Einführung in die Quantenrechnung
Bits und Qubits

Brian Benjamin Pomerantz und Henry Sebastian Graßhorn Gebhardt

P&GG Monotechnische Anstalt

2021 März 20 und 2021 April

Outline

1. Einfache Computadoras
   - Mathematik
   - Architektur
2. Computadora Cuántica: Eine schwarze Kunst
   - Polarisationsexperiment
   - Vektoren
   - Messungen und Wahrscheinlichkeiten

Outline

1. Einfache Computadoras
   - Mathematik
   - Architektur

2. Computadora Cuántica: Eine schwarze Kunst
   - Polarisationsexperiment
   - Vektoren
   - Messungen und Wahrscheinlichkeiten

Outline

1. Einfache Computadoras
   - Mathematik
   - Architektur
2. Computadora Cuántica: Eine schwarze Kunst
   - Polarisationsexperiment
   - Vektoren
   - Messungen und Wahrscheinlichkeiten

Binäre Zahlen

In decimal notation,

$$1572_{10} = 1 \times 10^3 +$$

Binäre Zahlen

In decimal notation,

$$1572_{10} = 1 \times 10^3 + 5 \times 10^2 +$$

Binäre Zahlen

In decimal notation,

$$1572_{10} = 1 \times 10^3 + 5 \times 10^2 + 7 \times 10^1 +$$

Binäre Zahlen

In decimal notation,

$$1572_{10} = 1 \times 10^3 + 5 \times 10^2 + 7 \times 10^1 + 2 \times 10^0$$

Binäre Zahlen

In decimal notation,

$$1572_{10} = 1 \times 10^3 + 5 \times 10^2 + 7 \times 10^1 + 2 \times 10^0$$

From binary to decimal,

$$\begin{aligned} 1001101_2 &= 1 \times 2^6 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^0 \\ &= 64 + 8 + 4 + 1 \\ &= 77_{10} \end{aligned}$$

Binäre Zahlen

In decimal notation,

$$1572_{10} = 1 \times 10^3 + 5 \times 10^2 + 7 \times 10^1 + 2 \times 10^0$$

From binary to decimal,

$$\begin{aligned} 1001101_2 &= 1 \times 2^6 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^0 \\ &= 64 + 8 + 4 + 1 \\ &= 77_{10} \end{aligned}$$

Going from decimal to binary notation,

$$\begin{aligned} 27_{10} &= 16 + 8 + 2 + 1 \\ &= 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 \\ &= 11011_2 \end{aligned}$$

Powers von zwei

$$
\begin{aligned}
2^0 &= 1 && = 000000001_2 \\
2^1 &= \\
2^2 &= \\
2^3 &= \\
2^4 &= \\
2^5 &= \\
2^6 &= \\
2^7 &= \\
2^8 &=
\end{aligned}
$$

Powers von zwei

$$
\begin{aligned}
2^0 &= 1 && = 000000001_2 \\
2^1 &= 2 && = 000000010_2 \\
2^2 &= \\
2^3 &= \\
2^4 &= \\
2^5 &= \\
2^6 &= \\
2^7 &= \\
2^8 &=
\end{aligned}
$$

Powers von zwei

$$
\begin{aligned}
2^0 &= 1 & &= 000000001_2 \\
2^1 &= 2 & &= 000000010_2 \\
2^2 &= 4 & &= 000000100_2 \\
2^3 &= \\
2^4 &= \\
2^5 &= \\
2^6 &= \\
2^7 &= \\
2^8 &=
\end{aligned}
$$

Powers von zwei

$$
\begin{aligned}
2^0 &= 1 && = 000000001_2 \\
2^1 &= 2 && = 000000010_2 \\
2^2 &= 4 && = 000000100_2 \\
2^3 &= 8 && = 000001000_2 \\
2^4 &= \\
2^5 &= \\
2^6 &= \\
2^7 &= \\
2^8 &=
\end{aligned}
$$

