- Topología trivial $T_T = \{\emptyset, X\}$
- Topología discreta $T_D = P(X)$
- Topología Sierpinski $X = \{a, b\}$, $T = \{\emptyset, X, \{a\}\}$
- Topología Cofinita $T_{CF} = \{O \subset X : X - O \text{ finito}\} \cup \{\emptyset\}$
- Topología Usual $T(d) = \{O \subset X : \forall x \in O, \exists \varepsilon > 0 : B(x, \varepsilon) \subset O\}$
- $A \subset X$, $T = \{O \subset X : O \subset A\} \cup \{X\}$
- $A \subset X$, $T = \{O \subset X : A \subset O\} \cup \{\emptyset\}$
- Topología Kolmogorov $T = \{(a, \infty) : a \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$
- $X = \mathbb{R}$, $T = \{O \subset \mathbb{R} : O = A \cup B,\ A \in T_u,\ B \subset I\}$
- Recta Sorgenfrey $T(\beta)$; $\beta = \{[a, b) : a < b,\ a, b \in \mathbb{R}\}$
- Semiplano de Moore $T(\beta)$;

$$\beta = \{B((x,y), \varepsilon) : (x,y) \in X,\ 0 < \varepsilon < y\} \cup \{B((x,y), y) \cup (x, 0) : (x,y) \in X,\ y > 0\}$$

$$[a, b] = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}\right)$$

$$(a, b) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left[a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}\right]$$

1er Ax. Numerabilidad: todo punto tiene una base numerable de entornos

2º Ax. Numerabilidad: si la topología tiene una base numerable.

Propiedades topológicas

- Haussdorff
- Cardinal componentes conexas.
- Compacidad.

ESPAÇIO PROYECTIVO

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^{n+1}-\{0\} \arrow[rr, "g"] \arrow[d, "p"'] \arrow[drr, "f"] & & S^n \arrow[ll, bend right, "i"'] \arrow[d, "p'"] \\
\mathbb{R}P^n = \mathbb{R}^{n+1}-\{0\}/R \arrow[rr, "\hat{f}"'] & & S^n/R
\end{tikzcd}$$

R R'

$x R y \iff \exists \lambda \neq 0 : x = \lambda y$ $x R' y \iff x = \pm y$

$g : (\mathbb{R}^{n+1}-\{0\}, \tau_u) \longrightarrow (S^n, \tau_u)$ $p' : (S^n, \tau_u) \longrightarrow (S^n/R, \tau_u/R)$

$g(x) = \dfrac{x}{\|x\|}$ $x \longmapsto [x]$

$f = p' \circ g$

Además, $R_f = R$

$x R_f y \iff f(x) = f(y) \iff p'(g(x)) = p'(g(y)) \iff p'\left(\frac{x}{\|x\|}\right) = p'\left(\frac{y}{\|y\|}\right)$

$\iff \dfrac{x}{\|x\|} = \pm \dfrac{y}{\|y\|} \iff x = \pm \underbrace{\dfrac{\|x\|}{\|y\|}}_{\lambda} y \iff x R y$

Además, f identificación $\iff \begin{cases} \text{sobre} \\ \text{continua} \\ \text{abierta} \end{cases}$

f sobre por ser composición de sobres esto es, p' es proyección $\Rightarrow p'$ sobre, y g sobre porque $g \circ i = Id_{S^n}$.

f continua por ser composición de continuas.

f abierta porque lleva abiertos en abiertos.

$\Rightarrow \hat{f}$ homeomorfismo

$$[a,b] = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(a-\frac{1}{n}, b+\frac{1}{n}\right)$$

$x \leq b \iff x < b+\frac{1}{n} \quad \forall n$

$x \geq a \iff x > a-\frac{1}{n} \quad \forall n$

$a \leq x \leq b \iff a-\frac{1}{n} < x < b+\frac{1}{n} \quad \underline{\underline{\forall n}}$

$$(a,b) = \bigcup_{\substack{n\in\mathbb{N} \\ n > \frac{2}{b-a}}} \left[a+\frac{1}{n}, b-\frac{1}{n}\right]$$

$a+\frac{1}{n} < b-\frac{1}{n}$

$\frac{2}{n} < b-a$

$n > \frac{2}{b-a}$

$x < b \iff x \leq b-\frac{1}{n}$ para alg' n

Prueba Tema 2. Topología I
Doble grado en ingeniería informática y matemáticas
5 de diciembre de 2019

1.– Sean $X \subset \mathbb{R}^2$ el conjunto:

$$X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 1\},$$

y T la topología en X inducida por la topología usual de $\mathbb{R}^2$. Definimos una relación de equivalencia R en X de modo que las clases de equivalencia son:

$$[(x,y)] = \begin{cases} \{(x,0),(x,1)\}, & x \in (-\infty,-1) \cup [1,+\infty), \\ \{(x,y)\}, & x \in [-1,1). \end{cases}$$

1. ¿Es $(X/R, T/R)$ un espacio Hausdorff?
2. ¿Es la proyección $p : (X,T) \to (X/R, T/R)$ una aplicación abierta?
3. ¿Es la proyección $p : (X,T) \to (X/R, T/R)$ una aplicación cerrada?

ESPACIOS TOPOLÓGICOS

FRANCISCO URBANO

1. Introducción

Cronología de los Orígenes de la Topología

- 1679 Leibniz (1646-1716) crea la expresión *Analysis situs.*
- 1736 Euler (1707-1783) resuelve el problema de los puentes de Konigsberg.
- 1750 Euler descubre el teorema sobre los poliedros y dá una tentativa de demostración.
- 1794 Legendre (1752-1833) demuestra el teorema de Euler en un caso particular.
- 1799 Gauss (1777-1855) demuestra el teorema fundamental del Algebra usando un argumento de naturaleza topológica.
- 1813 Lhuilier (1750-1840) decubre poliedros en los que la relación de Euler no es válida. Noción de género de un poliedro.
- 1836 Listing (1808-1882) crea el término *topología.*
- 1847 Von Staudt (1798-1868) descubre la hipótesis bajo la cual el enunciado de Euler es válido; surge así el concepto de superficie poliédrica simplemente conexa.
- 1850 Schläfli (1814-1895) extiende el teorema de Euler a espacios de n-dimensiones.
- 1858 Listing y Möbius (1790-1868) descubren la cinta de Möbius.
- 1871 Betti (1823-1892) define el orden de conexión de variedades de dimensión n.
- 1874 Schläfli y Klein (1849-1925) establecen la noción de no-orientabilidad del plano proyectivo.
- 1877 Cantor establece una correspondencia biunivoca entre $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^n$.
- 1882 Klein construye la botella de Klein, primera superficie compacta no orientable, depués del plano proyectivo.
- 1887 Jordan (1838-1922) publica su teorema sobre las curvas cerradas.
- 1893 Poincaré (1854-1912).

De una carta de Leibniz a Huygens el 8 de Septiembre de 1679:

> Después de todos los progresos que he hecho en estas materias, no estoy en absoluto contento del álgebra, porque no proporciona ni los caminos más cortos, ni las más bellas construcciones de la geometría. Es por lo que creo que nos

> falta otro tipo de análisis propiamente geométrico o lineal que exprese directamente la localización, así como el álgebra expresa la magnitud.

Henri Poincaré, de forma intuitiva y notable, dió una definición, en absoluto técnica, *de lo que es la topología*:

> Comúnmente los geómetras distinguen dos clases de geomatrías, la primera de las cuales califican de métrica y la segunda de proyectiva; la geomatría métrica está fundada en la noción de distancia; en ella dos figuras se consideran equivalentes cuando son *iguales* en el sentido que los matemáticos dan a esta palabra; la geometría proyectiva está fundada en la noción de linea recta. Para que, en ella, dos figuras sean consideradas equivalentes, basta que una sea la perspectiva de la otra. A veces este segundo cuerpo de doctrina se ha denominado geometría cualitativa; lo es, en efecto, si se la opone a la primera: es claro que la medida, la cantidad, desempeñan en ella un papel menos importante. Sin embargo, no es enteramente así. El hecho de que una línea sea recta no es puramente cualitativo; no se podría asegurar que una línea es recta sin realizar mediciones, o sin deslizar sobre esta línea un instrumento llamado regla, que es una especie de instrumento de medida.
>
> Pero hay una tercera geometría, en la cual la cantidad está suprimida por completo, y que es puramente cualitativa: *el Analysis situs o la topología.* En esta disciplina, dos figuras son equivalentes, siempre que podamos pasar de una a otra por medio de una deformación continua, cualesquiera sea la ley de esta deformación, a condición de que respete la continuidad. Así, un circulo es equivalente a una elipse o también a una curva cerrada cualquiera, pero no es equivalente a un segmento de recta, porque tal segmento no es cerrado; una esfera es equivalente a una superficie convexa cualquiera pero no es equivalente a un toro, porque en un toro hay una abertura que la esfera no posee. Supongamos un modelo cualquiera y la copia de este modelo realizada por un dibujante poco diestro; las proporciones están alteradas, las rectas, trazadas por una mano temblorosa, han sufrido desviaciones y presentan curvaturas. Desde el punto de vista de la geometría métrica, y aun desde el de la geometría proyectiva, las dos figuras no son equivalentes; por el contrario, lo son, desde el punto de vista de la topología.
>
> Lo que despierta en nosotros el interés por la topología es que en ella interviene verdaderamente la intuición geométrica. Cuando en un teorema de geometría métrica

apelamos a esta intuición, es porque resulta imposible estudiar las propiedades métricas de una figura haciendo abstracción de sus propiedades cualitativas, es decir, de aquellas que son el objeto propio de la topología. Se ha dicho a menudo que la geometría es el arte de razonar bien sobre figuras mal hechas. Esto no es una humorada, sino una verdad que merece se reflexione sobre ella. ¿Pero qué es una figura mal hecha? Es aquella que puede ejecutar el dibujante poco diestro del que hablábamos antes. Él altera las proporciones más o menos groseramente, sus líneas rectas tienen zigzags inquientantes, sus circulos presentan protuberancias faltas de gracia. Todo esto no importa: no perturbará en lo más mínimo al geómetra, ni le impedirá razonar bien.

Pero lo que no debe ocurrir, es que el artista inexperto represente una curva cerrada por medio de una curva abierta, tres líneas que se cortan en un punto por medio de tres líneas que no tengan ningún punto en común, una superficie con abertura por medio de una superficie sin abertura. En tal caso no se podría utilizar más su figura, y el razonamiento se haría imposible. La intuición no habría sido obstaculizada por los defectos de dibujo que sólo interesarían a la geometría métrica o proyectiva; ambas se harán imposibles ya que estos defectos tienen que ver con la topología.

Esta observación bien simple nos muestra el verdadero papel de la intuición geométrica; es para favorecer tal intuición que el geómetra tiene necesidad de dibujar figuras o, por lo menos, representárselas mentalmente. Ahora bien, si desprecia las propiedades métricas o proyectivas de estas figuras, si sólo se atiene a sus propiedades puramente cualitativas, solamente entonces la intuición geométrica interviene verdaderamente. No es que quiera decir con esto que la geometría métrica reposa sobre la lógica pura; pero éstas son intuiciones de otra naturaleza, análogas a las que juegan un papel esencial en aritmética y álgebra.

2. Espacios Topológicos

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una aplicación y $t_0 \in \mathbb{R}$ un número real. La aplicación f es continua en t_0 si $\forall \epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $t \in \mathbb{R}$ y $|t - t_0| < \delta$ entonces $|f(t) - f(t_0)| < \epsilon$.

El primer objetivo en este epígrafe es generalizar este concepto de continuidad a aplicaciones entre conjuntos que posean una cierta estructura que me permita medir distancia entre puntos, tal y como pasa en $\mathbb{R}$.

