TEMA 1

- Se dice que dos espacios vectoriales son isomorfos cuando $\exists$ entre ellos un isomorfismo, esto es, una biyección lineal.
- Todo espacio vectorial de dimensión N es isomorfo a $\mathbb{R}^N$

Def. prod. escalar $(\cdot|\cdot): \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$

$$(x,y) \longmapsto (x|y)$$

$$(\cdot|\cdot) = \sum_{k=1}^{N} x_k y_k$$

$$\left.\begin{array}{l} \bullet)\ (\lambda u + \mu v | y) = (\lambda u|y) + (\mu v|y) = \lambda(u|y) + \mu(v|y) \\ \bullet)\ (x|y) = (y|x) \quad \longrightarrow \text{simetría} \end{array}\right\} \text{bilineal}$$

$\bullet)$ $(x|x) \geq 0$; $(x|x) = 0 \iff x = 0$ $\to$ f. cuadrática es def ⊕

- Un esp. prehilbertiano es un esp. vectorial dotado de un prod. escalar.

Def. norma de un vector $x \in X$ como $\|x\| = \sqrt{(x|x)}$

$$(x|x) = \|x\|^2$$

$$\|\cdot\| : X \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \|x\|$$

$\bullet)$ $\|x\| = 0 \iff x = 0$ No degeneración

$\bullet)$ $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$ Homogeneidad por homotecias.

$\bullet)$ $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ des. triangular

Desigualdad de Cauchy-Schwartz En todo esp. prehilbertiano.

$$|(x|y)| \leq \|x\| \, \|y\|$$

Dem

Supongamos x, y l.d. $<\begin{array}{l} y = 0 \\ x = \lambda y \quad \lambda \in \mathbb{R} \end{array}$

$$|(x|y)| = |(\lambda y|y)| = |\lambda (y|y)| = |\lambda| \, |(y|y)| = |\lambda| \, \underset{\|x\| \, \|y\|}{\underset{\parallel}{\|y\|^2}}$$

Supongamos $x\,y$ li

$$0 < (x - \lambda y | x - \lambda y) = (x - \lambda y | x) - (x - \lambda y | \lambda y) =$$

$$(x|x) - (\lambda y|x) - [(x|\lambda y) - (\lambda y|\lambda y)] = \|x\|^2 - 2\lambda(y|x) + \lambda^2 \|y\|^2$$

Supongamos que $(x|y) \neq 0$, y tomamos $\lambda = \frac{\|x\|^2}{(x|y)}$

$$0 < \|x\|^2 - 2\frac{\|x\|^2}{(x|y)}(x|y) + \left(\frac{\|x\|^2}{(x|y)}\right)^2 \|y\|^2$$

$$= \|x\|^2 - 2\|x\|^2 + \frac{\|x\|^4\|y\|^2}{(x|y)^2} = -\|x\|^2 + \frac{\|x\|^4\|y\|^2}{(x|y)^2},$$

esto es:

$$\|x\|^2 (x|y)^2 < \|x\|^4 \|y\|^2$$

$$(x|y)^2 < \|x\|^2\|y\|^2 \iff (x|y) < \|x\| \, \|y\| \qquad \underline{\underline{\text{QED}}}$$

- Así la igualdad solo se da si x, y son l.d.
- Un *esp. normado* es un esp. vectorial en el que hemos fijamo una norma $\|\cdot\|$.
- Todo esp. prehilbertiano es un esp. normado con la norma asociada a su prod. escalar
(El recíproco no es cierto ya que No toda norma tiene asociado un prod. escalar).
- Sea $\mathbb{X}$ esp. métrico, se define $d: \mathbb{X} \times \mathbb{X} \to \mathbb{R}$, $d(x,y) = \|y-x\|$
  - ·) $d(x,z) = \|x-z\| \leq \|x-y\| + \|y-z\| = d(x,y) + d(y,z)$
  - ·) $d(x,y) = \|y-x\| = \|x-y\| = d(y,x)$
  - ·) $d(x,y) = 0 \iff x = y$
- Todo esp. normado se considera siempre como esp. métrico con la distancia asociada a su norma.
(esp. pre-hilbertiano $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ Esp. normado $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ Esp. métrico)
- Si las distancias asociadas a dos normas son iguales en un esp. métrico, entonces las normas son iguales
- Sea $\mathbb{X}$ esp. normado, $Y \subset \mathbb{X}$, $\|\cdot\|: \mathbb{X} \to \mathbb{R}$, $\exists \|\cdot\|_Y : Y \to \mathbb{R}$ que es la *norma inducida* y por tanto Y es un *subespacio normado*
(Lo mismo ocurre con distancias).

TEMA 2

- Dos distancias son equivalentes si dan lugar a la misma topología.

Def Sea $x \in E, r > 0$, la <u>bola abierta</u> $B(x,r) = \{y \in E : d(x,y) < r$
$B(x,r) \neq \emptyset$ ya que siempre $x \in B(x,r)$.

- Sea E esp. métrico, $a \in E$ y $r>0$, $\forall x \in B(a,r)\ \exists\, \varepsilon > 0 : B(x,\varepsilon) \subset B(a,r$

Def. Sea E esp métrico, $U \subset E$, es <u>abierto</u> si:
$\forall x \in U \ \ \exists\, \varepsilon > 0 : B(x,\varepsilon) \subset U$
U abierto $\Leftrightarrow U = U^\circ$

- la unión de abiertos es un abierto
- la intersección finita de abiertos es un abierto.
- los abiertos de esp. métricos son uniones de bolas abiertas

Def Una <u>topología</u> es un conjunto $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ verifica:
-) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$
-) $S \subset \mathcal{T} \Rightarrow \bigcup S \in \mathcal{T}$
-) $V, U \in \mathcal{T} \Rightarrow U \cap V \in \mathcal{T}$

- sean $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ en X, ELSA:
  1) $\exists\, \rho \in \mathbb{R}^+ : \ \|x\|_2 \leq \rho \|x\|_1 \quad \forall x \in X$
  2) $\mathcal{T}_{\|\cdot\|_2} \subset \mathcal{T}_{\|\cdot\|_1}$

<u>Dem</u> $x \in X,\ r \in \mathbb{R}^+$; $B_1(x,r) = B(x,r)_{\|\cdot\|_1}$; $B_2(x,r) = B(x,r)_{\|\cdot\|_2}$

1) ⟹ 2)
$U \in \mathcal{T}_{\|\cdot\|_2} \overset{\text{Def abierto}}{\Longrightarrow} \forall x \in U\ \exists\, \varepsilon > 0 : B_2(x,\varepsilon) \subset U \overset{1)}{\Longrightarrow} B_1(x,\varepsilon/\rho) \subset B_2(x,\varepsilon) \subset U$
$\Rightarrow U \in \mathcal{T}_{\|\cdot\|_1}$

2) ⟹ 1)
$B_2(0,1) \in \mathcal{T}_{\|\cdot\|_2} \overset{2)}{\Longrightarrow} B_2(0,1) \in \mathcal{T}_{\|\cdot\|_1} \overset{\text{def abierto}}{\Longrightarrow} \exists\, \delta > 0 : B_1(0,\delta) \subset B_2(0,1)$
Tomando $\rho = \frac{1}{\delta} > 0$ conseguimos la des. buscada.
Si $x \in X$ verificase $\|x\|_2 > \rho \|x\|_1$, $y = \frac{x}{\|x\|_2}$; $\|y\|_1 = \frac{\|x\|_1}{\|x\|_2} < \frac{1}{\rho} = \delta$
donde $\|y\|_2 < 1$ lo cual es contradicción. $(\|y\|_2 = 1)$. $\Rightarrow \|x\|_2 < \rho \|x\|_1$

- Dos normas $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ en un e.v. $<=> \exists \lambda, \rho \in \mathbb{R}^+$:

$$\lambda \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \rho \|x\|_1 \quad \forall x \in X$$

- las normas del máximo, suma y euclídea son equivalentes en $\mathbb{R}^N$: $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq N\|x\|_\infty$

- Todo abierto de $\mathbb{R}^N$ se puede expresar como unión de una familia de productos cartesianos de abiertos de $\mathbb{R}$.

- Si τ es la topología de E y τ_A la de $A \subset E$, se tiene:

$$\tau_A = \{U \cap A : U \in \tau\}$$

decimos que τ_A es la topología inducida por τ en A.

Def. Se define el interior de A y se denota A° como

$$A^\circ = \bigcup \{U \in \tau : U \subset A\}$$ (A° es el max abierto incluido en A)

$x \in A^\circ$ decimos que x es interior a A o A es un entorno de x.

