Chapitre 18 - Les graphes

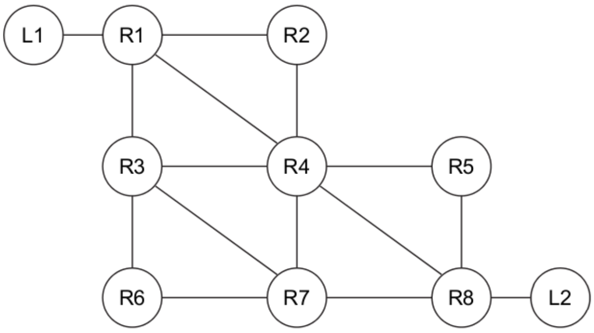
Objectifs :

- ▷ Modéliser des situations sous forme de graphes.
- ▷ Écrire les implémentations d'un graphe : matrice d'adjacence, liste de successeurs/prédécesseurs.
- ▷ Passer d'une représentation à une autre.

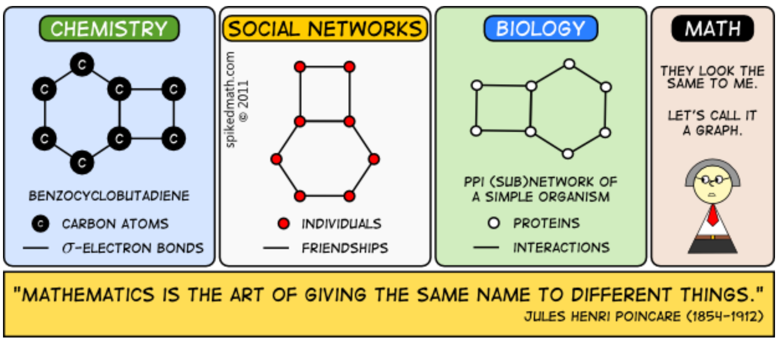
1 Introduction

Le concept de graphe permet de résoudre de nombreux problèmes en mathématiques comme en informatique. C'est un outil de représentation très courant, et nous l'avons déjà rencontré à plusieurs reprises, en particulier lors de l'étude de réseaux tels que :

— les réseaux informatiques,
— les réseaux sociaux,
— les réseaux de transport



Une multitude de problèmes concrets d'origines très diverses peuvent donner lieu à des modélisations par des graphes : c'est donc une structure essentielle en sciences, qui requiert un formalisme mathématique particulier que nous allons découvrir.



L'étude de la théorie des graphes est un champ très vaste des mathématiques : nous allons surtout nous intéresser à l'implémentation en Python d'un graphe et à différents problèmes algorithmiques qui se posent dans les graphes.

2 Notion de graphe

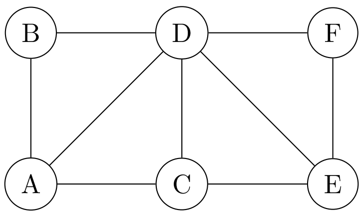
Imaginez un réseau social ayant 6 abonnés (`A`, `B`, `C`, `D`, `E` et `F`) où :

— A est ami avec B, C et D
— B est ami avec A et D
— C est ami avec A, E et D
— D est ami avec tous les autres abonnés
— E est ami avec C, D et F
— F est ami avec E et D

On peut représenter ce réseau social par un schéma où :

— chaque abonné est représenté par un cercle avec son nom.
— chaque relation *"X est ami avec Y"* par un segment de droite reliant X et Y
— *"X est ami avec Y"* et *"Y est ami avec X"* sont représentés par le même segment de droite.

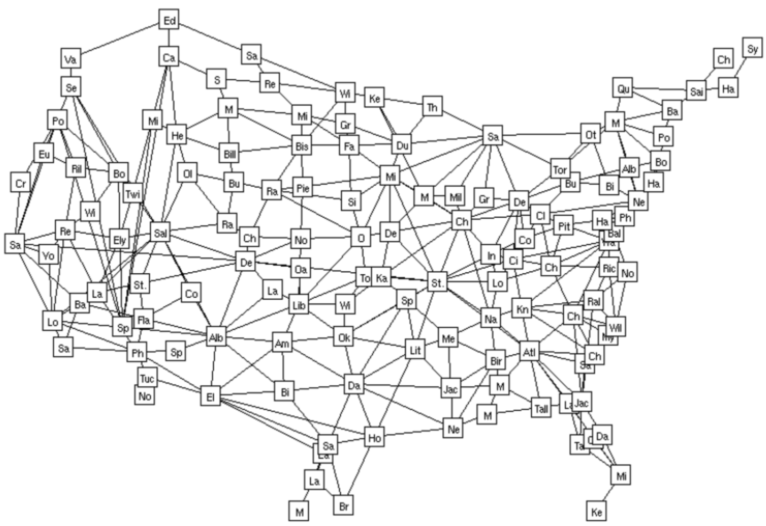
Voici ce que cela donne avec le réseau social décrit ci-dessus :



Ce genre de figure s'appelle un **graphe**.

