# Formular / Kochrezept Master-Methode

(vereinfachte Version)

Gegebene Rekurrenzrelation: T(n) =

## 1 Anschauen, interpretieren

## 2 Mustererkennung: T(n) = a · T(n/b) + f(n)

a = ______, b = ______, f(n) = ________________

Mustererkennung erfolgreich? ☐ ja ☐ nein → *Abbruch / andere Methode*

## 3 Parameter kontrollieren

| *Parameter* | *Kriterium* | *Evaluation* |
|---|---|---|
| a | konstant, a ≥ 1 | ☐ ok ☐ nicht ok |
| b | konstant, b > 1 | ☐ ok ☐ nicht ok |
| f(n) | asymptotisch positiv | ☐ ok ☐ nicht ok |

Master-Methode anwendbar? ☐ ja ☐ nein → *Abbruch / andere Methode*

## 4 Fall bestimmen

Berechne $x = \log_b(a)$ = ________________________ (Blätter im Rekursionsbaum: $n^x$)

Vergleiche asymptotisch f(n) = _______________ mit $n^x$ = _____________:

| *Vergleich* | *Beschreibung* | *Fall* | *Resultat* | *Arbeit* |
|---|---|---|---|---|
| f(n) wächst polynomiell langsamer als $n^x$. | f(n) "≼" $\Theta(n^x)$<br>$\exists \varepsilon > 0$:<br>$f(n) \in O(n^{x-\varepsilon})$ | ①<br>☐ | $T(n) \in \Theta(n^x)$ | vor allem in den Blättern |
| f(n) wächst (ungefähr) gleich schnell wie $n^x$. | f(n) "≅" $\Theta(n^x)$<br>$\exists \varepsilon > 0$:<br>$f(n) \in \Theta(n^{x-\varepsilon} \cdot \log(n))$ | ②<br>☐ | $T(n) \in \Theta(n^x \cdot \log(n))$ | gleichmässig verteilt |
| f(n) wächst polynomiell schneller als $n^x$. | f(n) "≽" $\Theta(n^x)$<br>$\exists \varepsilon > 0$:<br>$f(n) \in \Omega(n^{x-\varepsilon})$ | ③<br>☐ | $T(n) \in \Theta(f(n))$ | vor allem im Wurzelknoten |

## 4a Regularität für Fall ③ prüfen

Für eine geeignete Konstante c < 1 und eine genügend grosses $n > n_0$ gilt:

$$a \cdot f(n/b) \quad \leq \quad c \cdot f(n)$$

______________________ ≤ ______ · ____________

Regularität erfüllt? ☐ ja ☐ nein → *Abbruch / andere Methode*

## 5 Lösung aufschreiben

T(n) ∈ Θ(_____________)

# Formular / Kochrezept Master-Methode

(vereinfachte Version)

Gegebene Rekurrenzrelation: $T(n) = 7 \cdot T(n/2) + n^2$

## 1 Anschauen, interpretieren

Das Problem wird zerlegt in 7 Teilprobleme, die jeweils halb so gross sind wie das Ausgangsproblem. Dabei fällt ausserhalb der Rekursion ein Aufwand an, der quadratisch von n abhängt.

## 2 Mustererkennung: $T(n) = a \cdot T(n/b) + f(n)$

$a =$ **7**, $b =$ **2**, $f(n) =$ $\mathbf{n^2}$

Mustererkennung erfolgreich? ☒ ja ☐ nein ⟶ *Abbruch / andere Methode*

## 3 Parameter kontrollieren

| *Parameter* | *Kriterium* | *Evaluation* |
|---|---|---|
| a | konstant, $a \geq 1$ | ☒ ok ☐ nicht ok |
| b | konstant, $b > 1$ | ☒ ok ☐ nicht ok |
| f(n) | asymptotisch positiv | ☒ ok ☐ nicht ok |

Master-Methode anwendbar? ☒ ja ☐ nein ⟶ *Abbruch / andere Methode*

## 4 Fall bestimmen

Berechne $x = \log_b(a) =$ $\mathbf{\log_2(7) \approx 2.807}$ (Blätter im Rekursionsbaum: $n^x$)