Este paso importante fue dado por Frechet en 1906 cuando definio el concepto de espacio métrico.

f inyectiva $\iff \forall x,y \in X,\ x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$

f sobre $\iff \forall y \in Y,\ \exists x \in X : f(x) = y$

Definición 1. Un espacio métrico es un par (X,d) donde X es un conjunto y $d : X \times X \to \mathbb{R}$ una aplicación cumpliendo:

(1) $d(x,y) \geq 0$,
(2) $d(x,y) = 0$ si y sólo si $x = y$,
(3) $d(x,y) = d(y,x)$,
(4) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$,

donde x, y, z son puntos arbitrarios de X.

A d se le llama una distancia en X.

Ejemplo 1. *Sea* $(\mathbb{R}^n, d)$ *donde*

$$d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}, \quad \forall x,y \in \mathbb{R}^n,$$

donde $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$. *Entonces* $(\mathbb{R}^n, d)$ *es un espacio métrico y a d se le llama la distancia Euclídea en* $\mathbb{R}^n$. *Conviene observar que en el caso* $n = 1$, $d(x.y) = |x - y|$, $\forall x,y \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 2. *Sea* $X = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \mid f \text{es continua}\}$. *Entonces d y d' definidas por*

$$d(f,g) = \int_0^1 |f(t) - g(t)|\,dt, \quad d'(f,g) = \sup\{|f(t) - g(t)| \mid t \in [0,1]\}$$

son distancias en X.

Ejemplo 3. *Sea X un conjunto y d definida por*

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & si\, x = y \\ 1 & si\, x \neq y. \end{cases}$$

Entonces d es una distancia en X llamada la distancia discreta.

Haciendo uso del concepto de espacio métrico, Frechet definió la continuidad de aplicaciones entre espacios métricos de la siguiente manera.

Continua 1

Definición 2. Sea $f : (X,d) \to (X',d')$ una aplicación y x_0 un punto de X. La aplicación f es continua en x_0 si $\forall \epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $x \in X$ y $d(x,x_0) < \delta$ entonces $d'(f(x), f(x_0)) < \epsilon$.

Si (X,d) es un espacio métrico, $x \in X$ y $\epsilon > 0$, se define la bola de centro x y radio ϵ y se representa por $B(x,\epsilon)$ por

$$B(x,\epsilon) = \{y \in X \mid d(y,x) < \epsilon\}.$$

Observemos que la definición 2 equivale a la siguiente

Continua 2

Definición 3. Sea $f : (X,d) \to (X',d')$ una aplicación y x_0 un punto de X. La aplicación f es continua en x_0 si $\forall \epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $f(B(x_0,\delta)) \subset B'(f(x_0),\epsilon)$.

continua

$f(B(x_0,\delta)) \subset B'(f(x_0),\epsilon)$

Haciendo uso del concepto de bola, vamos a definir el concepto de subconjunto abierto de un espacio métrico.

Definición 4. Si (X,d) es un espacio métrico, un subconjunto $O \subset X$ se llama abierto si $\forall\, x \in O$ existe un $\epsilon > 0$ tal que $B(x,\epsilon) \subset O$.

abierto

$\forall x \in O\ \exists \epsilon > 0 :$

$B(x,\epsilon) \subset O$

$A \subset f^{-1}(f(A))$ "=" $\Leftrightarrow$ sobre

$f(f^{-1}(B)) \subset B$ "=" $\Leftrightarrow$ inyectiva

Es un ejercicio muy sencillo probar que las bolas de un espacio métrico son abiertos de dicho espacio, sin mas que usar la desigualdad triangular (4ª propiedad en la definición 1).

Ahora el concepto de abierto nos permite caracterizar la continuidad sin alusión directa a las distancias.

Continua 3

Proposición 1. *Sea $f : (X,d) \to (X',d')$ una aplicación y x_0 un punto de X. La aplicación f es continua en x_0 si y sólo si para todo abierto O' de X' con $f(x_0) \in O'$ existe un abierto O de X con $x_0 \in O$ tal que $f(O) \subset O'$.*

Usando la Proposición 1, parece que sería posible definir continuidad de aplicaciones entre espacios dotados no de una distancia, sino de una estructura consistente en un conjunto de abiertos. Esta idea la desarrollo Hausdorff dando lugar a la definición de espacio topológico. Es razonable que dicho conjunto de abiertos debería de cumplir una serie de propiedades.

Proposición 2. *Sea (X,d) un espacio métrico y $\mathcal{T}(d) = \{O \subset X \mid O \text{ es abierto}\}$. Entonces $\mathcal{T}(d)$ cumple las siguientes propiedades:*

(1) $X, \emptyset \in \mathcal{T}(d)$.

(2) Si $\{O_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\} \subset \mathcal{T}(d)$, entonces $\cup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda \in \mathcal{T}(d)$.

(3) Si $\{O_i \mid i = 1, \ldots, n\} \subset \mathcal{T}(d)$, entonces $\cap_{i=1}^n O_i \in \mathcal{T}(d)$.

Ejemplo 4. *(1) Los abiertos del espacio métrico $\mathbb{R}$ con la distancia Euclídea son las uniones numerables de intervalos abiertos.*

(2) Los abiertos del espacio métrico discreto son los subconjuntos de dicho espacio.

(3) Consideramos en $\mathbb{R}^2$ la distancia Euclídea d y la distancia d' dada por

$$d'(x,y) = max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}, \quad \forall x = (x_1,x_2), y = (y_1,y_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Entonces, aunque las bolas de ambas distancias son diferentes, es fácil comprobar que $\mathcal{T}(d) = \mathcal{T}(d')$.

El ejemplo 4,(3) pone de manifiesto que la continuidad de funciones entre espacios métricos en realidad depende de la familia $\mathcal{T}(d)$ asociada a la distancia d. Esta consideración sugiere la siguientes definiciones.

Definición 5. Un espacio topológico es un par $(X,\mathcal{T})$ donde X es un conjunto y $\mathcal{T}$ es una familia de subconjuntos de X cumpliendo las siguientes propiedades:

(1) $X, \emptyset \in \mathcal{T}$.

(2) Si $\{O_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\} \subset \mathcal{T}$, entonces $\cup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda \in \mathcal{T}$.

(3) Si $\{O_i \mid i = 1, \ldots, n\} \subset \mathcal{T}$, entonces $\cap_{i=1}^n O_i \in \mathcal{T}$.

A $\mathcal{T}$ le llamaremos una topología en X y a los elementos de $\mathcal{T}$ les llamaremos abiertos del espacio.

Continua 3

Definición 6. Sea $f : (X,\mathcal{T}) \to (X',\mathcal{T}')$ una aplicación entre espacios topológicos y $x_0 \in X$. Diremos que f es continua en x_0 si para todo abierto $O' \in \mathcal{T}'$ con $f(x_0) \in O'$ existe un abierto $O \in \mathcal{T}$ con $x_0 \in O$ y $f(O) \subset O'$.

Recta de Sorgenfrey:

Sea $\beta = \{[a,b) : a < b \text{ y } a,b \in \mathbb{R}\}$

Entonces $\tau(\beta)$.

Ejemplo 5. *(1) Si (X,d) es un espacio métrico, entonces $(X,\mathcal{T}(d))$ es un espacio topológico.*

(2) Si X es cualquier conjunto, $\mathcal{T}_T = \{\emptyset, X\}$ es una topología en X llamada trivial.

(3) Sea $X = \{a,b\}$ y $\mathcal{T} = \{X,\emptyset,\{a\}\}$. Entonces $\mathcal{T}$ es una topología en X llamada de Sierpinski.

(4) Sea X cualquier conjunto y $\mathcal{T}_{CF} = \{O \subset X \,|\, X - O \text{ es finito}\} \cup \{\emptyset\}$. Entonces $\mathcal{T}_{CF}$ es una topología en X llamada cofinita.

Una cuestión razonable es: Dado un espacio topológico $(X,\mathcal{T})$, ¿ existe una distancia d en X tal que $\mathcal{T}(d) = \mathcal{T}$?. La respuesta es no, como lo prueba la topología de Sierpinski.

3. Base de una topología

Como puede comprobarse analizando la topología usual de $\mathbb{R}^2$ (esto es la topología asociada a la distancia Euclídea de $\mathbb{R}^2$), los abiertos de una topología son en general numerosos y dificiles de describir. A veces es fácil describir una subfamilia de los mismos y generar el resto a partir de esta subfamilia. Por ejemplo en $\mathbb{R}$ con su topología usual (ver Ejemplo 4(1)). Esta observación sugiere la siguiente definición:

Definición 7. Sea $(X,\mathcal{T})$ un espacio topológico. Un base de la topología $\mathcal{T}$ es una familia $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ tal que para todo abierto $O \in \mathcal{T}$ existe $\{B_i \,|\, i \in I\} \subset \mathcal{B}$ tal que

$$O = \cup_{i\in I} B_i.$$

$O = \bigcup_{i \in I} B_i$

Es decir la topología se genera de la base haciendo todas las posibles uniones de elementos de la misma.

Dem que es base de una topología que te dan

Proposición 3. *Sea $(X,\mathcal{T})$ un espacio topológico. Una familia $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ es una base de la topología $\mathcal{T}$ si y sólo si para todo abierto $O \in \mathcal{T}$ y todo punto $x \in O$ existe un $B \in \mathcal{B}$ con $x \in B \subset O$.*

$\forall x \in O,\ \forall O \in \tau$

$x \in B \subset O$

Usando esta proposición, es claro que el conjunto de bolas de un espacio métrico (X,d) es una base de la topología $\mathcal{T}(d)$.

Tambien es claro que la topologia discreta en X tiene por base a $\mathcal{B} = \{\{x\} \,|\, x \in X\}$.

En el siguiente resultado se estudian propiedades que tiene cualquier base de una topología.

Dem que es base de alguna topología

Proposición 4. *Sea $(X,\mathcal{T})$ un espacio topológico y $\mathcal{B}$ una base de $\mathcal{T}$. Entonces*

(1) $X = \cup_{B\in\mathcal{B}} B$.

(2) Para todos $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ y $x \in B_1 \cap B_2$ existe $B_3 \in \mathcal{B}$ tal que

$$x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2.$$

$X = \bigcup_{B \in \beta} B$

$x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$

Lo interesante de estas propiedades es que son suficientes para que una familia de subconjuntos cumpliendolas genere una topología.

Proposición 5. *Sea X un conjunto y $\mathcal{B}$ una familia de subconjuntos de X cumpliendo*

$T_K \subset T_u$

$O \in T_K,\ O = \bigcup_{B \in \beta(T_u)} B$

$x \in B_1 \subset B_2$

$\uparrow T_u \quad \uparrow T_K$

$T_K \subset T_u \subset T_{SORGEN}$

$T_{CF} \subset$

S familia de abiertos. $\mathcal{B}(S) = \{$Intersecciones finitas de S$\}$ es base.

$T = \{ \bigcup_{i \in I} (\bigcap_{j=1}^{n} B_j) : B_j \in S \}$ base $\overset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ subbase

Dado X y S una familia $\Rightarrow \exists !$ top en X donde S subbase.

(1) $X = \cup_{B \in \mathcal{B}} B$.
(2) Para todos $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ y $x \in B_1 \cap B_2$ existe $B_3 \in \mathcal{B}$ tal que

$$x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2.$$

Entonces existe una única topología $\mathcal{T}(\mathcal{B})$ en X que posee a $\mathcal{B}$ como base. A dicha topología le llamaremos generada por $\mathcal{B}$ y viene dada por

$$\mathcal{T}(\mathcal{B}) = \{\text{uniones de elementos de } \mathcal{B}\}.$$

Para ilustrar la Proposición 5, vamos a introducir un nuevo espacio topológico llamado el semiplano de Moore.

Ejemplo 6. *Sea $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0\}$. Definimos la siguiente familia de subconjuntos de X:*

$$\mathcal{B} = \{B((x,y),\epsilon) \mid (x,y) \in X,\, 0 < \epsilon < y\}$$
$$\cup \{B((x,y),y) \cup \{(x,0)\} \mid (x,y) \in X,\, y > 0\},$$

donde $B((x,y),\epsilon)$ es la bola Euclídea de centro (x,y) y radio ϵ. Entonces $\mathcal{B}$ es base de topología y a $(X, \mathcal{T}(\mathcal{B}))$ se le llama el semiplano de Moore.