Les cercles sont appelés des **sommets** et les segments de droites des **arêtes**.

Comme vu précédemment, les graphes sont des objets mathématiques très utilisés, notamment en informatique (schématisation des rues d'une ville, de cartes GPS ou de réseaux informatiques).



On peut utiliser des outils en ligne pour dessiner des graphes.

Exemple : https://csacademy.com/app/graph_editor

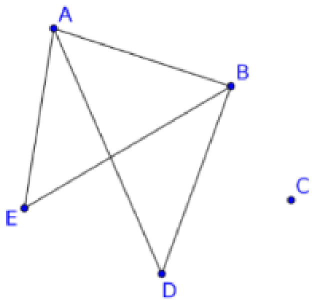
3 Définitions et terminologie

A retenir !

On appelle graphe la donnée d'un ensemble de points appelés sommets et d'un ensemble de lignes appelées arêtes qui relient certains sommets entre eux.

- Le nombre de sommets d'un graphe s'appelle l'**ordre du graphe**.
- Deux sommets reliés entre eux par une arête sont dits **adjacents**.
- Le **degré d'un sommet** est le nombre d'arêtes issues de ce sommet.
- Un sommet qui n'est adjacent à aucun autre sommet du graphe est dit **isolé**.
- Un graphe est dit **complet** si deux sommets quelconques distincts sont toujours adjacents. Autrement dit, tous les sommets sont reliés deux à deux par une arête.

4 Exemples de graphes

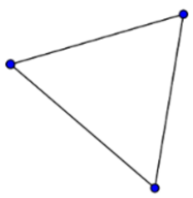


Le graphe ci-contre est d'ordre 5 car il possède 5 sommets.

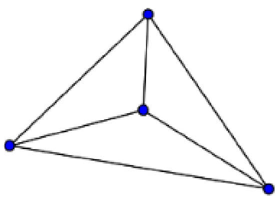
Les sommets A et B sont adjacents.

Les sommets D et E ne sont pas adjacents.

Le sommet C est isolé.



Le graphe ci-contre est complet d'ordre 3.



Le graphe ci-contre est complet d'ordre 4.

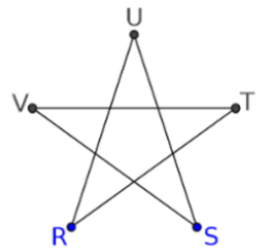
Exercice 1 : *Application*

1. Donner le degré des sommets du graphe sur le réseau social de l'introduction.

2. Donner son ordre.

3. Ce graphe est-il complet ?

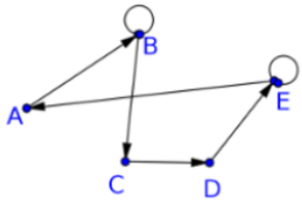
5 Différents types de graphes



Un graphe peut être **orienté** ou **non-orienté**.

Dans un **graphe non-orienté**, chaque arête peut être parcourue dans les deux sens.

Dans un **graphe orienté**, chaque arête ne peut être parcourue que dans un seul sens indiqué par une flèche.



Un graphe (orienté ou non-orienté) peut contenir des **boucles** c'est-à-dire une arête dont l'origine et l'extrémité correspondent au même sommet (on a par exemple une boucle B sur la représentation précédente).

6 Propriétés de la somme des degrés

Propriété n°1

Le nombre d'arêtes est égal à la moitié de la somme des degrés des sommets.

Ce résultat s'explique assez facilement : en ajoutant les degrés de chaque sommet (c'est-à-dire le nombre d'arêtes issues de ce sommet), on comptabilise deux fois chaque arête (une fois avec le sommet d'une extrémité et une seconde fois avec le sommet de l'autre extrémité de l'arête).

