**Examen de Topología I**

**2º curso del Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas**

**29 de Noviembre de 2018**

**Ejercicio 1.** (4 puntos) Sea $X$ un conjunto y $A, B$ subconjuntos distintos de $X$ cumpliendo $A \subset B$, $A \neq \emptyset$ and $B \neq X$. Se considera $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ definida por

$$\mathcal{T} = \{O \subset X \,|\, O \subset A\} \cup \{\hat{O} \subset X \,|\, B \subset \hat{O}\}.$$

(1) Probar que $\mathcal{T}$ es una topología en $X$.
(2) Describir los cerrados de $(X, \mathcal{T})$.
(3) Dar una base de entornos de un punto arbitrario $x \in X$. (Indicación. Considerar los tres casos posibles: $x \in A$, $x \in B - A$ y $x \in X - B$)
(4) Calcular el interior, la adherencia y la frontera de los subconjuntos $A$, $B - A$ y $B$.
(5) Describir la topología inducida en los subconjuntos $A \cup (X - B)$ y $B - A$.

**Ejercicio 2.** (3 puntos) En el conjunto de los naturales $\mathbb{N}$ se define, para cada natural $n$, el siguiente subconjunto de $\mathbb{N}$

$$O(n) = \{m \in \mathbb{N} \,|\, m \text{ es divisor de } n\}.$$

(1) Probar que $\mathcal{B} = \{O(n) \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ define una topología $\mathcal{T}(\mathcal{B})$ en $\mathbb{N}$ de la cual $\mathcal{B}$ es una base.
(2) Calcular el interior, la adherencia y la frontera de los subconjuntos $\{1\}$ y $\{n\}$, con $1 < n$.
Dificil (3) Probar que una aplicación $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es continua si y sólo si $f$ cumple la siguiente propiedad:

"si $m$ es divisor de $n$, entonces $f(m)$ es divisor de $f(n)$, $m, n, \in \mathbb{N}$".

**Ejercicio 3.** (3 puntos) Sea $X$ el subconjunto de $\mathbb{R}^3$ definido por

$$X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 - z^2 = -1\}.$$

Se consideran los subconjuntos $X^+$ y $X^-$ de $X$ definidos por

$$X^+ = \{(x, y, z) \in X \,|\, z > 0\} \quad X^- = \{(x, y, z) \in X \,|\, z < 0\}.$$

(1) Probar que $X, X^+$ y $X^-$ son subconjuntos cerrados de $(\mathbb{R}^3, \mathcal{T}_u)$. ¿Son subconjuntos abiertos?
(2) Si representamos también por $\mathcal{T}_u$ la topología inducida en $X$ por la usual de $\mathbb{R}^3$, probar que $X^+$ y $X^-$ son subconjuntos abiertos y cerrados de $(X, \mathcal{T}_u)$.
(3) Probar que $X^+$ y $X^-$, dotados de las topologías inducidas por la usual, son homeomorfos. ¿Podrías construir un homeomorfismo entre dichos espacios y algún espacio conocido?

**Examen de Topología I**

**2º curso del Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas**

**11 de Enero de 2019**

**Ejercicio 1.** (3 puntos) En $\mathbb{R}^2$ se considera la familia de subconjuntos

$$\mathcal{T} = \{\mathbb{R}^2, \emptyset\} \cup \{O_k \mid k \in \mathbb{R}\},$$

siendo $O_k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > k\}$.

(1) Probar que $\mathcal{T}$ es una topología en $\mathbb{R}^2$ y compararla con la topología usual de $\mathbb{R}^2$.
(2) Estudiar la topología inducida por $\mathcal{T}$ en los subconjuntos $\mathbb{R} \times \{0\}$ y $\{0\} \times \mathbb{R}$. ¿Es $\mathcal{T}$ la topología producto en $\mathbb{R}^2$ de conocidas topologías en $\mathbb{R}$?
(3) Calcular el interior, la adherencia y la frontera en $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$ de los subconjuntos

$$A = \{(0, 0)\}, \quad B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0,\ y = 1\}.$$

(4) Sea $(X, \mathcal{T}')$ cualquier espacio topológico y $f, g : X \to \mathbb{R}$ aplicaciones con $f : (X, \mathcal{T}') \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ continua. Probar que la aplicación $F : (X, \mathcal{T}') \to (\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$ dada por $F(x) = (f(x), g(x))$, $\forall x \in X$, es continua.
(5) Estudiar si $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$ es Hausdorff, compacto, conexo o arco-conexo.

**Ejercicio 2.** (3 puntos) Sea $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1,\ -1 \leq z \leq 1\}$ el cilindro dotado de su topología usual $\mathcal{T}_u$. Se define en $C$ la relación $R$ dada por

$$(x, y, z) R (x', y', z') \quad \text{si} \quad (x, y, z) = (x', y', z') \quad \text{o} \quad z = z' = 1 \quad \text{o} \quad z = z' = -1.$$

(1) Probar que $R$ es una relación de equivalencia en $C$ y que la proyección $p : (C, \mathcal{T}_u) \to (C/R, \mathcal{T}_u/R)$ es cerrada.
(2) Probar que $(C/R, \mathcal{T}_u/R)$ es homeomorfo a la esfera $(\mathbb{S}^2, \mathcal{T}_u)$.