4. Cerrados

Definición 8. Un subconjnto C de un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ es cerrado si $X - C \in \mathcal{T}$. Esto es los subonjuntos cerrados de un espacio topológico son los complemetarios de los abiertos.

cerrado
$X - C \in \mathcal{T}$

Es muy sencillo probar el siguiente resultado qur describe las propiedades de los subconjuntos cerrados de un espacio.

Proposición 6. *Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y $\mathcal{C}(\mathcal{T})$ la familia de sus subconjuntos cerrados. Entonces se cumplen las siguientes propiedades:*

(1) $X, \emptyset \in \mathcal{C}(\mathcal{T})$.
(2) *Si* $\{C_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\} \subset \mathcal{C}(\mathcal{T})$, *entonces* $\cap_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda \in \mathcal{C}(\mathcal{T})$.
(3) *Si* $\{C_i \mid i = 1, \ldots, n\} \subset \mathcal{C}(\mathcal{T})$, *entonces* $\cup_{i=1}^{n} C_i \in \mathcal{C}(\mathcal{T})$.

Ejemplo 7. (1) *Si (X,d) es un espacio métrico, entonces un subconjunto C de X es cerrado de $(X,\mathcal{T})$ si y sólo si para todo punto $x \notin C$ existe $\epsilon > 0$ tal que $B(x,\epsilon) \cap C = \emptyset$.*
(2) *Si $(X, \mathcal{T}_T)$ es el espacio trivial, entonces $\mathcal{C}(\mathcal{T}_T) = \{X, \emptyset\}$.*
(3) *Si $(X, \mathcal{T}_D)$ es el espacio discreto, entonces $\mathcal{C}(\mathcal{T}_D) = \mathcal{T}_D$.*
(4) *Si $\mathcal{T}_{CF}$ es la topología cofinita en X, entonces*

$$\mathcal{C}(\mathcal{T}_{CF}) = \{\text{subconjuntos finitos de } X\} \cup \{X\}.$$

cerrado
$\forall x \notin C \ \exists \ \varepsilon > 0:$
$B(x,\varepsilon) \cap C = \emptyset$
$\forall x \in C, \forall U \in \mathcal{U}^x,$
$U \cap C \neq \emptyset$

En estas condiciones, es un ejercicio muy fácil probr el siguiente resultado:

Proposición 7. *Sea X un conjunto y $\mathcal{C}$ una familia de subconjuntos de X cumpliendo las siguientes propiedades:*

(1) $X, \emptyset \in \mathcal{C}$.
(2) *Si* $\{C_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\} \subset \mathcal{C}$, *entonces* $\cap_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda \in \mathcal{C}$.
(3) *Si* $\{C_i \mid i = 1, \ldots, n\} \subset \mathcal{C}$, *entonces* $\cup_{i=1}^{n} C_i \in \mathcal{C}$.

La preimagen de los abiertos para obtener la top inicial nos da una subbase.

Entonces existe una única topología $\mathcal{T}(\mathcal{C})$ en X que tiene por cerrados a los subconjuntos de $\mathcal{C}$. Dicha topología es definida por

$$\mathcal{T}(\mathcal{C}) = \{X - C \mid C \in \mathcal{C}\}.$$

5. Entornos

Hasta ahora hemos hablado de topología considerando los subconjuntos abiertos del espacio (o los cerrados). En este epígrafe vamos a estudiar la información que la topología tiene alrededor de un punto del espacio. Aunque las topologías mas naturales dan la misma información alrededor de cualquier punto (por ejemplo la topología usual de $\mathbb{R}^n$), no siempre es así y a veces el comportamiento de la topología altededor de puntos distintos es muy diferente. Para esto es importante el siguiente concepto.

cualquier superconjunto de un abierto

Definición 9. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y $x \in X$ un punto de X. Un entorno de x es un subconjunto V de X cumpliendo la siguiente propiedad

entorno: $\forall x \in V$ $\exists O \in \mathcal{T}: x \in O \subset V$

$$\text{existe un abierto} \quad O \in \mathcal{T} \quad \text{tal que} \quad x \in O \subset V.$$

Es claro que cualquier abierto que contenga a x es un entorno suyo.

Si representamos por $\mathcal{U}^x$ al conjunto de los entornos de x, entonces se cumplen las siguientes propiedades:

(1) Para todo $V \in \mathcal{U}^x$, se tiene que $x \in V$.
(2) Si $V \in \mathcal{U}^x$ y $V \subset W$, entonces $W \in \mathcal{U}^x$.
(3) Si $V, W \in \mathcal{U}^x$, entonces $V \cap W \in \mathcal{U}^x$.
(4) Si $V \in \mathcal{U}^x$ existe $W \in \mathcal{U}^x$ tal que $V \in \mathcal{U}^y$ para todo $y \in W$.

es abierto si es entorno de todos sus puntos

A la familia $\mathcal{U}^x$ le llamamos el sistema de entornos de x.

En estas condiciones los abiertos y cerrados de un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ se caracterizan en términos de entornos de la siguiente manera:

O abierto $\forall x \in O$ $\exists V \in \mathcal{U}^x: x \in V \subset O$

$O \subset X$ es abierto si y sólo si para todo $x \in O$ existe $V \in \mathcal{U}^x$ tal que $V \subset O$.

C cerrado. $\forall x \notin C$ $\exists V \in \mathcal{U}^x: V \cap C = \emptyset$

$C \subset X$ es cerrado si y sólo si para todo $x \notin C$ existe $V \in \mathcal{U}^x$ tal que $V \cap C = \emptyset$.

De manera similar al caso de base de topología, tambien para los entornos podemos decir que no es necesario describir todos los entornos de un punto, sino que haciendo uso de la propiedad (2) de los entornos vamos a dar la siguiente definición.

Definición 10. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y $x \in X$. Una base de entornos del punto x es una familia $\mathcal{B}^x \subset \mathcal{U}^x$ con la propiedad

base entornos: $\forall V \in \mathcal{U}^x$ $\exists W \in \mathcal{B}^x: W \subset V$

$$\text{para todo} \quad V \in \mathcal{U}^x \quad \text{existe} \quad W \in \mathcal{B}^x \quad \text{tal que} \quad W \subset V.$$

Es claro que los entornos se construyen a partir de una base de la siguiente manera

$$\mathcal{U}^x = \{V \subset X \mid W \subset V \quad \text{parea algún} \quad W \in \mathcal{B}^x\}.$$

A los elementos de $\mathcal{B}^x$ se les llama entornos básicos de x.

$x \in B \subset O \subset \beta^x \subset \mathcal{U}^x$

Un primer ejemplo de base de entornos es:

$$\mathcal{B}^x = \mathcal{U}^x \cap \mathcal{T},$$

esto es el conjunto de entornos abiertos de x.

Si $\mathcal{B}^x$ es una base de entornos de x, entonces se cumplen las siguientes propiedades:

(1) Para todo $W \in \mathcal{B}^x$, se tiene que $x \in W$.
(2) Si $W_1, W_2 \in \mathcal{B}^x$, entonces existe $W_3 \in \mathcal{B}^x$ tal que $W_3 \subset W_1 \cap W_2$.
(3) Si $W \in \mathcal{B}^x$ existe $W_0 \in \mathcal{B}^x$ tal que para todo $y \in W_0$ existe $W' \in \mathcal{B}^y$ con $W' \subset W$.

es abierto si es entorno básico de todos sus puntos

En estas condiciones los abiertos y cerrados de un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ se caracterizan en términos de entornos básicos de la siguiente manera:

$O \subset X$ es abierto si y sólo si para todo $x \in O$ existe $W \in \mathcal{B}^x$ tal que $W \subset O$.

$C \subset X$ es cerrado si y sólo si para todo $x \notin C$ existe $W \in \mathcal{B}^x$ tal que $W \cap C = \emptyset$.

abierto:
$\forall x \in O \ \exists W \in \beta^x : W \subset O$
cerrado:
$\forall x \notin C \ \exists W \in \beta^x : W \cap C = \emptyset$

6. Posición de un punto respecto a un subconjunto

Definición 11. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico, x un punto suyo y $A \subset X$ un subconjunto.

(1) x es un punto interior a A si existe $V \in \mathcal{U}^x$ tal que $V \subset A$.
(2) x es un punto adherente a A si para todo $V \in \mathcal{U}^x$ se cumple que $V \cap A \neq \emptyset$.
(3) x es un punto frontera de A si para todo $V \in \mathcal{U}^x$ se cumple que $V \cap A \neq \emptyset$ y $V \cap (X - A) \neq \emptyset$.

interior
si $\exists V \in \mathcal{U}^x : V \subset A$
adherente:
$\forall V \in \mathcal{U}^x, V \cap A \neq \emptyset$
frontera
$\forall V \in \mathcal{U}^x, V \cap A \neq \emptyset$
$V \cap (X - A) \neq \emptyset$

Representaremos por

(1) $A^o = \{x \in X \mid x \text{ es interior a } A\}$,
(2) $\bar{A} = \{x \in X \mid x \text{ is adherente a } A\}$,
(3) $Fr(A) = \{x \in X \mid x \text{ es frontera de } A\}$,

y lo llamaremos el interior, la adherencia y la frontera de A respectivamente.

De la definición anterior es un ejercicio simple comprobar que

$$Fr(A) = \bar{A} \cap \overline{X - A}, \quad X - A^o = \overline{X - A}, \quad X - \bar{A} = (X - A)^o.$$

En los siguientes resultados se exponen propiedades de los anteriores subconjuntos.

Proposición 8. *Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Entonces dados subconjuntos $A, B \subset X$ se cumple:*

(1) $A^o \subset A$.
(2) Si $A \subset B$, entonces $A^o \subset B^o$.
(3) $(A^o)^o = A^o$.
(4) $A^o \cap B^o = (A \cap B)^o$.
(5) $A^o \cup B^o \subset (A \cup B)^o$.

(6) $A^o = \cup\{O \subset X \mid O \in \mathcal{T} \, y \, O \subset A\}$.
(7) $A \in \mathcal{T}$ *si y sólo si* $A = A^o$.

Conviene resaltar que (6) nos asegura que A^o es el mayor abierto contenido en A.

Proposición 9. *Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Entonces dados subconjuntos $A, B \subset X$ se cumple:*

(1) $A \subset \bar{A}$.
(2) *Si* $A \subset B$, *entonces* $\bar{A} \subset \bar{B}$.
(3) $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$.
(4) $\bar{A} \cup \bar{B} = \overline{(A \cup B)}$.
(5) $\overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$.
(6) $\bar{A} = \cap\{F \subset X \mid F \text{ es cerrado } y \, A \subset F\}$.
(7) A *es cerrado si y sólo si* $A = \bar{A}$.

Conviene resaltar que (6) nos asegura que $\bar{A}$ es el menor cerrado que contiene a A.

Ejemplo 8. *Si consideramos el espacio topológico $\mathbb{R}$ con su topología usual y los subconjuntos $A = [0,1]$, $B = [1,2]$, entonces se tiene que*

$$A^o \cup B^o = (0,1) \cup (1,2) \quad y \quad (A \cup B)^o = (0,2),$$

lo que prueba que la igualdad en Proposición 8,(5) no tiene que darse.

Analogamente, si $A = (0,1)$, $B = (1,2)$, entonces se tiene que

$$\bar{A} \cap \bar{B} = \{1\} \quad y \quad \overline{A \cap B} = \emptyset,$$

lo que prueba que la igualdad en Proposición 9,(5) no tiene que darse.

Proposición 10. *Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y A un subconjunto de X. Entonces:*

(1) $\bar{A} = A^o \cup Fr(A)$ *(unión disjunta)* .
(2) $X = A^o \cup Fr(A) \cup (X - A)^o$.

