$\{x \mid x = 2n+1, n \in Z\}$；

C、$\{x \mid x \geq 0, \square\ x \in Z\}$； D、$\{x \mid x = a + b\sqrt[4]{5},\quad a, b \in R\}$。

5、 设A={1，2，…，10}，则下面定义的运算*关于A封闭的有（ ）。

A、 x*y=max(x ,y)； B、x*y=质数p的个数使得$x \leq p \leq y$；

C、x*y=gcd(x , y)； (gcd (x ,y)表示x和y的最大公约数)；

D、x*y=lcm(x ,y) （lcm(x ,y) 表示x和y的最小公倍数）。

3、 证明 45%

1、设G是（n,m）简单二部图，则$m \leq \dfrac{n^2}{4}$。（8分）

2、设G为具有n个结点的简单图，且$m > \dfrac{1}{2}(n-1)(n-2)$则G是连通图。（8分）

3、设G是阶数不小于11的简单图，则G或$\overline{G}$中至少有一个是非平图。（14分）

4、记“开”为1，“关”为0，反映电路规律的代数系统[{0，1}，+，·]的加法运算和乘法运算。如下：

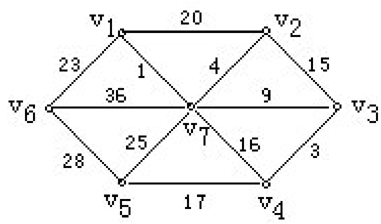
+	0	1
0	0	1
1	1	0

·	0	1
0	0	0
1	0	1

证明它是一个环，并且是一个域。（15分）

4、 生成树及应用 10%

1、（10分）如下图所示的赋权图表示某七个城市$v_1, v_2, \quad, v_7$及预先测算出它们之间的一些直接通信线路造价，试给出一个设计方案，使得各城市之间既能够通信而且总造价最小。



2、（10分）构造H、A、P、N、E、W、R、对应的前缀码，并画出与该前缀码对应的二叉树，写出英文短语HAPPY NEW YEAR的编码信息。

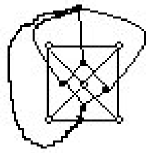
5、 5%

对于实数集合R，在下表所列的二元远算是否具有左边一列中的性质，请在相应位上填写“Y”或“N”。

	Max	Min	+
可结合性			

可交换性			
存在幺元			
存在零元			

1、　填空 15%（每小题3分）

1、$\frac{1}{2}n(n-1)$ ；2、$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ；  3、；4、$2(n_t-1)$ ；5、a，c，a、b、没有

2、　选择 15%（每小题 3分）

题目	1	2	3	4	5
答案	A	A	C	D	A，C

3、　证明 45%

1、（8分）：设G=（V，E），$V = X \cup Y$，$|X| = n_1$，$|Y| = n_2$，□ $n_1 + n_2 = n$

对完全二部图有$m = n_1 \cdot n_2 = n_1(n-n_1) = -n_1^2 + n_1 n = -(n_1 - \frac{n}{2})^2 + \frac{n^2}{4}$

当$n_1 = \frac{n}{2}$时，完全二部图(n, m)的边数m有最大值$\frac{n^2}{4}$。

故对任意简单二部图(n, m)有$m \le \frac{n^2}{4}$。

2、（8分）反证法：若G不连通，不妨设G可分成两个连通分支G_1、G_2，假设G_1和G_2的顶点数分别为n_1和n_2，显然$n_1 + n_2 = n$。

$n_1 \ge 1 \quad n_2 \ge 1 \quad \therefore n_1 \le n-1 \quad n_2 \le n-1$

$$\therefore m \le \frac{n_1(n_1-1)}{2} + \frac{n_2(n_2-1)}{2} \le \frac{(n-1)(n_1+n_2-2)}{2} = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

与假设矛盾。所以G连通。

3、（14分）（1）当n=11时，$G \cup \overline{G} = K_{11}$　K_{11}边数$m' = \frac{11 \times 10}{2} = 55$条，因而必有$G$或$\overline{G}$的边数大于等于28，不妨设G的边数$m \ge 28$，设G有k个连通分支，则G中必有回路。（否则G为k棵树构成的森林，每棵树的顶点数为n_i，边数m_i，则$m_i = n_i - 1, i = 1 \quad k$，

$$\sum_{i=1}^{k} n_i = n = 11, \sum_{i=1}^{k} m_i = m$$

$\therefore 28 \le m = \sum_{i=1}^{k} m_i = \sum_{i=1}^{k}(n_i - 1) = n - k = 11 - k$　矛盾）