**Ejercicio 3.** (4 puntos) Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y $\infty$ un punto no perteneciente a $X$. En el conjunto $X^* = X \cup \{\infty\}$ se define

$$\mathcal{T}^* = \mathcal{T} \cup \{O^* \subset X^* \mid X^* - O^* \text{ es un subconjunto cerrado y compacto de } X\}.$$

(1) Probar que $\mathcal{T}^*$ es una topología en $X^*$ y que $(X, \mathcal{T})$ es un subespacio topológico de $(X^*, \mathcal{T}^*)$.
(2) Probar que $(X^*, \mathcal{T}^*)$ es un espacio compacto.
(3) Probar que si $(X, \mathcal{T})$ es compacto, entonces $\{\infty\}$ es una componente conexa de $(X^*, \mathcal{T}^*)$.
(4) Probar que si $(X, \mathcal{T})$ es conexo y no compacto, entonces $(X^*, \mathcal{T}^*)$ es conexo.
(5) Si $(X, \mathcal{T}) = (\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$, ¿sabría identificar topológicamente $(X^*, \mathcal{T}^*)$?

compacto algún abierto conten[ga] a.c. y es de la 2ª parte

Indicación: Probar que $\infty \in O^*$ y por tanto $X^* - O^* = X - O^* \not\ni \infty$

**Ejercicio 4.** (3 puntos) Probar las siguientes afirmaciones:

(1) Si $f : (\mathbb{S}^n, \mathcal{T}_u) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ es una aplicación continua, entonces existe un punto $p \in \mathbb{S}^n$ cumpliendo $f(-p) = f(p)$.
(2) Si $f : ([a, b], \mathcal{T}_u) \to ([a, b], \mathcal{T}_u)$ es una aplicación continua, existe un $t \in [a, b]$ cumpliendo $f(t) = t$.
(3) Todo polinomio $P(x)$ con coeficientes reales y de grado impar tiene una raiz real.

Los alumnos con toda la asignatura deben de realizar los ejercicios 1), 2) y 3). Los alumnos con el segundo parcial deben de realizar los ejercicios 2), 3) y 4).

(1)

4) $(X, \tau')$ esp top

$$\left.\begin{array}{l} f: (X, \tau') \longrightarrow (\mathbb{R}, \tau_u) \text{ continua} \\ g: X \longrightarrow \mathbb{R} \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{l} F: (X, \tau') \to (\mathbb{R}^2, \overset{\tau_K \times \tau_T}{\overset{\shortparallel}{\tau}}) \\ F(x) = (f(x), g(x)) \\ \text{continua.} \end{array}$$

Dem

$F$ continua $\Longleftrightarrow$ $f$ continua
$g$ continua

•) $g: (X, \tau') \longrightarrow (\mathbb{R}, \tau_T)$ continua. (Porque llega a la trivial)

$f: (X', \tau) \longrightarrow (\mathbb{R}, \tau_K)$ continua

$\Downarrow$

•) $f: (X', \tau) \longrightarrow (\mathbb{R}, \tau_u)$ continua

# Topología

① $\mathbb{R}^2$

$\tau = \{\mathbb{R}^2, \emptyset\} \cup \{O_K : K \in \mathbb{R}\}$ , $O_K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > K\}$

1) ¿Topología?

•) ¿$\emptyset, \mathbb{R}^2 \in \tau$?

$\emptyset \in \tau$, $\mathbb{R}^2 \in \tau$.

•) ¿$\{O_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \subset \tau \Rightarrow (\bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda) \in \tau$?

$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_{K_\lambda} = O_\alpha$ donde $\alpha = \min\{K_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$

•) ¿$\{O_i : i \in \{1,\dots,n\}\} \subset \tau \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} O_i \in \tau$?

$\bigcap_{i=1}^{n} O_{K_i} = O_\beta$ donde $\beta = \max\{K_i : i \in \{1,\dots,n\}\}$

•) ¿$\tau_u \subset \tau$? ¿$\tau \subset \tau_u$?

Veamos que $\tau \subset \tau_u$. Para ello, expresemos los abiertos básicos de $\tau$ como abiertos de $\tau_u$, esto es,

$O_K = \bigcup_{\substack{(x,y) \in \mathbb{R} \\ x > K}} B((x,y), d(x,K))$ , así $\tau \subset \tau_u$

Ahora veamos que $\tau_u \not\subset \tau$.

Pero esto NO puede ocurrir ya que si fueran iguales podríamos generar un homeomorfismo entre ambas, y esto NO puede ser así ya que $(\mathbb{R}^2, \tau_u)$ es Hausdorff mientras que $(\mathbb{R}^2, \tau)$ NO es Hausdorff, como veremos posteriormente.