Definición 12. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y A un subconjunto suyo. Un punto de acumulación de A es un punto $x \in X$ tal que para todo entorno $V \in \mathcal{U}^x$ de x se cumple que

$$(V - \{x\}) \cap A \neq \emptyset.$$

Al conjunto de puntos de acumulación de A lo representaremos por A'.

Si decimos que un punto $x \in A$ es aislado si existe un entorno suyo $V \in \mathcal{U}^x$ cumpliendo $V \cap A = \{x\}$, entonces es fácil comprobar que

$$\bar{A} = A \cup A', \quad \bar{A} = \{\text{puntos aislados de } A\} \cup A',$$

donde la segunda unión es disjunta.

Pto acumulación: $x \in X$: $\forall V \in \mathcal{U}^x$, $(V - \{x\}) \cap A \neq \emptyset$

Pto aislado: $\exists V \in \mathcal{U}^x$, $V \cap A = \{x\}$

7. Topología inducida. Subespacios topológicos.

Muchos espacios topológicos interesantes aparecen como subespacios de otros. Un caso particularmente importante son los subespacios de $\mathbb{R}^n$ con su topología ususal. En esta sección estudiaremos como una topología induce en los subconjuntos del espacio estructura de espacio topológico y relacionaremos ambas topologías.

Proposición 11. *Sea* $(X, \mathcal{T})$ *un espacio topológico y* $A \subset X$ *un subconjunto. Entonces*

$$\mathcal{T}_A = \{O \cap A \,|\, O \in \mathcal{T}\}$$

es una topología en A *llamada la topología inducida por* $\mathcal{T}$ *en* A*. Al par* $(A, \mathcal{T}_A)$ *se le llama subespacio topológico de* $(X, \mathcal{T})$*.*

Conviene poner de manifiesto que

(1) Si $O \in \mathcal{T}$ y $O \subset A$, entonces $O \in \mathcal{T}_A$.
(2) Si $A \in \mathcal{T}$, entonces $\mathcal{T}_A \subset \mathcal{T}$ y $\mathcal{T}_A = \{O \in \mathcal{T} \,|\, O \subset A\}$.

Proposición 12. *Sea* $(X, \mathcal{T})$ *un espacio topológico y* $(A, \mathcal{T}_A)$ *un subespacio suyo. Entonces:*

(1) *Los cerrados de* $(A, \mathcal{T}_A)$ *vienen dados por*

$$\{F \cap A \,|\, F \text{ es cerrado de } X\}.$$

(2) *Si* $\mathcal{B}$ *es una base de la topología* $\mathcal{T}$*, entonces*

$$\mathcal{B}_A = \{B \cap A \,|\, B \in \mathcal{B}\}$$

es una base de la topología $\mathcal{T}_A$*.*

(3) *Si* $a \in A$ *y* $\mathcal{U}^a$ *es el sistema de entornos de* a *en* $(X, \mathcal{T})$*, entonces*

$$\mathcal{U}^a_A = \{V \cap A \,|\, V \in \mathcal{U}^a\}$$

es el sistema de entornos de a *en* $(A, \mathcal{T}_A)$*.*

(4) *Si* $a \in A$ *y* $\mathcal{B}^a$ *es una base de entornos de* a *en* $(X, \mathcal{T})$*, entonces*

$$\mathcal{B}^a_A = \{W \cap A \,|\, W \in \mathcal{B}^a\}$$

es una base de entornos de a *en* $(A, \mathcal{T}_A)$*.*

Proposición 13. *Sea* $(X, \mathcal{T})$ *un espacio topológico,* $(A, \mathcal{T}_A)$ *un subespacio suyo y* $B \subset A$*. Entonces:*

(1) $(\bar{B})_A = \bar{B} \cap A$. $\qquad (\bar{B})_A = \bar{B} \cap A$
(2) $B^o \cap A \subset (B^o)_A$. $\qquad (B^\circ)_A = ((B)_A)^\circ$
(3) $(Fr(B))_A \subset Fr(B) \cap A$. $\qquad (Fr(B))_A = (\bar{B})_A - (B^\circ)_A$

En (2) y (3) de la Proposición 13 no tiene por qué darse la igualdad, como lo prueba el siguiente ejemplo:

Sea $(X, \mathcal{T}) = (\mathbb{R}$, topología usual$)$ y $B = A = [0, 1]$. Entonces

$$B^o \cap A = (0, 1), \quad (B^o)_A = [0, 1], \quad (Fr(B))_A = \emptyset, \quad Fr(B) \cap A = \{0, 1\}.$$

$(B^o)_A = (B_A)^\circ$

Sucesiones $\quad \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \longrightarrow x \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \Rightarrow |x_n - x| < \varepsilon$

$\{x_n\} \subset X \longrightarrow x$ si $\forall U \in \mathcal{U}^x, \ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tq $x_n \in U \ \forall n \geq n_0$

En todo esp. top hay sucesiones convergentes.

(X, T) Hausdorff $\quad \forall x, y \in X, \ x \neq y \Rightarrow \exists V \in \mathcal{U}^x, U \in \mathcal{U}^y$ tq $U \cap V = \emptyset$

X, T Hausdorff, $Y \subset X \Rightarrow (Y, T|_Y)$ Hausdorff

APLICACIONES CONTINUAS

FRANCISCO URBANO

1. Aplicaciones Continuas

La Proposición 1 del tema Espacios Topológicos sugiere la siguiente

continua
$\forall O' \in \tau'$ con $f(x) \in O'$
$\exists O \in \tau$ con $x \in O$: $f(\ldots)$
$f(O) \subset O'$

continua 3

Definición 1. Sea $f : (X, \mathcal{T}) \to (X', \mathcal{T}')$ una aplicación y $x \in X$. Diremos que f es continua en x si para todo abierto $O' \in \mathcal{T}'$ con $f(x) \in O'$ existe un abierto $O \in \mathcal{T}$ con $x \in O$ y cumpliendo $f(O) \subset O'$.

Diremos que f es continua si lo es en todo punto $x \in X$.

Es un ejercicio sencillo probar el siguiente resultado.

Proposición 1. *Sea $f : (X, \mathcal{T}) \to (X', \mathcal{T}')$ una aplicación y $x \in X$. Entonces son equivalentes las siguientes propiedades:*

(1) *f es continua en x.*
(2) *Si $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ son bases de las topologías $\mathcal{T}$ y $\mathcal{T}'$ respectivamente, entonces para todo abierto $B' \in \mathcal{B}'$ con $f(x) \in B'$ existe un abierto $B \in \mathcal{B}$ con $x \in B$ y cumpliendo $f(B) \subset B'$.*
(3) *Para todo entorno $V' \in \mathcal{U}^{f(x)}$ existe un entorno $V \in \mathcal{U}^x$ cumpliendo $f(V) \subset V'$.*
(4) *Si $\mathcal{B}^x$ y $\mathcal{B}^{f(x)}$ son bases de entornos de x y $f(x)$ respectivamente, entonces para todo $W' \in \mathcal{B}^{f(x)}$ existe $W \in \mathcal{B}^x$ cumpliendo $f(W) \subset W'$.*

$\forall B' \in \beta'$ con $f(x) \in B'$
$\exists B \in \beta$ con $x \in B$:
$f(B) \subset B'$

$\forall V' \in \mathcal{U}^{f(x)}$ $\exists V \in \mathcal{U}^x$:
$f(V) \subset V'$

$\forall W' \in \beta^{f(x)}$ $\exists W \in \beta^x$:
$f(W) \subset W'$

En el siguiente resultado se caracteriza globalmente la continuidad. El resultado es útil y se usará bastante a lo largo del curso.

Proposición 2. *Sea $f : (X, \mathcal{T}) \to (X', \mathcal{T}')$ una aplicación. Entonces son equivalentes las siguientes propiedades:*

(1) *f es continua.*
(2) *Para todo abierto $O' \in \mathcal{T}'$ se cumple que $f^{-1}(O') \in \mathcal{T}$.*
(3) *Para todo cerrado F' de X' se cumple que $f^{-1}(F')$ es cerrado en X.*
(4) *Para todo subconjunto A de X se cumple que $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$.*

A continuación se exponen algunas ejemplos sencillos de funciones continuas.

- La aplicación identidad $Id : (X, \mathcal{T}) \to (X, \mathcal{T})$ es continua.
- La aplicación constante $f : (X, \mathcal{T}) \to (X', \mathcal{T}')$, $f(x) = x'_0$ para todo $x \in X$, es continua.
- Si $f : (X_1, \mathcal{T}_1) \to (X_2, \mathcal{T}_2)$ y $g : (X_2, \mathcal{T}_2) \to (X_3, \mathcal{T}_3)$ son aplicaciones continuas, entonces la composición $g \circ f : (X_1, \mathcal{T}_1) \to (X_3, \mathcal{T}_3)$ es continua.
- Cualquier aplicación $f : (X, \mathcal{T}) \to (X', \mathcal{T}_T)$ es continua.

- Cualquier aplicación $f:(X,\mathcal{T}_D)\to(X',\mathcal{T}')$ es continua.
- Si $n<m$ entonces las aplicaciones
$$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m,\quad g:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n,$$
definidas por $f((x_1,\dots,x_n))=(x_1,\dots,x_n,a_{n+1},\dots,a_m)$ y $g((x_1,\dots,x_m))=(x_1,\dots,x_n)$ son continuas para cualquier $(a_{n+1},\dots,a_m)\in\mathbb{R}^{m-n}$.
- Si (X,d) es un espacio métrico y x_0 un punto suyo, entonces la función $f:(X,\mathcal{T}(d))\to(\mathbb{R},\mathcal{T}_u)$ definida por $f(x)=d(x,x_0)$ es continua.

A continuación se exponen algunas propiedades sencillas de las aplicaciones continuas.

Proposición 3. *(1) Si $(X,\mathcal{T})$ es un espacio topológico y $A\subset X$, entoces la inclusión $i:(A,\mathcal{T}_A)\to(X,\mathcal{T})$ es continua.*

(2) Si $f:(X,\mathcal{T})\to(X',\mathcal{T}')$ es una aplicación continua y $A\subset X$, entonces la restricción de f a A, $f_{|A}:(A,\mathcal{T}_A)\to(X',\mathcal{T}')$, es continua.

(3) Si $f:(X,\mathcal{T})\to(X',\mathcal{T}')$ es una aplicación continua y $B\subset X'$ con Imagen $(f)\subset B$, entonces $f:(X,\mathcal{T})\to(B,\mathcal{T}'_B)$ es continua.

(4) Sea $(X,\mathcal{T})$ un espacio topológico y $\{O_\lambda\,|\,\lambda\in\Lambda\}\subset\mathcal{T}$ un recubrimiento de X, esto es $\cup_{\lambda\in\Lambda}O_\lambda=X$. Si $f_\lambda:(O_\lambda,\mathcal{T}_{O_\lambda})\to(X',\mathcal{T}')$ son funciones continuas con $f_\lambda=f_\mu$ sobre $O_\lambda\cap O_\mu$, entonces la aplicación $f:(X,\mathcal{T})\to(X',\mathcal{T}')$ definida por
$$f_{|O_\lambda}=f_\lambda,$$
es continua.

Te dice que una f definida a cachos es continua si es continua en cada cacho y en los ptos de intersección

(5) Sea $(X,\mathcal{T})$ un espacio topológico y $\{F_i\,|\,1\le i\le n\}$ un recubrimiento finito de X por cerrados de $(X,\mathcal{T})$. Si $f_i:(F_i,\mathcal{T}_{F_i})\to(X',\mathcal{T}')$ son funciones continuas con $f_i=f_j$ sobre $F_i\cap F_j$, entonces la aplicación $f:(X,\mathcal{T})\to(X',\mathcal{T}')$ definida por
$$f_{|F_i}=f_i,$$
es continua.

2. Aplicaciones abiertas y cerradas

En esta sección vamos a estudiar un tipo de aplicaciones, que aunque menos relevantes que las continuas, jugarán un papel importante en la asignatura.

Definición 2. Sea $f:(X,\mathcal{T})\to(X',\mathcal{T}')$ una aplicación.