- $\mathcal{U}(x)$ es el conjunto de entornos del pto x.
- $x \in A^\circ <=> A \in \mathcal{U}(x) <=> \exists \varepsilon > 0 : B(x, \varepsilon) \subset A$.
- Si $A \in \mathcal{U}(x) \wedge A \subset C \subset E => C \in \mathcal{U}(x)$
- la intersección de cualquier familia finita de entornos de x es un entorno de x.
- Un conjunto es abierto <=> es entorno de todos sus puntos

Def. $C \subset E$, decimos que C es cerrado cuando su complemento es abierto, esto es, $E - C$ es abierto.

1) $\emptyset, E \in \mathcal{C}_\tau$
2) $D \subset \mathcal{C}_\tau => \bigcap D \in \mathcal{C}_\tau$ intersección de cerrados es cerrado
3) $C, D \in \mathcal{C}_\tau => C \cup D \in \mathcal{C}_\tau$ unión finita de cerrados es cerrad

Def Se define el cierre de A, denotado por $\bar{A}$, como:

$$\bar{A} = \bigcap \{C \in \mathcal{C}_\tau : A \subset C\}$$ ($\bar{A}$ es el mínimo cerrado que contiene a A)

- A abierto $<=> A = A^\circ$
- A cerrado $<=> A = \bar{A}$

- $E\setminus\bar{A} = (E\setminus A)^\circ \quad \wedge \quad E\setminus A^\circ = \overline{E\setminus A}$

Dem.

$$E\setminus\bar{A} = E\setminus\left(\bigcap\{C\in\mathcal{C}_\tau : A\subset C\}\right) = \bigcup\{E\setminus C : C\in\mathcal{C}_\tau, A\subset C\}$$
$$= \bigcup\{U\in\tau : U\subset E\setminus A\} = (E\setminus A)^\circ$$

Aplicamos lo mismo en lugar de A, $E\setminus A$ y obtenemos $E\setminus\overline{E\setminus A} = A^\circ$, luego $\overline{E\setminus A} = E\setminus A^\circ$

Def. Se dice que x es un pto adherente, $x\in\bar{A}$ si
$x\in\bar{A} \iff U\cap A\neq\emptyset\ \forall U\in\mathcal{U}(x) \iff B(x,\varepsilon)\cap A\neq\emptyset\ \forall\varepsilon>0.$
x es pto adherente a A si $\exists$ ptos A tan cerca de x como se quiera

- En cualquier espacio métrico E, todo subconjunto finito de E es cerrado.

Def Una bola cerrada es el conjunto
$\bar{B}(x,r) = \{y\in E : d(y,x)\leq r\}$ que es cerrado.

Def Se define la frontera de un conjunto $A\subset E$,
$Fr(A) = \bar{A}\setminus A^\circ = \bar{A}\cap(E\setminus A^\circ) = \bar{A}\cap\overline{E\setminus A}$

Además $\bar{A} = A^\circ \cup Fr(A)$

- A abierto $\iff A\cap Fr(A)=\emptyset$; A cerrado $\iff Fr(A)\subset A$.
- A abierto $\wedge$ cerrado $\iff Fr(A)=\emptyset$
- $E = A^\circ \cup Fr(A) \cup (E\setminus A)^\circ$

Ptos adherencia → Ptos acumulación
$x\in A' \iff B(x,\varepsilon)\cap(A\setminus\{x\})\neq\emptyset \quad \forall\varepsilon>0$

Ptos adherencia → Ptos aislados
$\exists\varepsilon>0 : B(x,\varepsilon)\cap A = \{x\}$

$x\in\bar{A} \iff B(x,\varepsilon)\cap A\neq\emptyset$
$\forall\varepsilon>0$

- $\bar{A} = A' \cup A$

Def Una sucesión es una app $f : \mathbb{N} \to E$, $f(n) \mapsto x_n$ se denota $\{x_n\}$

Las sucesiones parciales de $\{x_n\}$ son de la forma $\{x_{\sigma(n)}\}$

Def Definimos la convergencia de una sucesión y escribimos $\{x_n\} \to x$ cuando:

$\{x_n\} \to x \Leftrightarrow [\forall U \in \mathcal{U}(x)\ \exists m \in \mathbb{N} : n \geq m \Rightarrow x_n \in U]$

$\{x_n\} \to x \Leftrightarrow [\forall \varepsilon > 0\ \exists m \in \mathbb{N} : n \geq m \Rightarrow d(x_n, x) < \varepsilon]$

$\{x_n\} \to x \Leftrightarrow [\forall \varepsilon > 0\ \exists m \in \mathbb{N} : n \geq m \Rightarrow \|x_n - x\| < \varepsilon]$

- $\{x_n\} \to x \Leftrightarrow \{d(x_n, x)\} \to 0$
- Una sucesión es convergente cuando $\exists!\ x \in E : \{x_n\} \to x$
- Toda parcial de $\{x_n\} \to x$, converge a x.
- En un esp. métrico, $x \in E$ es adherente si:

x es adherente a $A \subset E \Leftrightarrow \exists \{x_n\} \subset A \to x$

- A cerrado $\Leftrightarrow$ A contiene los límites de todas las sucesiones de puntos de A que sean convergentes.

- d_1, d_2 son dos distancias en E, ELSA:

1) $\tau_{d_1} \subset \tau_{d_2}$

2) $\forall \{x_n\} \subset \tau_{d_2} \to x \Rightarrow \{x_n\} \subset \tau_{d_1} \to x$

d_1 y d_2 equivalentes $\Leftrightarrow$ dan lugar a las mismas sucesiones convergentes.

- $\forall \{x_n\} \subset \mathbb{R}^N$ y $x \in \mathbb{R}$, se tiene:

$\{x_n\} \to x \Leftrightarrow \{x_n(k)\} \to x(k)\quad \forall k \in I_N$

- Supongamos que tenemos un esp. normado X_k con $k \in I_N$, entonces, $X = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_N$ es el espacio vectorial producto, se tiene

$(x+y)(k) = x(k) + y(k)$

$(\lambda x)(k) = \lambda x(k) \qquad \forall x, y \in X,\ \lambda \in \mathbb{R}$

Para que X sea espacio normado definimos $\|x\|_\infty = \max\{\|x(k)\| : k \in I_N\}$

- Se dice que X con $\|\cdot\|_\infty$ es el espacio normado producto y la topología de la norma $\|\cdot\|_\infty$ es la topología producto.

TEMA 3

Def. Recordemos la def de continuidad y generalicemosla

Decimos que f es continua en $x \in E$ si:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : y \in E, \ |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon$$

Aplicando el concepto de bolas:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \quad f(B(x,\delta)) \subset B(f(x),\varepsilon)$$

Aplicando el concepto de entorno obtenemos las dos siguiente

$$\forall V \in \mathcal{U}(f(x)) \ \exists U \in \mathcal{U}(x) : \ f(U) \subset V$$

$$\forall V \in \mathcal{U}(f(x)) \Rightarrow f^{-1}(V) \in \mathcal{U}(x)$$

- Para $f : E \to F$, $x \in E$, ELSA:

1) f continua en el pto x. (def. de entornos)

2) $\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta > 0 : y \in E, \ d(x,y) < \delta \Rightarrow d(f(x),f(y)) < \varepsilon$

3) $x_n \in E \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \{x_n\} \to x \Rightarrow \{f(x_n)\} \to f(x)$

Dem

1) $\Rightarrow$ 2) Sea $\varepsilon > 0$.

$$B(f(x),\varepsilon) \in \mathcal{U}(f(x)) \xRightarrow{hip} f^{-1}(B(f(x),\varepsilon)) \in \mathcal{U}(x) \xRightarrow{def. entorno}$$

$$\exists \delta > 0 : B(x,\delta) \subset f^{-1}(B(f(x),\varepsilon))$$

Tomamos $y \in B(x,\delta) \Rightarrow d(x,y) < \delta$

$$\Rightarrow f(y) \in B(f(x),\varepsilon) \Rightarrow d(f(x),f(y)) < \varepsilon$$

2) $\Rightarrow$ 3) Sea $\varepsilon > 0, \ \delta > 0$

$$\{x_n\} \to x \xRightarrow{convergencia} \exists m \in \mathbb{N} : \forall n \geq m \ \ d(x_n, x) < \delta \xRightarrow{hipotesis}$$

$$d(f(x_n), f(x)) < \varepsilon \Rightarrow \{f(x_n)\} \to f(x)$$

3) $\Rightarrow$ 1) Si f No es continua,

$$\exists V \in \mathcal{U}(f(x)) \Rightarrow f^{-1}(V) \notin \mathcal{U}(x) \xRightarrow{def. entorno.} B(x, 1/n) \not\subset f^{-1}(V) \ \ \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\xRightarrow{def. bola.} \exists x_n \in E : d(x_n, x) < \frac{1}{n} \ \wedge \ f(x_n) \notin V$$

$$\Longrightarrow \{x_n\} \to x \quad \text{pero} \quad \{f(x_n)\} \not\to f(x) \Rightarrow \text{contradicción.}$$

