Punto de acumulación

Aunque la función esté definida en ese punto no nos servirá el valor que toma la función en ese punto.

Nos da igual si está o no definida en ese punto.

Def. sea A subconjunto de $\mathbb{R}$. , $\alpha \in \mathbb{R}$ un punto de acumulación de A, se acumula cuando

$$\exists \{x_n\} \in A \setminus \{\alpha\} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad y \quad \{x_n\} \to \alpha$$

A' es el conjunto de todos los puntos de acumulación de A.

los puntos de A que no son puntos de acumulación se denominan <u>puntos aislados</u>

$A \subset \mathbb{R}$ cuando $a \in A \setminus A'$

Concepto límite

sea $f: A \xrightarrow{} \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$

dado $\underline{\alpha \in A'}$

El límite de una sucesión es único.

$$\lim_{x \to \alpha} f(x) = L \iff [x_n \in A \setminus \{\alpha\} \ \forall n \in \mathbb{N}, \{x_n\} \to \alpha \Rightarrow \{f(x_n)\} \to L$$

Puede tener sentido discutir la existencia de límite de una función en puntos que no pertenezcan a su conjunto de definición.

CARACTERIZACIÓN ($\varepsilon - \delta$) del límite funcional.

Sea $f: A \to \mathbb{R}$ una función, $\alpha \in A'$, $L \in \mathbb{R}$. Equivale.

i) $\lim_{x \to \alpha} f(x) = L$

ii) $\forall \{x_n\}$ monótona $\in A \setminus \{\alpha\}$: $\{x_n\} \to \alpha$ se tiene que $\{f(x_n)\} \to L$

iii) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : x \in A, \ 0 < |x - \alpha| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

Concepto de continuidad

Una función $f: A \to \mathbb{R}$ es continua en $a \in A \cap A'$

$\iff \lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Sea $f: A \to \mathbb{R}$, $a \in A$

$\begin{cases} a \text{ aislado} \to \text{siempre es continua} \\ a \in A' \iff \lim_{x\to a} f(x) = f(a) \end{cases}$

f es continua en $a \iff \forall \{a_n\} \to a \Rightarrow f(a_n) \to f(a)$

$\equiv \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \underset{x \in A}{|x-a| \leq \delta} \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$

Solo hablamos de continuidad en puntos donde la función está definida.

Concepto de derivada

Sea $f: \underset{\mathbb{R}}{\overset{A}{\cap}} \to \mathbb{R}$ $\quad a \in A \cap A'$

f derivable en $a \iff \exists$ el siguiente límite

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Son equivalentes las siguientes afirmaciones:

1) f derivable en a.
2) $\exists L \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0$: siempre que $x \in A$,

$0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a) - L(x-a)| < \varepsilon |x-a|$

Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad a \in A \cap A'$ equivale:

1) f derivable en a.
2) $\exists$ función afín $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: $\quad$ (f continua en a)

$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} = 0$; $\quad g(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$

3) la restricción de f a $]a-r, a+r[\cap A$ es derivable en a.

Definición de derivadas laterales

Sea $f: A \to \mathbb{R}$ y $a \in A \cap A'$

1) $a \in A'_+$ f derivable por derecha $\iff \lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$

2) $a \in A'_-$ f derivable por izq $\iff \lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$

Definiciones de los ptos

- f alcanza en a un <u>máx o max.abs</u> $\iff f(a) \geq f(x)\ \forall x \in A$

Análogo para el min o mínimo abs.

- f alcanza en a un <u>max local</u> $\iff$
$\exists\, r > 0 : \forall x \in \,]a-r, a+r[\, \cap A \Rightarrow f(x) = f(a)$

Análogo para el min local. (Max de un peq intervalo)

- f alcanza en a un <u>max. relativo</u> $\iff$ tiene max local y
$\exists\, \varepsilon > 0 : \,]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\, \subset A$.

Análogo para el min. relativo. (Que no esté en los bordes)

Máximo local
- Absoluto (si es el mayor de todos)
- Relativo (si está en el interior)
- Simplemente local (si está en el borde)

ESQUEMA DE PTOS.

- Ptos críticos o singulares ($f'(a) = 0$)
  - Máximos ($f''(x) < 0$) } Extremos relativos
  - Mínimos ($f''(x) > 0$) } Extremos relativos
  - Ptos de inflexión ($f''(x) = 0$; $f'''(x) \neq$
  - Ptos donde $f', f'', f'''(x) = 0$. ($f(x) = x^3$)

- Ptos angulosos: f continua pero no derivable.

Algunas def de monotonía. sea $a \in I$, $f: I \to \mathbb{R}$

1) f localmente creciente en a si $\exists\, \delta > 0 : \begin{cases} f(x) \leq f(a) & \text{si } a-\delta < x < a \\ f(a) \leq f(x) & \text{si } a < x < a+\delta \end{cases}$

2) f " decreciente. Análogo.

3) f localmente est. creciente si $\exists\, \delta > 0 : \begin{cases} f(x) > f(a) & \text{si } a-\delta < x < a \\ f(x) < f(a) & \text{si } a < x < a+\delta \end{cases}$

4) f " " decreciente. Análogo.

Espacios de funciones derivables.

Sea I intervalo, $n \in \mathbb{N}$, $f: A \to \mathbb{R}$.

Diremos que f es una función de clase C^n en I si f es n veces derivable y $f^{(n)}$ es una función continua.

El conjunto de $f(x)$ de clase C^n se suele denotar $C^n(I)$

Polinomio de Taylor.

$f: A \to \mathbb{R}$ n veces derivable. en $a \in A$. El pol. Taylor de orden n de la función f centrado en a es:

$$P_n(f,x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

En el caso que $a=0$, se denomina polinomio de Maclaurin.

Polinomios de Taylor de algunas funciones.

1) Exponencial.

$$P_n = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

2) $f(x) = \log(1+x)$ centrado en 0.

$$P_n = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n} \qquad f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!$$

$$\Downarrow$$

$$P_n = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}x^k}{k}$$

3) Cos

$$P_n(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$$

4) Sen

$$P_n(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1} x^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

Desarrollo de Taylor de una función.

Sea $f: I \to \mathbb{R}$ y sea $a \in I$, supongamos que $\exists$ derivadas de cualquier orden de f en a. La serie $(*)$ se denomina serie o desarrollo de Taylor de f centrado en a

$$\sum_{n \geq 0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x-a)^n}{n!} \quad (*)$$

Función Convexa

Sea $f: I \to \mathbb{R}$ convexa si $\forall a, b \in I$, $a < b$, $\forall t \in [0,1]$ se verifica $f((1-t)a + tb) \leq (1-t)f(a) + tf(b)$

f cóncava si $-f$ convexa.