(1) Diremos que f es abierta si para todo abierto $O\in\mathcal{T}$, su imagen $f(O)$ es abierto en X'.

(2) Diremos que f es cerrada si para todo cerrado F de X, su imagen $f(F)$ es cerrado en X'.

Como la imagen por una aplicación no tiene por qué mantener complementarios, estos dos conceptos no son equivalentes, a diferencia de lo que ocurre con las aplicaciones continuas.

El siguiente resultado resulta de utilidad.

f abierta $\Leftrightarrow$ $f(A^\circ) \subset (f(A))^\circ$

f continua $\Leftrightarrow$ $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$

f cerrada $\Leftrightarrow$ $\overline{f(A)} \subset f(\bar{A})$

+ biyectiva $\Rightarrow$ homeomorfismo

Proposición 4. *Sea $f : (X, \mathcal{T}) \to (X', \mathcal{T}')$ una aplicación. Entonces son equivalentes las propiedades*

(1) *f es abierta.*
(2) *Si $\mathcal{B}$ es una base de $\mathcal{T}$, entonces $f(B) \in \mathcal{T}'$ para todo $B \in \mathcal{B}$.*
(3) *$f(A^o) \subset (f(A))^o$, para todo $A \subset X$.*

Además, f es cerrada si y sólo si $\overline{f(A)} \subset f(\bar{A})$ para todo $A \subset X$.

Es un ejercicio simple comprobar estas propiedades: Si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico, $A \subset X$ e $i : A \to X$ es la inclusión, entonces

- $i : (A, \mathcal{T}_A) \to (X, \mathcal{T})$ es abierta si y sólo si $A \in \mathcal{T}$.
- $i : (A, \mathcal{T}_A) \to (X, \mathcal{T})$ es cerrada si y sólo si A es cerrado.

Terminamos esta sección con el siguiente resultado.

Proposición 5. *Sean las aplicaciones $f : (X, \mathcal{T}) \to (X', \mathcal{T}')$ y $g : (X', \mathcal{T}') \to (X'', \mathcal{T}'')$. Entonces*

(1) *Si f y g son abiertas (cerradas), entonces $g \circ f$ es abierta (cerrada).*
(2) *Si $g \circ f$ es abierta (cerrada) y f es sobre y continua, entonces g es abierta (cerrada).*
(3) *Si $g \circ f$ es abierta (cerrada) y g es inyectiva y continua, entonces f es abierta (cerrada).*

3. Homeomorfismos

El concepto de homeomorfismo en topología es equivalente al de isomorfismo en álgebra. Espacios entre los que existe un homeomorfismo, que serán llamados homeomorfos, son considerados "iguales" desde el punto de vista topológico.

Definición 3. Sea $f : (X, \mathcal{T}) \to (X', \mathcal{T}')$ una aplicación. f se dice homeomorfismo si f es biyectiva y tanto f como la aplicación inversa $f^{-1} : (X', \mathcal{T}') \to (X, \mathcal{T})$ son continuas. En este caso diremos que los espacios $(X, \mathcal{T})$ y $(X'\mathcal{T}')$ son homeomorfos.

Es claro, usando resultados de las secciones anteriores, el siguiente resultado.

Proposición 6. *Sea $f : (X, \mathcal{T}) \to (X', \mathcal{T}')$ una aplicación biyectiva. Entonces son equivalentes:*

(1) *f es un homeomorfismo.*
(2) *f es continua y abierta.*
(3) *f es continua y cerrada.*
(4) *$f(\bar{A}) = \overline{f(A)}$, para cualquier $A \subset X$.*

En el siguiente resultado se relacionan los conceptos topológicos dados en el Tema I entre espacios homeomorfos.

Proposición 7. *Sea $f : (X, \mathcal{T}) \to (X'\mathcal{T}')$ un homeomorfismo. Entonces*

(1) *$\mathcal{B}$ es base de $\mathcal{T}$ si y sólo si $f(\mathcal{B}) = \{f(B) \mid B \in \mathcal{B}\}$ es base de $\mathcal{T}'$.*
(2) *$\mathcal{U}^{f(x)} = \{f(V) \mid V \in \mathcal{U}^x\}$, para todo $x \in X$.*

(3) *$\mathcal{B}^x$ es una base de entornos de x si y sólo si $\{f(W) \mid W \in \mathcal{B}^x\}$ es una base de entornos de $f(x)$, para todo $x \in X$.*

Finalmente la siguiente propiedad será usada en el curso:

Proposición 8. *Si $f : (X, \mathcal{T}) \to (X', \mathcal{T}')$ es un homeomorfismo y $A \subset X$, entonces $f_{|A} : (A, \mathcal{T}_A) \to (f(A), \mathcal{T}'_{f(A)})$ también es un homeomorfismo.*

Por último vamos a dar algunos ejemplos de homeomorfismos de interes.

Ejemplo 1. *Si $[a,b]$ y $[c,d]$ son intervalos cerrados y acotados de $\mathbb{R}$ dotados de la topología inducida de la usual de $\mathbb{R}$, entonces $f : [a,b] \to [c,d]$ definida por*

$$f(t) = \frac{t-a}{b-a}(d-c) + c, \quad t \in \mathbb{R},$$

es un homeomorfismo. Además dicho homeomorfismo también prueba que los intervalos abiertos (a,b) y (c,d) son homeomorfos.

Ejemplo 2. *Dado $a \in \mathbb{R}$, los intervalos $(0,1)$, (a,∞) y $(-\infty,a)$ dotados de la topología inducida de la usual de $\mathbb{R}$ son homeomorfos mediante los homeomorfismos $f : (0,1) \to (a,\infty)$ y $g : (0,1) \to (-\infty,a)$ definidos por*

$$f(t) = \frac{t}{1-t} + a, \quad g(t) = \frac{t}{t-1} + a, \quad \forall t \in (0,1).$$

Por tanto, como la exponencial define un homeomorfismo de $\mathbb{R}$ sobre $(0,\infty)$, todos los intervalos abiertos de $\mathbb{R}$ son homeomorfos entre si.

Homeomorfismo entre $S^n - \{N\} \to \mathbb{R}^n$

Ejemplo 3. La proyección estereográfica. *Sea $\mathbb{S}^n$ la n-esfera unidad en $\mathbb{R}^{n+1}$ centrada en el origen y dotada de la topología inducida de la usual de $\mathbb{R}^{n+1}$ y $\mathbb{R}^n$ visto como el hiperplano vectorial de $\mathbb{R}^{n+1}$ dado por*

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \mid x_{n+1} = 0\}.$$

Entonces la aplicación $PE : \mathbb{S}^n - \{(0,\ldots,0,1)\} \to \mathbb{R}^n$ definida por

$$PE(x_1, \ldots, x_{n+1}) = \left(\frac{x_1}{1-x_{n+1}}, \ldots, \frac{x_n}{1-x_{n+1}}\right)$$

es un homeomorfismo, al que se llama la proyección estereográfica.

4. Espacios producto. Topología producto

En esta sección vamos a multiplicar espacios topológicos y producir por tanto nuevos ejemplos. Aunque podríamos estudiar el producto de un número finito de espacios, estudiaremos solo el producto de dos para facilitar un poco el contenido del epígrafe.

Definición 4. Sean $(X_1, \mathcal{T}_1)$ y $(X_2, \mathcal{T}_2)$ espacios topológicos. En $X_1 \times X_2$ consideramos la familia de subconjuntos

$$\mathcal{B} = \{O_1 \times O_2 \mid O_1 \in \mathcal{T}_1 \quad \text{y} \quad O_2 \in \mathcal{T}_2\}.$$

Entonces $\mathcal{B}$ es base de una topología en $X_1 \times X_2$ a la que llamamos la topología producto de $\mathcal{T}_1$ y $\mathcal{T}_2$ y representamos por $\mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_2$. Al espacio topológico $(X_1 \times X_2, \mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_2)$ le llamamos el producto topológico de $(X_1, \mathcal{T}_1)$ y $(X_2, \mathcal{T}_2)$.

$S^{n+1} - \{0\} \to \mathbb{R}^n$

En el siguiente resultado se exponen algunas propiedades sencillas de la topología producto que serán de utilidad.

Proposición 9. *Sean $(X_1, \mathcal{T}_1)$ y $(X_2, \mathcal{T}_2)$ espacios topológicos. Entonces:*

(1) *Si $\mathcal{B}_i$, $i = 1,2$ son bases de las topologías $\mathcal{T}_i$, $i = 1,2$, entonces*

$$\{B_1 \times B_2 \mid B_i \in \mathcal{B}_i,\, i = 1,2\}$$

es una base de la topología producto $\mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_2$.

(2) *Si $(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$, entonces*

$$\{V_1 \times V_2 \mid V_i \in \mathcal{U}^{x_i},\, i = 1,2\}$$

es una base de entornos del punto (x_1, x_2) en el espacio producto.

(3) *Si $\mathcal{B}^{x_i}$, $i = 1,2$ son bases de entornos de x_i en X_i, $i = 1,2$, entonces*

$$\{W_1 \times W_2 \mid W_i \in \mathcal{B}^{x_i},\, i = 1,2\}$$

es una base de entornos del punto (x_1, x_2) en el espacio producto.

Las operaciones interior, adherencia y frontera de un subonjunto de un espacio producto tienen un comportamiento regular cuando el subconjunto es producto de subconjuntos.

Proposición 10. *Sean $(X_1, \mathcal{T}_1)$ y $(X_2, \mathcal{T}_2)$ espacios topológicos y $A_1 \subset X_1$ y $A_2 \subset X_2$ subconjuntos. Entonces*

(1) $(A_1 \times A_2)^o = A_1^o \times A_2^o$.

(2) $\overline{A_1 \times A_2} = \overline{A_1} \times \overline{A_2}$.

(3) $Fr(A_1 \times A_2) = (Fr(A_1) \times \overline{A_2}) \cup (\overline{A_1} \times Fr(A_2))$.

(4) $(\mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_2)_{A_1 \times A_2} = (\mathcal{T}_1)_{A_1} \times (\mathcal{T}_2)_{A_2}$.

En particular $A_1 \times A_2$ es cerrado si y sólo si A_1 y A_2 son cerrados.

Vamos a estudiar las aplicaciones proyección de un espacio producto sobre sus factores. Esto permitirá tener un buen control sobre cierto tipo de aplicaciones tomando valores o definidas sobre un producto.

Sean $(X_1, \mathcal{T}_1)$ y $(X_2, \mathcal{T}_2)$ espacios topológicos. Definimos $p_i : X_1 \times X_2 \to X_i$, $i = 1,2$ por

$$p_1(x_1, x_2) = x_1, \quad p_2(x_1, x_2) = x_2, \quad \forall (x_1, x_2) \in X_1 \times X_2.$$

Proposición 11. *Sean $(X_1, \mathcal{T}_1)$ y $(X_2, \mathcal{T}_2)$ espacios topológicos. Entonces*

(1) *p_i, $i = 1,2$ son aplicaciones sobres, continuas y abiertas.*

(2) *Una aplicación $f : (X, \mathcal{T}) \to (X_1 \times X_2, \mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_2)$ es continua si y sólo si $p_i \circ f : (X, \mathcal{T}) \to (X_i, \mathcal{T}_i)$, $i = 1,2$ son continuas.*

En general las aplicaciones p_i no son cerradas, como lo prueba el siguiente ejemplo. Sea $p_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la primera proyección. Considerando en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}$ las topologías usuales, se tiene que $F = \{(x, 1/x) \mid x \in \mathbb{R},\, x \neq 0\}$ es un cerrado de $\mathbb{R}^2$, pero $p_1(F) = \mathbb{R} - \{0\}$ no es cerrado.

Como una aplicación de la última proposición vamos a estudiar la aplicación evaluación y el producto de aplicaciones.

