# SL03: Lineare Abbildungen

| | |
|---|---|
| Notizen | ☐ |
| Type | Vorlesung |
| Unterlagen | |
| Woche | Woche 4 |

## Definitionen

- Die lineare Abbildung

  Eine Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, die jedem $x \in \mathbb{R}^n$ ein $y = f(x) \in \mathbb{R}^m$ zuordnet, heisst linear, wenn eine $m \times n$-Matrix $A$ existiert mit

  - $y = f(x) = Ax$

- Das Bild einer linearen Abbildung

  Das Bild vom $M \subseteq \mathbb{R}^n$ unter $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ist

  - $f(M) = \{y \in \mathbb{R}^m |$ es existiert ein $x \in M$ mit $f(x) = y\}$

- Determinante einer $2 \times 2$-Matrix

  Die Determinate einer $2 \times 2$-Matrix $A$ ist

  - $det\ A = det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

- Determinante

  Die Determinante einer quadratischen Matrix $A = (a_{ij})$ der Ordnung n ist induktiv wie folgt definiert:

  - Für $n = 1:\ det(A) = a_{11}$
  - Für $n = 2:\ det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$
  - Für $n > 2$ : Sei $A_{ij}$ die Matrix, die durch Streichen der $i$-ten Zeile und $j$-ten Spalte von $A$ entsteht $det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i1}(-1)^{i+1} det(A_{i1})$

- Eigenwert und Eigenvektor

  Sei $A$ eine $n \times n$-Matrix, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{v} \neq 0$ mit $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$

- $l$-facher Eigenwert

  Sei $A$ eine $n \times n$-Matrix mit $n$ linear unabhängigen Eigenvektoren. Einen Eigenwert $\lambda$ von $A$, zu dem es $l \leq n$ linear unabhängige Eigenvektoren gibt, nennt man $l$-fachen Eigenwert von $A$

# Sätze

- Verknüpfung linearer Abbildungen

  Gegeben sind $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ mit $f(x) = Ax$, $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ mit $g(x) = Bx$ und $h : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^q$ mit $h(x) = Cx$, dann gilt:

  - $f = g \leftrightarrow A = B$
  - $f + g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ist linear mit $(f+g)(x) = (A+B)x$
  - $f - g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ist linear mit $(f-g)(x) = (A-B)x$
  - $h \circ g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^q$ ist linear mit $(h \circ g)(x) = h(Bx) = CBx$

- Charakterisierung des Bildes von $f$

  Für $A = [\vec{a}^1, \ldots, \vec{a}^n]$ mit $\vec{a}^1, \ldots, \vec{a}^n \in \mathbb{R}^m$ und $f(x) = Ax$ gilt:

  - $f(\mathbb{R}^n) = lin\{\vec{a}^1, \ldots, \vec{a}^n\}$
  - $dim(f(\mathbb{R}^n)) = rang(A)$

- Umkehrabbildung und Inverse

  Für $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ mit $y = f(x) = Ax$ gilt:

  - $f$ surjektiv $\leftrightarrow rang(A) = m$
  - $f$ injektiv $\leftrightarrow rang(A) = n$
  - $f$ bijektiv $\leftrightarrow rang(A) = m = n$
  - Dann existiert eine Matrix $$A^{-1} mit $A * A^{-1} = A^{-1} * A = I$
  - Die Umkehrabbildung ist $f^{-1}(x) = A^{-1}x$

- Rechenregeln invertierbarer Matrizen

  Sind $A$ und $B$reguläre Matrizen der Ordnung $n$, dann gilt:

  - $A^{-1} * A = A * A^{-1} = I$
  - $(A^{-1})^{-1} = A$
  - $(A * B)^{-1} = B^{-1} * A^{-1}$
  - $(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha} A^{-1}$, falls $\alpha \neq 0$
  - $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

- Eigenschaften der Determinante einer $2 \times 2$-Matrix

  Für eine $2 \times 2$-Matrix $A$ und $\alpha \neq 0$ gilt:

  - $det(A) = 0 \leftrightarrow rang(A) < 2$
  - Vertauscht man zwei Spalten, so ändert sich das Vorzeichen, aber nicht der Betrag der Determinate
  - Ver-$\alpha$-facht man eine Spalte, so ver-$\alpha$-facht sich die Determinante
  - Sind alle Elemente unter der Hauptdiagonalen von A gleich 0, dann gilt $det(A) = a_{11}a_{22}$

- Flächenveränderung

  - Ist $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $f(x) = Ax$ und $M \subseteq \mathbb{R}^2$ mit der Fläche $Vol(M)$, dann gilt $Vol(f(M)) = |det(A)| * Vol(M)$
  - Ist $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $f(x) = Ax$ und $M \subseteq \mathbb{R}^3$ mit der Fläche $Vol(M)$, dann gilt $Vol(f(M)) = |det(A)| * Vol(M)$

- Weiter Eigenschaften von Determinanten

  Sind $A$ und $B$ zwei $2 \times 2$-Matrizen, dann gilt:

  - $det(A) \neq 0 \leftrightarrow A$ invertierbar und $det(A^{-1}) = \frac{1}{det(A)}$
  - $det(AB) = det(A)det(B)$

- Entwicklungssatz für Determinanten

  $det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j} det(A_{ij})$, $j \in \{1, \ldots, n\}$

$det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j} det(A_{ij})$, $i \in \{1, \dots, n\}$

- Eigenschaften der Determinante

  Seine $A$ und $B$ quadratische Matrizen der Ordnung $n$, $\alpha \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$