2) $\tau|_{\mathbb{R}\times\{0\}} = \{O \cap (\mathbb{R}\times\{0\}) : O \in \tau\}$

$= \{O_K \cap (\mathbb{R}\times\{0\}) : K \in \mathbb{R}\}$

$= \{(K,\infty)\times\{0\} : K \in \mathbb{R}\} = \tau_K$

$\tau|_{\{0\}\times\mathbb{R}} = \{O \cap (\{0\}\times\mathbb{R}) : O \in \tau\}$

$= \{O_K \cap (\{0\}\times\mathbb{R}) : K \in \mathbb{R}\}$

$= \{\emptyset\} \cup \{\{0\}\times\mathbb{R}\} = \tau_T$

Dado $\tau_1 \times \tau_2$,

$\mathcal{B}_{\tau_1\times\tau_2} = \{O_1 \times O_2 : O_1 \in \tau_1, O_2 \in \tau_2\}$, por tanto,

$\mathcal{B}_{\tau_K\times\tau_T} = \{O_1 \times O_2 : O_1 \in \tau_K, O_2 \in \tau_T\}$

$= \{(K,\infty)\times\mathbb{R} : \underset{\mathbb{R}\in\tau_T}{(K,\infty)\in\tau_K}\} = \{O_K : K \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}^2\}$

Por tanto $\tau = \tau_K \times \tau_T$

3) $(\mathbb{R}^2, \tau)$

$A = \{(0,0)\}$, $\underline{\mathring{A} = \emptyset}$ ya que No existe ningún abierto de la topología $\tau$ que esté incluido en $A$.

$\underline{\bar{A} = \mathbb{R}^2 - O_0}$ Veamos que esto es así.

•) $\forall x \in \mathbb{R}^2 - O_0$, $\forall U \in \mathcal{U}^x$, $U \cap A \neq \emptyset$.

Si calculamos previamente que $\mathcal{B}^x = \{O_{x-\varepsilon}\}$, podemos ver que $\forall U \in \mathcal{U}^x$, $O_{x-\varepsilon} \subset U$. En este caso, como

$x \in \mathbb{R}^2 - O_0$, $\forall U \in \mathcal{U}^x$, $\{(0,0)\} \subset O_{x-\varepsilon} \subset U \Rightarrow A \cap U \neq \emptyset$.

•) $\forall x \notin \mathbb{R}^2 - O_0$, $\exists U \in \mathcal{U}^x : U \cap A = \emptyset$

Si $x \notin \mathbb{R}^2 - O_0 \Rightarrow x \in O_0$, tomando $U = \{O_{x-\varepsilon}\}$, existe siempre un $\varepsilon > 0$ que verifica: $U \cap A = \emptyset$.

$Fr(A) = (\mathbb{R}^2 - O_0) - \emptyset = \mathbb{R}^2 - O_0$

$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0,\ y = 1\}$

$\boxed{\mathring{B} = \emptyset}$ ya que No hay ningún abierto de $\tau$ incluido en el conjunto B.

$\boxed{\overline{B} = \mathbb{R}^2}$

•) $\forall x \in \mathbb{R}^2, \forall U \in \mathcal{U}^x, U \cap B \neq \emptyset$

Sea $x \in \mathbb{R}^2$, como $\beta^x = \{O_{x-\varepsilon}\}$, $\forall U \in \mathcal{U}^x$, $\{O_{x-\varepsilon}\} \subset U$ y por tanto, $U \cap B \neq \emptyset$.

$Fr(B) = \mathbb{R}^2$

5) $(\mathbb{R}^2, \tau)$

•) Veamos que No es Hausdorff.

Si fuese Hausdorff, $\forall x, y,\ x \neq y$, $\exists U \in \mathcal{U}^x, V \in \mathcal{U}^y : U \cap V = \emptyset$

Pero como $\beta^x = \{O_{x-\varepsilon}\}$, $\forall U \in \mathcal{U}^x$, $\{O_{x-\varepsilon}\} \subset U$, $\forall V \in \mathcal{U}^y$, $\{O_{y-\varepsilon}\} \subset V \Rightarrow U \cap Y \neq \emptyset$.

•) Veamos que No es compacto:

Tomemos como recubrimiento infinito $\bigcup_{i=1}^{\infty} O_{k_i}$. Así $\mathbb{R}^2 \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} O_{k_i}$ pero no hay un subrecubrimiento finito que contenga a $\mathbb{R}^2$, ya que

$\mathbb{R}^2 \not\subset \bigcup_{i=1}^{n} O_{k_i}$, por que, sea $\alpha = \min\{k_i : i \in \{1, \dots, n\}\}$

$(x - \alpha - \varepsilon, 0) \notin \bigcup_{i=1}^{n} O_{k_i}$.

•) Ahora veamos que es conexo

Si fuese disconexo, $\exists A, B \in \tau : A \neq \emptyset \neq B$. $A \cup B = \mathbb{R}^2$, $A \cap B = \emptyset$, pero $A \cap B \neq O$ $\forall O \in \tau$. Así, $(\mathbb{R}^2, \tau)$ es conexo.

(2) $C = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2=1 \ , -1\le z\le 1\}$

$$(x,y,z)\, R\, (x',y',z') \iff \begin{cases} (x,y,z)=(x',y',z') \\ z=z'=1 \\ z=z'=-1\end{cases}$$

1) ¿R rel. eq.?