- Sea $f: E \to F$ y sea $A \subset E$, $x \in A$ se tiene:
  1) Si f continua en $x \Rightarrow f|_A$ es continua en x.
  2) Si $f|_A$ continua en x $\Rightarrow f$ continua en x.
     A es entorno de x

Dem 1

Si $V \in \mathcal{U}(f(x)) \overset{\text{def cont (hip)}}{\Rightarrow} f^{-1}(V) \in \mathcal{U}(x) \Rightarrow (f|_A)^{-1}(V) = f^{-1}(V) \cap A \in \mathcal{U}(x$

Dem 2

Si $V \in \mathcal{U}(f(x)) \Rightarrow (f|_A)^{-1}(V) = f^{-1}(V) \cap A \in \mathcal{U}(x)$ en A

$\Rightarrow U \cap A \subset f^{-1}(V) \cap A$, con $x \in U \in \mathcal{T}_E \Rightarrow U \cap A \in \mathcal{U}(x)$

Lo mismo le ocurre ya que $U \cap A \subset f^{-1}(V)$

Def Decimos que $f: E \to F$ es continua en un conjunto $A \subset E$ cuando es continua $\forall x \in A$

- Para cualquier función $f: E \to F$, ELSA:
  1) f es continua
  2) $\forall V \subset F \Rightarrow f^{-1}(V)$ es un abierto
  3) $\forall C \subset F \Rightarrow f^{-1}(C)$ es un cerrado
  4) $\forall \{x_n\} \to x \Rightarrow \{f(x_n)\} \to x$ (preserva la convergencia de suc)

Dem

- 1) $\Rightarrow$ 2)

  Si $V = V^{\circ} \subset F \wedge x \in f^{-1}(V)$, como $V \in \mathcal{U}(f(x)) \overset{\text{def cont}}{\Rightarrow} f^{-1}(V) \in \mathcal{U}(x)$

  $\Rightarrow f^{-1}(V)$ es abierto.

- 2) $\Rightarrow$ 1) sea $x \in E$

  $W \in \mathcal{U}(f(x)) \overset{\text{def entorno}}{\Rightarrow} \exists V \in F : f(x) \in V \subset W \Rightarrow x \in f^{-1}(V) \subset f^{-1}(W)$

  $\overset{2)}{\Rightarrow} f^{-1}(V)$ abierto $\Rightarrow f^{-1}(W) \in \mathcal{U}(x)$

- 2) $\Rightarrow$ 3)

  $C = \overline{C} \subset F$, como $F - C$ abierto $\overset{2)}{\Rightarrow} f^{-1}(F - C)$ es abierto

  $\Rightarrow F - f^{-1}(C)$ es abierto $\Rightarrow f^{-1}(C)$ es cerrado

- 3) $\Rightarrow$ 2)

  $V = V^{\circ} \subset F \Rightarrow F - V$ cerrado $\overset{3)}{\Rightarrow} f^{-1}(F - V)$ es cerrado

  $\Rightarrow F - f^{-1}(V)$ cerrado $\Rightarrow f^{-1}(V)$ es abierto.

- 1) $\Rightarrow$ 4) Trivial por def continuidad para suc.
- 4) $\Rightarrow$ 1)

$x \in E \wedge \{x_n\} \to x \overset{4)}{\Rightarrow} \{f(x_n)\}$ es convergente

¿$\{f(x_n)\} \to f(x)$?

Si $\forall n \in \mathbb{N}$ $\left.\begin{matrix} y_{2n-1} = x_n \\ y_{2n} = x_n \end{matrix}\right\} \Rightarrow \{y_n\} \to x \Rightarrow \{f(y_n)\}$ convergente

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} f(y_{2n-1}) = \lim_{n\to\infty} (y_{2n}) = f(x)$$

- $A \subset E$ abierto, $f: E \to F$ continua en $A \Leftrightarrow f|_A$ continua
- La continuidad tiene caracter local.

Def. Definimos límite en un pto para una función como:

- $\lim_{x\to\alpha} f(x) = L \Leftrightarrow [\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : x \in A, 0 < |x - \alpha| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon]$

donde α debe ser un punto de acumulación de A. ($\alpha \in A'$)

En $\mathbb{R}^N$, $\alpha \in A'$

- $\lim_{x\to\alpha} f(x) = L \Leftrightarrow [\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : x \in A, 0 < d(x,\alpha) < \delta \Rightarrow d(f(x), L) < \varepsilon]$

Además L es único. Para hablar de límite en un pto no es necesario que esté definido en ese pto.

- El límite es una propiedad topológica
- $\lim_{x\to\alpha} f(x) = L \Leftrightarrow [\forall V \in \mathcal{U}(L) \; \exists U \in \mathcal{U}(\alpha) : f(U \cap (A \setminus \{\alpha\})) \subset V]$

$\Leftrightarrow [x_n \in A \setminus \{\alpha\} \; \forall n \in \mathbb{N}, \{x_n\} \to \alpha \Rightarrow \{f(x_n)\} \to L]$

- No tiene sentido hablar de lim en ptos aislados.

Relación entre límite y continuidad.

- Si a es un pto aislado $a \in A \setminus A'$ no tiene sentido hablar de límite pero f siempre es continua en ese punto porque $x \in \{x\}$
- Para $a \in A \cap A'$, f continua $\Leftrightarrow \lim_{x\to a} f(x) = f(a)$
- Para $\alpha \in A' \setminus A$ f tiene límite en $\alpha \Leftrightarrow \exists g: A \cup \{\alpha\} \to F$ continua en α $\wedge$ $g(x) = f(x)$ $\forall x \in A$.

En este caso $g(\alpha) = \lim_{x\to\alpha} f(x)$

- Si φ y f son continuas, $f \circ \varphi$ es continua.

Dem

$W \in \mathcal{U}[(f\circ\varphi)(z)] = \mathcal{U}(f(x)) \xrightarrow{\text{conti en } f} f^{-1}(W) \in \mathcal{U}(x) = \mathcal{U}(\varphi(z))$

$\xrightarrow{\text{conti en } \varphi}$ $\varphi^{-1}(f^{-1}(W)) = (f\circ\varphi)^{-1}(W) \in \mathcal{U}(z)$.

- Sean E, F esp. m. $A \subset E$ $f: A \to F$, $\alpha \in A'$. $T \subset F$ $\varphi: T \to E$, $z \in T'$ $\wedge$ $\lim\limits_{t\to z} \varphi(t) = \alpha$ $\varphi(t) \in A \backslash \{\alpha\}$ $\forall t \in T \backslash \{$

Entonces $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = L \in F \Rightarrow \lim\limits_{t\to z} f(\varphi(t)) = L$

.... Algunas prop sobre lim. pg. 33 Payá.

Ejemplos de funciones continuas

- Identidad
- Distancia
- Norma
- Suma
- Prod. por escalar.

- Sea E esp. m. $F = F_1 \times F_2 \times \cdots \times F_M$ prod. cartesiano

$f = (f_1, f_2, \dots, f_M): E \to F$ es continua en $x \iff f_k$ es continua en x $\forall k \in \mathbb{N}$.

- Sea E esp. m $F = F_1 \times F_2 \times \cdots \times F_M$ prod. cartesiano. $A \subset E$.

$f = (f_1, f_2, \dots f_M): A \to F$, $\alpha \in A'$ y $y \in F$:

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = y \iff \lim\limits_{x\to\alpha} f_k(k) = y(k)$ $\forall k \in \mathbb{N}$.

Def declararemos como $F(E, Y)$ el conjunto de funciones de E en

- Si Y es un esp. vectorial $\Rightarrow F(E, Y)$ también es un esp. v.

$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ $\forall x \in E$

$(\Lambda g)(x) = \Lambda(x) g(x)$ $\forall x \in E$

$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ $\forall x \in E$.

- E esp. m. Y esp. normado.

Si $\left.\begin{array}{l} f, g \in F(E, Y) \\ \Lambda \in F(E) \end{array}\right\}$ continuas en $x \in E$ $\Rightarrow$ $\left.\begin{array}{l} f+g \\ \Lambda g \\ f/g \quad c\mathbb{R}^* \end{array}\right\}$ continuas en $x \in E$.

- E esp. m. $A \subset E$, $\alpha \in A'$. Y esp. normado

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = y \in Y$, $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) = z \in Y$, $\lim\limits_{x\to\alpha} \Lambda(x) = \lambda \in \mathbb{R}$

Entonces $\lim\limits_{x\to\alpha} (f+g)(x) = y + z$ y $\lim\limits_{x\to\alpha} (\Lambda f)(x) = \lambda y$

$\lim\limits_{x\to\alpha} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{y}{z}$ $\lim\limits_{x\to\alpha} (fg)(x) = y \cdot z$

Def Un campo escalar es una función real de N-variables reales, esto es, $f: A \to \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}^N$.

