Juan Manuel Mateos Pérez

① Sea (X,d) un esp. métrico compacto sin puntos aislados.

1) Dados $U \subset X$ abierto, $x \in X \Rightarrow \exists\, V$ abierto, $V \subset U$ y $x \notin \overline{V}$

Sea $x \in U$, tomamos $U \in \mathcal{U}^x$. Como no hay puntos aislados puedo tomar $y \in U$ tq $x \neq y$.

En caso de que $x \notin U$, al no haber puntos aislados, $\exists\, W_x \in \mathcal{U}^x$. Me tomo $y \in U$.

A partir de aquí la demostración es la misma para los dos casos.

Como todo espacio métrico es Haussdorff

$\Rightarrow \exists\, W_x \in \mathcal{U}^x, W_y \in \mathcal{U}^y : \quad W_x \cap W_y = \emptyset$

Tomamos $V = U \cap W_y \neq \emptyset \Rightarrow y \in V$

(Es abierto por ser intersección finita de abiertos)

Con esto vemos que $\exists V$ abierto tal que $V \subset U$.

Finalmente, como $V \cap W_x = \emptyset \Rightarrow \overline{V} \subset (X - W_x) \Rightarrow x \notin \overline{V}$

2) Si $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ es una sucesión en X, probar que $\exists$ sucesión de abiertos $\{V_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ tal que $V_{i+1} \subset V_i$, $x_i \notin \overline{V_i}$

Concluir que $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} \overline{V_i} \neq \emptyset$

3) Deducir que X no es numerable.

Como X compacto $\Rightarrow \exists$ subsucesión convergente, donde $\delta: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es la función que nos lleva a la subsucesión $\{x_{\delta(n)}\} \to x \in X$.

Por lo anterior, sea $U = X$, $V_1 \subset X$ tal que $x_{\delta(1)} \notin \overline{V_1}$ para $\{x_{\delta(n)}\}$, $\delta(n) > 1$ lo aplicamos al punto y, $x_{\delta(n)}(y)$, $U = V_{n-1} \Rightarrow \overline{V_1} \supset \overline{V_2}$

esto es, una sucesion de conjuntos no vacíos y cerrados con $x_{\delta(n)} \notin \overline{V_n}$

Finalmente, veamos que $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} (X - \overline{V_i}) \neq X$

Supongamos que $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} (X - \overline{V_i}) = X$

Por ser compacto $\Rightarrow \exists$ subrecubrimiento finito $X - \overline{V_{i_1}}, \ldots, X - \overline{V_{i_n}}$ tal que $\bigcup_{j=1}^{n} (X - \overline{V_j}) = X$

pero cualquier punto en $\overline{V_j}$ con $j > i_1, \ldots, i_n$ no está cubierto por estos conjuntos $\Rightarrow$ Contradicción

$\Rightarrow \bigcup_{i \in \mathbb{N}} (X - \overline{V_i}) \neq X \Rightarrow X - \bigcap_{i \in \mathbb{N}} \overline{V_i} \neq X$

$\Rightarrow \bigcap_{i \in \mathbb{N}} \overline{V_i} \neq \emptyset$

Además, si $x \in \bigcap_{i \in \mathbb{N}} \overline{V_i}$, por definición, $x_{\delta(n)} \neq x \quad \forall n$ y X no puede ser numerable.

Juan Manuel Mateos Pérez

② Sea $I_0 = [0,1] \subset \mathbb{R}$

$$I_n = I_{n-1} \setminus \bigcup_{k=0}^{3^{n-1}-1} \left(\frac{1+3k}{3^n}, \frac{2+3k}{3^n} \right)$$

Probar que $\bigcap_{n \in \mathbb{Z}_+} I_n \neq \emptyset$.

En primer lugar debemos dividir $I = [0,1]$ en tres intervalos de igual longitud, y eliminamos el subintervalo abierto situado en medio, esto es,

$$J_1 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \quad , \quad F_{11} = \left[0, \frac{1}{3}\right], \ F_{12} = \left[\frac{2}{3}, 1\right]$$

$C_1 = [0,1] \setminus J_1 \implies C_1$ compacto y longitud $= \frac{2}{3}$

Dividimos a su vez F_{11} y F_{12} en 3 partes iguales y eliminamos el central.

$$C_2 = [0,1] \setminus \underset{\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)}{\underset{\|}{J_1}} \cup \underset{\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right)}{\underset{\|}{J_2(1)}} \cup \underset{\left(\frac{6}{9}, \frac{7}{9}\right)}{\underset{\|}{J_2(2)}}$$

$\implies C_2$ compacto con longitud $\frac{4}{3^2}$, además, $C_2 \subset C_1$

Continuando indefinidamente, obtendremos dos sucesiones de conjuntos $(J_n)_{n=1}^{\infty}$ y $(C_n)_{n=1}^{\infty}$

La longitud de cada una de las componentes, tanto J_n como C_n es $\frac{1}{3^n}$, por tanto la suma de las longitudes es:

$$\text{longitud}(J_n) = 2^{n-1}\left(\frac{1}{3^n}\right), \ \text{longitud}(C_n) = 2^n\left(\frac{1}{3^n}\right)$$

Finalmente, $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n$, $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n = [0,1] \setminus G$

Como G es un conjunto abierto no vacío, y como $(C_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión decreciente de conjuntos compactos no vacíos, entonces C es también No vacío. A este conjunto le llamaremos conjunto ternario de Cantor.