Pto de inflexión

Es aquel pto donde la función cambia de cóncava a convexa o viceversa.

Sea $f: I \to \mathbb{R}$. Diremos que $a \in \mathring{I}$ es un pto inflexión de la función si $\exists r > 0$:

1) f convexa en $]a-r, a]$ y cóncava en $[a, a+r[$

2) f cóncava en $]a-r, a]$ y convexa en $[a, a+r[$

TEMA 6

PROPOSICIONES

- Si $f: A \to \mathbb{R}$ es derivable en $a \in A \cap A' \Rightarrow f$ continua en a
  $\not\Leftarrow$ (valor abs en 0)

- Sea $f: A \to \mathbb{R}$ una función real y $a \in A \cup A'$, son equivalentes:
  1) f derivable en A.
  2) f continua en a y $\exists\, g(x)$ afín:
  $$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - g(x)}{x - a} = 0$$

Si esto se verifica, $\Rightarrow g(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$

- Geométricamente, la recta tg a una función f en un punto a es la $f(x)$ afín: $y = f(a) + f'(a)(x-a)$

- Sea $f: A \to \mathbb{R}$, $a \in A \cap A'$, equivale:
  1) f derivable en a.
  2) Sea $r > 0$, la restricción de f a $]a-r, a+r[\cap A$ es derivable en a.

- Una función es derivable en un pto $\Leftrightarrow \exists$ todas las derivadas que tienen sentido y coinciden

- Cualquier función derivable es continua.
  Si es derivable por la derecha $\Rightarrow$ continua por derecha
  Si es derivable por la izq $\Rightarrow$ continua izq.
  En particular, si $f(x)$ tiene derivadas laterales $\Rightarrow$ es continua aunque no coincidan

TEMA 7

Sean $f, g: A \to \mathbb{R}$ derivables en $a \in A \cap A'$
1) $f+g$ derivable en a y $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$.
2) fg derivable en a y $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + g'(a)f(a)$
3) $g(a) \neq 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{g}\right)'(a) = \dfrac{-g'(a)}{g(a)^2}$
4) f/g derivable en a $(f/g)'(a) = \dfrac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}$

- Sea $f: A \to \mathbb{R}$ y $g: B \to \mathbb{R}$ dos funciones verificando

1) f derivable en $a \in A \cap A'$
2) $f(A) \subset B$ y $b = f(a) \in B \cap B'$
3) g derivable en $f(a)$

$\Rightarrow$ $g \circ f$ derivable en a
$g'(f(a)) = g'(f(a)) f'(a)$

- TEOREMA DE DERIVACIÓN DE LA FUNCIÓN INVERSA

Sea $f: A \to \mathbb{R}$ inyectiva y $B = f(A)$

f derivable en $a \in A \cap A' \Rightarrow b = f(a) \in B'$ y equivalen:

1) $f'(a) \neq 0$, f^{-1} continua en b
2) f^{-1} derivable en b.

Además, se verifica $(f^{-1})'(b) = \dfrac{1}{f'(a)}$

- Recordando bachillerato... hallar la derivada de la inversa

$f(f^{-1}(x)) = x$; $\Rightarrow (f(f^{-1}(x)))' = (x)'$;

$f'(f^{-1}(x)) (f^{-1}(x))' = 1 \Rightarrow \boxed{(f^{-1}(x))' = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))}}$

- Sea I intervalo, $f: I \to \mathbb{R}$ continua e inyectiva $\Rightarrow$ est. monótona

Sea $B = f(A)$, f derivable en $b = f(a) \Rightarrow b \in B'$ y equivalen:

1) $f'(a) \neq 0$.
2) f^{-1} derivable en b.

TEMA 8

- Sea $f: A \to \mathbb{R}$, supongamos que f alcanza su max abs. en $a \in A$.

Entonces f tiene extremo relativo en $a \iff a \in \mathring{A}$

- LEMA DE FERMAT

Sea $f: A \to \mathbb{R}$ función real de variable real.

Si f tiene extremo relativo en $a \in A$, f derivable en a. $\Rightarrow f'(a) = 0$ ($\not\Leftarrow$)

- $\{\text{"puntos críticos"}\} = \{x \in A : f'(x) = 0\}$

- TEOREMA DE ROLLE

Sea $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a,b]$, derivable en $]a,b[$

y verificando que $f(a) = f(b) \Rightarrow \exists c \in]a,b[: f'(c) = 0$

- **TEOREMA DEL VALOR MEDIO DE LAGRANGE**

Sea $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a,b]$ derivable $]a,b[\Rightarrow \exists c \in]a,b[: f(b)-f(a) = f'(c)(b-a)$

esto es,
$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$

- **TEOREMA DEL VALOR MEDIO DE CAUCHY**

Sea $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ derivable en $]a,b[\Rightarrow$

$\exists c \in]a,b[: (f(b)-f(a))g'(c) = (g(b)-g(a))f'(c)$

- En clase hemos demostrado que TVMC $\Rightarrow$ TVM $\Rightarrow$ TRolle $\Rightarrow$ TVMC

- **APLICACIONES DEL TVM**

1) $f(x) = cte \ \forall x \in I \Leftrightarrow f'(x) = 0 \ \forall x \in I$
2) f creciente en $I \Leftrightarrow f'(x) \geq 0 \ \forall x \in I$
3) f decreciente en $I \Leftrightarrow f'(x) \leq 0 \ \forall x \in I$
4) Si $f'(x) > 0 \ \forall x \in I \Rightarrow f$ est. creciente en I.
5) Si $f'(x) < 0 \ \forall x \in I \Rightarrow f$ est. decreciente en I.

- Sea I intervalo, $f, g : I \to \mathbb{R}$ derivables. Supongamos que $f'(x) = g'(x) \ \forall x \in I \Rightarrow \exists k \in \mathbb{R} : f(x) = g(x) + k \ \forall x \in I$

- Si $\exists$ las derivadas laterales $\Rightarrow f$ continua
  Si coinciden las derivadas laterales $\Rightarrow f$ derivable.

TEMA 9

- Sea I intervalo abierto, $f: I \to \mathbb{R}$ una función
1) f es creciente $\Leftrightarrow f$ localmente creciente $\forall$ pto de I.
2) f es est. creciente $\Leftrightarrow f$ localmente est. creciente $\forall$ pto de I.