下面用反证法证明G为非平面图。

假设G为平面图，由于G中有回路且G为简单图，因而回路长大于等于3 。于是G的每个面至少由g ($g \ge 3$)条边围成，由点、边、面数的关系$m \le \frac{g}{g-2}(n-k-1)$，得：

$$28 \le m \le \frac{g}{g-2}(11-k-1) \le \frac{3}{3-1}(11-(k+1)) \le 3(11-(1+1)) = 3\times 11 - 3\times 2 = 27$$

而 $28 \le 27$矛盾，所以G为非平面图。

（2）当n>11时，考虑G的具有11个顶点的子图G'，则G'或$\overline{G}'$必为非平面图。

如果G'为非平面图，则G为非平面图。

如果$\overline{G}'$为非平面图，则$\overline{G}$为非平面图。

4、（15分）

1）[{0，1}，+，·]是环

①[{0，1}，+]是交换群

乘：由“+”运算表知其封闭性。由于运算表的对称性知：+运算可交换。

群：（0+0）+0=0+（0+0）=0；（0+0）+1=0+（0+1）=1；

（0+1）+0=0+（1+0）=1 ；（0+1）+1=0+（1+1）=0；

（1+1）+1=1+（1+1）=0　……

结合律成立。

幺：幺元为0。

逆：0，1逆元均为其本身。所以，<{0，1}，+>是Abel群。

②<{0，1}，·>是半群

乘：由“· ”运算表知封闭

群：(0·0)·0=0·（0·0）=0；（0·0）·1=0·（0·1）=1；

（0·1）·0=0·（1·0）=1；（0·1）·1=0·（1·1）=0；

（1·1）·1=1·（1·1）=0；…

③·对+的分配律

对$\forall x, y \in \{0,1\}$

 0·（x+y）=0=0+0=(0·x)+(0·y)

 1·（x+y）

当x=y　(x+y)=0　则

$$1\cdot(x+y) = 1\cdot 0 = 0 = \begin{Bmatrix} 0+0 \\ 1+1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} (1\cdot 0)+(1\cdot 0) \\ (1\cdot 1)+(1\cdot 1) \end{Bmatrix} = (1\cdot x)+(1\cdot y)$$

当$x \ne y$（$x+y=1$）则

$$1\cdot(x+y)=1\cdot1=1=\begin{Bmatrix}1+0\\0+1\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}(1\cdot1)+(1\cdot0)\\(1\cdot0)+(1\cdot1)\end{Bmatrix}=(1\cdot x)+(1\cdot y)$$

所以$\forall x,y,z\in\{0,1\}$均有$z\cdot(x+y)=(z\cdot x)+(z\cdot y)$

同理可证：$(x+y)\cdot z=(x\cdot z)+(y\cdot z)$

所以·对+ 是可分配的。

由①②③得，<{0，1}，+，·>是环。

（2）<{0，1}，+，·>是域

因为<{0，1}，+，·>是有限环，故只需证明是整环即可。

①乘交环： 由乘法运算表的对称性知，乘法可交换。

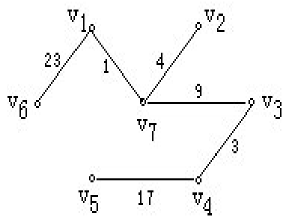
②含幺环：乘法的幺元是1

③无零因子：1·1=1≠0

因此[{0，1}，+，·]是整环，故它是域。

4、 **树的应用 20%**

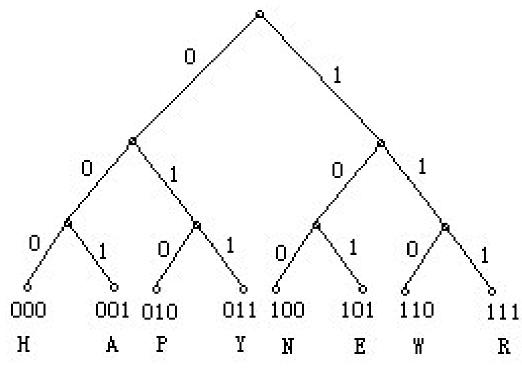
1、（10分）解： 用库斯克（Kruskal）算法求产生的最优树。算法略。结果如图：



树权C(T)=23+1+4+9+3+17=57即为总造价

五、（10分）

由二叉树知



H、A、P、Y、N、E、W、R对应的编码分别为

000、001、010、011、100、101、110、111。

显然{000，001，010，011，100，101，110，111}为前缀码。

英文短语HAPPY NEW YEAR 的编码信息为

000 001 010 010 011 100 101 001 001 101 001 111

六、5%

	Max	Min	+
可结合性	Y	Y	Y
可交换性	Y	Y	Y
存在幺元	N	N	Y
存在零元	N	N	N