Powers von zwei

$$2^0 = 1 \qquad = 000000001_2$$
$$2^1 = 2 \qquad = 000000010_2$$
$$2^2 = 4 \qquad = 000000100_2$$
$$2^3 = 8 \qquad = 000001000_2$$
$$2^4 = 16 \qquad = 000010000_2$$
$$2^5 =$$
$$2^6 =$$
$$2^7 =$$
$$2^8 =$$

Powers von zwei

$$
\begin{aligned}
2^0 &= 1 && = 000000001_2 \\
2^1 &= 2 && = 000000010_2 \\
2^2 &= 4 && = 000000100_2 \\
2^3 &= 8 && = 000001000_2 \\
2^4 &= 16 && = 000010000_2 \\
2^5 &= 32 && = 000100000_2 \\
2^6 &= \\
2^7 &= \\
2^8 &=
\end{aligned}
$$

Powers von zwei

$$
\begin{aligned}
2^0 &= 1 & &= 000000001_2 \\
2^1 &= 2 & &= 000000010_2 \\
2^2 &= 4 & &= 000000100_2 \\
2^3 &= 8 & &= 000001000_2 \\
2^4 &= 16 & &= 000010000_2 \\
2^5 &= 32 & &= 000100000_2 \\
2^6 &= 64 & &= 001000000_2 \\
2^7 &= & & \\
2^8 &= & &
\end{aligned}
$$

Powers von zwei

$$
\begin{aligned}
2^0 &= 1 && = 000000001_2\\
2^1 &= 2 && = 000000010_2\\
2^2 &= 4 && = 000000100_2\\
2^3 &= 8 && = 000001000_2\\
2^4 &= 16 && = 000010000_2\\
2^5 &= 32 && = 000100000_2\\
2^6 &= 64 && = 001000000_2\\
2^7 &= 128 && = 010000000_2\\
2^8 &=
\end{aligned}
$$

Powers von zwei

$$
\begin{aligned}
2^0 &= 1 &&= 000000001_2\\
2^1 &= 2 &&= 000000010_2\\
2^2 &= 4 &&= 000000100_2\\
2^3 &= 8 &&= 000001000_2\\
2^4 &= 16 &&= 000010000_2\\
2^5 &= 32 &&= 000100000_2\\
2^6 &= 64 &&= 001000000_2\\
2^7 &= 128 &&= 010000000_2\\
2^8 &= 256 &&= 100000000_2
\end{aligned}
$$

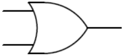
Outline

1. Einfache Computadoras
   - Mathematik
   - Architektur
2. Computadora Cuántica: Eine schwarze Kunst
   - Polarisationsexperiment
   - Vektoren
   - Messungen und Wahrscheinlichkeiten

Logic Gates

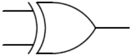
AND

A	B	Output
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1



OR

A	B	Output
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

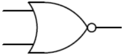


XOR

A	B	Output
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

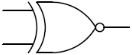
NAND

A	B	Output
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0



NOR

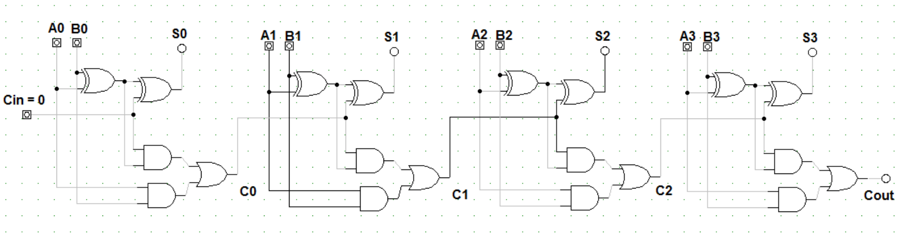
A	B	Output
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0