Def Un campo vectorial es una función $f: A \to \mathbb{R}^M$ con $M > 1$ con $A \subset \mathbb{R}^N$.

Se define el conjunto de todos los campos vectoriales definidos en A y con valores en $\mathbb{R}^M$ como $F(A, \mathbb{R}^M)$.

- $F(A, \mathbb{R}^M)$ es un esp. vect.
- Los campos vectoriales continuos $C(A, \mathbb{R}^M)$ forman un sub. vect.
- Cada campo vectorial $f \in F(A, \mathbb{R}^M)$ tiene M componentes que son campos escalares.
- Para estudiar lim y conti en un campo vectorial, basta trabajar con sus componentes.

f continua en $a \in A$
f no tiene límite en $\alpha \in A'$ <=> le ocurre lo mismo a f_k $\forall k \in \mathbb{N}$

Ejemplos de campos vectoriales

- Restricciones al conjunto A de las proyecciones coordenadas en $\mathbb{R}^N$
- Funciones polinómicas.
- Funciones racionales.

TEMA 4

- Todas las normas de un esp. vectorial finito son equivalentes

Def. Definimos la <u>acotación</u> de la siguiente manera:
$A \subset \mathbb{R}$ está acotado $\Leftrightarrow$ $A \subset B(x, \varepsilon)$ para algún ε.

- A subconjunto acotado $\Rightarrow$ $\forall x \in E \ \exists r > 0 : A \subset B(x, r)$
- En cualquier esp. métrico, toda sucesión convergente está acotada.
El recíproco es falso.
- La acotación no es una prop. topológica.
- Dos distancias equivalentes no dan lugar a los mismos espacios acotados.
- Dos normas equivalentes en un esp. vect. dan lugar a los mismos subconjuntos acotados.
- A acotado $\Leftrightarrow$ $\exists M > 0 : \|x\| \leq M \quad \forall x \in A$

los subconjuntos acotados en $\mathbb{R}^N$ son aquellos acotados por cualquier norma cuya topología sea la usual de $\mathbb{R}^N$.

Un subconjunto está acotado si para cada una de las coordenadas de una n-upla lo está.

- $\{X_n\}$ acotada $\Leftrightarrow$ $\{x_n(k)\}$ está acotada $\forall k \in \mathbb{N}$

Teorema de Bolzano-Weierstrass Toda sucesión acotada de vectores de $\mathbb{R}^N$ admite una sucesión parcial convergente.

- ¡CUIDADO! Se puede probar que en todo esp. normado de dimensión infinita $\exists \{x_n\}$ acotada que no admite ninguna sucesión parcial convergente.

Def. se dice que un. esp. métrico es <u>compacto</u> cuando toda sucesión de puntos de E admite una parcial convergente.

- Sea $A \subset E$ un subconjunto compacto $\Longrightarrow$ A acotado y A cerrado

Dem

→ Supongamos que $A \not\subset B(x,r)$ y lleguemos a contradicción.

Sea $x \in E$, $\forall n \in \mathbb{N}$ $\exists x_n \in A$: $d(x_n, x) > n$

$\{x_n\}$ admite una parcial convergente $\{x_{\sigma(n)}\} \to a \in A$, esto es,

$\{d(x_{\sigma(n)}, a)\} \to 0$, pero $d(x_{\sigma(n)}, x) \leq \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{d(x_{\sigma(n)}, a)} + d(a,x)$

luego $\{d(x_{\sigma(n)}, x)\}$ está mayorada

Contradicción ya que $d(x_{\sigma(n)}, x) \geq \sigma(n) \geq n$

← $x \in \bar{A}$ y $\{a_n\} \to x \overset{\text{compacidad}}{\Longrightarrow} \exists \{a_{\sigma(n)}\} \to a \in A$ pero entonces $x = a \in A$

Esto prueba que $\bar{A} \subset A \Rightarrow$ cerrado.

- Un subconjunto de $\mathbb{R}^N$ es compacto $\iff$ es cerrado y acotado
- E, F esp. m. $f : E \to F$ continua. (Generalización de Weierstrass)

  Si E compacto $\Rightarrow f(E)$ es compacto.
- E esp. m. compacto, $f : E \to \mathbb{R}$ continua, entonces

  $\exists u, v \in E$: $f(u) \leq f(x) \leq f(v)$ $\forall x \in E$

Teorema de Hausdorff Todas las normas en $\mathbb{R}^N$ son equivalentes.

- La topología de cualquier norma en $\mathbb{R}^N$ es siempre la usual $\mathbb{R}^N$
- Todas las normas en un esp. vectorial de dimensión finita son equivalentes.
- ¡Cuidado! En todo esp. vect. de dimensión infinita, $\exists$ dos normas que no son equivalentes.

Teorema del Valor Intermedio. Si f es continua en $[a,b]$, $u \in \mathbb{R}$:

$f(a) < u < f(b) \Rightarrow \exists c \in]a,b[: f(c) = u$.

La imagen por una función continua de un intervalo es un intervalo.

Def E conexo $\iff$ se puede expresar como unión de dos subconjuntos abiertos, no vacíos y disjuntos.

$\iff U \cap V = \emptyset$, $U \cup V = E$, $U \neq \emptyset$, $V \neq \emptyset$ y abiertos.

$\iff \emptyset, E$ son los únicos subconjuntos abiertos y cerrados.

- Para E esp. métrico, ELSA:

  1) E es conexo.
  2) la imagen de toda función continua de E en $\mathbb{R}$ es intervalo.
  3) Toda función continua de E en $\{0,1\}$ es cte.

Dem

1) $\Rightarrow$ 2) Sea $f: E \to \mathbb{R}$ continua. ¿$f(E)$ intervalo?

Tomamos $\alpha, \beta \in f(E)$ con $\alpha < \beta \Rightarrow \exists a, b \in E: f(a) = \alpha \wedge f(b) = \beta$.

$\lambda \in]\alpha, \beta[$ debemos probar que $\lambda \in f(E)$.

$$U = f^{-1}(]-\infty, \lambda[) \qquad V = f^{-1}(]\lambda, +\infty[)$$

$U \neq \emptyset$ ya que $a \in U$ y $V \neq \emptyset$ ya que $b \in V$.

$U \cap V = \emptyset$ ya que E conexo. (1) A.

Además debe existir $x \in E \setminus (U \cup V) \Rightarrow U \cup V \neq E$.

$$\left.\begin{array}{l} x \notin U \Rightarrow f(x) \geq \lambda \\ x \notin V \Rightarrow f(x) \leq \lambda \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda = f(x) \in f(E)$$

2) $\Rightarrow$ 3)

Toda $f: E \to \{0,1\}$ continua es continua de E en $\mathbb{R}$. $f(E)$ es un intervalo contenido en $\{0,1\}$ luego tenemos que

Por tanto f es cte.

3) $\Rightarrow$ 2)

U es un subconjunto abierto y cerrado $\Rightarrow$ consideramos $X_U: E \to \mathbb{R}$

$X_U(x) = 1 \ \forall x \in U \quad \wedge \quad X_U(x) = 0 \ \forall x \in E \setminus U$

Como $E \setminus U$ y U son abiertos, y X_U cte en cada pto

caracter local conti $\Longrightarrow X_U$ continua $\overset{3)}{\Longrightarrow} X_U$ cte $\Rightarrow U = E$ o $U = \emptyset$

- Por el teorema del valor intermedio todo intervalo es un subconjunto conexo de $\mathbb{R}$.

- Un subconjunto de $\mathbb{R}$ es conexo $\Leftrightarrow$ es un intervalo.

- Sean E, F esp. métricos y $f: E \to F$ continua,

  si E conexo $\Rightarrow f(E)$ es un subconjunto conexo de F

- Si E esp.m. compacto y conexo, $f: E \to \mathbb{R}$ continua, Entonces $f(E)$ es un intervalo cerrado y acotado.

- E conexo $\iff \forall x,y \in E \; \exists \; C$ conexo : $x,y \in C$

Def $E \subset X$ es convexo cuando:

$\forall x,y \in E \Rightarrow \{(1-t)x + ty : t \in [0,1]\} \subset E$ (Prop. algebraica)

- En $\mathbb{R}$, convexo $\Rightarrow$ conexo y convexo $\iff$ intervalo
- Todo subconjunto convexo de un esp. normado es conexo.
- C, D subconjuntos conexos, si $C \cap D \neq \emptyset \Rightarrow C \cup D$ conexo.

ANÁLISIS MATEMÁTICO I

Doble grado en Informática y Matemáticas, 2^0 Curso, 2018-19

Prueba primera de evaluación continua

~~1.~~ **[3 puntos]** Define los conceptos de espacio métrico compacto, conexo y completo.

Si K es un conjunto compacto de $\mathbb{R}^n$, ¿es K completo dotado de la distancia euclídea?