- Si dibujamos los ejes en el pto a,
1) f es localmente creciente en a si su gráfica está en el cuadrante 1 y 3.
2) f es localmente decreciente en a si su gráfica está en el cuadrante 2 y 4

- Sea $f:]a,b[\to \mathbb{R}$ derivable y $c \in]a,b[$.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Si } f'(x) \geq 0 \ \forall x \in]a,c[\\ \text{y } f'(x) \leq 0 \ \forall x \in]c,b[\end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ tiene máx absoluto en } c.$$

- Si $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua (est) monotona en $]a,b[$ $\Rightarrow$ f (estrictamente) monotona en $[a,b]$

- Sea I intervalo, $f: I \to \mathbb{R}$ derivable con $f'(x) \neq 0 \ \forall x \in I \Rightarrow f$ est. monótona

$$\begin{cases} f'(x) > 0 \ \forall x \in I \\ \quad \text{o} \\ f'(x) < 0 \ \forall x \in I \end{cases}$$

- <u>TEOREMA DEL VALOR INTERMEDIO PARA DERIVADAS</u> Sea I un intervalo, $f: I \to \mathbb{R}$

Si f derivable $\Rightarrow$ $f'(I)$ es un intervalo.

- <u>PROPIEDAD DE DARBOUX</u> sea I intervalo, $f: I \to \mathbb{R}$

verifica p.Darboux $\Leftrightarrow$ $\forall a,b \in I$, $a \leq b$, $\forall y \in [f(a), f(b)]$, $\exists\, x \in [a,b] : f(x) = y$, esto es, $f([a,b])$ es un intervalo.

- El teorema del valor intermedio nos dice que las funciones continuas verifican la prop de Darboux.
El teorema del valor intermedio nos dice que las derivadas verifican la prop de Darboux.

- Todo eran risas hasta que Darboux demostró:
1) Todas las derivadas verifican el teorema del valor intermedio.
2) Existen derivadas que son discontinuas.

- La derivada es una función que verifica la tesis del teorema del valor intermedio (prop. Darboux) pero no verifica la tesis del teorema de Weierstrass.

- Sea I intervalo, $a \in I$, $f: I \to \mathbb{R}$ continua en I derivable en $I \setminus \{a\}$.
  1) Si f' tiene lím en $a \Rightarrow f$ derivable en a
  $$f'(a) = \lim_{x \to a} f'(x)$$
  2) Si $\lim_{x \to a} f'(x) = +\infty \Rightarrow f$ no derivable en a.
  3) Si f' tiene $\neq$ lím laterales en $a \Rightarrow f$ no derivable en a
- La derivada de una función en un intervalo no tiene discontinuidades evitables ni de salto.

- <u>TEOREMA DE LA FUNCIÓN INVERSA (G)</u> Sea I intervalo, $f: I \to \mathbb{R}$ derivabl $f'(x) \neq 0$ $\forall x \in I \Rightarrow f$ inyectiva y su f inversa (f^{-1}) es derivable en $f(I)$ con:
$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} \quad \forall y \in f(I)$$

- <u>TEOREMA DE LA FUNCIÓN INVERSA (L)</u> Sea I intervalo, $f: I \to \mathbb{R}$ deriva $a \in I$, $f'(a) \neq 0$, f' continua en $a \Rightarrow \exists\, \delta > 0 : f|_{I_\delta}$ es una función g
$I_\delta = I \cap]a-\delta, a+\delta[$ $\quad$ g inyectiva, derivable y
$$(g^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(g^{-1}(y))} \quad \forall y \in g(I_\delta)$$

- <u>TEOREMA DEL VALOR MEDIO GENERALIZADO</u> Sean $f, g: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a,b]$, derivable en $]a,b[$ $\Rightarrow$
$$\exists\, c \in]a,b[: (f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c)$$

- (Lema previo a 1er L'hôpital) Sean $f, g:]a,b[\to \mathbb{R}$ derivables, supongamos
  1) $g'(x) \neq 0$ $\forall x \in]a,b[$
  2) $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0$

Se verifica:
1) Si $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \Rightarrow \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$
2) Si $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \pm\infty \Rightarrow \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty$
(3) Si $\lim_{x \to a} \left| \frac{f'(x)}{g'(x)} \right| = +\infty \Downarrow \lim_{x \to a} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| = +\infty$

• <u>PRIMERA REGLA DE L'HÔPITAL</u> Sea I intervalo, $a \in I$, $f,g: I\setminus\{a\} \to \mathbb{R}$ derivables, supongamos:

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in I\setminus\{a\} \\ 2)\ \lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow g(x) \neq 0 \quad \forall x \in I\setminus\{a\}$$

y se verifica:

1) Si $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \Rightarrow \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$

2) Si $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \pm\infty \Rightarrow \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty$

3) Si $\lim_{x\to a} \left|\frac{f'(x)}{g'(x)}\right| = +\infty \Rightarrow \lim_{x\to a} \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| = +\infty$

• (<u>Lema previo</u> a la segunda regla L'hôpital) Sean $f,g:]a,b[\to \mathbb{R}$ derivables, supongamos:

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in]a,b[\\ 2)\ \lim_{x\to a} |g(x)| = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow g(x) \neq 0 \quad \forall x \in]a,b[$$

y se verifica.

1) Si $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \Rightarrow \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$

2) Si $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \pm\infty \Rightarrow \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty$

3) Si $\lim_{x\to a} \left|\frac{f'(x)}{g'(x)}\right| = +\infty \Rightarrow \lim_{x\to a} \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| = +\infty$

• <u>SEGUNDA REGLA DE L'HÔPITAL</u> Sea I intervalo, $a \in I$, $f,g: I\setminus\{a\} \to \mathbb{R}$ derivables, supongamos:

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ g'(x) \neq 0, \quad \forall x \in I\setminus\{a\} \\ 2)\ \lim_{x\to a} |g(x)| = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow g(x) \neq 0 \quad \forall x \in I\setminus\{a\}$$

y se verifica:

1) Si $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \Rightarrow \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$

2) Si $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \pm\infty \Rightarrow \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty$

3) Si $\lim_{x\to a} \left|\frac{f'(x)}{g'(x)}\right| = +\infty \Rightarrow \lim_{x\to a} \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| = +\infty$

- Sea I intervalo no acotado superiormente. $f, g: I \to \mathbb{R}$ dos funciones derivables, supongamos:

$$g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in I \quad \begin{cases} \lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} g(x) = 0 \\ \lim_{x \to \infty} |g(x)| = +\infty \end{cases}$$

Entonces $\exists M \in \mathbb{R} : g(x) \neq 0 \ \forall x \in I, x > M$ y además:

1) Si $\lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \Rightarrow \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L$

2) Si $\lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \pm\infty \Longrightarrow \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty$

TEMA 10

- Sean $f, g: A \to \mathbb{R}$ dos funciones n veces derivables en $a \in A$.