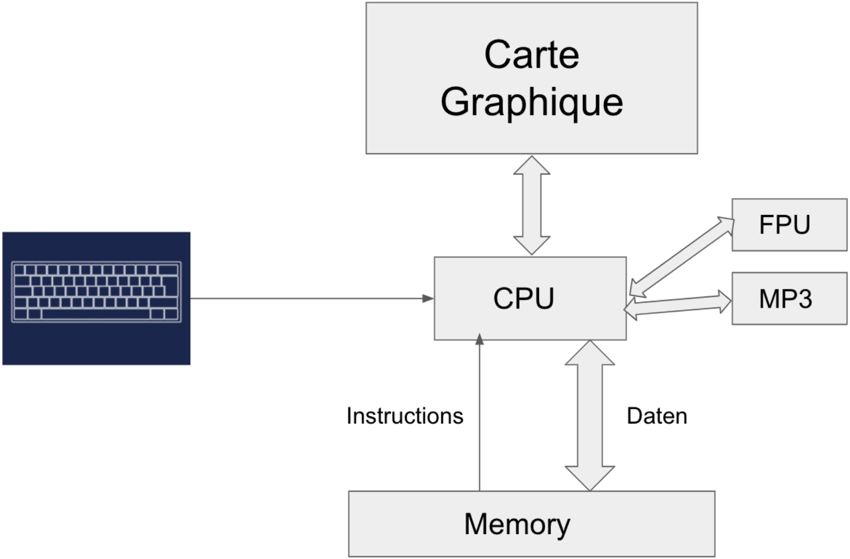
XNOR

A	B	Output
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

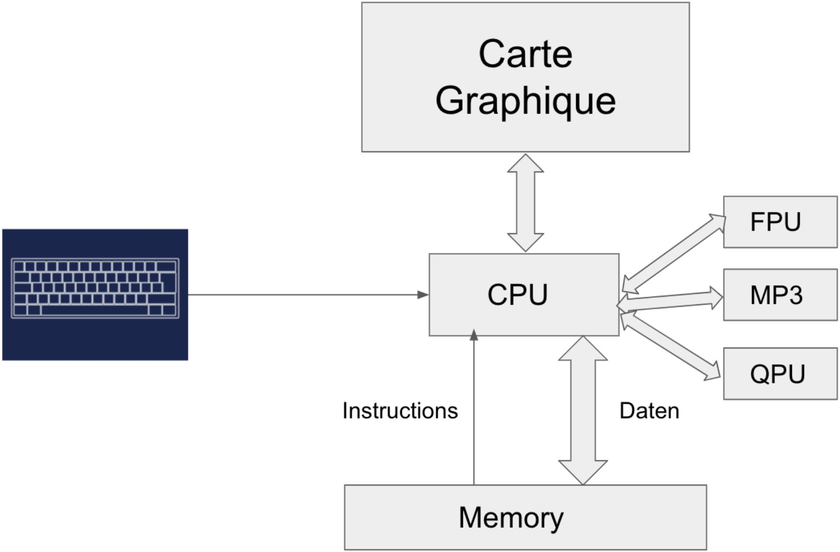
Adder



Computer Architektur



Computer Architektur



Outline

1. Einfache Computadoras
   - Mathematik
   - Architektur
2. Computadora Cuántica: Eine schwarze Kunst
   - Polarisationsexperiment
   - Vektoren
   - Messungen und Wahrscheinlichkeiten

Outline

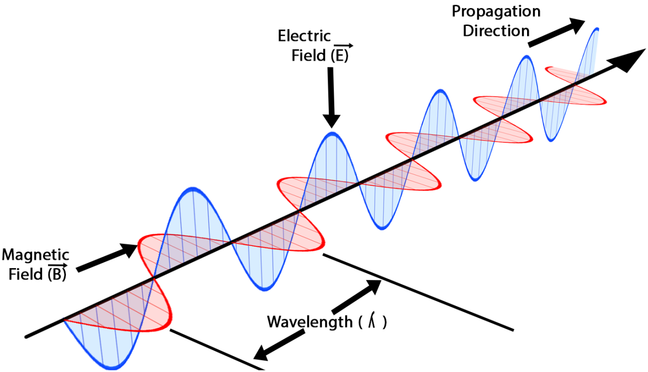
1 Einfache Computadoras
- Mathematik
- Architektur