Corolario 1. *Sean* $(X_i, \mathcal{T}_i)$, $i = 1, 2$, *y* $(X, \mathcal{T})$ *espacios topológicos y* $f_i : X \to X_i$, $i = 1, 2$ *aplicaciones. Se define la evaluación de* f_1 *y* f_2, *y se representa por* (f_1, f_2), *como la aplicación* $(f_1, f_2) : X \to X_1 \times X_2$ *dada por*

$$(f_1, f_2)(x) = (f_1(x), f_2(x)), \quad \forall x \in X.$$

Entonces $(f_1, f_2) : (X, \mathcal{T}) \to (X_1 \times X_2, \mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_2)$ *es continua si y sólo si* $f_i : (X, \mathcal{T}) \to (X_i, \mathcal{T}_i)$, $i = 1, 2$ *son continuas.*

Corolario 2. *Sean* $(X_i, \mathcal{T}_i)$, $(X_i', \mathcal{T}_i')$, $i = 1, 2$ *espacios topológicos y* $f_i : X_i \to X_i'$, $i = 1, 2$, *aplicaciones. Se define la aplicación producto de* f_1 *y* f_2, *y se representa por* $f_1 \times f_2$, *como la aplicación* $f_1 \times f_2 : X_1 \times X_2 \to X_1' \times X_2'$ *dada por*

$$(f_1 \times f_2)(x_1, x_2) = (f_1(x_1), f_2(x_2)), \quad \forall (x_1, x_2) \in X_1 \times X_2.$$

(1) $f_1 \times f_2 : (X_1 \times X_2, \mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_2) \to (X_1' \times X_2', \mathcal{T}_1' \times \mathcal{T}_2')$ *es continua (abierta) si y sólo si* $f_i : (X_i, \mathcal{T}_i) \to (X_i', \mathcal{T}_i')$, $i = 1, 2$, *son continuas (abiertas).*

(2) $f_1 \times f_2 : (X_1 \times X_2, \mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_2) \to (X_1' \times X_2', \mathcal{T}_1' \times \mathcal{T}_2')$ *es un homeomorfismo si y sólo si* $f_i : (X_i, \mathcal{T}_i) \to (X_i', \mathcal{T}_i')$, $i = 1, 2$, *son homeomorfismos.*

Proposición 12. *Sea* $(X, \mathcal{T})$ *un espacio topológico. Entonces* $(X, \mathcal{T})$ *es Hausdorff si y sólo si la diagonal*

$$\Delta = \{(x, x) \in X \times X \mid x \in X\}$$

es un subconjunto cerrado de $(X \times X, \mathcal{T} \times \mathcal{T})$.

Corolario 3. *Sean* $f, g : (X, \mathcal{T}) \to (X', \mathcal{T}')$ *aplicaciones continuas. Si* $(X', \mathcal{T}')$ *es un espacio Hausdorff, entonces el subconjunto* $A \subset X$ *definido por*

$$A = \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$$

es cerrado en $(X, \mathcal{T})$.

5. ESPACIOS COCIENTES. TOPOLOGÍA COCIENTE

Un subconj en el esp. cociente es abierto si es abierto en la preimagen

Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y R una relación de equivalencia en X. Representemos por X/R al espacio cociente y por $\Pi : X \to X/R$ a la proyección: $\Pi(x) = [x]$, siendo $[x]$ la clase de equivalencia de x. Consideremos

$$\mathcal{T}/R = \{O \subset X/R \mid \Pi^{-1}(O) \in \mathcal{T}\}.$$

Entonces $\mathcal{T}/R$ es una topología en X/R a la que llamaremos topología cociente de $\mathcal{T}$ por R. Al espacio $(X/R, \mathcal{T}/R)$ le llamaremos el espacio cociente de $(X, \mathcal{T})$ por R.

Algunas propiedades sencillas, pero importantes, del espacio cociente se recogen en el siguiente resultado.

Proposición 13. *Sea* $(X, \mathcal{T})$ *un espacio topológico y* R *una relación de equivalencia en* X. *Entonces*

(1) $F \subset X/R$ *es cerrado en* $(X/R, \mathcal{T}/R)$ *si y sólo si* $\Pi^{-1}(F)$ *es cerrado de* $(X, \mathcal{T})$.

(2) $\Pi : (X, \mathcal{T}) \to (X/R, \mathcal{T}/R)$ *es sobre y continua.*

(3) *Si* $\mathcal{T}'$ *es cualquier topología en* X/R *que hace continua a* Π, *entonces* $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}/R$.

↳ topología más grande que hace continua a Π

(4) *Si* $(X', \mathcal{T}')$ *es un espacio topológico y* $f : X/R \to X'$ *una aplicación, entonces* $f : (X/R, \mathcal{T}/R) \to (X', \mathcal{T}')$ *es continua si y sólo si* $f \circ \Pi : (X, \mathcal{T}) \to (X', \mathcal{T}')$ *es continua.*

En la demostración de la anterior proposición se ha usado solamente que Π es sobre. Por tanto la construcción anterior se puede generalizar de la siguiente manera.

Proposición 14. *Sea* $f : (X, \mathcal{T}) \to X'$ *una aplicación sobre. Entonces*

$$\mathcal{T}(f) = \{O \subset X' \mid f^{-1}(O) \in \mathcal{T}\}$$

es una topología en X'*. Ademas,*

(1) $F \subset X'$ *es cerrado en* $(X', \mathcal{T}(f))$ *si y sólo si* $f^{-1}(F)$ *es cerrado de* $(X, \mathcal{T})$.
(2) $f : (X, \mathcal{T}) \to (X', \mathcal{T}(f))$ *es sobre y continua.*
(3) *Si* $\mathcal{T}'$ *es cualquier topología en* X' *que hace continua a* f*, entonces* $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}(f)$.
(4) *Si* $(\hat{X}, \hat{\mathcal{T}})$ *es un espacio topológico y* $g : X' \to \hat{X}$ *una aplicación, entonces* $g : (X', \mathcal{T}(f)) \to (\hat{X}, \hat{\mathcal{T}})$ *es continua si y sólo si* $g \circ f : (X, \mathcal{T}) \to (\hat{X}, \hat{\mathcal{T}})$ *es continua.*

Definición 5. Una aplicación $f : (X, \mathcal{T}) \to (X', \mathcal{T}')$ se llama identificación si es sobre y $\mathcal{T}' = \mathcal{T}(f)$.

En el siguiente resultado se dan condiciones suficientes para que una aplicación sea identificación.

Identificación

Proposición 15. *Sea* $f : (X, \mathcal{T}) \to (X', \mathcal{T}')$ *una aplicación. Si* f *cumple una de las tres siguientes propiedades:*

- f *es sobre, continua y abierta,*
- f *es sobre continua y cerrada,*
- f *es continua y existe una aplicación continua* $g : (X', \mathcal{T}')$ *tal que* $f \circ g = I_{X'}$, ↳ (X, τ)

$\exists g : X' \dashrightarrow X$
$f \circ g = Id_{X'}$

entonces f *es una identificación.*

Las dos últimas proposiciones nos dicen que las identificaciones son aplicaciones situadas entre las continuas y sobres y entre las continuas, sobres y abiertas (las continuas, sobres y cerradas).

Vamos ahora a probar un resultado importante, que podría considerarse, por similutud al caso del álgebra, como el primer teorema de homeomorfía.

Teorema. *Sea* $f : (X, \mathcal{T}) \to (X', \mathcal{T}')$ *una aplicación. Se define la relación* R_f *en* X *por* xR_fy *si* $f(x) = f(y)$*. Entonces:*
R_f *es una relación de equivalencia en* X *y la aplicación* $\hat{f} : X/R_f \to X'$ *dada por*

$$\hat{f}([x]) = f(x), \quad \forall [x] \in X/R,$$

está bien definida y es inyectiva. Además, $\hat{f} : (X/R, \mathcal{T}/R) \to (X', \mathcal{T}')$ *es un homeomorfismo si y sólo si* $f : (X, \mathcal{T}) \to (X', \mathcal{T}')$ *es una identificacón.*

$$\begin{tikzcd}
(X, \tau) \arrow[rr, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & & (X', \tau') \\
(X/R, \tau/R) \arrow[urr, "\hat{f}"'] & &
\end{tikzcd}$$

Este resultado es muy útil a la hora de identificar topologicamente espacios cocientes. En efecto, si R es una relación de equivalencia en $(X, \mathcal{T})$, se trata de encontrar una aplicación $f : (X, \mathcal{T}) \to (X', \mathcal{T}')$ tal que $R_f = R$ y f cumpla una de las tres condiciones del resultado anterior. En tal caso $(X', \mathcal{T}')$ es una copia homeomorfica de nuestro espacio cociente $(X/R, \mathcal{T}/R)$. Ilustremos este razonamiento con algunos ejemplos.

Ejemplos homeomorfismos

Ejemplo 4. *Sea* $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ *y* R *la relación de equivalencia en* $\mathbb{R}$ *definida por* tRs *si* $s = t + n$, *con* $n \in \mathbb{Z}$. *Entonces, si* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ *es la aplicación definida por*

$$f(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t), \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

es fácil comprobar que $R = R_f$ *y que* $f : (\mathbb{R}, \mathcal{T}_u) \to (\mathbb{S}^1, \mathcal{T}_u)$ *es sobre continua y abierta. Por tanto* $(\mathbb{R}/R, \mathcal{T}_u/R)$ *es homeomorfo a* $(\mathbb{S}^1, \mathcal{T}_u)$.

Ejemplo 5. *Sea* $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_u)$ *y* R *la relación de equivalencia en* $\mathbb{R}^2$ *definida por* $(t_1, t_2)R(s_1, s_2)$ *si* $s_1 = t_1 + n$ *y* $s_2 = t_2$, *con* $n \in \mathbb{Z}$. *Entonces, si* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ *es la aplicación definida por*

$$f(t_1, t_2) = ((\cos 2\pi t_1, \sin 2\pi t_1), t_2), \quad \forall (t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2,$$

es fácil comprobar que $R = R_f$ *y que* $f : (\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_u) \to (\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}, \mathcal{T}_u \times \mathcal{T}_u)$ *es sobre continua y abierta. Por tanto* $(\mathbb{R}^2/R, \mathcal{T}_u/R)$ *es homeomorfo a* $(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}, \mathcal{T}_u \times \mathcal{T}_u)$.

Ejemplo 6. *Sea* $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_u)$ *y* R *la relación de equivalencia en* $\mathbb{R}^2$ *definida por* $(t_1, t_2)R(s_1, s_2)$ *si* $s_1 = t_1 + n$ *y* $s_2 = t_2 + m$, *con* $n, m \in \mathbb{Z}$. *Entonces, si* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ *es la aplicación definida por*

$$f(t_1, t_2) = ((\cos 2\pi t_1, \sin 2\pi t_1), (\cos 2\pi t_2, \sin 2\pi t_2)), \quad \forall (t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2,$$

es fácil comprobar que $R = R_f$ *y que* $f : (\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_u) \to (\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1, \mathcal{T}_u \times \mathcal{T}_u)$ *es sobre continua y abierta. Por tanto* $(\mathbb{R}^2/R, \mathcal{T}_u/R)$ *es homeomorfo a* $(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1, \mathcal{T}_u \times \mathcal{T}_u)$.

Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y consideremos el conjunto de los homeomorfismos de X, esto es

$$Home(X, \mathcal{T}) = \{\Phi : X \to X \mid \Phi \text{ es un homeomorfismo}\}.$$

Entonces $Home(X, \mathcal{T})$ es un grupo respecto a la composición de homeomorfismos, con la identidad como elemento neutro. Supongamos ahora que G es un subgrupo de $Homeo(X, \mathcal{T})$. Entonces G define una relación de equivalencia R_G en X definida por xR_Gy si existe $\Phi \in G$ tal que $y = \Phi(x)$. El hecho de ser G un subgrupo nos asegura que R_G es de equivalencia. Representaremos al espacio cociente por $(X/G, \mathcal{T}/G)$.