1) La suma $f+g$ es n veces derivable en a y

$$(f+g)^{(n)}(a) = f^{(n)}(a) + g^{(n)}(a)$$

2) El producto fg es n veces derivable y

$$(fg)^{(n)}(a) = \binom{n}{0} f^{(n)}(a) g(a) + \binom{n}{1} \cdot f^{(n-1)}(a) g'(a) + \dots + \binom{n}{n} f(a) g^{(n)}(a)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)}(a) \, g^{(k)}(a)$$

3) Si $g(a) \neq 0$, el cociente f/g es n veces derivable en a.

- Sean $f: A \to \mathbb{R}$, $g: B \to \mathbb{R}$ n veces derivables, supongamos $B = f(A)$ $\wedge$ $\forall x \in A \cup B$, ~~$\forall x \in B$ es $x \in A$~~ un ~~un~~ pto acumulación. $\Rightarrow g \circ f$ es n veces derivable.

- Sea I intervalo, $f: I \to \mathbb{R}$ derivable con $f'(x) \neq 0 \ \forall x \in I$, $\exists f^{-1}: f(I) \to I$ derivable. Si f es n veces derivable, f^{-1} también

- La suma, producto y cociente de funciones de clase C^n es de clase C^n.

- Se verifica la siguiente cadena de inclusiones.

$$C^{\infty}(I) \subseteq \dots \subseteq C^{n+1}(I) \subseteq C^{(n)}(I) \subseteq \dots \subseteq C^1(I) \subseteq \underbrace{C(I)}_{\text{conjunto de } f(x) \text{ continuas}}$$

- DERIVADAS SUCESIVAS DE F(X) ELEMENTALES

→ Exponencial. $f^{(n)}(x) = e^x \Rightarrow \in C^\infty$

→ Logaritmo $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!\, x^{-n} \Rightarrow \in C^\infty$

→ Sen y Cos hip. suma y diferencia de exp.
$(\operatorname{senh}(x))' = \cosh(x)$; $(\cosh(x))' = \operatorname{senh}(x)$ } $\Rightarrow \in C^\infty$

→ Sen y cos. $f(x) = \operatorname{sen}$, $g(x) = \cos$.
$f^{(n)}(x) = \operatorname{sen}\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$, $g^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$ } $\Rightarrow \in C^\infty$

→ Potenciales. $f(x) = x^\alpha \Rightarrow f^{(n)}(x) = \prod_{k=0}^{n-1} (\alpha - k)\, x^{\alpha - n}. \Rightarrow \in C^\infty$

→ Tg, sec, cosec. cociente de $f(x) \in C^\infty \Rightarrow \in C^\infty$

→ Arcosen, arccos sus derivadas son composición de $f(x) \in C^\infty$ } $\Rightarrow \in C^\infty$

→ Arctg. $(f(x))' =$ racional $\Rightarrow \in C^\infty$

- a es raíz de p con multiplicidad $K \Leftrightarrow$
$p(a) = p'(a) = \cdots = p^{(k-1)}(a) = 0$ y $p^{(k)}(a) \neq 0$.

- El grado de Pn es menor que n si $f^{(n)}(a) = 0$. Por tanto, Pol. Taylor de orden n puede tener grado menor que n.

- La linealidad de la derivada se traslada al cálculo del pol. Taylor:
si f, g son n veces derivables, $P_n(\alpha f + \beta g, x) = \alpha P_n(f, x) + \beta P_n(g, x)$

- Pn es el único polinomio de grado $\leq n$ que coincide con la función y sus primeras n derivadas en a.

- <u>FÓRMULA INFINITESMAL DEL RESTO</u> Sea $f: I \to \mathbb{R}$ $(n-1)$ veces derivable en I y n veces derivable en $a \in I$.

Sea Pn el pol. Taylor de orden n de la función f centrado en a,

1) $\lim_{x \to a} \frac{f(x) - P_n(x)}{(x-a)^n} = 0$

2) si $q(x)$ es polinomio de orden n, $\lim_{x \to a} \frac{f(x) - q(x)}{(x-a)^n} = 0$ entonces $q(x) = P_n(x)$

- $f: I \to \mathbb{R}$ $(n-1)$ veces derivable en I y n veces derivable en $a \in I$

P_n pol. Taylor en $a \Rightarrow \lim_{x \to a} \frac{f(x) - P_{n-1}(x)}{(x-a)^n} = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$

- Si $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es derivable par $\Rightarrow f'$ es impar. Analogament

- El polinomio de Maclaurin ~~de~~ de una función par solo tiene términos con potencias pares. (Resp. impar).

- Un pto crítico es un extremo relativo si la primera derivada que no lo anula es par.

- Sea $n \geq 2$, $f: I \to \mathbb{R}$ $(n-1)$ veces derivable en I y n veces derivable en $a \in I$, supongamos:

$$f'(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) = 0 \quad , \quad f^{(n)}(a) \neq 0.$$

1) Si n par y $f^{(n)}(a) > 0 \Rightarrow$ tiene mín. relativo en a.
2) Si n par y $f^{(n)}(a) < 0 \Rightarrow$ tiene max. relativo en a.
3) Si n impar $\Rightarrow f$ no tiene extremo relativo en a.

- FORMULA DE TAYLOR

$n \geq 1$, $f: I \to \mathbb{R}$, derivable $n+1$ veces.

$\forall a, x_0 \in I \quad \exists c \in]a, x_0[$:

$$f(x_0) - P_n(x_0) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x_0 - a)^{n+1}$$

- Sea $f: I \to \mathbb{R}$. Si $f^{(n+1)}(x) = 0 \ \forall x \in I$, f es un polinomio grado n.