• Simétrica $\quad (x,y,z)R(x',y',z') \iff \begin{cases}(x,y,z)=(x',y',z') \Rightarrow (x',y',z')R(x,y,z) \\ z=z'=1 \Rightarrow (x',y',z')R(x,y,z) \\ z=z'=-1 \Rightarrow (x',y',z')R(x,y,z)\end{cases}$

• Reflexiva

$(x,y,z)R(x,y,z) \iff (x,y,z)=(x,y,z)$

• Transitiva.

$$(x,y,z)R(x,y,z) \iff \begin{cases} (x,y,z)=(x',y',z') \Rightarrow \begin{cases} \text{Si } (x',y',z')=(x'',y'',z'') \Rightarrow (x,y,z)=(x'',y'',z'') \\ \text{Si } z'=z''=1 \Rightarrow z=z''=1 \\ \text{Si } z'=z''=-1 \Rightarrow z=z''=-1\end{cases} \\ z=z'=1 \Rightarrow \begin{cases} (x',y',z')=(x'',y'',z'') \Rightarrow z''=z=1 \\ z'=z''=1 \Rightarrow z=z''=1 \end{cases} \\ z=z'=-1 \Rightarrow \begin{cases} (x',y',z')=(x'',y'',z'') \Rightarrow z=z''=-1 \\ z'=z''=-1 \Rightarrow z=z''=-1 \end{cases}\end{cases}$$

•) Para probar que es cerrada solo diremos que va de un espacio compacto como es el cilindro acotado a un espacio Hausdorff, que como veremos $C/R$ es homeomorfo a $S^2$.

2) Para probar esto, vamos a buscar una identificación $f$, probaremos que $R=R_f$ y esto nos dirá por un teorema de la teoría que $\exists$ un homeomorfismo $\hat{f}$ entre estos espacios. Se expone a continuación.

$$\begin{tikzcd} (C, \mathcal{T}_u|_C) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & (S^2, \mathcal{T}_u|_{S^2}) \\ (C/R, \mathcal{T}_u/R) \arrow[ur, "\hat{f}"'] & \end{tikzcd}$$

$\left.\begin{array}{l} f \text{ identificación} \\ R=R_f \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{f}$ homeomorfism sea $f: (C, \tau_u) \longrightarrow (S^2, \tau_u)$

$$f(x,y,z) = (\lambda x, \lambda y, z)$$

$$(\lambda x)^2 + (\lambda y)^2 + z^2 = 1 \Rightarrow \lambda^2 \underbrace{(x^2+y^2)}_{=1} + z^2 = 1 \Rightarrow \lambda^2 + z^2 = 1$$

$\lambda = \sqrt{1-z^2}$, ASÍ:

$$f: (C, \tau_u) \longrightarrow (S^2, \tau_u)$$
$$f(x,y,z) = (x\sqrt{1-z^2}, y\sqrt{1-z^2}, z)$$

•) Trivialmente es sobre.

•) Es cerrada porque va de compacto a Hausdorff

•) Es continua porque lo es en cada variable.

¿$R = R_f$?

$\boxed{R \Rightarrow R_f}$

$$(x,y,z)R(x',y',z') \Rightarrow \begin{cases} \bullet (x,y,z) = (x',y',z') \Rightarrow f(x,y,z) = f(x',y',z') \\ \quad \Rightarrow (x,y,z) R_f (x',y',z') \\ \bullet z = z' = 1 \Rightarrow f(0,0,1) = f(0,0,1) \Rightarrow (x,y,z) R_f (x',y',z') \\ \bullet z = z' = -1 \Rightarrow \end{cases}$$

$\boxed{R_f \Rightarrow R}$

$$(x,y,z) R_f (x',y',z') \Rightarrow f(x,y,z) = f(x',y',z').$$

$$f(x,y,z) = f(x',y',z') = \begin{cases} (x,y,z) = (x',y',z') \Rightarrow (x,y,z) R (x',y',z') \\ (0,0,1) = (0,0,1) \Rightarrow \\ (0,0,1) = (0,0,1) \Rightarrow \end{cases}$$

Así vemos que $(C, \tau_u)$ es homeomorfo a $(S^2, \tau_u)$

③ $(X,\tau)$ esp. top. $\{\infty\} \notin X$, $X^* = X \cup \{\infty\}$

$\tau^* = \tau \cup \{O^* \subset X^* : X^* - O^*$ cerrado compacto de $X\}$

1) ¿$\tau^*$ es topología?

•) ¿$X^*, \emptyset \in \tau^*$?

$\emptyset \in \tau \Rightarrow \emptyset \in \tau^*$

$X^* \subset X^*$ ; $X^* - X^* = \emptyset$ compacto cerrado de $X \Rightarrow X^* \in \tau^*$

•) $\{O^*_{K_\lambda} : \lambda \in \Lambda\} \subset \tau^* \Rightarrow (\bigcup_{\lambda\in\Lambda} O^*_{K_\lambda}) \in \tau^*$

$X^* - \bigcup_{\lambda\in\Lambda} O^*_{K_\lambda}$ ¿cerrado compacto? $\Longleftrightarrow \bigcap_{\lambda\in\Lambda}(X^* - O^*_{K_\lambda})$ ¿cerrado compacto?

pero sabemos que la intersección arbitraria de cerrados es cerrada, y la intersección de cerrados y compactos es compacta. Por tanto $\bigcap_{\lambda\in\Lambda}(X^* - O^*_{K_\lambda})$ cerrado y compato

$\Rightarrow \bigcup_{\lambda\in\Lambda} O^*_{K_\lambda} \in \tau^*$

•) ¿$\{O^*_i : i \in \{1,\dots,n\}\} \subset \tau^* \Rightarrow \bigcap_{i=1}^n O^*_{K_i} \in \tau^*$?