2 Computadora Cuántica: Eine schwarze Kunst
- Polarisationsexperiment
- Vektoren
- Messungen und Wahrscheinlichkeiten

A QPU operates on Qubits instead of Bits

- QPU: Quantum Processing Unit
- Bits: 0, 1
- Qubits: $|0\rangle$, $|1\rangle$, and superpositions thereof

Light is a wave



Polarization Experiment

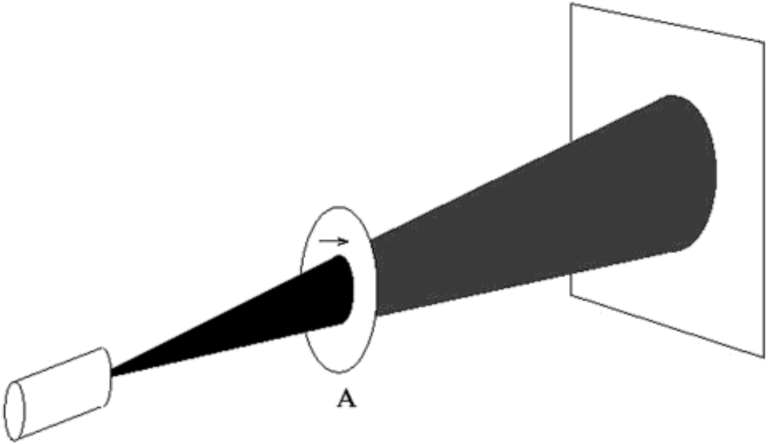


Figure 2.1
Single polaroid attenuates unpolarized light by 50 percent.

Polarization Experiment

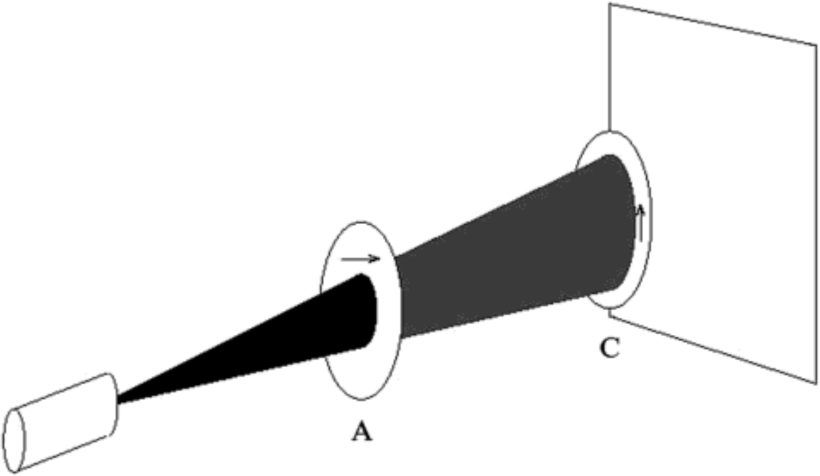


Figure 2.2
Two orthogonal polaroids block all photons.

