VL3: Lineare Gleichungssysteme

Notizen	☑
Type	Vorlesung
Unterlagen	
Woche	

▼ Gleichungssysteme und Lösbarkeit

Eine Menge von m Gleichungen mit n Variablen heisst Gleichungssystem. Ein Gleichungssystem heisst lösbar, wenn $\mathbb{L} \neq \{\}$. Gleichungssysteme mit gleicher Lösungsmenge heissen äquivalent.

▼ Lineares Gleichungssystem (LGS)

$A * x = b$

- Ist $b = 0$ heisst das LGS homogen, sonst inhomogen

▼ Erweiterte Koeffizientenmatrix

$A * x = b$ bzw $(A|b)$

▼ Matrix in expliziter Form

Eine Matrix in Zeilenstufenform liegt in expliziter Form vor, wenn

- jedes führende Element eine 1 ist und
- oberhalb führender Elemente alle Elemente gleich 0 sind.

$Ax = b$ ist in expliziter Form, wenn A in expliciter Form ist.

▼ Lösbarkeit LGS in expliziter Form

Ist A in expliziter Form mit Nullzeilen in Zeilen $i > r$, dann

- ist das LGS $Ax = b$ lösbar $\leftrightarrow b_i = 0$ für alle $i > r$
- kann man die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ von $Ax = b$ einfach bestimmen

- heisst $x \in \mathbb{L}$ Basislösung, wenn $x_j \neq 0$für höchstens r Komponenten

- Elementare Zeilenumformungen

  Sei $Ax = b$ ein LGS mit m Gleichungen und n Variablen. $\alpha \in \mathbb{R}$

  - Multipliziert man eine Zeile von $(A|b)$ mit $\alpha \neq 0$ oder
  - addiert man das α-fache einer Zeile von $(A|b)$ zu einer anderen,

  dann entsteht ein äquivalentes LGS.

  Sei $Ax = b$ ein LGS mit m Gleichungen und n Variablen, $\alpha \in \mathbb{R}$.

  Vertauscht man zwei Zeilen bon $(A|b)$, entsteht ein äquivalentes LGS.

- Steichen von Nullzeilen

  - Streicht man Nullzeilen von $(A|b)$, entsteht ein äquivalentes LGS.

- Affiner Raum

  $A = \{\vec{v}^0 + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \vec{v}^i | \alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^n$ mit 0

- Gleichheit affiner Räume

  $A = \{\vec{v}^0 + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \vec{v}^i | \alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $\vec{v}^0, \ldots, \vec{v}^m \in \mathbb{R}^n$