~~2.~~ **[3 puntos]** Describe el interior, la adherencia y el conjunto de puntos de acumulación del conjunto A en los siguientes casos:

a) $A =]0,1] \subset \mathbb{R}$

b) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\} \subset \mathbb{R}^2$

c) $A = \{(2,2)\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\} \subset \mathbb{R}^2$

¿Cuales de los conjuntos anteriores son compactos? ¿Y cuales son conexos? Justifica las respuestas.

~~3.~~ **[2 puntos]** Sea (E,d) un espacio métrico y $K \subset E$ un conjunto compacto no vacío. Prueba que para cada $x \in E$ existe (al menos) un elemento $x_k \in K$ que verifica que $d(x,K) = d(x,x_k)$.

Nota: La distancia de un punto a un conjunto (no vacío) K se define como sigue

$$d(x,K) = \inf\{d(x,y) : y \in K\}.$$

~~4.~~ **[2 puntos]** Prueba que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x^2+y^2} - 1}{x^2 + y^2} = 1.$$

En Granada, a 31 de octubre de 2018

Esp. completo <=> $\forall \{x_n\}$ Cauchy, $\{x_n\}$ converge

Esp. normado <=> tiene una norma asociada.

Esp. Banach <=> Esp. normado + Esp. completo

Esp. prehilbertiano <=> tiene un prod. escalar asociado

Esp. Hilbert <=> Esp prehilbertiano + Esp. Banach.

↑ prod. escalar ↗ completo ↖ normado

- Toda norma que proviene de un prod. escalar debe verificar la identidad del paralelogramo:

$$\| x+y\|^2 + \| x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

E completo $\Longleftrightarrow$ Toda suc de Cauchy converge

E conexo sii $\Longleftrightarrow [E=U\cup V,\ U\cap V=\emptyset \Rightarrow U=\emptyset$ o $V=\emptyset]$ <=> intervalo en $\mathbb{R}$.

E compacto $\Longleftrightarrow \forall \{x_n\}\ \exists \sigma(n)$ tq $\{x_{\sigma(n)}\} \to x$. <=> cerrado y acotado ($\mathbb{R}^N$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\log(1+x^4+y^4)}{x^4+y^4} = 1$$

$$\left((1+x^4)^{-1}\right)' = -1(1+x^4)^{-2}4x^3 = \frac{-4x^3}{(1+x^4)^2}$$

$$\left[\lim_{x\to0}\left(\lim_{y\to0}\left(\frac{\log(1+x^4+y^4)}{x^4+y^4}\right)\right) = \lim_{x\to0}\frac{\log(1+x^4)}{x^4} = \text{L'hôpital.}\right.$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{1+x^4}\cdot 4x^3}{4x^3} = \lim_{x\to0}\frac{4x^3}{x^4(1+x^4)} = \lim_{x\to0}\frac{4}{x(1+x^4)} = \infty$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\frac{4x^3}{1+x^4}}{4x^3} \quad \frac{4x^3}{4x^3(1+x^4)} \quad [illegible] = \frac{4x^3}{4x^3(1+x^3)}$$

[redacted]

$$\lim_{x\to0}\frac{\log(1+x^4)}{x^4} \xrightarrow{\text{L'hôpital.}} \lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{1+x^4}\cdot\cancel{4x^3}}{\cancel{4x^3}} = \lim_{x\to0}\frac{1}{x^4+1} = 1\right]$$

$$\left[\lim_{y\to0}\left(\lim_{x\to0}\left(\frac{\log(1+x^4+y^4)}{x^4+y^4}\right)\right) = \lim_{y\to0}\frac{\log(1+y^4)}{y^4} =\right.$$

$$\lim_{y\to0}\frac{\frac{1}{1+y^4}\cancel{4y^3}}{\cancel{4y^3}} = 1$$

$$\boxed{x=\rho\cos\theta \quad\Big|\quad y=\rho\,\mathrm{sen}\,\theta}$$

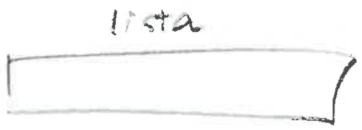
$$\lim_{\rho\to0}\frac{\log(1+(\rho\cos\theta)^4+(\rho\,\mathrm{sen}\,\theta)^4)}{(\rho\cos\theta)^4+(\rho\,\mathrm{sen}\,\theta)^4} = \lim_{\rho\to0}\frac{\log(1+\rho^4\cos^4\theta+\rho^4\mathrm{sen}^4\theta}{\rho^4\cos^4\theta+\rho^4\mathrm{sen}^4\theta}$$

$$\lim_{\rho\to0}\frac{\log(1+\rho^4(\cos^4\theta+\mathrm{sen}^4\theta))}{\rho^4(\cos^4\theta+\mathrm{sen}^4\theta)} = \lim_{\rho\to0}\frac{\log[1+\rho^4(1-2\,\mathrm{sen}^2\theta\cos^2\theta)]}{\rho^4(1-2\,\mathrm{sen}^2\theta\cos^2\theta)}$$

②

① Probar que ∄ lím.
② Aplicar polares.
③ Ejemplos de rectas

④ Cambios de variable (Ana)



$$\boxed{\begin{array}{l} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\,\text{sen}\,\theta \\ \hline \rho = \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta = \text{arctg}\,\dfrac{y}{x} \end{array}}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\text{sen}\,(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = 1$$

$$\left[\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\left(\frac{\text{sen}\,(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\right)\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}\,(x^2)}{x^2} \overset{\text{l'hôpital.}}{=} \frac{\cos(x^2)(\cancel{2x})}{\cancel{2x}} = \cos x^2 = 1\right]$$

$$\left[\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\left(\frac{\text{sen}\,(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\right)\right) = \lim_{y\to 0}\frac{\text{sen}\,(y^2)}{y^2} \overset{\text{l'hôpital}}{=} \lim_{y\to 0}\frac{\cos(y^2)\,\cancel{2y}}{\cancel{2y}} =$$

No podemos afirmar que tenga límite pero ya sabemos que el único posible límite es 1.

$$\boxed{x = \rho\cos\theta} \quad \boxed{y = \rho\,\text{sen}\,\theta}$$

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{\text{sen}\,((\rho\cos\theta)^2 + (\rho\,\text{sen}\,\theta)^2)}{(\rho\cos\theta)^2 + (\rho\,\text{sen}\,\theta)^2} = \lim_{\rho\to 0}\frac{\text{sen}\left(\rho^2\cos^2\theta + \rho^2\text{sen}^2\theta\right)}{\rho^2\cos^2\theta + \rho^2\,\text{sen}^2\theta}$$

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{\text{sen}\,(\rho^2(\cos^2\theta + \text{sen}^2\theta))}{\rho^2(\cos^2\theta + \text{sen}^2\theta)} = \lim_{\rho\to 0}\frac{\text{sen}\,(\rho^2)}{\rho^2} =$$

$$\text{l'hôpital} = \lim_{\rho\to 0}\frac{\cos(\rho^2)\,2\cancel{\rho}}{2\cancel{\rho}} = 1 \checkmark$$

TEMA 5

Def Sea E esp. métrico con la distancia d, $x_n \in E$ $\forall n \in \mathbb{N}$ se dice que $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy cuando:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists m \in \mathbb{N} \ : \ p, q \geq m \implies d(x_p, x_q) < \varepsilon$$

- En $(\mathbb{R}, d)$ con d la distancia usual, las sucesiones de Cauchy son las que conocíamos, que coinciden con las convergentes.
- En cualquier esp. métrico, toda suc. convergente ⇒ suc. Cauchy
- Dos distancias equivalentes no dan lugar a las mismas sucesiones de Cauchy.
- Para probar que dos distancias son equivalentes podemos probar que dan lugar a las mismas sucesiones convergentes.

Def Se dice que E es un esp. métrico completo si toda sucesión de Cauchy de E es convergente

El teorema de complitud en $\mathbb{R}$ afirma que $(\mathbb{R}, d)$ con d la distancia usual, es un esp. métrico completo.

- Se define el esp de Banach como un espacio normado y completo.
- Se define el esp de Hilbert a todo espacio prehilbertiano que además es espacio de Banach
- Dos normas equivalentes en un esp. vectorial dan lugar a las mismas sucesiones de Cauchy.
- Todo esp. normado de dimensión finita es un espacio de Banach. Por tanto, el esp. euclídeo n-dimensional es un esp. Hilbert.
- Sea E esp. métrico y A sub. métrico, se tiene:
  - ·) Si A completo ⟹ A sub cerrado de E.
  - ·) Si E completo ∧ A sub cerrado ⟹ A completo.

Def f unif. cont. cuando $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : x\, y \in E,$

$$d(x,y) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

En términos de sucesiones:

$$\left.\begin{array}{l} \text{sean } \{x_n\}, \{y_n\} \subset E : \{d(x_n, y_n)\} \to 0 \\ f \text{ unif. cont.} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \{d(f(x_n), f(y_n))\} \to 0$$

Teorema Heine Sean E, F esp. métricos y $f : E \to F$ continua. Si E compacto $\Rightarrow$ f es unif cont.