  - $det(A) = 0 \leftrightarrow rang(A) < n$
  - Vertauscht man zwei Spalten, so ändert sich  das Vorzeichen, aber nicht der Betrag der Determinante
  - Ver-$\alpha$-facht man eine Spalte, Ver-$\alpha$-facht sich die Determinante
  - Sind alle Elemente unter der Hauptdiagonalen von $A$ gleich 0, dann gilt $det(A) = a_{11} \dots a_{nn}$
  - $det(A) \neq 0 \leftrightarrow A$ invertierbar und $det(A^{-1}) = \frac{1}{det(A)}$
  - $det(AB) = det(A)det(B)$

- Eigenschaften von Eigenvektoren

  Für jeden Eigenvektor $\vec{v} \neq 0$ zum Eigenwert $\lambda$ von $A$ ist auch $\alpha\vec{v}$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$ ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda$ von $A$

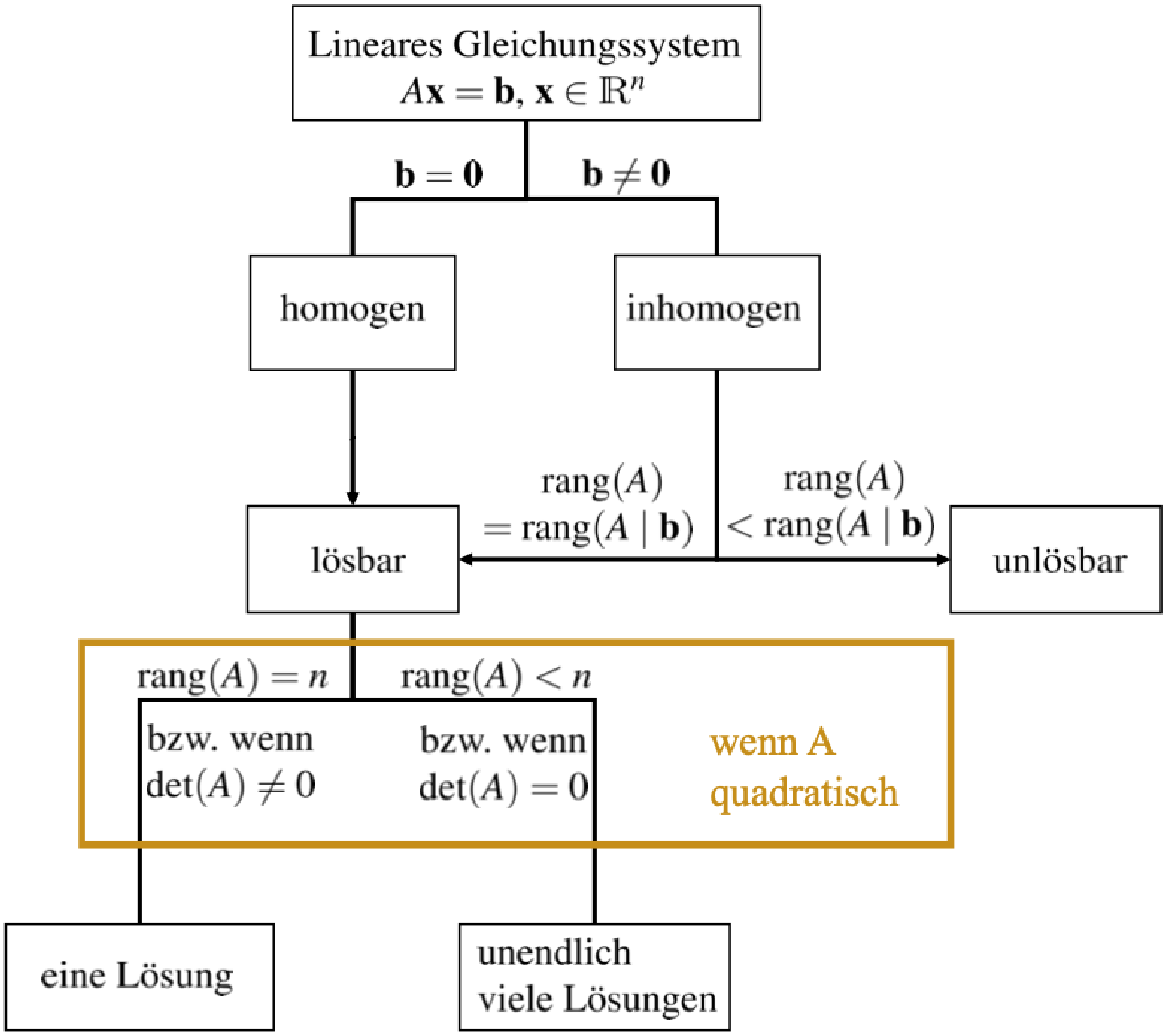
- Bestimmung von Eigenwerten

  Für Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}$ und Eigenvektor $v \neq 0$ gilt:

  - $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$ bzw. $(A - \lambda I)\vec{v} = 0$

- Eigenwerte und Eigenvektoren symmetrischer Matrizen

  Eine (reelle) symmetrische $n \times n$-Matrix $A$ hat $n$ reelle, linear unabhängige Eigenvektoren $\vec{v}^1, \dots, \vec{v}^n \in \mathbb{R}^n$ zu Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$


Lineares Gleichungssystem
$A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$
$\mathbf{b} = \mathbf{0}$
$\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$
homogen
inhomogen
$\mathrm{rang}(A) = \mathrm{rang}(A \mid \mathbf{b})$
$\mathrm{rang}(A) < \mathrm{rang}(A \mid \mathbf{b})$
lösbar
unlösbar
$\mathrm{rang}(A) = n$
$\mathrm{rang}(A) < n$
bzw. wenn $\det(A) \neq 0$
bzw. wenn $\det(A) = 0$
wenn A quadratisch
eine Lösung
unendlich viele Lösungen