- FORMULA TAYLOR VERSION ALTERNATIVA

sea $f: I \to \mathbb{R}$ derivable $n+1$ veces

$\forall a, x \in I \quad \exists \ c, d \in]a, x[$:

1) $f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ Resto de Lagrange

P_n (polinomio de Taylor de orden n centrado en a)

2) $f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(d)}{n!}(x-d)^n(x-a)$ Resto de Cauchy

- Sea $f: I \to \mathbb{R}$ de clase C^∞ en I, supongamos que $\exists M$:

$$|f^{(n)}(x)| \leq M \quad \forall x \in I, \ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \text{La serie de Tay}$$

Entonces la serie de Taylor de f representa a f en todo I

- DESARROLLO DE TAYLOR DE ALGUNAS FUNCIONES

→ Exponencial

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

$$e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!} = 1 - x + \dots + \frac{(-1)^n x^n}{n!} + \dots$$

→ $$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots$$

$$\operatorname{senh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots$$

→ $$\operatorname{sen}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots$$

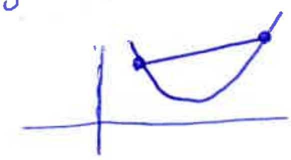
→ $$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} + \dots$$

→ $$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots$$

→ $$\operatorname{arctg}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} \dots$$

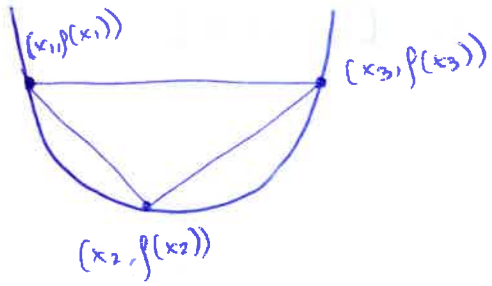
→ $$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$$

TEMA 11



- f es cóncava si $-f$ es convexa.
- Geométricamente, la convexidad se traduce en que el segmento que une las imagenes de dos ptos está por encima de la gráfica de la función
- Cualquier función afín es convexa. ($f(x) = xm + n$)
- La función valor absoluto es convexa. $|(1-t)x + ty| \leq (1-t)|x| + t|y|$
- $f(x) = x^2$ es convexa.
- Sea $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ f convexa $\Rightarrow$ f acotada

- **LEMA DE LAS TRES SECANTES** Sea $f: I \to \mathbb{R}$ convexa, $x_1 < x_2 < x_3$, se verifica



$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1} \leq \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$$

- Sea $f: I \to \mathbb{R}$ convexa. $\Rightarrow f_a : I\setminus\{a\} \to \mathbb{R}$ es creciente.

$$f_a(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \quad \forall x \in I\setminus\{a\}$$

- Sea $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ una función creciente. y sea $c \in]a,b[$, $N>0$.
  1) la función tiene lim laterales en c.
  2) $D_N = \{c \in]a,b[: \lim_{x\to c^+} f(x) - \lim_{x \to c^-} f(x) > N\}$ es finito.

- Sea I un intervalo, $f: I \to \mathbb{R}$ monótona
  1) f tiene lim laterales $\forall x \in \mathring{I}$. En particular, f solo puede tener discontinuidades de salto en $\mathring{I}$.
  2) El conjunto de discontinuidades de f es numerable.

- Sea I intervalo abierto, $f: I \to \mathbb{R}$ convexa.
  1) f tiene derivadas laterales en todos los pto. En particular, es continua
  2) f'_+ y f'_- son crecientes.
  3) El conjunto de ptos donde f no es derivable es numerable.

- Sea I intervalo, $f: I \to \mathbb{R}$ derivable. equivalen:
  1) f convexa
  2) f' creciente
  3) $f(x) \geq f(a) + f'(a)(x-a) \quad \forall a, x \in I$

- Sea $f: I \to \mathbb{R}$ convexa y dos veces derivable,
  f convexa $\Leftrightarrow f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in I$.

- Las rectas son convexas y cóncavas.

- Exponencial convexa. log cóncava.

- x^3 es concava $]-\infty, 0]$ y convexa en $[0, +\infty[$

- Sea $f: I \to \mathbb{R}$ dos veces derivable.

si $a \in I$ es un pto de inflexion $\Rightarrow f''(a) = 0$

TEMA 12

Def $f: A \to \mathbb{R}$ es <u>uniformemente continua</u> en A si solo si

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \left.\begin{array}{l} x, y \in A \\ |x-y| < \delta \end{array}\right\} \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

- Si f unif. cont. en A y $B \subset A$, $\Rightarrow$ f unif. cont. en B
- Sean $f, g: A \to \mathbb{R}$ unif. cont.
  1) $f + g$ es unif. cont.
  2) Si f, g son acotadas $\Rightarrow$ fg es unif. cont.
- Sea $f: A \to \mathbb{R}$ unif. cont. en A, $f(A) \subset B$, $g: B \to \mathbb{R}$ unif. cont, entonces $g \circ f$ es unif cont.
- La identidad es unif. cont en $\mathbb{R}$
- Usando $||x| - |y|| \leq |x - y|$ $\Rightarrow$ valor absoluto es unif. cont. $\mathbb{R}$
- El producto de unif. cont. no es unif. cont. (Ej: $f(x) = x^2$)

- <u>Interpretación geométrica</u>: f unif. cont $\Leftrightarrow$ se puede tapar su gráfica con una familia de rectángulos adyacentes de altura predeterminada. En este caso la familia puede ser infinita. Además también es unif. cont $\Leftrightarrow$ dada altura $\varepsilon > 0$, la gráfica de f se puede tapar con una cantidad finita de rectángulos adyacentes de altura ε.

- <u>Caracterización de cont. uniforme</u> Sea $f: A \to \mathbb{R}$, equivale:
  1) f es unif. cont.
  2) $\forall \{x_n\}, \{y_n\} \subset A$: $\lim_{n \to \infty} (\{x_n\} - \{y_n\}) = 0 \Rightarrow \lim_{n \to \infty} (f(x_n) - f(y_n)) \geq$ $\forall n \in \mathbb{N}$

En particular, f no es unif. cont. si $\exists \varepsilon_0 > 0$ y sucesiones $\{x_n\}, \{y_n\} \subset A$: $|\{x_n\} - \{y_n\}| < \frac{1}{n}$ y $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon_0$ $\forall n \in \mathbb{N}$

- **Teorema de Heine** Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua $\Rightarrow f$ unif. cont.

~Dem~

Reducción al absurdo.

Si f no es unif. cont. $\Rightarrow \exists \varepsilon_0$ y $\{x_n\}, \{y_n\}$ en $[a,b]$:

$|\{x_n\}-\{y_n\}| < \frac{1}{n}$ y $|f(x_n)-f(y_n)| \geq \varepsilon_0 \quad \forall n\in\mathbb{N}$

Como $a\leq x_n \leq b$, $\{x_n\}$, por el teorema de Bolzano-Weierstrass de sucesiones, tiene asociada una parcial convergente $\{x_{\sigma(n)}\}$, y su límite, x_0 también pertenece al intervalo.