Dem Reducción al absurdo. Supongamos que no es unif. cont. Entonces $\exists \{x_n\}, \{y_n\} \subset E$, $\exists \varepsilon > 0 : \forall n \in \mathbb{N}$ se tiene:

$$d(x_n, y_n) < \frac{1}{n} \quad \text{y} \quad d(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon$$

Por ser E compacto, $\exists \{x_{\sigma(n)}\} \longrightarrow x \in E$. Puesto que $\{d(x_{\sigma(n)}, y_{\sigma(n)}) \to 0$, deducimos $\{y_{\sigma(n)}\} \to x$. Como f continua,

$\{f(x_{\sigma(n)})\} \to f(x)$, $\{f(y_{\sigma(n)})\} \longrightarrow f(x) \Rightarrow \{d(f(x_{\sigma(n)}), f(y_{\sigma(n)}))\} \to 0$

lo cual es contradicción ya que $d(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon$!

- $\exists$ ejemplos de funciones unif cont que al sustituir la distancia (partida o de llegada) por una equivalente, dejan de ser unif cont.

Def Si E, F esp. métricos, $f : E \to F$ es lipschitziana cuando $\exists M \in \mathbb{R}_0^+ :$ $d(f(x), f(y)) \leq M \cdot d(x,y)$ $\forall x, y \in E$.

- Toda función lipchitziana es unif. cont.

La mínima cte M que verifica la def se denomina la cte de Lipschitz y viene dada por:

$$M_0 = \sup \left\{ \frac{d(f(x), f(y))}{d(x,y)} : x, y \in E, x \neq y \right\}$$

Si $M_0 \leq 1$ se dice que no es expansiva. Con $M_0 < 1$ decimos que f es contractiva.

- En el caso de esp. normados, una función lipschitziana lo sigue siendo al cambiar las normas por otras equivalentes.

Teorema del pto fijo de Banach: Sea E esp. métrico completo. y $f: E \to E$ una app contractiva

Entonces f tiene un único pto fijo, esto es, $\exists!\ x \in X : f(x) = x$.

- Sean X, Y dos esp. normados y $T: X \to Y$ app lineal. ELSA:

1) T es continua.

2) $\exists\ M \in \mathbb{R}_0^+ : \|Tx\| \leq M\|x\| \ \forall x \in X$

$Tx = T(x)$ Notacion

Dem

1)⇒2) sabiendo que $T(0) = 0$, la continuidad de T en 0 nos dice:

$$\exists \delta > 0 : \ z \in X, \quad \|z\| < \delta \Rightarrow \|Tz\| < 1$$

dado $x \in X \setminus \{0\}$, tomando $z = \frac{\delta x}{2\|x\|}$ tenemos claramente $\|z\| = \frac{\delta}{2} < \delta$ luego; despejando x de la igualdad con z, obtenemos $x = \frac{2\|x\|z}{\delta}$, así:

$$\|Tx\| = \left\|T\frac{2\|x\|z}{\delta}\right\| = \frac{2\|x\|}{\delta}\|Tz\| \leq \frac{2}{\delta}\|x\|$$

Hemos probado 2) con $M = \frac{2}{\delta}$

2)⇒1) $\forall u, v \in X$, deducimos:

$$\|Tu - Tv\| = \|T(u - v)\| \leq M\|u - v\|$$

lo que prueba que T es lipschitziana ⇒ T continua.

- Para una app lineal entre esp. normados, ser continua equivale a ser unif. cont, que equivale a ser lipschitziana.

- Si X es un esp. normado de dim finita, toda app lineal de X en cualquier otro esp. normado es continua.

Dem sea X, Y esp. normados. y $T: X \to Y$ una app lineal.
Definimos una nueva norma $\|\cdot\|_T$ en X así:

$$\|x\|_T = \|x\| + \|Tx\| \qquad \forall x \in X$$

Podemos comprobar que $\|\cdot\|_T$ es norma en X. Como X tiene dim finita, podemos aplicar Hausdorff, quien nos dice que la norma es equivalente a la norma de partida en X.
Luego $\exists \rho > 0 : \|x\|_T \leq \rho\|x\| \ \forall x \in X$, pero entonces es claro:

$$\|Tx\| \leq \|x\|_T \leq \rho\|x\| \quad \forall x \in X$$

Esto prueba que es continua

- Denotaremos $L(X,Y)$ al esp. vect. de todas las app lineales y continuas de X en Y. Cuya suma y producto son:

$$(T+S)x = Tx + Sx \quad \forall x \in X \quad ; (\lambda T)x = \lambda(Tx) \ \forall x \in X$$

Además $L(X,Y)$ es un sub. vect de $C(X,Y)$, que es el espacio vect. de todas las funciones continuas de X en Y. Pues queremos convertir este espacio en un esp. normado.

Para ello debemos definir la norma de T como la cte de Lipschitz de T, esto es, la mínima $M>0$:

$$\|Tu - Tv\| \leq M\|u-v\| \ \forall u,v \in X$$
$$\Updownarrow$$
$$\|Tx\| \leq M\|x\| \quad \forall x \in X \qquad (*)$$

Así, la cte de Lipschitz es:

$$\|T\| = \{ \min\{M>0 : \|Tx\| \leq M\|x\| \ \forall x \in X \} \qquad (4)$$

Todo esto lo hacemos porque, para comprobar la continuidad en una app lineal debemos verificar $(*)$ por lo que 4) nos dice que $\|T\| \leq M$. Una vez sa

Si ya sabemos que $T \in L(X,Y)$ decimos: $\|Tx\| \leq \|T\| \|x\| \ \forall x \in X$ y esto es óptimo ya que $\|T\|$ es la mín. cte ¿posible

Esto ocurre siempre que X tenga dim. finita.

Si tenemos que comprobar que $\|\cdot\|$ es una norma en $L(X,Y)$, es bien facil. Para $T,S \in L(X,Y)$ se tiene:

- •) Es obvio que de $\|T\|=0$ se deduce que $T=0$.
- •) Para $T,S \in L(X,Y)$ tenemos:

  $\|(T+S)x\| \leq \|Tx\| + \|Sx\| \leq (\|T\|+\|S\|)\|x\|$ y aplicando 4)

  obtenemos: $\|T+S\| \leq \|T\| + \|S\|$
- •) Para $T \in L(X,Y)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ se tiene:

$$\|\lambda T\| = \sup \{ \|\lambda Tu\| : u \in X, \|u\|=1\}$$
$$= \sup\{|\lambda| \|Tu\| : u \in X, \|u\|=1\} = |\lambda| \|T\|$$

Así hemos probado que T es norma en $L(X,Y)$ y por tanto esto es un esp. normado.

TEMA 6

Recordemos algunas definiciones en funciones reales de variable real.

$A \subset \mathbb{R} \neq \emptyset$, $f: A \to \mathbb{R}$ derivable en $a \in A \cap A'$ si $\exists \lambda \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lambda$$

en cuyo caso $\lambda = f'(a)$ es la derivada de f en a.

Def Decimos que $f: A \to \mathbb{R}$ es diferenciable en $a \in A \cap A'$ cuando $\exists\, T \in L(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ verificando:

$$\lim_{x \to a} \frac{|f(x) - f(a) - T(x-a)|}{|x-a|} = 0 \text{ , o bien, } \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - T(x-a)}{|x-a|} = 0$$

en este caso T es única y se designa $Df(a)$.

- f diferenciable en a $\Leftrightarrow$ f derivable en a.
  $f'(a)$ $Df(a)$

- En funciones de variable real, la diferencia entre diferenciabilidad y derivabilidad es que hablamos de derivada como el nº real $f'(a)$, mientras que diferencial es la aplicación lineal $Df(a)$, pero son conceptos equivalentes.

Def X, Y esp. normados, $f: \overset{\subset X}{A} \to Y$, $a \in \mathring{A}$. Se dice diferenciable en a cuando $\exists\, T \in L(X, Y)$ verificando:

$$\lim_{x \to a} \frac{\|f(x) - f(a) - T(x-a)\|}{\|x-a\|} = 0 \text{ , o bien, } \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - T(x-a)}{\|x-a\|} = 0$$

Esto es equivalente a:

$$\lim_{h \to 0} \frac{\|f(a+h) - f(a) - Th\|}{\|h\|} = 0 \text{ , o bien, } \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - Th}{\|h\|} = 0$$

- Si f diferenciable en a, $T \in L(X, Y)$ es única.

Para comprobar la unicidad solo hemos utilizado la linealidad, ¿por qué exigimos la continuidad entonces? Ahora lo veremos.

