SL01: Linearkombination

Notizen	☑
Type	Vorlesung
Unterlagen	SL01_Kapitel 6.pdf
Woche	Woche 1

Linearkombination

- Norm eines Vektors
  - $||\vec{v}|| = \sqrt{\vec{v}_1^2 + \vec{v}_2^2 + ... + \vec{v}_n^2}$
  - $\vec{0} =$ Nullvektor
  - $e^k = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, k-ter (kanonischer) Einheitsvektor
- Richtung eines Vektors
  - $\frac{\vec{v}}{||\vec{v}||}, \vec{v} \in \mathbb{R}^m, \vec{v} \neq 0$
  - Hat die Norm = 1
- Skalarprodukt
  - $(\vec{v}^1)^T \vec{v}^2 = \langle \vec{v}^1, \vec{v}^2 \rangle = \sum_{i=1}^m \vec{v}_i^1 \vec{v}_i^2$
- Orthogonal

  Zwei Vektoren sind orthogonal, wenn das Skalarprodukt Null ist.
- Linearkombination
  - $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}$, $\vec{v}^1, ..., \vec{v}^n \in \mathbb{R}^m$

- $\sum i=1^n \alpha_i \vec{v}^i = \alpha_1 \vec{v}^1 + ... + \alpha_n \vec{v}^n \in \mathbb{R}^m$

▼ Lineare abhänigkeit

$\vec{v}^1, ... \vec{v}^n \in \mathbb{R}^m\ ,\ n \geq 2$, heissen linear abhängig, wenn mindesten einer der Vektoren als Linearkombination der anderen darstellbar.

- $\vec{v}^1, \vec{v}^2 \neq 0$ linear abhängig $\iff$ es existiert $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $\vec{v}^1 = \alpha \vec{v}^2$
- $\vec{v}^1, \vec{v}^2 \neq 0$ orthogonal $\Rightarrow \vec{v}^1, \vec{v}^2$ linear unabhängig
- $\vec{v}^1, ..., \vec{v}^n \in \mathbb{R}^m$ linear unabhängig $\iff \alpha_1 = ... = \alpha_n = 0$ als einzige Lösung von $\alpha_1 \vec{v}^1 + ... + \alpha_n \vec{v}^n = 0$

▼ Lineare Hülle

- Menge alles Linearkombinationen
- $lin\{\vec{v}^1, ..., \vec{v}^n\} = \{\sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{v}^i |\ \alpha_1, ... \alpha_n \in \mathbb{R}^m\} \subseteq \mathbb{R}^m$

▼ Linearer Raum

$V \subseteq \mathbb{R}^m$, $V \neq \{\}$ heisst Linearer Raum oder Vektorraum, wenn:

- $\vec{v} \in V \Rightarrow \alpha \vec{v} \in V,\ \forall\ \alpha \in \mathbb{R}\ (\Rightarrow \vec{0} \in V)$
- $\vec{v}, \vec{w} \in V \Rightarrow \vec{v} + \vec{w} \in V,\ \forall\ \vec{v}, \vec{w} \in V$

$V = lin\{\vec{v}^1, ..., \vec{v}^n\}$ ist ein linearer Raum

▼ Erzeugenden System

Die Menge $\{\vec{v}^1, ... \vec{v}^n\}$ heisst Erzeugendensystem von V, wenn $V = lin\{\vec{v}^1, ..., \vec{v}^n\}$

▼ Basis

- $B = \{\vec{b}^1, \ldots, \vec{b}^n\}$ heisst Basis von V, wenn $\vec{b}^1, \ldots, \vec{b}^n$ ($n = dim(V)$) linear unabhängig sind und $lin\{\vec{b}^1, \ldots, \vec{b}^n\} = V$

▼ Dimension

- $n = dim(V)$, n bezogen auf die linear unabhängigen Vektoren

▼ Gerade, Ebene, Hyperebene

- Der lineare Raum $V \subseteq \mathbb{R}^m$ heisst

- Punkt, wenn $dim(V) = 0$
- Gerade, wenn $dim(V) = 1$
- Ebene, wenn $dim(V) = 2$
- Hyperebene, wenn $dim(V) = m - 1$