Vergleiche asymptotisch $f(n) =$ $\mathbf{n^2}$ mit $n^x =$ $n^{\log_2(7)} \approx n^{2.807}$ :

| *Vergleich* | *Beschreibung* | *Fall* | *Resultat* | *Arbeit* |
|---|---|---|---|---|
| f(n) wächst polynomiell langsamer als $n^x$. | $f(n)$ "$\precsim$" $\Theta(n^x)$<br>$\exists \varepsilon > 0$: $f(n) \in O(n^{x-\varepsilon})$ | ① ☒ | $T(n) \in \Theta(n^x)$ | vor allem in den Blättern |
| f(n) wächst (ungefähr) gleich schnell wie $n^x$. | $f(n)$ "$\cong$" $\Theta(n^x)$<br>$\exists \varepsilon > 0$: $f(n) \in \Theta(n^{x-\varepsilon} \cdot \log(n))$ | ② ☐ | $T(n) \in \Theta(n^x \cdot \log(n))$ | gleichmässig verteilt |
| f(n) wächst polynomiell schneller als $n^x$. | $f(n)$ "$\succsim$" $\Theta(n^x)$<br>$\exists \varepsilon > 0$: $f(n) \in \Omega(n^{x-\varepsilon})$ | ③ ☐ | $T(n) \in \Theta(f(n))$ | vor allem im Wurzelknoten |

## 4a Regularität für Fall ③ prüfen

Für eine geeignete Konstante $c < 1$ und eine genügend grosses $n > n_0$ gilt:

$$a \cdot f(n/b) \leq c \cdot f(n)$$

$$\_\_\_\_\_\_\_\_ \leq \_\_\_\_ \cdot \_\_\_\_\_\_\_\_$$

Regularität erfüllt? ☐ ja ☐ nein ⟶ *Abbruch / andere Methode*

## 5 Lösung aufschreiben

$T(n) \in \Theta(\mathbf{n^{\log_2(7)}})$

# Formular / Kochrezept Master-Methode

(vereinfachte Version)

Gegebene Rekurrenzrelation: $T(n) = 32 \cdot T(n/4) + n^3$

## 1 Anschauen, interpretieren

Das Problem wird zerlegt in 32 Teilprobleme, die jeweils einen Viertel so gross sind wie das Ausgangsproblem. Dabei fällt ausserhalb der Rekursion ein Aufwand an, der kubisch von n abhängt.

## 2 Mustererkennung: T(n) = a · T(n/b) + f(n)

a = **32**, b = **4**, f(n) = $\mathbf{n^3}$

Mustererkennung erfolgreich? ☒ ja ☐ nein → *Abbruch / andere Methode*

## 3 Parameter kontrollieren

| *Parameter* | *Kriterium* | *Evaluation* |
|---|---|---|
| a | konstant, a ≥ 1 | ☒ ok ☐ nicht ok |
| b | konstant, b > 1 | ☒ ok ☐ nicht ok |
| f(n) | asymptotisch positiv | ☒ ok ☐ nicht ok |

Master-Methode anwendbar? ☒ ja ☐ nein → *Abbruch / andere Methode*

## 4 Fall bestimmen

Berechne $x = \log_b(a)$ = $\mathbf{\log_4(32) = 2.5}$ (Blätter im Rekursionsbaum: $n^x$)

Vergleiche asymptotisch f(n) = $\mathbf{n^3}$ mit $n^x$ = $n^{\log_4(32)} = \mathbf{n^{2.5}}$:

| *Vergleich* | *Beschreibung* | *Fall* | *Resultat* | *Arbeit* |
|---|---|---|---|---|
| f(n) wächst polynomiell langsamer als $n^x$. | f(n) "≼" $\Theta(n^x)$<br>$\exists \varepsilon > 0$:<br>$f(n) \in O(n^{x-\varepsilon})$ | ① ☐ | $T(n) \in \Theta(n^x)$ | vor allem in den Blättern |
| f(n) wächst (ungefähr) gleich schnell wie $n^x$. | f(n) "≅" $\Theta(n^x)$<br>$\exists \varepsilon > 0$:<br>$f(n) \in \Theta(n^{x-\varepsilon} \cdot \log(n))$ | ② ☐ | $T(n) \in \Theta(n^x \cdot \log(n))$ | gleichmässig verteilt |
| f(n) wächst polynomiell schneller als $n^x$. | f(n) "≽" $\Theta(n^x)$<br>$\exists \varepsilon > 0$:<br>$f(n) \in \Omega(n^{x-\varepsilon})$ | ③ ☒ | $T(n) \in \Theta(f(n))$ | vor allem im Wurzelknoten |

## 4a Regularität für Fall ③ prüfen

Für eine geeignete Konstante c < 1 und eine genügend grosses $n > n_0$ gilt:

$$a \cdot f(n/b) \leq c \cdot f(n)$$

$$\mathbf{32 \cdot (n/4)^3 = 0.5 \cdot n^3} \leq \mathbf{0.5} \cdot \mathbf{n^3}$$

→ Die Gleichung ist erfüllt für c = 0.5 und beliebige n.

Regularität erfüllt? ☒ ja ☐ nein → *Abbruch / andere Methode*

## 5 Lösung aufschreiben

$T(n) \in \Theta(\mathbf{n^3})$