Proposición 16. *La proyección* $\Pi : (X, \mathcal{T}) \to (X/G, \mathcal{T}/G)$ *es abierta. Si el grupo* G *tiene orden finito, la proyección* Π *también es cerrada.*

En los ejemplos 4, 5 y 6, las relaciones de equivalencia son asociadas a grupos de homeomorfismos, los cuales vienen respectivamente dados por

- $G = \{\Phi_n \in Home(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u) \mid \Phi_n(t) = t + n,\ n \in \mathbb{Z}\}$
- $G = \{\Phi_n \in Home(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_u) \mid \Phi_n(t_1, t_2) = (t_1 + n, t_2),\ n \in \mathbb{Z}\}$
- $G = \{\Phi_{nm} \in Home(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_u) \mid \Phi_{nm}(t_1, t_2) = (t_1 + n, t_2 + m),\ n, m \in \mathbb{Z}\}$

Ejemplo 7. *Sea $(\mathbb{S}^n, \mathcal{T}_u)$ la esfera unidad en $\mathbb{R}^{n+1}$ dotada de su topología usual. Sea $G = \{Id, A\}$ donde Id es la identidad en la esfera y A es la aplicación antípoda $A(x) = -x$. Entonces G es un subgrupo del grupo de los homeomorfismos de $(\mathbb{S}^n, \mathcal{T}_u)$. Al espacio cociente $(\mathbb{S}^n/G, \mathcal{T}_u/G)$ le llamaremos el espacio proyectivo real de dimensión n y lo representaremos por $(\mathbb{RP}^n, \mathcal{T}_u)$. Observemos, que debido a la última Proposición, la proyección*

$$\Pi : (\mathbb{S}^n, \mathcal{T}_u) \to (\mathbb{RP}^n, \mathcal{T}_u)$$

es sobre, continua, abierta y cerrada.

Ejemplo 8. *Sea $((\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}), \mathcal{T}_u)$ y definamos la relación:*

$$xRy \quad si \quad y = \lambda x,\ \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda \neq 0, \quad x, y \in \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}.$$

Si para cada $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$, representamos por Φ_λ el homeomorfismo de $(\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}), \mathcal{T}_u)$ dado por

$$\Phi_\lambda(x) = \lambda x, \quad x \in \mathbb{R}^{n+1} - \{0\},$$

entonces $G = \{\Phi_\lambda \mid \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda \neq 0\}$ es un subgupo del grupo de los homeomorfismos y $R = R_G$. Además se tiene que $(\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}/R, \mathcal{T}_u/R)$ es homeomorfo a $(\mathbb{RP}^n, \mathcal{T}_u)$

ESPACIOS CONEXOS Y COMPACTOS

FRANCISCO URBANO

1. Espacios conexos

El problema que trataremos en esta sección es cuando un espacio topológico puede descomponerse "topológicamente" como unión, no trivial, de dos subconjuntos complementarios. Cuando tal descomposición no sea posible, al espacio le llamaremos conexo. En caso de admitir una descomposición de ese tipo, al espacio le llamaremos disconexo. A continuación concretamos que es una tal descomposición topológica.

Definición 1. Un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ se llama disconexo si existe una partición de dicho espacio, esto es existen subconjuntos $A, B \neq \emptyset$ de X con $A \cup B = X$ y $A \cap B = \emptyset$, tales que $\bar{A} \cap B = \emptyset$ y $A \cap \bar{B} = \emptyset$.

Las ultimas condiciones indican que la partición de X es topológica, en el sentido que ni A ni B están "próximos" a B y A respectivamente.

Si $\nexists$ A, B...

Definición 2. Un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ se llama conexo si para cualesquiera subconjuntos $A, B \neq \emptyset$ de X con $A \cup B = X$ y $A \cap B = \emptyset$, se cumple que $\bar{A} \cap B \neq \emptyset$ o $A \cap \bar{B} \neq \emptyset$.

Es claro que $(X, \mathcal{T}_T)$ es conexo y que $(X, \mathcal{T}_D)$ es disconexo, siempre que X tenga al menos dos puntos. En el siguiente resultado se caracteriza de diversas formas a los espacios conexos.

Proposición 1. *Si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico, entonces las siguientes propiedades son equivalentes:*

(1) *$(X, \mathcal{T})$ es conexo.*
(2) *Si O_1, O_2 son abiertos no vacios de $(X, \mathcal{T})$ con $O_1 \cup O_2 = X$ y $O_1 \cap O_2 = \emptyset$, entonces $\{O_1, O_2\} = \{X, \emptyset\}$.*
(3) *Si A es un subconjunto de X que es simultaneamente abierto y cerrado, entonces $A \in \{X, \emptyset\}$.*
(4) *Toda aplicación continua $f : (X, \mathcal{T}) \to (\{0,1\}, \mathcal{T}_u)$ es constante.*
(5) *Toda aplicación continua $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}_D)$ es constante, siendo Y cualquier conjunto.*

Un espacio No es conexo cuando puedes expresarlo como partición de abiertos disjuntos.

Aun siendo un espacio conexo, a veces conviene conocer que subespacios topológicos suyos son conexos, ya que esta propiedad no se hereda en los subespacios. Es pues conveniente dar la siguiente natural definición.

Sub conexo

Definición 3. Un subconjunto A de un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ se llama conexo si el espacio $(A, \mathcal{T}_A)$ es conexo.

(X, T) conexo $\Rightarrow$ (X, T') conexo.
$T' \subset T$

Ahora pondremos de manifiesto que la conexión es una propiedad topológica. Pero realmente la conexión se mantine por transformaciones mas débiles que los homeomorfismos.

La imagen de un conexo por una f continua es conexo

Proposición 2. *Sea $f : (X, \mathcal{T}) \to (X', \mathcal{T}')$ una aplicación continua. Si $(X, \mathcal{T})$ es conexo, entonces $f(X)$ es un subconjunto conexo de X'. En particular, la conexión es una propiedad topológica, esto es todo espacio homeomorfo a uno conexo es también conexo.*

Como consecuencia de esta Proposición, si un espacio $(X, \mathcal{T})$ es conexo y R es una relación de equivalencia en X, entonces $(X/R, \mathcal{T}/R)$ también es conexo.

Vamos a dar ahora un resultado, que junto a su corolario nos dará condiciones suficientes para que un espacio sea conexo. El resultado será útil en muchas situaciones.

Proposición 3. *Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y $\{A_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ una familia de subconjuntos de X cumpliendo*

(1) $X = \cup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$,
(2) A_λ es un subconjunto conexo de X para todo $\lambda \in \Lambda$,
(3) $\overline{A_\lambda} \cap \overline{A_\mu} \neq \emptyset$ para todo $\lambda, \mu \in \Lambda$.

Entonces $(X, \mathcal{T})$ es conexo.

Corolario 1. *Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico.*

(1) Si X es la unión de subconjuntos conexos de X con intersección no vacia, entonces $(X, \mathcal{T})$ es conexo.
(2) Si para cada par de puntos distintos de X existe un subconjunto conexo de X que los contiene, entonces $(X, \mathcal{T})$ es conexo.
(3) Si existe una familia numerable $\{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ de subconjuntos conexos de X con $A_k \cap A_{k+1} \neq \emptyset, \forall k \in \mathbb{N}$ y $\cup_{n=1}^{\infty} A_n = X$, entonces $(X, \mathcal{T})$ es conexo.

D denso y conexo $\Rightarrow$ X conexo

Proposición 4. *Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio tolológico y D un subconjunto denso de X, esto es $\overline{D} = X$. Si D es un subconjunto conexo de X, entonces $(X, \mathcal{T})$ es conexo.*

$\Uparrow$ El cierre mantiene la conexión

Corolario 2. *Sean A, B subconjuntos de un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ con $A \subset B \subset \overline{A}$. Si A es un subconjunto conexo de X, entonces B también es un subconjunto conexo de X.*

No es difícil probar que $[0,1]$ es un subconjunto conexo de $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$, usando un argumento standar. Por la Proposición 2, cualquier intervalo cerrado y acotado también es un subconjunto conexo de $\mathbb{R}$. Por tanto, como

$$\mathbb{R} = \cup_{n \in \mathbb{N}} [-n, n],$$

se sigue, del Corolario 1, que $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ es conexo. De nuevo, la Proposición 2 me dice que cualquier intervalo abierto de $\mathbb{R}$ es un subconjunto conexo de R.

Pero como $(a,b) \subset [a,b) \subset \overline{(a,b)} = [a,b]$, del Corolario 2 se sigue que $[a,b)$ es un subconjunto conexo de $\mathbb{R}$. Por tanto todos los intervalos de

R son conexos. Además es fácil probar que un subconjunto conexo de R es un intervalo, por lo que finalmente obtenemos que los subconjuntos conexos de R son los intervalos.

Como otra aplicación del Corolario 2, y puesto que el subconjunto A de $\mathbb{R}^2$,

$$A = \{(t, \sin(1/t)) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

es conexo, al ser homeomorfo a R, se prueba que $A \cup B$ también es un subconjunto conexo de $\mathbb{R}^2$, siendo B cualquier subconjunto de $\{0\} \times [-1,1]$.

En $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ existen subconjuntos con complemento numerasble que no son conexos. En cambio, el resultado es radicalmente diferente para $\mathbb{R}^n$ con $n \geq 2$.

Theorem 1. *Si A es un subconjunto numerable de $\mathbb{R}^n$ con $n \geq 2$, entonce $\mathbb{R} - A$ es un subconjunto conexo de $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_u)$.*

Como una aplicación del Corolario 1, se prueba otra propiedad interesante de la conexión.

Proposición 5. *Sean $(X_i, \mathcal{T}_i)$, $i = 1,2$, espacios topológicos. Entonces $(X_1 \times X_2, \mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_2)$ es conexo si y sólo si $(X_i, \mathcal{T}_i)$, $i = 1,2$, son conexos.*

Theorem 2 (Teorema del valor intermedio). *Sea $f : (X, \mathcal{T}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ una apliación continua definida en un espacio conexo $(X, \mathcal{T})$. Si $f(x) = a$ y $f(y) = b$ con $a < b$, entonces para todo $c \in [a,b]$ existe un punto z en X tal que $f(z) = c$.*

Ejemplo 1. (1) *Probar que $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ con su topología usual es un espacio conexo.*

(2) *Probar que la esfera $\mathbb{S}^n$ y el espacio proyectivo $\mathbb{RP}^n$, con sus topologías usuales, son espacios conexos.*

(3) *El cilindro $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$, el toro $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ y la cinta de Moebius son espacios topológicos conexos.*

Como consecuencia de estas propiedades, se prueba el siguiente resultado:

Theorem 3 (Teorema de Borsuk-Ulam). *Sea $f : (\mathbb{S}^n, \mathcal{T}_u) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ una aplicación continua. Entonces existe un punto $p_0 \in \mathbb{S}^n$ tal que $f(p_0) = f(-p_0)$.*

2. Componentes conexas

Si un espacio topológico es disconexo, dicho espacio se pone como unión disjunta de subconjuntos conexos. El número de tales "trozos" será indicativo de lo disconexo que el espacio es.

Definición 4. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Definimos en X la relación $x \sim y$ si existe un sunconjunto conexo A de X tal que $x, y \in A$. Es claro que $\sim$ es una relación de equivalencia en X y por tanto define una partición de X en subconjuntos disjuntos. A dichos subconjuntos le llamaremos las componentes conexas de $(X, \mathcal{T})$.

Así, si $C \subset X$ es una componente conexa y $x, y \in C$, se tiene que $x \sim y$. Además si C y C' son componentes conexas diferentes, $x \in C$ y $x' \in C'$, se tiene que x no está relacionado con y.

Si x es un punto de un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$, llamaremos la componente conexa de x a la componente conexa de X que contiene a x. Se representará por C_x. Es claro que si $x \neq y$ son puntos de X, entonces $C_x = C_y$ o $C_x \cap C_y = \emptyset$. Estudiemos a continuación propiedades de las componentes.