Por tanto $\{y_{\sigma(n)}\}\to x_0$ y en consecuencia, $|f(x_{\sigma(n)})-f(y_{\sigma(n)})|\to 0$

lo cual es una contradicción.

- Sea $f: A\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$
  1) f unif. cont
  2) f lleva sucesiones de Cauchy en sucesiones de Cauchy
  3) f lleva sucesiones convergentes en sucesiones convergentes
  4) f continua.

1)$\Rightarrow$2) Sea $\{x_n\}$ sucesión de Cauchy $\subset A$ y $\varepsilon>0$, aplicamos la definición de Cauchy tomando $\delta>0$ dado por la continuidad uniforme: $\exists\, n\in\mathbb{N}$: si $p,q\geq n \Rightarrow |x_p-x_q|<\delta \Rightarrow |f(x_p)-f(x_q)|<$

2)$\not\Rightarrow$1) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2$ lleva sucesiones Cauchy en sucesiones de Cauchy pero no es unif. cont.

2)$\Rightarrow$3) Si $\{x_n\}$ es suc. convergente $\Rightarrow$ Cauchy $\Rightarrow \{f(x_n)\}$ Cauchy

Si $x_0\in A$ es lim de $\{x_n\}$, podemos formar $\{y_n\}=\{x_n\}$ si n par, $y_n=x_0$ si n impar

que $\{y_n\}$ es convergente $\Rightarrow \{f(y_n)\}$ Cauchy $\Rightarrow \{f(x_n)\}$ convergente

3)$\not\Rightarrow$2) $f:]0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=1/x$ lleva sucesiones convergentes en suc. converg. pero $\frac{1}{n}$ es de Cauchy y su imagen, no. (si el conjunto es cerrado si es $\Leftrightarrow$)

3)$\Leftrightarrow$4) Caracterización por sucesiones de la continuidad.

Def.

Sea $f: A \to \mathbb{R}$, es lipschitziana si $\exists K$:

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x-y| \qquad \forall x,y \in A$$

la menor K que verifica la anterior desigualdad se llama cte de lipschitz

$$\underset{\text{cte Lipt}}{K} = \sup \left\{ \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|} : x, y \in A, x \neq y \right\}$$

Diremos que es contractiva si es lipschitziana y la cte de lipschitz es ~~men~~ < 1

- Si $f: I \to \mathbb{R}$ es lipschitziana $\underset{\cancel{\Leftarrow}\,(\text{raiz})}{\Rightarrow}$ f es unif. cont.
- Sea $f: I \to \mathbb{R}$ derivable. f lipschitziana $\Leftrightarrow$ f' acotada.

$$K = \sup\{|f'(x)| : x \in I\}$$

El mismo resultado es cierto si f es derivable en el intervalo abierto, exigiendo solo continuidad en los extrem

- Sea $f: [a,b] \to \mathbb{R}$, $f \in C^1 \Rightarrow f$ es lipschitziana.
- $0 \leq x \leq y \Rightarrow \sqrt{y} - \sqrt{x} \leq \sqrt{y-x} \Leftrightarrow y + x - 2\sqrt{yx} \leq y - x$
- $\left|\sqrt{y} - \sqrt{x}\right| \leq \sqrt{|y-x|} \quad \forall x,y \geq 0$

$$\Leftrightarrow 2x \leq 2\sqrt{yx}$$
$$\Leftrightarrow x^2 \leq yx \Leftrightarrow x \leq y \; ✓$$

Def.

Sea $f: A \to \mathbb{R}$, $a \in A$ es pto fijo de f si $f(a) = a$

TEMA 13

Def. Una partición P del intervalo $[a,b]$ es:

$P = \{a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n = b\}$

dadas P y P', diremos que P es mas fina que P' si $P' \subset P$

$\mathcal{P}([a,b])$ conjunto de todas las particiones del intervalo $[a,b]$

Def

Sea $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ acotada, $P \in \mathcal{P}([a,b])$.

Suma superior de f asociada a P
$$S(f,P) = \sum_{i=1}^{n} \sup f([x_{i-1}, x_i])(x_i - x_{i-1})$$

Suma inferior de f asociada a P
$$I(f,P) = \sum_{i=1}^{n} \inf f([x_{i-1}, x_i])(x_i - x_{i-1})$$

- $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ acotada, $P_1, P_2 \in \mathcal{P}([a,b])$

  1) Si P_1 mas fina que $P_2 \Rightarrow$
  $$I(f,P_2) \leq I(f,P_1) \leq S(f,P_1) \leq S(f,P_2)$$

  2) $I(f,P_1) \leq S(f,P_2)$ siempre.

Def

Sea $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ acotada.

Integral superior de Darboux de f en $[a,b]$
$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \inf\{S(f,P) : P \in \mathcal{P}([a,b])\}$$

Integral inferior de Darboux de f en $[a,b]$
$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \sup\{I(f,P) : P \in \mathcal{P}([a,b])\}$$

Def

Sea $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ acotada. f integrable $\Leftrightarrow \overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx$

ese valor se denotará $\int_a^b f(x)\,dx$.

- $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ acotada y no negativa. La integral de f en $[a,b]$ representa el área bajo la gráfica de la función entre las rectas $x=a$ y $x=b$.

- Sea $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ acotada. f integrable en $I \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists P:$
$$I - \varepsilon < I(f,P) \leq I \leq S(f,P) < I + \varepsilon$$

• Criterio de Cauchy: Sea $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ acotada. ELSA:

1) f integrable
2) Sea $\varepsilon > 0$, $\exists P \in \mathcal{P}([a,b])$: $S(f,P) - I(f,P) < \varepsilon$
3) $\exists \{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ del intervalo $[a,b]$: $\lim_{n\to\infty} \left(S(f,P_n) - I(f,P_n) \right) = 0$

~Dem~ $1) \Rightarrow 2) \Rightarrow 3) \Rightarrow 1)$

$1) \Rightarrow 2)$ Sea $\varepsilon > 0$, $\exists P \in \mathcal{P}([a,b])$:

$$I - \varepsilon/2 < I(f,P) \leq I \leq S(f,P) < I + \varepsilon/2$$

En particular, $S(f,P) - I(f,P) < \varepsilon$

$2) \Rightarrow 3)$ Sea $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon = \frac{1}{n}$, encontramos así la sucesión $\{P_n\}$ cumpliendo $S(f,P_n) - I(f,P_n) < \frac{1}{n}$ como buscamos.