$X^* - \bigcap_{i=1}^n O^*_{K_i} = \bigcup_{i=1}^n (X^* - O^*_{K_i})$ ¿cerrado y compacto?

sabemos que la unión numerable de cerrados es cerrada y la unión de compactos y cerrados numerable es compacta.

Así, $\bigcup_{i=1}^n (X^* - O^*_{K_i})$ es cerrada compacta $\Rightarrow \bigcap_{i=1}^n O^*_{K_i} \in \tau^*$.

•) Para probar que $(X,\tau)$ sub. top de $(X^*,\tau^*)$ debemos comprobar que $\tau^*|_X = \tau$

$$\tau^*|_X = \{O^* \cap X : O^* \in \tau^*\} \cup \overset{\tau}{\overset{\shortparallel}{\tau|_X}}$$

$$= \{O^* \cap X : X^* - O^* \text{ cerr y comp de } X\} \cup \tau$$

$$= \{O^* \cap X : X - O^* \text{ cerr y comp de } X\} \cup \tau \quad \text{porque } \{\infty\} \in O^*$$

$$= \{O^* \in \tau : X - O^* \text{ cerr. y comp. de } X\} \cup \tau$$

$$= \{O^* \in \tau : X - O^* \text{ compacto de } X\} \cup \tau$$

$$= \tau \quad \text{porque } \{O^* \in \tau : X - O^* \text{ compacto de } X\} \subset \tau$$

3) $(X,\tau)$ compacto $\Longrightarrow$ $\{\infty\}$ Comp. conexa. $(X^*,\tau^*)$

•) Es conexo por ser puntual.

•) $\{\infty\} \in \tau^*$

$\{\infty\} \subset X^* : \underset{\underset{X}{\shortparallel}}{X^* - \{\infty\}}$ cerr. compacto de $X$.

•) $\{\infty\} \in \mathcal{C}\tau^* \Longrightarrow \overset{\overset{X}{\shortparallel}}{X^* - \{\infty\}} \in \tau^*$

$X \subset X^* : X^* - (X^* - \{\infty\})$ cerr. compacto de $X$.

$X^* - X = \{\infty\}$ compacto.

es cerrado porque su complementario es abierto.

2) $(X^*, \tau^*)$ compacto.

Sea $\{O_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ recubrimiento por abiertos de $(X^*, \tau^*)$

$X^* = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \ni \infty$

$\exists \lambda_0 \in \Lambda : \infty \in O_{\lambda_0} \Rightarrow O_{\lambda_0}$ (pertenece al segundo conjunto)

$X^* - O_{\lambda_0}$ es cerrado y compacto. de $(X, \tau) \subset (X^*, \tau^*)$

$\Rightarrow X^* - O_{\lambda_0}$ es cerr. comp de $(X^*, \tau^*)$

$\Rightarrow X^* - O_{\lambda_0} \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda$ .

$\Rightarrow \exists \lambda_1, \ldots, \lambda_n : \bigcup_{i=1}^{n} O_{\lambda_i} \supset X^* - O_{\lambda_0} \Rightarrow \boxed{X^* = O_{\lambda_0} \cup \left(\bigcup_{i=1}^{n} O_{\lambda_i}\right)}$

4) $(X, \tau)$ conexo $\Longrightarrow$ $(X^*, \tau^*)$ conexo.
No compacto

Supongamos que $(X^*, \tau^*)$ No es conexo.

Entonces debe ser disconexo.

$\exists O_1, O_2 \in \tau^* : O_1 \neq O_2 \neq \emptyset$.

$O_1 \cap O_2 = \emptyset$

$O_1 \cup O_2 = X$

Supongamos sin pérdida de generalidad que:

$\infty \in O_1$ , $\infty \notin O_2 \Rightarrow O_2 \in \tau$

$\Downarrow$

$X^* - O_1$ cerr. comp.

$\|$

$O_2$ cerr. $\longrightarrow$ Como $X$ conexo , $\cancel{O_2 = \emptyset}$ $O_2 = X$

$O_1 = \{\infty\}$

$X^* - O_1$ cerr.comp $= X^* - \{\infty\}$ cerr.comp $= X$ cerr. comp.

Contradicción porque $X$ No compacto.

(1)

4) $(X, T')$ , $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$

$f : (X, T') \longrightarrow (\mathbb{R}, T_U)$ continua

$F : (X, T') \longrightarrow (\mathbb{R}^2, T)$

$F(x) = (f(x), g(x))$ $\forall x \in X$ ¿continua?

$F : (X, T') \longrightarrow (\mathbb{R}^2, T)$ continua $\iff$ $f : (X, T') \longrightarrow (\mathbb{R}, T_U)$ $\wedge$ $g : (X, T') \longrightarrow (\mathbb{R}, T_K)$ continuas

$f$ continua por hipotesis

Como $T_K \subset T_U$ , y $f$ continua

$\Rightarrow$ $g$ continua

**Examen de Topología I**

**2º curso del Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas**

**1 de Febrero de 2019**

**Ejercicio 1.** (3 puntos)· Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico e $Y \subset X$ un subconjunto propio, esto es $Y \neq \emptyset$ e $Y \neq X$. Se considera en $X$ la familia de subconjuntos $\mathcal{T}^Y$ definida por

$$\mathcal{T}^Y = \{O \cup O' \,|\, O \in \mathcal{T} \text{ y } O' \subset Y\}.$$

(1) Probar que $\mathcal{T}^Y$ es una topología en $X$ y compararla con $\mathcal{T}$.