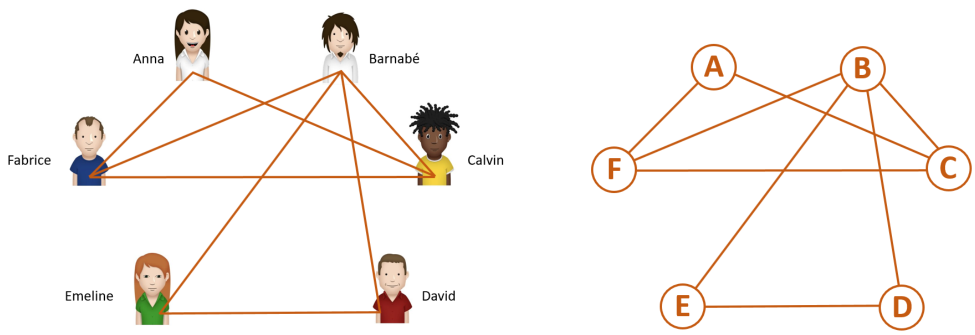
On déduit donc de cette propriété que :

Propriété n°2

La somme des degrés des sommets est nécessairement paire et donc que le nombre de sommets de degré impair est pair.

Exercice 2 : *Application*

Vérifier ces deux propriétés sur le graphe du réseau social ci-dessous.



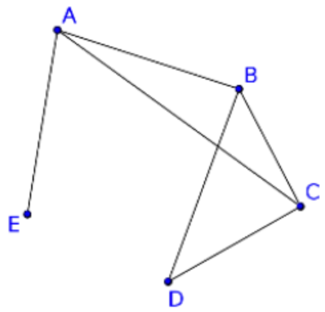
7 Matrice d'adjacence

On peut représenter un graphe par une matrice.

Considérons un graphe d'ordre n ($n \in \mathbb{N}^*$). On numérote ces sommets de 1 à n.

Définition

On appelle **matrice d'adjacence** associée à ce graphe la matrice A dont le terme a_{ij} vaut 1 si les sommets sont reliés par une arête et 0 sinon.



En numérotant les sommets de ce graphe par ordre alphabétique, la matrice d'adjacence s'écrit donc comme suit :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Propriété

Dans le cas d'un graphe non orienté, les coefficients a_{ij} et a_{ji} sont égaux pour tout i et j compris entre 1 et n.

Autrement dit, la matrice d'adjacence est **symétrique**.

Dans le cas d'un graphe orienté, la matrice d'adjacence n'est pas a priori symétrique.

Exercice 3 : *Application*

1. Compléter la matrice d'adjacence ci-dessous à partir du réseau social de l'introduction.

$$\begin{pmatrix} \\ \\ \\ \\ \end{pmatrix}$$

2. Dessiner le graphe à partir de la matrice d'adjacence ci-dessous.

$$\begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \\ g \\ h \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} a & b & c & d & e & f & g & h \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \rightarrow$$

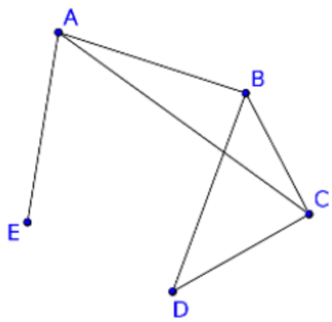
8 Chaîne et cycle

Considérons un graphe quelconque (orienté ou non orienté).

Vocabulaire

- On appelle **chaîne** toute succession d'arêtes dont l'extrémité de l'une (sauf la dernière) est l'origine de la suivante.
- Le nombre d'arêtes qui composent une chaîne est appelé **longueur de la chaîne**.
- On appelle **chaîne fermée** toute chaîne dont l'origine et l'extrémité coïncident.
- On appelle **cycle** toute chaîne fermée dont les arêtes sont **toutes distinctes**.

Exemples :



Dans le graphe ci-contre :

E-A-C-B est une chaîne de longueur 3.

E-A-C-B-A-E est une chaîne fermée de longueur 5. Ce n'est pas un cycle car l'arête A-E est parcourue deux fois.

D-B-A-C-D est un cycle de longueur 4.

Comment dénombrer le nombre de chaînes de longueur k ?

Considérons un graphe d'ordre n (où $n \in \mathbb{N}^*$). On numérote ses sommets de 1 à n.

En prenant l'exemple du graphe ci-dessus, on numérote les sommets de ce graphe par ordre alphabétique, sa matrice d'adjacence s'écrit :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matrice de chaînes de longueur k

Le terme a_{ij} de la matrice A_k (où $k \in \mathbb{N}^*$) est égal au nombre de chaînes de longueur k reliant les sommets i et j dans ce graphe.