Polarization Experiment

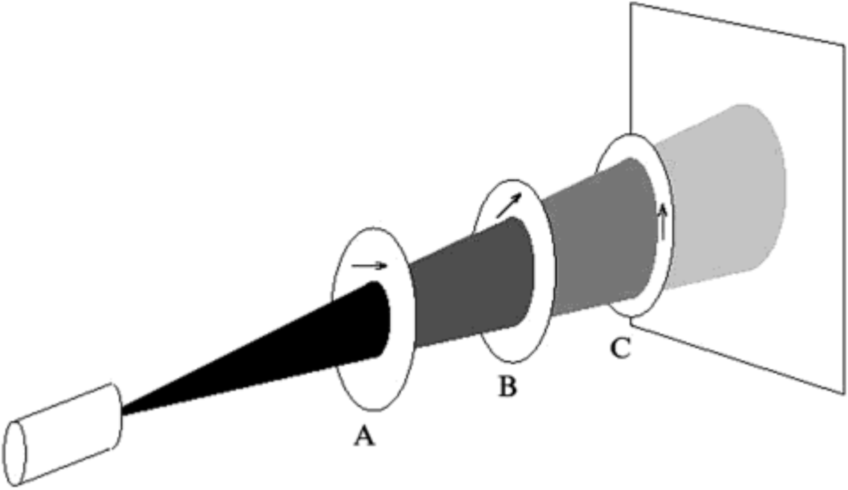


Figure 2.3
Inserting a third polaroid allows photons to pass.

Outline

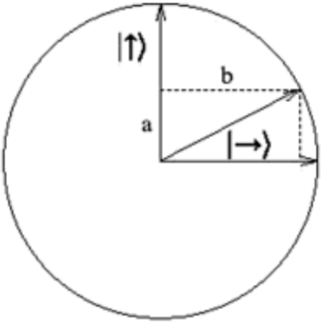
1 Einfache Computadoras
- Mathematik
- Architektur

2 Computadora Cuántica: Eine schwarze Kunst
- Polarisationsexperiment
- Vektoren
- Messungen und Wahrscheinlichkeiten

Vektoren

Alle Polarisationsrichtungen können durch zwei Vektoren dargestellt werden:

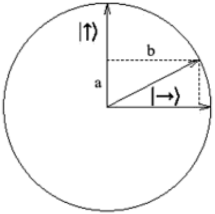
$$|\psi\rangle = a\,|{\rightarrow}\rangle + b\,|{\uparrow}\rangle$$



Die Notation wird Bra-ket Notation genannt.

Vektoren

$$|\psi\rangle = a\,|{\rightarrow}\rangle + b\,|{\uparrow}\rangle$$



Beispiele:

$$|45^\circ\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\,|{\rightarrow}\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\,|{\uparrow}\rangle$$
$$|135^\circ\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}}\,|{\rightarrow}\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\,|{\uparrow}\rangle$$
$$|30^\circ\rangle = \frac{1}{2}\,|{\rightarrow}\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2}\,|{\uparrow}\rangle$$
$$|\theta\rangle = \sin\theta\,|{\rightarrow}\rangle + \cos\theta\,|{\uparrow}\rangle$$

Inner Product

$$\begin{aligned} |\psi\rangle \cdot |\varphi\rangle &= (\langle\psi|)\,(|\varphi\rangle) \\ &= \langle\psi|\varphi\rangle \\ &= \langle\varphi|\psi\rangle^* \end{aligned}$$

if

$$|\psi\rangle = a\,|{\rightarrow}\rangle + b\,|{\uparrow}\rangle$$

where a, $b \in \mathbb{C}$, then

$$\langle\psi| = a^*\,\langle{\rightarrow}| + b^*\,\langle{\uparrow}|$$

wobei a^* ist die konjugiert komplexe Zahl von a und
wobei $\langle\psi|$ is the Dual Vector of $|\psi\rangle$

Orthonormality

$|\psi\rangle$ is orthogonal to $|\varphi\rangle$ iff $\langle\psi|\varphi\rangle = 0$.

$|\psi\rangle$ is normalized iff $\langle\psi|\psi\rangle = 1$.

A basis is orthonormal iff $\langle\psi|\varphi\rangle = \delta^{\mathrm{K}}_{\psi\varphi}$ for basis vectors $|\psi\rangle$ and $|\varphi\rangle$.

Bespielsweise,

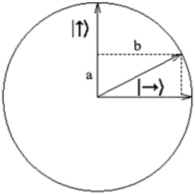
$$\langle\rightarrow|\rightarrow\rangle = 1 \qquad \langle\rightarrow|\uparrow\rangle = 0$$
$$\langle\uparrow|\rightarrow\rangle = 0 \qquad \langle\uparrow|\uparrow\rangle = 1$$

Outline

1. Einfache Computadoras
   - Mathematatik
   - Architektur
2. Computadora Cuántica: Eine schwarze Kunst
   - Polarisationsexperiment
   - Vektoren
   - Messungen und Wahrscheinlichkeiten

Wahrscheinlichkeiten

$$|\psi\rangle = a\,|{\rightarrow}\rangle + b\,|{\uparrow}\rangle$$



Welle: $|a|^2$ und $|b|^2$ sind die relativen Intensitäten des jeweiligen Zustandes.