(2) Probar que la topología inducida por $\mathcal{T}^Y$ en $Y$ es la topología discreta y que las topologías inducidas por $\mathcal{T}^Y$ y $\mathcal{T}$ en $X - Y$ son iguales.

(3) Calcular el interior, la adherencia y la frontera de $Y$ y $X - Y$ con la topología $\mathcal{T}^Y$.

(4) Probar que si $(X, \mathcal{T})$ es Hausdorff, entonces $(X, \mathcal{T}^Y)$ no es conexo.

X **Ejercicio 2.** (3 puntos) En $([0,1], \mathcal{T}_u)$ se define la relación R por

$$tRt' \quad \text{si} \quad t = t' \quad \text{o} \quad t, t' \in \{0, 1/2, 1\}.$$

(1) Probar que $R$ es una relación de equivalencia en $[0,1]$ y que la proyección $p : ([0,1], \mathcal{T}) \to ([0,1]/R, \mathcal{T}/R)$ es cerrada pero no abierta.

(2) Probar que $([0,1]/R, \mathcal{T}_u/R)$ es homeomorfo al subespacio topológico $X$ de $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_u)$ dado por

$$X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 = 1\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, (x-2)^2 + y^2 = 1\}.$$

**Ejercicio 3.** (4 puntos)

(1) Calcular las componentes conexas de $(\mathbb{Q}, \mathcal{T}_u)$.

(2) Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico que tiene un punto $x$ con $\mathcal{U}^x = \{X\}$. Probar que $(X, \mathcal{T})$ es conexo y compacto.

(3) Estudiar la compacidad de $X = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, \cos x = \cos y = \cos z\}$ dotado de la topología inducida de $(\mathbb{R}^3, \mathcal{T}_u)$.

(4) Estudiar la compacidad de los subconjuntos de $(\mathbb{N}, \mathcal{T})$, siendo una base de la topología $\mathcal{T}$ la familia $\{O(n), n \in \mathbb{N}\}$, con $O(n) = \{m \in \mathbb{N} \,|\, m \text{ es divisor de } n\}$.

(5) Probar que si $A \subset \mathbb{N}$ no es un subconjunto conexo de $(\mathbb{N}, \mathcal{T})$, entonces existen naturales $n, m \in A$ tal que $mcd(n,m) \notin A$. Usar este resultado para dar ejemplos de subconjuntos conexos de $(\mathbb{N}, \mathcal{T})$.

# Prueba Tema 1. Topología I
## Doble grado en Informática y Matemáticas
## 7 de noviembre de 2019

**1.**– Sea $\mathbb{R}$ el conjunto de los números reales, y $K \subset \mathbb{R}$ el subconjunto:

$$K := \{1/n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Consideramos la familia $\mathcal{B} \subset P(\mathbb{R})$ dada por:

$$\mathcal{B} := \{(a,b) : a, b \in \mathbb{R}, a < b\} \cup \{(a,b) \setminus K : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}.$$

1. ¿Es $\mathcal{B}$ base de una topología en $\mathbb{R}$?
2. Sea $T_K$ la topología generada por $\mathcal{B}$. Probar que $T_K$ es estrictamente más fina que la topología usual $T_u$ de $\mathbb{R}$ ($T_u \subset T_K$, pero $T_u \neq T_K$).
3. ¿Es $(\mathbb{R}, T_K)$ un espacio Hausdorff?
4. Calcular la clausura de $(0,1)$ en $(\mathbb{R}, T_K)$.
5. Dar un ejemplo de una sucesión convergente con la topología usual $T_u$ que no converge con la topología $T_K$.

① $K \subset \mathbb{R}$ , $K = \left\{ \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N} \right\}$

$B = \{ (a,b) : a,b \in \mathbb{R}, a<b \} \cup \{ (a,b) \setminus K : a,b \in \mathbb{R}, a<b$

1) Base.

•) $\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (-n,n)$ , ya que $(-n,n) \in B$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

•) $B_1, B_2 \in \beta$ , $x \in B_1 \cap B_2 \Rightarrow \exists B_3 \in \beta : x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$

→ Si $B_1 = (a_1, b_1)$, $B_2 = (a_2, b_2)$ , $x \in B_1 \cap B_2$,
$\exists B_3 = B_1 \cap B_2 = (c,d)$ tq $c = \max\{a_1, a_2\}$ y
$d = \min\{b_1, b_2\}$.

→ Si $B_1 = (a_1, b_1)$ , $B_2 = (a_2, b_2) \setminus K$ , $x \in B_1 \cap B_2$,
$\exists B_3 = B_1 \cap B_2 = (c,d) \setminus K$ , $c = \max\{a_1, a_2\}$ y
$d = \min\{b_2, b_1\}$

→ Si $B_1 = (a, b_1) \setminus K$ , $B_2 = (a_2, b_2) \setminus K$ , $x \in B_1 \cap B_2$
$\exists B_3 = B_1 \cap B_2 = (c,d) \setminus K$ $c = \max\{a_1, a_2\}$, $d = \min\{b_1, b_2\}$

2) $T_u \subset T_K$

$B_u = \{ (a,b) : a<b \} \subset B$

sea $U \in T_u$ , $\exists \{B_i\}_{i \in I} \in B_u$, tq $U = \bigcup_{i \in I} B_i$

$B_i \in B_u \subset B \subset T_K$ $\forall i \in I \Rightarrow U \in T_K$.