Et on obtient :

$$A^3 = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 6 & 2 & 3 \\ 6 & 4 & 5 & 5 & 1 \\ 6 & 5 & 4 & 5 & 1 \\ 2 & 5 & 5 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Il existe donc 5 chaînes de longueur 3 reliant le sommet B au sommet C car : $a_{23} = a_{32} = 5$

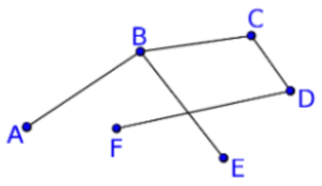
Exercice 4 : *Application*

Déterminer le nombre de chaînes de longueur 3 reliant A et F pour le graphe du réseau social de l'introduction.

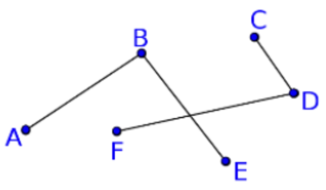
9 Notion de connexité

Définition

Un graphe est dit **connexe** si deux de ses sommets quelconques sont toujours reliés par une chaîne.



Le graphe ci-contre est connexe.



Le graphe ci-contre n'est pas connexe.

Définition

Un graphe est **complet** lorsque chacun de ses sommets est relié à tous les autres.

Un graphe complet est donc nécessairement connexe mais la réciproque est fausse comme le montre l'exemple ci-dessus.

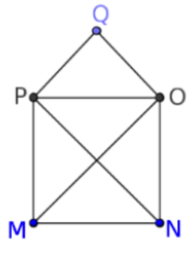
Exercice 5 : *Application*

Pour le graphe du réseau social de l'introduction, que peut-on dire de sa connexité ?

10 Chaînes et cycles eulériens

Définition

On appelle **chaîne eulérienne** d'un graphe toute chaîne qui contient une fois et une seule toutes les arêtes du graphe.



La chaîne M-P-Q-O-M-N-P-O-N est une chaîne eulérienne.

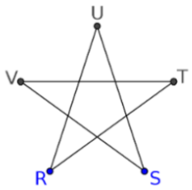
En effet, cette chaîne contient 8 arêtes toutes distinctes.

Exercice 6 : *Application*

Pour le graphe du réseau social de l'introduction, indiquer une chaîne eulérienne (si c'est possible).

Définition

On appelle **cycle eulérien** une chaîne eulérienne fermée.



Le cycle R-U-S-V-T-R est un cycle eulérien.

Exercice 7 : *Application*

Pour le graphe du réseau social de l'introduction, indiquer une cycle eulérien (si c'est possible).

Théorème d'Euler

Soit G un graphe connexe.

G admet un **cycle eulérien** si et seulement si tous les sommets de G sont de degré pair.

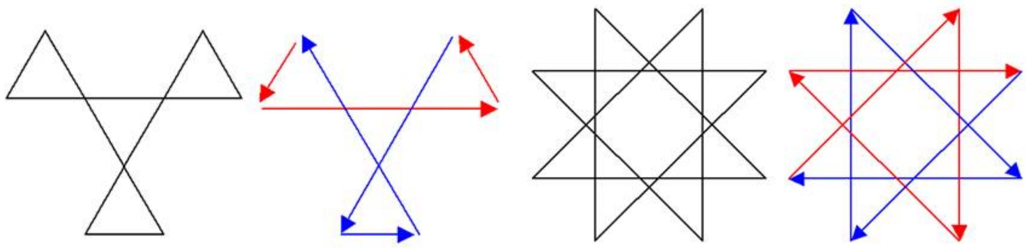
G admet une **chaîne eulérienne** (non fermée) si et seulement si le nombre de sommets de degré impair dans G est 2.

Si tel est le cas, les extrémités de la chaîne eulérienne sont les deux sommets de degré impair.

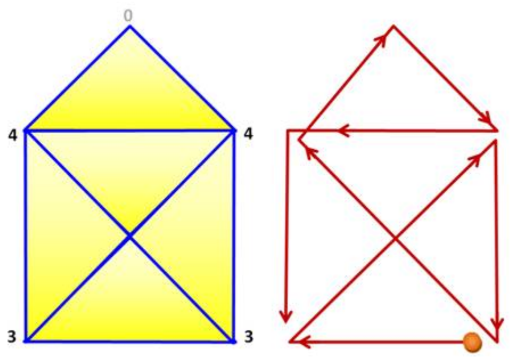
Pour en savoir plus :

Il existe ainsi de nombreuses énigmes basées sur la théorie des graphes.

Par exemple, comment faire pour dessiner ces deux figures sans lever le crayon ?