1) Probar que cada conjunto I_n es unión finita de intervalos cerrados de longitud $\frac{1}{3^n}$ y que los extremos de dichos intervalos pertenecen a C.

$$I_1 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \longrightarrow \text{Longitud} = \frac{1}{3}$$

$$I_2 = \left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right) \cup \left(\frac{6}{9}, \frac{7}{9}\right) \longrightarrow \text{Longitud} = \frac{1}{3^2}$$

$\vdots$

$$I_n = \bigcup_{i=1}^{2^{n-1}} I_n(i) \longrightarrow \text{longitud} = \frac{1}{3^n}, \quad i = 1, \dots, 2^{n-1}$$

cada uno de ellos es abierto.

sea $C_n = [0,1] \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{n} I_n \right)$, tenemos una sucesión decreciente de cerrados, cada C_n es unión disjunta de 2^{n-1} cerrados

$$C = \bigcap_{i=1}^{\infty} C_n = [0,1] - \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$$

$\Rightarrow$ C es cerrado por ser intersección de cerrados.

2) Probar que $C = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}_+} I_n$ es compacto.

Como C cerrado y $C \subset [0,1]$ acotado $\Rightarrow$ C compacto.

3) Probar que C es totalmente disconexo

sabemos por teoría que los únicos subconjuntos conexos en $\mathbb{R}$ son los intervalos y los puntos. C No contiene ningún intervalo, probaremos pues que las componentes conexas son los puntos.

Juan Manuel Mateos Pérez

(2) Veamos que las componentes conexas son los puntos, por reducción al absurdo.

Supongamos que $\exists$ una componente A que No es unipuntual $\Rightarrow$ A conexo, $A \subset C$, $x, y \in A$, $x < y$.

Como C no tiene intervalos $\Rightarrow \exists\, z \in \mathbb{R} \setminus C$ tal que $x < z < y$, esto implica:

$$A = ((-\infty, z) \cap A) \cup ((z, \infty) \cap A)$$

Observemos que $x \in ((-\infty, z) \cap A)$, $y \in ((z, +\infty) \cap A)$ luego hemos escrito A como unión de abiertos en A, disjuntos y no vacíos. Esto Contradice la conexidad de A.

4) Probar que C no tiene puntos aislados

Vamos a probar que sea $x \in C$, $\varepsilon > 0$ $\Rightarrow \exists\, y \in C$ con $y \neq x$ tq $|x - y| < \varepsilon$

Sea $\varepsilon > 0$, $\exists n \in \mathbb{N}$ tal que $\left(\frac{1}{3}\right)^n < \varepsilon$

Dado $x \in C \Rightarrow x \in C_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

En particular, $x \in C_n \Rightarrow \exists\, k \in \{0, 1, \dots, 2^n - 1\}$ tal que $x \in \left[\frac{a_k}{3^n}, \frac{a_k + 1}{3^n}\right]$. $\frac{a_k}{3^n}, \frac{a_k+1}{3^n} \in C$

Tomando $y = \frac{a_k}{3^n}$ o $y = \frac{a_k + 1}{3^n}$ para que $y \neq x$, entonces:

$$|x - y| \leq \left| \frac{a_k}{3^n} - \frac{a_k + 1}{3^n} \right| = \left(\frac{1}{3}\right)^n < \varepsilon$$

5) Usando el T^{ma} anterior, probar que C es no numerable.

Para probar esto vamos a ver que todo conjunto perfecto P es No numerable.

(Decimos que un conjunto es perfecto si es cerrado y todos sus puntos son de acumulación)

Como P tiene puntos de acumulación $\Rightarrow$ P infinito.

Supongamos que es numerable, representamos sus puntos como $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$

Construimos la sucesión $\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$ de entornos como:

V_1 entorno de x_1 $(V_1 \in \mathcal{U}^{x_1})$, supongamos $V_n \in \mathcal{U}^{x_n}$

$\Rightarrow V_n \cap P \neq \emptyset$.

Si $x_{n+1} \in V_n$, consideramos $V_{n+1} \in \mathcal{U}^{x_{n+1}}$ tq:

- $\overline{V_{n+1}} \subset V_n$
- $x_n \notin \overline{V_{n+1}}$
- $V_{n+1} \cap P \neq \emptyset$

Si $x_{n+1} \notin V_n$, tomamos V_{n+1} con las mismas propiedades (podemos hacer esto porque todo punto P es de acumulación)

$V_{n+1} \cap P \neq \emptyset \Rightarrow V_{n+1} \in \mathcal{U}^p$ de algún $p \in P$. Como estaban numerados, $\exists m \in \mathbb{N}$ tq $p = x_{n+1}$

Definimos $K_n = \overline{V_n} \cap P$, como $\overline{V_n}$ cerrado y acotado $\Rightarrow K_n$ compacto.

Por otro lado, $x_n \notin \overline{K_{n+1}}$ por el apartado 1), 2)

$\Rightarrow$ ningún punto de P pertenece a $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$. Además, $K_n \subset P$

$\Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n = \emptyset \Rightarrow K_n \neq \emptyset$, $K_{n+1} \subset K_n$, $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n = \emptyset$ $\Rightarrow$ absurdo $\Rightarrow$ P es No numerable.