- Si f diferenciable en a, $\exists!\ T \in L(X,Y)$ la llamamos diferencial de f en a y se caracteriza:

$$Df(a)v = \lim_{t\to 0} \frac{f(a+tv)-f(a)}{t} \quad \forall v \in X$$

- Si f diferenciable en $a \Longrightarrow f$ continua en a.

Recordemos: si X tiene dim finita, toda app lineal (X,Y) será continua.

- Ser diferenciable en a significa que "cerca" del punto a, f admite una "buena aproximación" mediante una funcion sencilla.

- Tenemos $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-g(x)}{\|x-a\|} = 0$. Esto significa que "cerca" del pto a, la funcion g es una buena aproximacion de f, pues $f(x)-g(x)$ tiende a cero en a mas "rápidamente" que $\|x-a\|$.

- <u>CARACTER LOCAL</u>: Si $U \subset A$, $a \in U^\circ \Longrightarrow f$ diferenciable

f diferenciable $\Longleftrightarrow f|_U$ diferenciable

en este caso ↳ $Df(a) = D(f|_U)(a)$

- La diferenciabilidad de f en a, así como su diferencial $Df(a)$ se conservan al sustituir las normas de X e Y por otras equivalentes a ellas.

- Diremos que $D(\Omega, Y)$ es el conjunto de aplicaciones diferenciables de Ω a Y. $[D(\Omega,Y) \subset C(\Omega,Y)]$

- Además $f \in D(\Omega, Y)$ es una funcion de clase C^1, y denotamos $C^1(\Omega,Y)$ al conjunto de app de clase C^1.

Con esto obtenemos:

$$C^1(\Omega,Y) \subset D(\Omega,Y) \subset C(\Omega,Y)$$

- Si $f: X \to Y$ cte $\Rightarrow$ f diferenciable con $Df(a)=0$ $\forall a \in X$, por tanto $f \in C^1(X,Y)$.

- Si $f \in L(X,Y) \Rightarrow f$ diferenciable con $Df(a)=f$ $\forall a \in X$ $\Rightarrow Df$ es cte, por tanto $f \in C^1(X,Y)$

- Sea O abierto de X, $f,g: O \to Y$ diferenciables en $a \in O$. Si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, entonces. $\alpha f + \beta g$ es diferenciable en a:

$$D(\alpha f+\beta g)(a) = \alpha\, Df(a) + \beta\, D(g)(a)$$

Además:

$$\frac{(\alpha f+\beta g)(x) - (\alpha f+\beta g)(a) - (\alpha Df(a) + \beta Df(a))(x-a)}{\|x-a\|} =$$

$$= \alpha \frac{f(x)-f(a)-Df(a)(x-a)}{\|x-a\|} + \beta \frac{g(x)-g(a)-Dg(a)(x-a)}{\|x-a\|}.$$

Por ser f,g diferenciables en a, los dos sumandos del segundo miembro tienen límite 0 en dicho punto.

Veamos ahora que la composición de funciones preserva la diferenciabilidad (Regla más útil del cálculo de diferenciales).

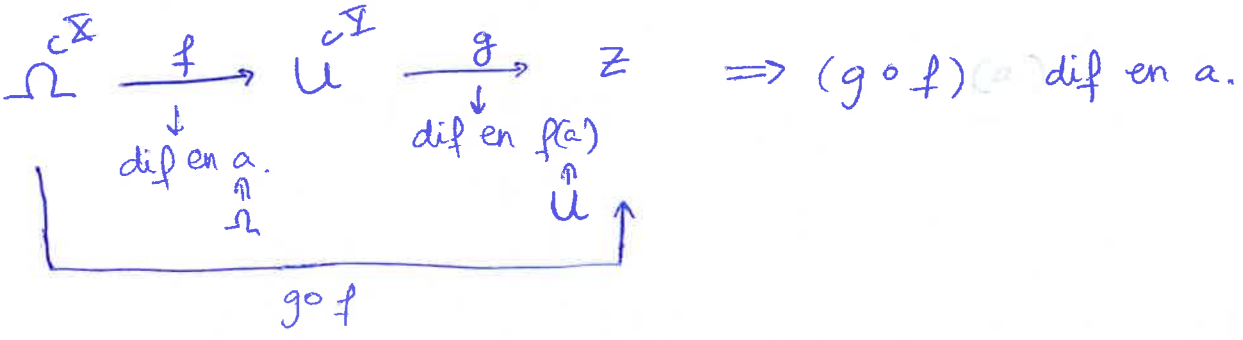
Regla de la cadena sean X, Y, Z 3 esp. normados, Ω de X, U abierto de Y. Sean $f: \Omega \to U$ $g: U \to Z$

Si f diferenciable en $a \in \Omega$, g diferenciable en $b = f(a)$, entonces $g \circ f$ diferenciable en a.

$$D(g\circ f)(a) = Dg(b) \circ Df(a) = Dg(f(a)) \circ Df(a)$$

Por tanto si $f \in D(\Omega, Y)$ y $g \in D(U,Z)$ entonces $g\circ f \in D(\Omega, Z)$

Esquema:



- Si X, Y, Z, son esp. normados, $T \in L(X,Y)$, $S \in L(Y,Z)$ entonces $\|S \circ T\| \underline{\leq} \|S\| \|T\|$

- Sean, X, Y, Z, esp. normados Ω, U abiertos de X, Y,

$$\left.\begin{array}{l} \text{si } f \in C^1(\Omega, Y) \text{ verifica que } f(\Omega) \subset U \\ \text{y } g \in C^1(U, Z) \end{array}\right\} \Longrightarrow g \circ f \in C^1(\Omega, Z)$$

Veamos ahora que la diferenciabilidad de un producto de esp. normados equivale a la de sus componentes.

- Sea Ω abierto de X esp. normado, $f = (f_1, f_2 \ldots, f_M) : \Omega \longrightarrow Y$

Entonces f diferenciable en $a \in \Omega \iff f_j$ diferenciable en a $\forall j \in I_M$.

$$Df_j(a) = \pi_j \circ Df(a)$$

$$Df(a) = \sum_{j=1}^{M} \Phi_j \circ Df_j(a)$$

$f \in D(\Omega, Y) \iff f_j \in D(\Omega, Y) \ \forall j \in I_M$

$f \in C^1(\Omega, Y) \iff f_j \in C^1(\Omega, Y) \ \forall j \in I_M$.

- $Df(a) = (Df_1(a), Df_2(a), \ldots, Df_M(a))$

- sea Ω abierto de X, $f, g : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciables en $a \in \Omega$.

Entonces $f \cdot g$ diferenciable en a.

$$D(fg)(a) = g(a) Df(a) + f(a) Dg(a)$$

Si $f, g \in D(\Omega) \Rightarrow fg \in D(\Omega)$ con $D(fg) = gDf + fDg$

Entonces $fg \in C^1(\Omega)$ si $f, g \in C^1(\Omega) \Rightarrow D(\Omega), C^1(\Omega)$ son subanillos de $C(\Omega)$

- Si Ω abierto de $\mathbb{R}^N$ $\underset{\Longrightarrow}{\Longrightarrow}$ toda $f \cdot$ polinómica en Ω es de clase C^1
- " " racional " "

- Sea Ω abierto de X. $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ dif en $a \in \Omega$, $g(x) \neq 0$.

Entonces f/g es diferenciable en a con:

$$D(f/g)(a) = \frac{1}{g(a)^2} (g(a) Df(a) - f(a) Dg(a))$$

Por tanto si $f, g \in D(\Omega) \Rightarrow \begin{cases} f/g \in D(\Omega) \\ f/g \in C^1(\Omega) \quad \text{si } f, g \in C^1(\Omega) \end{cases}$

TEMA 7

- Si Y esp. normado, $\phi : L(\mathbb{R},Y) \to Y$ es biyección lineal
$\phi(T) = T(1) \quad \forall T \in L(\mathbb{R},Y)$

que conserva la norma, por tanto, permite identificar totalmente el espacio normado $L(\mathbb{R},Y)$ con Y.

Def Decimos que f es <u>derivable</u> en $a \in \Omega$, cuando

$$g : \Omega \setminus \{a\} \longrightarrow Y \qquad \text{tiene lím en } a.$$
$$t \longmapsto \frac{f(t)-f(a)}{t-a}$$

Dicho límite es el <u>vector derivada</u> de f en a, denotada por $f'(a)$, es decir, $f'(a) = \lim\limits_{t \to a} \dfrac{f(t)-f(a)}{t-a} \in Y$

Def Decimos que f es <u>derivable</u> cuando lo es en todos sus puntos, en cuyo caso podemos considerar

$$f' : \Omega \to Y$$
$$x \longmapsto f'(x)$$

Decimos que f' es la <u>función derivada</u>.

- Sea Y esp. normado, Ω abierto de $\mathbb{R}$. $f : \Omega \to Y$

f diferenciable en $a \iff f$ derivable en a.