Il existe aussi le problème classique du dessin de l'enveloppe ou de la maison, parfois appelé *maison de Saint-Nicolas* (de l'allemand *« Haus vom Nikolaus »*), est un jeu mathématique qui consiste à dessiner une enveloppe (ou une maison) constituée de 8 segments sans lever le crayon ni repasser sur un trait déjà dessiné.



11 Exercices

Exercice 8 : *Réseau social*

Soit un ensemble d'amis connectés sur un réseau social quelconque. Voici les interactions qu'on a recensées :

— André est ami avec Béa, Charles, Estelle et Fabrice,
— Béa est amie avec André, Charles, Denise et Héloïse,
— Charles est ami avec André, Béa, Denise, Estelle, Fabrice et Gilbert,
— Denise est amie avec Béa, Charles et Estelle,
— Estelle est amie avec André, Charles et Denise,
— Fabrice est ami avec André, Charles et Gilbert,
— Gilbert est ami avec Charles et Fabrice,
— Héloïse est amie avec Béa.

1. Représenter le graphe des relations dans ce réseau social (on désignera chaque individu par l'initiale de son prénom). Il est possible de faire en sorte que les arêtes ne se croisent pas !
2. Donner la matrice d'adjacence de ce graphe.

Exercice 9 : *Matrices d'adjacence => Graphes*

Construire les graphes correspondants aux matrices d'adjacence suivantes :

1. $$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. $$M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Attention, ici il s'agit d'un graphe pondéré. Les nombres se trouvant en a_{ij} indiquent les poids des liaisons (arêtes ou arcs) entre les sommets d'indice i et j.

$$M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 10 & 50 & 12 \\ 5 & 0 & 10 & 0 & 0 \\ 10 & 10 & 0 & 8 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 100 \\ 12 & 0 & 0 & 100 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 10 : *Listes d'adjacence*

On associe à chaque sommet sa liste des voisins (c'est-à-dire les sommets adjacents). On utilise pour cela un dictionnaire dont les clés sont les sommets et les valeurs les listes des voisins.

Dans le cas d'un graphe orienté on associe à chaque sommet la liste des successeurs (ou bien des prédécesseurs, au choix).

Construire les graphes correspondants aux listes d'adjacence suivantes.

1. Dictionnaire 1 :

```python
G1 = {
     'A':['B','C'],
     'B':['A','C','E','F'],
     'C':['A','B','D'],
     'D':['C','E'],
     'E':['B','D','F'],
     'F':['B','E']
}
```

2. Dictionnaire 2 :

```python
G2 = {
     'A':['B'],
     'B':['C', 'E'],
     'C':['B', 'D'],
     'D':[],
     'E':['A']
}
```

Exercice 11 : *Graphe d'un réseau électrique*

Un de vos amis travaille pour un distributeur d'électricité.

Il doit proposer à son supérieur une représentation du réseau reliant différentes villes. Comme il n'y arrive pas trop, il voudrait que vous la lui fassiez.

Pour simplifier le problème, il a déjà renommé les villes en A, B, C, D, E et F. De plus, il vous donne les informations suivantes :

- la ville A est reliée par un réseau électrique aux villes B, E et F,
- la ville B est reliée par un réseau électrique aux villes A, C et D,
- la ville C est reliée par un réseau électrique aux villes B, D, E et F,
- la ville D est reliée par un réseau électrique aux villes B, C et F,
- la ville E est reliée par un réseau électrique aux villes A, C et F,
- la ville F est relié par un réseau électrique aux villes A, C, D et E.

1. Proposer un graphe qui modélise la situation.
2. Ce graphe est-il complet ? Pourquoi ?

Exercice 12 : *Représentation d'un graphe non orienté*

Voici un ensemble des relations :

- A est ami avec tout le monde sauf G,
- B est ami avec A, D et H,
- C est ami avec A, F, G et H,
- D est ami avec A, B et H,
- E est ami avec A et H,
- F est ami avec A et C,
- G est ami avec C et H,
- H est ami avec A, B, C, D, E et G.

1. Représenter ce graphe et vérifier qu'il est non orienté.
2. Implémenter ce graphe sous la forme d'un dictionnaire de liste dans lequel chaque clé représente le nœud étudié et les sommets adjacents sont représentés sous la forme d'une liste.
3. Écrire la matrice d'adjacence et vérifier qu'elle est symétrique (on utilisera l'ordre alphabétique pour indexer les nœuds).
4. Implémenter la matrice en Python sous la forme d'une liste de listes.