Proposición 6. *Seas $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Entonces*

C_x es el mayor conexo que contiene a x

(1) *Las componente conexas de $(X, \mathcal{T})$ son subconjuntos conexos maximales de X, esto es si C es una componente conexa de X, entonces C es un subconjunto conexo de X y si A es un subconjunto conexo de X con $C \subset A$ entonces $A = C$.*

Las comp. conexas de x son cerrados ya que la conexión se mantiene por cierre

(2) *Las componentes conexas de X son subconjuntos cerrados de $(X, \mathcal{T})$. Por tanto, si el número de componentes conexas es finito, las componentes son también abiertas.*

(3) *Si C es un subconjunto no vacio, conexo, abierto y cerrado de X, entonces C es una componente conexa de X.*

(4) *Si $\{O_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ es una partición de X por subconjuntos abiertos, conexos y no vacios, entonces $\{O_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ son las componentes de X.*

Ejemplo 2. (1) *La componentes conexas de un espacio con la topología discreta son sus puntos.*

(2) *Las componentes conexas de $(\mathbb{Q}, \mathcal{T}_u)$ son sus puntos. En este caso la topología no es la discreta y en particular las componentes conexas no son abiertas.*

(3) *Sea*

$$X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + 1 = z^2\},$$

dotado de la topologia inducida de la usual de $\mathbb{R}^3$. Entonces X tiene dos componentes conexas, que vienen dadas por

$$C^+ = \{(x, y, z) \in X \mid z \geq 1\}, \quad C^- = \{(x, y, z) \in X \mid z \leq -1\}.$$

Proposición 7. *Sea $f : (X, \mathcal{T}) \to (X', \mathcal{T}')$ una aplicación continua. Si C es una componente conexa de X, entonces $f(C) \subset C'$ siendo C' una componente conexa de X'. Como consecuencia, si f es un homeomorfismo, la imagen de una componente conexa de X es una componente conexa de X', y así el número de componentes conexas de un espacio es un invariante topológico.*

Ejemplo 3. *Probar que $(X, \mathcal{T})$ y $(X', \mathcal{T}')$ no son homeomorfos cuando:*

(1) $(X, \mathcal{T}) = (\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ *y* $(X', \mathcal{T}') = (\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_u)$, $n \geq 2$.
(2) $(X, \mathcal{T}) = ([a, b], \mathcal{T}_u)$ *y* $(X', \mathcal{T}') = (\mathbb{S}^1, \mathcal{T}_u)$.
(3) $(X, \mathcal{T}) = (\mathbb{S}^1, \mathcal{T}_u)$ *y* $(X', \mathcal{T}') = (\mathbb{S}^n, \mathcal{T}_u)$, $n \geq 2$.

Proposición 8. *Sean $(X_i, \mathcal{T}_i)$, $i = 1, 2$, espacios topológicos y $(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$. Entonces*

$$C_{(x_1, x_2)} = C_{x_1} \times C_{x_2},$$

donde C_a representa la componente conexa de a.

Local conexo + conexo ⟹ arcoconexo

Local conexo ⟹ Comp. conexas abiertas

3. Espacios conexos por arcos

Definición 5. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Un arco o camino (continuo) en X es una aplicación continua $f : ([0,1], \mathcal{T}_u) \to (X, \mathcal{T})$. Al punto $x = f(0)$ se le llama el origen del arco, y al punto $y = f(1)$ el extremo del arco. Se dirá que F une o conecta x con y.

Conviene observar que el considerar los arcos definidos en $[0,1]$ no es restrictivo, pues todos los intervalos cerrados y acotados son homeomorfos entre si.

Es claro que el arco constante $f(t) = x$, $\forall t \in [0,1]$, conecta x con x. También, si f conecta x con y, entonces $g(t) = f(1-t)$ conecta y con x. Además, si f conecta x con y y g conecta y con z, entonces

$$(f_* g)(t) = f(2t) \quad 0 \leq t \leq 1/2, g(2t-1) \quad 1/2 \leq t \leq 1$$

es un arco que conecta x con z. Por tanto la relación en X dada por xRy si existe un arco f que conecta x con y es una relación de equivalencia.

Definición 6. A los subconjuntos de X de la partición asiociada a la relación de equivalencia R le llamamos las componentes arco-conexas de $(X, \mathcal{T})$. $(X, \mathcal{T})$ se dice conexo por arcos si solo posee una componente arco conexa, esto es si dados dos puntos arbitrarios de X existe un arco que los conecta.

Definición 7. Un subconjunto A de un espacio topoógico $(X, \mathcal{T})$ se llama conexo por arcos, si el subespacio $(A, \mathcal{T}_A)$ es conexo por arcos.

Puesto que la imagen de un arco de $(X, \mathcal{T})$ es un subconjunto conexo de X, es fácil probar el siguiente resultado:

conexo ⟹ arcoconexo
⇓
conexo

Proposición 9. *Todo espacio topológico conexo por arcos es conexo.*

El recíproco del anterior resultado es falso como lo prueba el siguiente ejemplo. Consideremos

$$X = \{(x, \sin 1/x) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in (0,1]\} \cup \{(0,0)\} \subset \mathbb{R}^2$$

dotado de la topología inducida de la usual de $\mathbb{R}^2$. Como se probó en la sección 1, este espacio es conexo. Pero no es dificil probar que no es conexo por arcos, ya que no existe un arco en X conectando el punto $(0,0)$ con un punto de la forma $(x, \sin 1/x)$ con $x \in (0,1]$. El punto $(0,0)$ de este espacio tiene la propiedad de que no posee ningún entorno conexo por arcos.

Proposición 10. *Dado un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$, se cumple que X es conexo por arcos si y sólo si X es conexo y todo punto posee un entorno conexo por arcos.*

Como consecuencia se prueba el siguiente

Corolario 3. *Todo subconjunto abierto y conexo del espacio Euclídeo $\mathbb{R}^n$ es conexo por arcos.*

localmente conexo por arcos ⟺ cada punto tiene una base entornos conexa por arcos

localmente conexo ⟹ cada punto tiene una base entornos formada por conexos esp métrico compacto $\iff$ subsucesión convergente

$f : (X,d) \to (Y,d')$ continua, (X,d) compacto $\implies$ f es unif cont.

4. Espacios Compactos

Los intervalos cerrados y acotados de $\mathbb{R}$ (o más generalmente los subconjuntos cerrados y acotados de $\mathbb{R}$) juegan un importante papel en el cálculo. El objetivo de esta sección es estudiar espacios topológicos que posean propiedades similares a los anteriores subconjuntos de $\mathbb{R}$. A estos espacios los llamaremos compactos, y el problema estriba en que el concepto de acotado no es topológico. Esto lo soluciona el clásico teorema de Heine-Borel. Heine-Borel

Theorem 4. *Un subconjunto A de $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ es cerrado y acotado si y sólo si para todo recubrimiento de A por abiertos podemos extraer un subrecubrimiento finito, esto es, para toda familia $\{O_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ de abiertos de $\mathbb{R}$ cumpliendo $A \subset \cup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda$ existe una subfamilia finita $\{O_{\lambda_1}, \dots, O_{\lambda_n}\}$ tal que $A \subset \cup_{i=1}^n O_{\lambda_i}$.*

Definición 8. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y A un subconjunto de X. Diremos que A es compacto si para todo recubrimiento de A por abiertos de X podemos extraer un subrecubrimiento finito, esto es para toda familia $\{O_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\} \subset \mathcal{T}$ de abiertos de X cumpliendo $A \subset \cup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda$ existe una subfamilia finita $\{O_{\lambda_1}, \dots, O_{\lambda_n}\}$ tal que $A \subset \cup_{i=1}^n O_{\lambda_i}$.

Cuando $A = X$ diremos que el espacio $(X, \mathcal{T})$ es compacto, y en este caso la compacidad de X significa que para toda familia $\{O_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\} \subset \mathcal{T}$ de abiertos de X cumpliendo $X = \cup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda$ existe una subfamilia finita $\{O_{\lambda_1}, \dots, O_{\lambda_n}\}$ tal que $X = \cup_{i=1}^n O_{\lambda_i}$. Es claro que A es un subconjunto compacto de X si y s'olo si el espacio $(A, \mathcal{T}_A)$ es compacto.

Proposición 11. *Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y $\mathcal{B}$ una base de $\mathcal{T}$. Entonces son equivalentes las siguientes propiedades:*

(1) $(X, \mathcal{T})$ es compacto.
(2) Para toda familia $\{F_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ de cerrados de X cumpliendo $\emptyset = \cap_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda$ existe una subfamilia finita $\{F_{\lambda_1}, \dots, F_{\lambda_n}\}$ tal que $\emptyset = \cap_{i=1}^n F_{\lambda_i}$.
(3) Todo recubrimiento de X por abiertos de la base $\mathcal{B}$ admite un subrecubrimiento finito.

A continuación vamos a estudiar algunas propiedades interesantes de los espacios compactos.

la compacidad se mantiene por funciones continuas

Proposición 12. *Sea $f : (X, \mathcal{T}) \to (X', \mathcal{T}')$ una aplicación continua. Si $(X, \mathcal{T})$ es compacto entonces $f(X)$ es un subconjunto compacto de X'. En particular, la compacidad es una propiedad topológica, esto es todo espacio homeomorfo a un espacio compacto también es compacto.*

Conviene notar que si un espacio $(X, \mathcal{T})$ es compacto y R es una relación de equivalencia en X, entonces el espacio cociente $(X/R, \mathcal{T}/R)$ también es compacto.

El siguiente resultado es importante y en él se estudian propiedades interesantes de los subconjuntos compactos.

Proposición 13. *Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topoloógico y A un subconjunto de X. Entonces:*

(X, T) Hausdorff compacto   A cerrado <=> A compacto

(1) Si $(X, \mathcal{T})$ es compacto y A es cerrado, entonces A es compacto.
(2) Si $(X, \mathcal{T})$ es Hausdorff y A es compacto, entonces A es cerrado.

Otra consecuencia interesante es la siguiente.

Corolario 4. *Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topoloógico y A, B subconjuntos de X. Entonces:*

(1) Si A es compacto y B cerrado, entonces $A \cap B$ es compacto.
(2) Si $(X, \mathcal{T})$ es Hausdorff y A, B son compactos, entonces $A \cap B$ es compacto.

Como consecuencia de las proposiciones 12 y 13 se tiene el siguiente:

Corolario 5. *Sea $f : (X, \mathcal{T}) \to (X', \mathcal{T}')$ una aplicación continua. Si X es compacto y X' es Hausdorff, entonces f es una aplicación cerrada.*

También de la proposición 13 se sigue

Corolario 6. *Sea (X, d) un espacio métrico. Si A es un subconjunto compacto de $(X, \mathcal{T}(d))$, entonces A es cerrado y acotado.*

Theorem 5 (Número de Lebesgue). *Sea (X, d) un espacio métrico compacto y $\{O_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\} \subset \mathcal{T}(d)$ un recubrimiento abierto de X. Entonves existe un número real $\delta > 0$ tal que si A es un subconjunto de X con diámetro menor que δ, entonces existe un abierto O_{λ_0} del recubrimiento tal que $A \subset O_{\lambda_0}$. A δ se le llama el número de Lebesgue del recubrimiento.*

Para finalizar estudiemos un resultado clásico que estudia el comportamiento de la compacidad frente al producto de espacios.

Theorem 6. *Sean $(X, \mathcal{T})$ y $(X', \mathcal{T}')$ espacios topológicos. Entonces el espacio producto $(X \times X', \mathcal{T} \times \mathcal{T}')$ es compacto si y sólo si $(X, \mathcal{T})$ y $(X', \mathcal{T}')$ son compactos.*

Corolario 7. *Sea $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_u)$ el espacio Euclídeo. Entonces un subconjunto A de $\mathbb{R}^n$ es compacto si y sólo si es un subconjunto cerrado y acotado.*

Union finita compactos es compacta

Union finita
Interseccion arbitraria } cerrados y compactos => cerrada y compacta

Abierto + conexo en $\mathbb{R}^n$ => arcoconexo

estrellado => arcoconexo