$T_u \neq T_K$ Sea $U = (-1, 1) \setminus K \in B \Rightarrow U \in T_K$.
Pero $U \notin T_u$ porque $0 \in U$ no es interior.

3) ¿$\mathbb{R}, T_K$ Hausdorff?

Sea $x \neq y$ ; $x, y \in \mathbb{R}$, como $(\mathbb{R}, T_u)$ Hausdorff, $\exists$:
$U, V \in T_u$, tq $x \in U$, $y \in V$ : $U \cap V = \emptyset$.
Como $T_u \subset T_K \Rightarrow U, V \in T_K$ $\underset{x}{\underset{\cap}{U}} \cap \underset{y}{\underset{\cap}{V}} = \emptyset$

$\Rightarrow (\mathbb{R}, T_K)$ Hausdorff

4) Clausura de $(0,1)$ en $(\mathbb{R}, T_K)$

Como $[0,1]$ cerrado en $T_K$ por ser cerrado en $T_u$

$(T_u \subset T_K \Rightarrow C_{T_u} \subset C_{T_K}) \Rightarrow \overline{(0,1)} \subset [0,1]$

Veamos que $0, 1 \in (\overline{0,1})$

Para todo $x \in \mathbb{R}$, $\mathcal{B}^x = \{B \in \mathcal{B} : x \in B\}$ base entornos de $x$ en $T_K$.

$1 \in \overline{(0,1)} \Leftarrow U \in \mathcal{B}^1 \Rightarrow U = (a,b)$, $a < 1 < b \Rightarrow (0,1) \cap (a,b) = (\max\{0,a\}, 1) \neq \emptyset$

$0 \in \overline{(0,1)} \Leftarrow U \in \mathcal{B}^0 \Rightarrow U = (a,b)$ $a < 0 < b \Rightarrow U \cap (0,1) = (0, \min\{1,b\}) \neq \emptyset$
$= (a,b) \setminus K$ $\quad U \cap (0,1) = (0, \min\{1,b\}) \setminus K \neq \emptyset$

5) La sucesión $\{\frac{1}{n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a $0$ en $T_u$. Veamos que No converge a ningún punto con $T_K$.
No puede converger a $0$ ~~porque~~ en $T_K$ porque $(-1,1) \setminus K$ es entorno de $0$ y No contiene a ningún pto de la sucesión.

# Prueba Tema 2. Topología I
# Doble grado en ingeniería informática y matemáticas
# 5 de diciembre de 2019

**1.–** Sean $X \subset \mathbb{R}^2$ el conjunto:

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 1\},$$

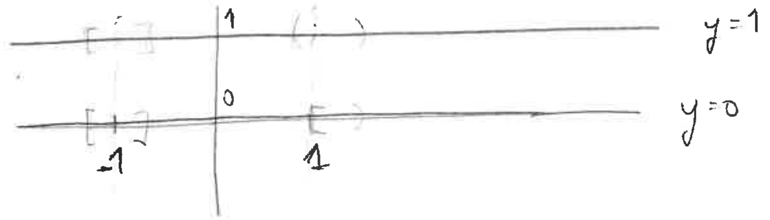
y $T$ la topología en $X$ inducida por la topología usual de $\mathbb{R}^2$. Definimos una relación de equivalencia $R$ en $X$ de modo que las clases de equivalencia son:

$$[(x, y)] = \begin{cases} \{(x, 0), (x, 1)\}, & x \in (-\infty, -1) \cup [1, +\infty), \\ \{(x, y)\}, & x \in [-1, 1). \end{cases}$$

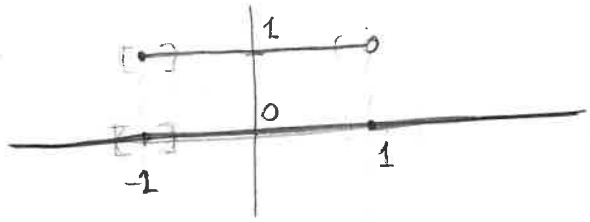
1. ¿Es $(X/R, T/R)$ un espacio Hausdorff?
2. ¿Es la proyección $p : (X, T) \to (X/R, T/R)$ una aplicación abierta?
3. ¿Es la proyección $p : (X, T) \to (X/R, T/R)$ una aplicación cerrada?

① $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 1\}$

$T = T_u|_X$




$$[(x,y)] = \begin{cases} \{(x,0),(x,1)\} & x \in (-\infty,-1) \cup [1,+\infty) \\ \{(x,y)\} & x \in [-1,1) \end{cases}$$




p

1) ¿Hausdorff $(X/R, T/R)$?

Hausdorff si: $\forall x,y \in X/R$, $\exists\, U \in \mathcal{U}^x, V \in \mathcal{U}^y : U \cap V = \emptyset$

Sea $p : (X,T) \longrightarrow (X/R, T/R)$

Tomemos $p((-1,0))$ y $p((-1,1))$, son distintos como nos dice la rel. eq.