- Lösbarkeit eines LGS

  $Ax = b$ lösbar $\leftrightarrow b \in lin\{\vec{a}^1, \ldots, \vec{a}^n\}$

- Der Rang

  Maximale Anzahl linear unabhängiger Spaltenvektoren von A

- Eigenschaften des Rangs

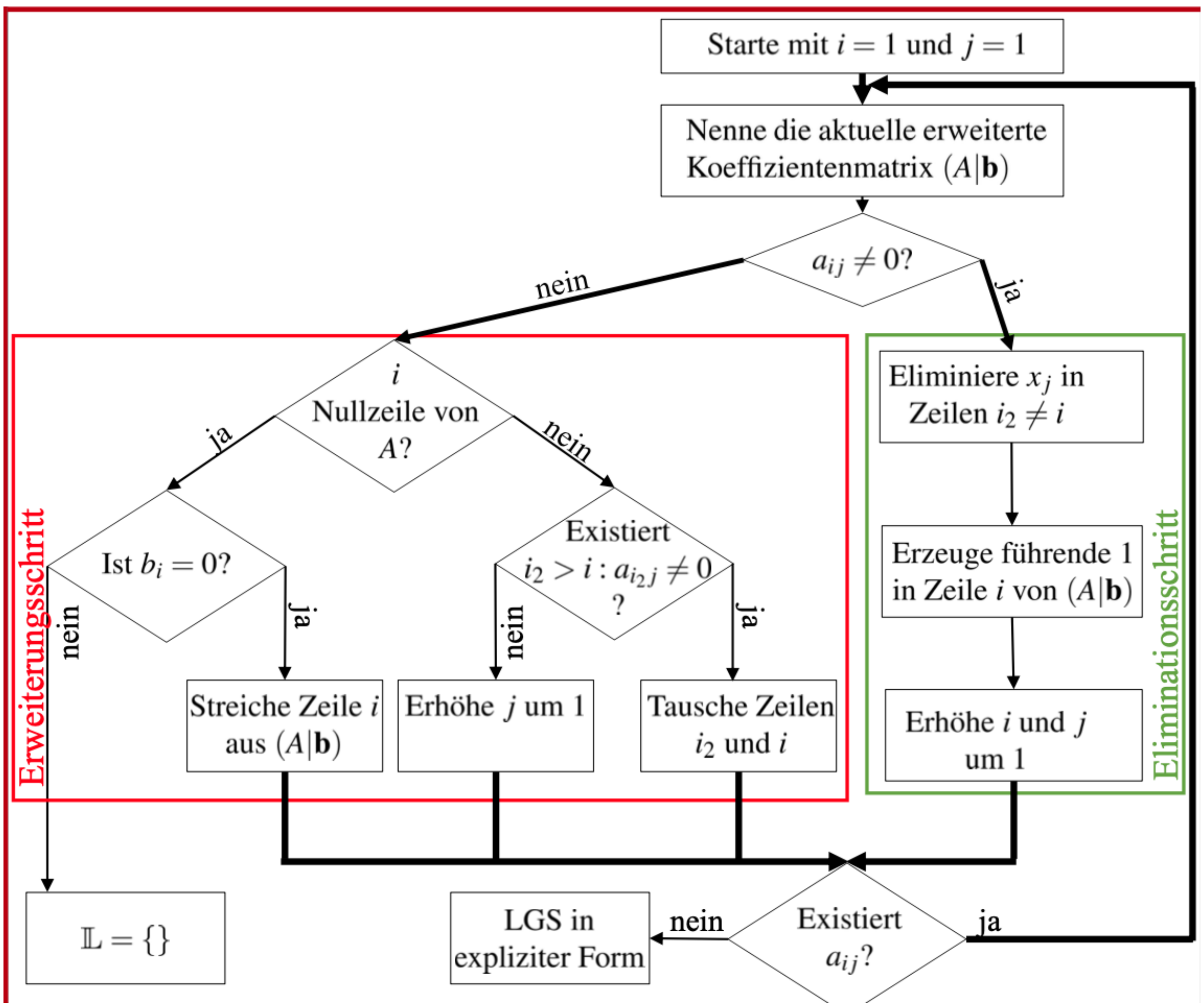
  Sei A eine n x n Matrix

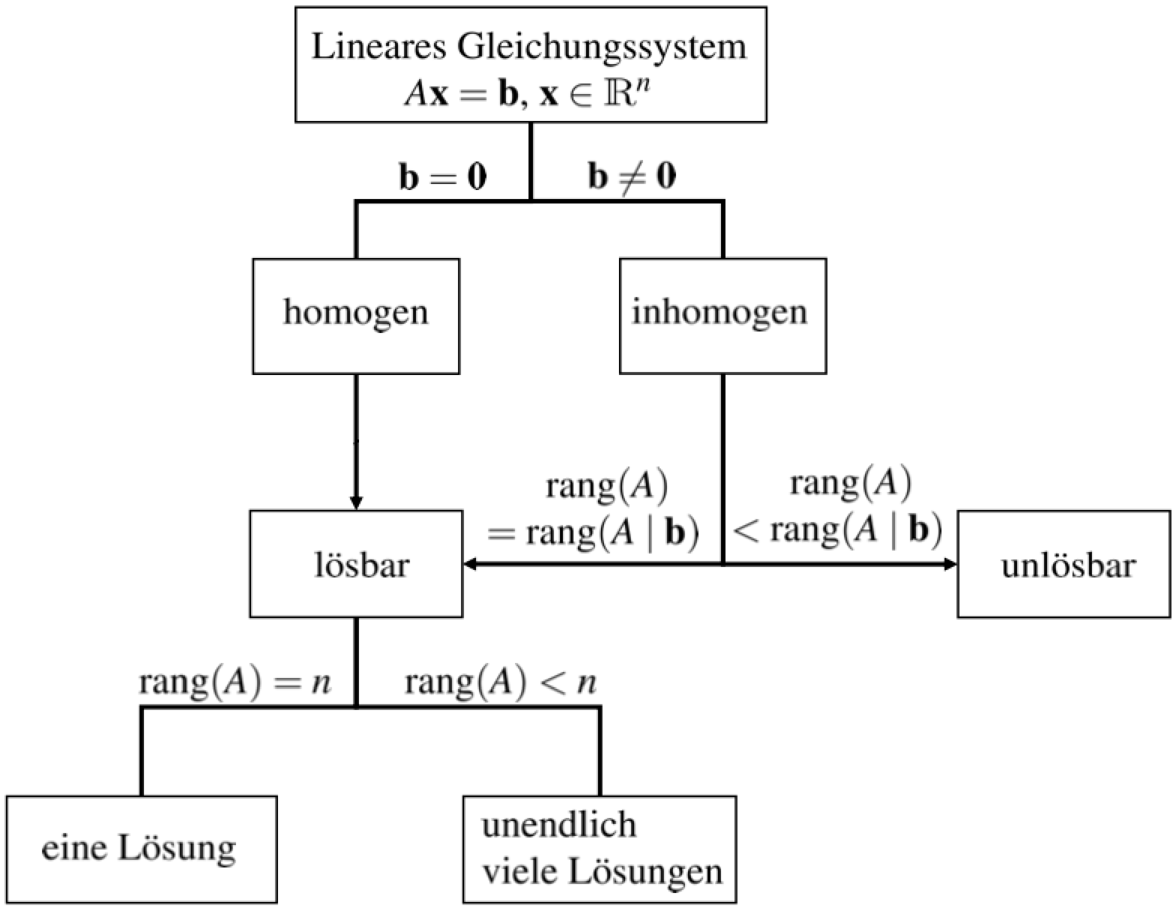
  - $rang(A) =$ maximale Anzahl linear unabhängiger Spaltenvektoren
  - $rang(A) =$ maximale Anzahl linear unabhängiger Zeilenvektoren
  - $rang(A) = rang(A^T) \leq min\{m, n\}$, A hat vollen Rang, wenn $rang(A) = min\{m, n\}$
  - $rang(A) = n \leftrightarrow$ alle Spaltenvektoren linear unabhängig
  - $rang(A) = m \leftrightarrow$ alle Zeilenvektoren linear unabhängig

▼ Berechnung des Rangs und Lösbarkeit

Ist $Ax = b$ äquivalent zu $\tilde{A}x = \tilde{b}$ und liegt $\tilde{A}$ in Zeilenstufenform vor mit genau r Zeilen, die keine Nullzeilen sind, dann gilt:

- $rang(A) = r$
- $\tilde{b}_i = 0$ für alle $i > r \Rightarrow$ LGS lösbar mit $n - r$ freien Variablen
- $\tilde{b}_i \neq 0$ für alle $i > r \Rightarrow$ LGS nicht lösbar




Lineares Gleichungssystem
$A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$
$\mathbf{b} = \mathbf{0}$
$\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$
homogen
inhomogen
$\text{rang}(A) = \text{rang}(A \mid \mathbf{b})$
$\text{rang}(A) < \text{rang}(A \mid \mathbf{b})$
lösbar
unlösbar
$\text{rang}(A) = n$
$\text{rang}(A) < n$
eine Lösung
unendlich viele Lösungen