$3) \Rightarrow 1)$

$$0 \leq \overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f \leq S(f,P_n) - I(f,P_n)$$

Tomando límites cuando n tiende a ∞ obtenemos que coinciden, lo que los hace integrable.

• Las funciones continuas son integrables.
• Las funciones monótonas son integrables.

Def.
•) Una partición etiquetada P del intervalo $[a,b]$ es un par $\{P, t_i\}$ donde $P = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ es una partición de $[a,b]$, $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ $\forall i = 1, \dots n$.
•) Sea $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ acotada, $P = \{P, \{t_i\}\}$ una part. etiquetada, la suma de Riemann de f es:

$$\Sigma(f,P) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1})$$

•) $I(f,P) \leq \Sigma(f,P) \leq S(f,P)$

Def.

$P \in \mathcal{P}([a,b])$, la norma de P es:

$$\|P\| = \max \{|x_i - x_{i-1}| : i = 1, \dots n\}$$

la norma de una partición etiquetada es la de la partición asociada.

- Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ acotada, $P \in \mathcal{P}([a,b])$

1) Si $c \in]a,b[$, consideramos $P' = P \cup \{c\}$

si $|f(x)| \leq K \ \forall x \in [a,b] \Rightarrow S(f,P') \geq S(f,P) - 2K\|P\|$

$$S(f,P) - S(f,P') \leq 2K\|P\|$$

2) Si $P' \in \mathcal{P}([a,b])$: $P' \setminus P$ tiene n puntos $\Rightarrow$

$$S(f,P) - S(f,P') \leq 2K\|P\|$$

- Teorema de Darboux: Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ acotada.

Dado $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, $P \in \mathcal{P}([a,b])$: $\|P\| < \delta \Rightarrow$

$$\underline{\int_a^b} f - \varepsilon < I(f,P) \leq \underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f \leq S(f,P) < \overline{\int_a^b} f + \varepsilon$$

En particular, $\{P_n\} \to 0 \Rightarrow$

$$\lim_{n \to \infty} S(f,P_n) = \overline{\int_a^b} f, \quad \lim_{n \to \infty} I(f,P_n) = \underline{\int_a^b} f$$

- Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ acotada. ELSA

1) f integrable y su integral es I.

2) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$: P part etiquetada $\in [a,b]$, $\|P\| < \delta \Rightarrow$

$$\left|\sum (f,P) - I\right| < \varepsilon.$$

TEMA 14

- Sean $f, g: [a,b] \to \mathbb{R}$ acotadas, $\lambda \in \mathbb{R}_0^+$, $P \in \mathcal{P}([a,b])$
  1) $S(\lambda f, P) = \lambda S(f,P)$; $I(\lambda f, P) = \lambda I(f,P)$
  2) $S(-f,P) = -I(f,P)$
  3) $S(f+g, P) \leq S(f,P) + S(g,P)$; $I(f+g,P) \leq I(f,P) + I(g,P)$

- Sean $f, g: [a,b] \to \mathbb{R}$ integrables y $\lambda \in \mathbb{R}$.
  1) λf es integrable. $\int_a^b (\lambda f)(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx$
  2) $f+g$ es integrable. $\int_a^b (f+g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

  °) $\int_a^b (\lambda f + \mu g)(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx + \mu \int_a^b g(x)\,dx$

- Sean $f, g: [a,b] \to \mathbb{R}$ integrables.
  1) Si $f(x) \leq g(x)$ $\forall x \in [a,b] \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$
  2) $|f|$ integrable y $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$

- Que el valor absoluto de una funcion sea integrable no implica que la función lo sea. (Ej: Dirichlet)

- Sean $f, g: [a,b] \to \mathbb{R}$ integrables.
  1) El producto de funciones es integrable.
  2) $\left(\int_a^b (fg)(x)\,dx\right)^2 \leq \left(\int_a^b f(x)^2\,dx\right)\left(\int_a^b g(x)^2\,dx\right)$ (Des. Schwarz)
  3) $\left(\int_a^b (f+g)^2(x)\,dx\right)^{1/2} \leq \left(\int_a^b f(x)^2\,dx\right)^{1/2} + \left(\int_a^b g(x)^2\,dx\right)^{1/2}$ (Des. Minkowski)

- Sean $f, g: [a,b] \to \mathbb{R}$ integrables, si suponemos $\inf\{|f(x)| : x \in [a,b]\}$ es mayor que 0, $\Rightarrow \frac{1}{f}$ es integrable.

• Función de Riemann

$$f: [0,1] \to \mathbb{R}$$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ 1/q & \text{si } x = p/q \text{ fracción irreducible.} \end{cases}$$

.) f continua en irracionales, discontinua en los racionales.

.) f integrable y $\int_0^1 f(x)\,dx = 0$

• Sea $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ integrable, $g: [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ continua, verificando que $f([a,b]) \subset [\alpha,\beta] \Rightarrow g \circ f$ integrable en $[a,b]$.

(En este orden)

• Sea $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ integrable y $g: [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ monótona verificando que $f([a,b]) \subset [\alpha,\beta] \Rightarrow g \circ f$ integrable en $[a,b]$

• Sea $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ acotada. $c \in]a,b[$. ELSA:

1) f integrable en $[a,b]$

2) f integrable en $[a,c]$ e integrable en $[c,b]$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

• Sea $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ integrable $\Rightarrow f$ integrable $\forall [c,d] \subset [a,b]$

• Sea $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ acotada. Supongamos f integrable en $[a+r,b]$ $\forall\ 0 < r < b-a \Rightarrow f$ integrable en $[a,b]$

$$\lim_{r \to 0} \int_{a+r}^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

• Sea $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ acotada. Si f tiene un nº finito de discontinuidades $\Rightarrow$ integrable.

- Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ integrable, $g:[a,b]\to\mathbb{R}$, sea $J=\{x\in[a,b]: f(x)\neq g(x)\}$.

Si J es finito $\Rightarrow$ g es integrable y $\int_a^b f(x)dx=\int_a^b g(x)dx$

TEMA 15

Def. Sea $f: A\to\mathbb{R}$ acotada. ($A\subset\mathbb{R}$)

1) Si $a\in A$, si f integrable en $[a,a]$, $\int_a^a f(x)\,dx=0$
(la integral en un pto es 0 siempre)

2) $a,b\in A$, $a<b$, si f es integrable en $[a,b]$ y

$$\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)\,dx$$

Def. $f:I\to\mathbb{R}$ es <u>localmente integrable</u> si es integrable en cualquier intervalo cerrado y acotado contenido en I.