▼ Erzeugendensysteme und Basiswechsel

- ist $u = \alpha_1\vec{v}^1 + \dots + \alpha_i\vec{v}^i + \dots + \alpha_n\vec{v}^n$ mit $\alpha_i \neq 0$
    - $V = lin\{\vec{v}^1, \dots, \vec{v}^i, \dots, \vec{v}^n\} = lin\{\vec{v}^1, \dots, \vec{u}, \dots, \vec{v}^n\}$
- Ist zusätzlich $\{\vec{v}^1, \dots, \vec{v}^i, \dots, \vec{v}^n\}$ eine Basis von V
    - $\{\vec{v}^1, \dots, \vec{u}, \dots, \vec{v}^n\}$ eine Basis von V

▼ Kanonische Basis

- Die Basis $\{\vec{e}^1, \dots, \vec{e}^m\}$ des $\mathbb{R}^m$ heisst kanonische Basis des $\mathbb{R}^m$

▼ Basis des euklidischen Raums

- $\vec{v}^1, \dots, \vec{v}^m \in \mathbb{R}^m$ linear unabhängig $\Rightarrow lin\{\vec{v}^1, \dots, \vec{v}^m\} = \mathbb{R}^m$

▼ Maximale Anzahl linear unabhängiger Vektoren

- Für $n > m$ sind $\vec{v}^1, \dots, \vec{v}^n \in \mathbb{R}^m$ stets linear abhängig

▼ $m \times n$ Matrix

- Seien $m, n \in \mathbb{N}$ und $a_{1,1}, \dots, a_{1,n}, a_{2,1}, \dots, a_{m,1}, \dots, a_{m,n} \in \mathbb{R}$
- $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{i=1,\dots,m,\ j=1,\dots n}$

▼ Transponierte

- $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix} => A^T = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & \dots & a_{m,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & \dots & a_{m,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1,n} & a_{2,n} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix}$

▼ Quadratische Matrix

- $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}$
- symmetrische Matrix, wenn $a_{i,j} = a_{j,i} \; \forall \; i, j = 1, \dots, n$
- Diagonalmatrix, wenn $a_{i,j} = 0 \; \forall \; i \neq j$
- Einheitsmatrix, wenn $a_{i,j} = 1 \; \forall \; i, \; a_{i,j} = 0 \; \forall \; i \neq j$

▼ Matrix-Vektor-Multiplikation

- $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n a_{1,k} x_k \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^n a_{m,k} x_k \end{pmatrix}$

▼ Matrix-Multiplikation

- $\begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} b_{1,1} & \dots & b_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n,1} & \dots & b_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n a_{1,k} b_{k,1} & \dots & \sum_{k=1}^n a_{1,k} b_{k,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{k=1}^n a_{m,k} b_{k,1} & \dots & \sum_{k=1}^n a_{m,k} b_{k,p} \end{pmatrix}$

▼ Nullzeilen, -spalten und die Nullmatrix

Man spricht von einer

- **Nullzeile,** wenn alle Elemente der Zeile Null sind
- **Nullspalte**, wenn alle Elemente der Spalte Null sind
- **Nullmatrix**, wenn alle Spalten Nullspalten sind

▼ Produkt einer Konstanten mit einer Matrix

$$\alpha A = \begin{pmatrix} \alpha a_{1,1} & \dots & \alpha a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{n,1} & \dots & \alpha a_{n,n} \end{pmatrix}$$

▼ Regeln der Matrizenmultiplikation

Sei A eine $m \times n$-Matrix, B einer $n \times p$-Matrix, C einer $p \times q$-Matrix, $\alpha \in \mathbb{R}$

- $(A * B)^T = B^T * A^T$
- $A * (B * C) = (A * B) * C$
- $A * \alpha * B = \alpha * A * B$
- Ist I die Einheitsmatrix passender Ordnung, so gilt $A * I = A$

▼ Zeilenstufenform

Die Matrix lieget in Zeilenstufenform vor, wenn

- Nullzeilen unterhalb aller Zeilen stehen, die keine Nullzeilen sind und
- in jedem Paar von zwei Zeilen, die keine Nullzeilen sind, das führende Element der obern Zeile links von dem führenden Element der unteren Zeile steht.

▼ Lineare Unabhängigkeit von Zeilenvektor

Alle Zeilenvektoren einer Matrix in Zeilenstufenform, die keine Nullvektoren sind, sind linear unabhängig.