Tomemos como entorno de $(-1,0)$, $\hat{U} = ((-1-\varepsilon,0),(-1+\varepsilon,0))$

" " " $(-1,1)$, $\hat{V} = ((-1-\varepsilon,1),(-1+\varepsilon,1))$

Entonces $p(\hat{U}) = U \in \mathcal{U}^{p((-1,0))}$, $p(\hat{V}) = V \in \mathcal{U}^{p((-1,1))}$

Así, $U \cap V \neq \emptyset$ independientemente del valor $\varepsilon > 0$ que tomemos. $\Rightarrow \nexists\, U \in \mathcal{U}^{p((-1,0))}, V \in \mathcal{U}^{p((-1,1))}$ tal que $U \cap V = \emptyset$

$\Longrightarrow$ No es Hausdorff

2) ¿ $p : (X,T) \longrightarrow (X/R, T/R)$ abierta?

Decimos que $p$ abierta $\iff$ $p(\hat{O}) = O \in T/R$, $\forall \hat{O} \in T$

Pero debemos tener en cuenta que en la topología cociente, se verifica que

$$O \in T/R \iff p^{-1}(O) \in T$$

Buscamos pues un conjunto $U^{\in T}$ tal que

$$p^{-1}(p(U)) \notin T$$

Tomemos $U = (0,2) \times \{0\}$

$$p(U) = (\underset{\in T}{(0,2) \times \{0\}}) \cup (\underset{\notin T}{[1,2) \times \{1\}}) \notin T$$

$\Rightarrow p$ No es abierta

3) ¿ $p : (X,T) \longrightarrow (X/R, T/R)$ cerrada?

Buscamos $U \in T$ tal que $p^{-1}(p(U)) \notin \mathcal{C}_T$

Sea $U = ([-2,0] \times \{0\})$

$$p(U) = (\underset{\in \mathcal{C}_T}{[-2,0] \times \{0\}}) \cup (\underset{\notin \mathcal{C}_T}{[-2,-1) \times \{1\}}) \notin T.$$

$\Rightarrow p$ No es cerrado.

# Primer parcial. Topología I
# Doble grado en Informática y Matemáticas
# 13 de diciembre de 2019

**1.**– Se define en $\mathbb{R}$ la familia de subconjuntos

$$\mathcal{B} = \{[a, b] : a < b, a \in \mathbb{Q}, b \notin \mathbb{Q}\}$$

1. Probar que $\mathcal{B}$ es base de una topología $T$ en $\mathbb{R}$.
2. Calcular el interior del intervalo $[a, b]$, con $a < b$ arbitrarios.
3. Calcular la clausura del intervalo $(a, b)$, con $a < b$ arbitrarios.

**2.**– Consideramos el conjunto $X = \mathbb{R} \times \mathbb{N}$ dotado de la topología producto $T_u \times T_D$, donde $T_u$ es la topología usual de $\mathbb{R}$ y $T_D$ es la topología discreta en $\mathbb{N}$. Consideramos en $X$ la relación de equivalencia:

$$(x, n) \sim (x', n') \iff x = x' < 0.$$

Sea $p : X \to X/\sim$ la aplicación proyección.

1. Discutir si $p$ es cerrada o abierta.
2. Calcular la frontera del conjunto $p\big((-\infty, 0) \times \{1\}\big)$.

**3.**– Razonar si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

1. Si $A \subset X$ es un conjunto abierto, entonces $\operatorname{int}(\partial A) = \emptyset$.
2. Si $X$ es un conjunto finito y $T$ es una topología Hausdorff en $X$, entonces $T$ es la topología discreta.
3. Si $X$ es un conjunto finito y $T$ es una topología en $X$ tal que $T = C_T$, entonces $T$ es la topología discreta.

# Examen final. Topología I
# Doble grado en ingeniería informática y matemáticas
# 10 de enero de 2020

**1.**– Probar que la familia de subconjuntos de $\mathbb{R}$:

$$T = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{(a, +\infty) : a \in \mathbb{R}\}$$

base entornos numerable. (cada punto)

es una topología en $\mathbb{R}$.

1. Demostrar que no es Hausdorff.
2. Razonar si $T$ verifica los axiomas de numerabilidad AN-I y AN-II.
3. Calcular el interior y la clausura de $(-\infty, 0)$ y $[0, +\infty)$ en $(\mathbb{R}, T)$.

base numerable top

**2.**– Demostrar que el producto de dos espacios topológicos compactos es un espacio compacto. Incluir la demostración del lema del tubo.

**3.**– Sea $X$ un conjunto no vacío y $A \subset X$ un subconjunto no vacío distinto de $X$. Se considera en $X$ la topología:

$$T_A = \{U \subset X : A \subset U\} \cup \{\emptyset\}.$$

Describir *todos* los subconjuntos conexos de $(X, T_A)$.

**4.**– Se considera el espacio $\mathbb{R}$ con la topología de los complementos finitos $T_{cf}$. Describir *todos* los subconjuntos compactos de $(\mathbb{R}, T_{cf})$.

**Segundo parcial:** 2,3 y 4
**Toda la asignatura:** 1,2 y 3
Todas las preguntas tienen el mismo valor