1) $f:I\to\mathbb{R}$ función local. int., $F:I\to\mathbb{R}$.

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt$$

es la integral indefinida de f con origen en a.

- Cualquier función continua o monótona definida en un intervalo es loc. int. en su dominio.
- Cualquier función integrable $\Rightarrow$ es loc. integrable.
- Sea $f:I\to\mathbb{R}$ loc. int.

1) $a,b\in I$, $a<b$, $M\in\mathbb{R}$: $|f(x)|\leq M$ $\forall x\in[a,b]$

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right|\leq M|b-a|$$

2) $a,b,c\in I$ $\Rightarrow$ $\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx$

- TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

Sea $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ integrable y $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ indefinida.

1) F es continua.

2) si f continua en $c \in [a,b] \Rightarrow F$ derivable en c y $F'(c) = f(c)$

Dem

1) sea $c \in [a,b]$

$\{x_n\} \to c$, $x_n \subset [a,b]$

si f es integrable en $[a;b] \Rightarrow \exists M : |f(x)| \leq M \quad \forall x \in [a,b]$

$$|F(x_n) - F(c)| = \left| \int_a^{x_n} f(t)\,dt - \int_a^c f(t)\,dt \right|$$

$$= \left| \int_c^{x_n} f(t)\,dt \right| \leq M\,|c - x_n|$$

si tomamos $\lim_{n\to\infty}$

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} (F(x_n) - F(c)) = \lim_{n\to\infty} M(c - x_n) = 0$$

Por lo que probamos así que F es continua.

2) supongamos que f continua en $[a,b]$, por def:

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in A, \; |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(c)| < \varepsilon/2$

$$|F(x) - F(c) - f(c)(x - c)| = \left| \int_a^x f(t)\,dt - \int_a^c f(t)\,dt - \int_c^x f(c)\,dt \right|$$

$$= \left| \int_c^x f(t)\,dt - \int_c^x f(c)\,dt \right|$$

$$= \left| \int_c^x (f(t) - f(c))\,dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}(x - c)$$

$$< \varepsilon(x - c)$$

Por la caracterización de la derivada, concluimos que f es derivable en c y $F'(c) = f(c)$

TRUQUILLOS

- Sumar y restar
- Conjugado

→ Cambio variable $\left[\begin{array}{l} t = u \\ dt = u'dx \end{array}\right.$

→ La vaca (por partes) $\int u\,dv = uv - \int v\,du$

→ Racionales:

⇝ Den con raíces reales

- Num ≥ den ⇒ dividir $\frac{D}{d} = c + \frac{r}{d}$
- Den = num + 1 ⇒ directa
- Den > num ⇒ $\frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-1)^2} \dots \;/\; \frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x-1)} \dots$

⇝ Den con raíces complejas (irreducibles)

- ∄ raíces reales ⇒ $x^2 + bx + c = (x-d)^2 + k^2$ MAGIA
- Raíces complejas múltiples ⇒ $\frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}$!! grado 2 grado 4
- Cambio de variable

→ Trigonométricas.

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2} \\ \cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x = \frac{1+\cos(2x)}{2} \end{array}\right]$$

sen x sen y = ½ cos(x−y)

$\tan^2 x = \sec^2 x - 1$

$\operatorname{cotan}^2 x = \operatorname{cossec}^2 x - 1$

⇝ $\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x$ (m o n impar) $\left\{\begin{array}{l} y = \cos x \text{ si } m \text{ impar} \\ y = \operatorname{sen} x \text{ si } n \text{ impar} \end{array}\right\}$ coger el par

⇝ $\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x$ (n, m par)

⇝ $\int R(\operatorname{sen} x, \cos x)$ R par ⇒ $y = \tan x$

⇝ $\int R(\operatorname{sen} x, \cos x)$ R racional ⇒ $y = \tan(\frac{x}{2})$

→ Hiperbolicas

⇝ $\int R(\operatorname{senh} x, \cosh x)$ ⇒ $e^x = t$

$\operatorname{senh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ $\cosh x = \dfrac{2}{e^x - e^{-x}}$

$\int \operatorname{senh} x = \cosh x + c$ $\int \cosh x = \operatorname{senh} x + c$

Mateos Pérez, Juan Manuel

CALCULO II, MATEMÁTICAS-INFORMÁTICA

Curso 2017–18 **1Parte derivadas**

1) Calcula el siguiente

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x \arctan(2x) - 2x^2}{x^4}$$

2) Calcula el siguiente

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x + \tan x}{2x}\right)^{\frac{1}{x}}$$

3) Un triángulo rect. con hipotenusa $a > 0$ se hace girar alrededor de uno de sus catetos. Calcular el volumen máximo que puede tener un cono engendrado de esa manera.

4) Calcular $\sqrt{101}$ con un error menor que 10^{-4}, usando el polinomio de Taylor.

5) ¿Es convexa la composición de convexas? ¿Bajo que condiciones se puede asegurar? Pruébalo

Granada, a 26 de abril de 2018

CALCULO II, MATEMÁTICAS-INFORMÁTICA

Curso 2017–18 **2 parte**

(3 ptos.) 1) Función uniformemente continua. Teorema de Heine.

(2 ptos.) 2) Decir si son verdaderas o falsas las siguientes cuestiones justificando la respuesta:

- Sean $f : A \to \mathbb{R}$, $g : B \to \mathbb{R}$ con $f(A) \subset B$ dos funciones uniformemente continuas, entonces $g \circ f$ es uniformemente continua.
- Toda función $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ uniformemente continua está acotada.
- Si $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ es uniformemente continua y tiene límite en $+\infty$, es una función acotada.
- Toda función integrable tiene primitiva. Pon un ejemplo. Parte entera

(2,5 ptos.) 3) Calcula los extremos relativos de la función $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$F(x) = \int_{-x}^{x} \frac{t^2(1-t^2)}{e^{t^2}}\, dt \qquad (x \in \mathbb{R})$$

(2,5 ptos.) 4) Calcula

a) Una primitiva de la función $f(x) = \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\sqrt{\cos x}}$ en el intervalo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

b) $\displaystyle\int \operatorname{sen}(x) e^{-2x}\, dx$.

Granada, a 25 de mayo de 2018