Teilchen: $|a|^2$ und $|b|^2$ sind die relativen Wahrscheinlichkeiten das Teilchen im jeweiligen Zustand vorzufinden.

Messungen

Motivation: Wir wollen den finalen Zustand unseres Experimentes kennen. Darum müssen wir eine Messung durchführen. Jeder Filter ist ein Messapparat.

Pregunta: Was ist das Resultat einer Messung für ein einzelnes Photon?

Antwort: Jede Messung ist eine Projektion auf den Vektor der Messung.

Beispiele eines Messoperators:

$$|\rightarrow\rangle\langle\rightarrow|, \quad |\uparrow\rangle\langle\uparrow|$$

Messoperatoren

$$|\psi\rangle = a\,|{\rightarrow}\rangle + b\,|{\uparrow}\rangle$$

Auf unseren vorigen Zustand angewendet,

$$\begin{aligned}
(|{\rightarrow}\rangle\,\langle{\rightarrow}|)\,|\psi\rangle &= (|{\rightarrow}\rangle\,\langle{\rightarrow}|)\,(a\,|{\rightarrow}\rangle + b\,|{\uparrow}\rangle) \\
&= a\,|{\rightarrow}\rangle\,\langle{\rightarrow}|{\rightarrow}\rangle + b\,|{\rightarrow}\rangle\,\langle{\rightarrow}|{\uparrow}\rangle \\
&= a\,|{\rightarrow}\rangle
\end{aligned}$$

$$(|{\uparrow}\rangle\,\langle{\uparrow}|)\,|\psi\rangle = \text{Ihr sagt's uns...}$$

Messoperatoren

$$|{\rightarrow}\rangle \langle{\rightarrow}|\psi\rangle = a\,|{\rightarrow}\rangle$$
$$|{\uparrow}\rangle \langle{\uparrow}|\psi\rangle = b\,|{\uparrow}\rangle$$

$$\langle\psi|{\rightarrow}\rangle \langle{\rightarrow}|\psi\rangle = |a|^2$$
$$\langle\psi|{\uparrow}\rangle \langle{\uparrow}|\psi\rangle = |b|^2$$

$$
\begin{aligned}
\langle\psi|\nearrow\rangle &= \left(a^* \langle\rightarrow| + b^* \langle\uparrow|\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|\rightarrow\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|\uparrow\rangle\right) \\
&= \frac{a^*}{\sqrt{2}}\langle\rightarrow|\rightarrow\rangle + \frac{b^*}{\sqrt{2}}\langle\uparrow|\rightarrow\rangle + \frac{a^*}{\sqrt{2}}\langle\rightarrow|\uparrow\rangle + \frac{b^*}{\sqrt{2}}\langle\uparrow|\uparrow\rangle \\
&= \frac{a^*}{\sqrt{2}} + \frac{b^*}{\sqrt{2}} \\
&= \frac{a^* + b^*}{\sqrt{2}} \\
\langle\nearrow|\psi\rangle &= \frac{a+b}{\sqrt{2}}
\end{aligned}
$$

Darum,

$$
\langle\psi|\nearrow\rangle\langle\nearrow|\psi\rangle = \frac{|a|^2 + a^*b + ab^* + |b|^2}{2}
$$

If $|\psi\rangle = |\rightarrow\rangle$ then, $\langle\rightarrow|\nearrow\rangle\langle\nearrow|\rightarrow\rangle = \frac{1}{2}$

¿Irgendwelche Fraguntas?

Gendered nouns are stupid, get wrecked German/Spanish, English FTW