En cuyo caso, la diferencial y el vector derivada se determinan:

$$f'(a) = Df(a)(1) \quad ; \quad Df(a)t = t f'(a)$$

Por tanto, f diferenciable $\iff$ f derivable

Por tanto, $f \in C^1(\Omega, Y) \iff f$ derivable y su función derivada f' es continua.

Además Df continua $\iff f'$ continua.

- Sea Ω un abierto de $\mathbb{R}$, Y esp. normado, $f : \Omega^{\subset \mathbb{R}} \to Y$ derivable en $a \in \Omega$

Entonces, $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$:

$$\left.\begin{array}{l} t_1, t_2 \in \Omega,\ t_1 \neq t_2 \\ a-\delta < t_1 \leq a \leq t_2 < a+\delta \end{array}\right\} \left\| \frac{f(t_2)-f(t_1)}{t_2 - t_1} - f'(a) \right\| < \varepsilon$$

- Sea Ω abierto de $\mathbb{R}$, $f\,(f_1, f_2, \dots, f_M) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^M$.

Entonces f derivable en $a \in \Omega \Longleftrightarrow f_j$ derivable en a $\forall j \in I_M$

$$f'(a) = (f_1'(a), f_2'(a), \dots f_M'(a))$$

Def Sea Ω abierto de $\mathbb{R}$, $\gamma : \Omega \to \mathbb{R}^M$ continua.
Entonces $C = \gamma(\Omega) = \{\gamma(t) : t \in \Omega\} \subset \mathbb{R}^M$ decimos que es una <u>curva paramétrica</u> en $\mathbb{R}^M$.

Si $M = 2 \Rightarrow$ curva plana.
Si $M = 3 \Rightarrow$ curva alabeada.

Si γ derivable en $a \in \Omega$, $\gamma'(a) \neq 0$, consideramos

$$R = \{\gamma(a) + t\,\gamma'(a) : t \in \mathbb{R}\}$$

Decimos que R es la <u>recta tangente</u> a la curva C en $x = \gamma(a)$. Así pues, el vector derivada $\gamma'(a) \neq 0$ es un vector de dirección de la recta tangente a la curva C en el pto $x = \gamma(a) \in C$

<u>Aplicación geométrica de la recta tangente</u>

Sea $\varepsilon > 0$, $\varepsilon < \|\gamma'(a)\|$, podemos conseguir $\delta > 0$, con $]a-\delta, a+\delta[\subset \Omega$:

$$\begin{array}{l} a-\delta < t_1 \leq a \leq t_2 < a+\delta \\ t_1 \neq t_2 \end{array} \Rightarrow \left\| \frac{\gamma(t_2) - \gamma(t_1)}{t_2 - t_1} - \gamma'(a) \right\| \leq \varepsilon$$

Entonces $\dfrac{\gamma(t_2) - \gamma(t_1)}{t_2 - t_1} \neq 0$, es un vector de dirección de la recta, que pasa por $\gamma(t_2), \gamma(t_1)$. Pues este vector tiende a ser $\gamma'(a)$ cuando t_1, t_2 tienden a a.

- Si γ derivable en a con $\gamma'(a) \neq 0 \Rightarrow x = \gamma(a)$ es un <u>pto regular</u>

Si esto ocurre $\forall a \in \Omega$ decimos que C es una <u>curva regular</u>.

- Si γ derivable en a con $\gamma'(a) = 0$
$\vee$
γ No derivable en a $\Rightarrow x = \gamma(a)$ es un <u>pto singular</u>

- Pensemos en las componentes de γ. $\forall j \in I_m$, $\pi_j \circ \gamma : \Omega \to \mathbb{R}$ suede denotarse x_j en vez de γ_j. Decimos entonces que las M igualdades

$$x_j = x_j(t) \quad \forall t \in \Omega \quad j \in I_M$$

son las ec. paramétricas de la curva.

Sabemos que γ es derivable si lo es en cada variable, pues si γ es derivable en a con $\gamma'(a) \neq 0$, la recta tangente R, como curva paramétrica que es, tiene sus ecuaciones paramétricas dadas por:

$$x_j = x_j(a) + t\, x'_j(a) \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

- Una curva plana es la imagen de $C = \gamma(\Omega)$, $\gamma : \Omega \to \mathbb{R}^2$

$x = \pi_1 \circ \gamma$, $y = \pi_2 \circ \gamma$, por tanto, $x = x(t)$, $y = y(t)$ $\forall t \in \Omega$.

Como sabemos que γ es derivable $\Leftrightarrow$ lo son las funciones x e y. $\gamma'(a) = (x'(a), y'(a))$. Cuando $\gamma'(a) \neq 0$ la recta tangente a la curva C en $\gamma(a) = (x(a), y(a))$ tiene ecuaciones paramétricas:

$$x = x(a) + t\, x'(a) \qquad y = y(a) + t\, y'(a)$$

- Toda curva explícita es una curva paramétrica.

El recíproco No es cierto.

Tema 8

- Sean X, Y esp. normados, Ω abierto de X, $f: X \to Y$ diferenciable en $a \in \Omega$.

$$Df(a)u = \lim_{t \to 0} \frac{f(a+tu) - f(a)}{t} \quad \forall u \in X$$

Def de derivada parcial

- Una dirección en el espacio normado X es un vector $u \in X$ con $\|u\| = 1$. $S = \{u \in X : \|u\| = 1\}$

- Sea $\varphi_u :]-r, r[\to Y$

$$\varphi_u(t) = f(a+tu) \quad \forall t \in]-r, r[$$

φ_u describe el comportamiento de f en la recta real

Decimos que f derivable en la dirección u en el punto a cuando φ_u es derivable en 0. En este caso, $\varphi'_u(0)$ es la derivada direccional de f en a.

$$f'_u(a) = \varphi'_u(0) = \lim_{t \to 0} \frac{\varphi_u(t) - \varphi_u(0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(a+tu) - f(a)}{t}$$

- f derivable en la direción u $\Leftrightarrow$ f derivable en la dirección $-u$ y además $f'_{-u}(a) = -f'_u(a)$

- f direccionalmente derivable en a cuando es derivable en todas las direcciones u.

- Sean X, Y esp. normados, Ω abierto X, $f: \Omega \to Y$

f diferenciable en $a \in \Omega$ $\Rightarrow$ f direccionalmente derivable en a.

Además $f'_u(a) = Df(a)u \quad \forall u \in S$

- La derivada parcial de f con respecto a la k-ésima variable se denota por $\frac{\partial f}{\partial x_k}(a) = f'_{e_k}(a)$

Decimos que f es parcialmente derivable en a cuando se puede calcular la derivada parcial $\forall k \in I_N$

- Si f diferenciable en $a \Rightarrow f$ parcialmente derivable en a

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(a) = Df(a)\, e_k \qquad \forall k \in I_N$$

- f parcialmente derivable con respecto a la k-esima variable en $a \in \Omega$ $\Leftrightarrow$ f_j parcialmente derivable en a $\forall j \in I_M$.

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(a) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_k}(a), \frac{\partial f_2}{\partial x_k}(a), \ldots, \frac{\partial f_M}{\partial x_k}(a) \right)$$

Def Cuando el campo f es parcialmente derivable, el gradiente de f en a es el vector $\nabla f(a) \in \mathbb{R}^N$:

$$\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \frac{\partial f}{\partial x_2}(a), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right) = \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_k}(a)\, e_k$$

la k-ésima coordenada del vector gradiente de f en a es la der. parcial con respecto a la k-esima variable de f en a. $\forall k \in I_N$

- $f: \Omega \to \mathbb{R}$, Ω abierto de $\mathbb{R}^N$, $a \in \Omega$. ELSA:
  1) f diferenciable en a.
  2) f parcialmente derivable en a y verifica:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - (\nabla f(a) \mid x - a)}{\|x - a\|} = 0$$

Si se verifica 1 y 2, entonces $Df(a)\, x = (\nabla f(a) \mid x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^N$

- Relación entre la diferencial y el vector gradiente:

$$\nabla f(a) = \sum_{k=1}^{N} Df(a)\, e_k \qquad Df(a)\, x = (\nabla f(a) \mid x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

diferencial continua $\iff$ continuas las der parciales

- Si Ω abierto de $\mathbb{R}^N$, $f \in D(\Omega)$, $a \in \Omega$, ELSA
  1) la función diferencial $Df : \Omega \to L(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ es continua en a
  2) la función gradiente $\nabla f : \Omega \to \mathbb{R}^N$ continua en a.
  3) $\forall k \in I_N$, la función derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial x_k} : \Omega \to \mathbb{R}$ continua en a.

- $f \in C^1(\Omega) \iff \nabla f \in C(\Omega, \mathbb{R}^N) \iff \frac{\partial f}{\partial x_k} \in C(\Omega) \quad \forall k \in I_N$.

- Si $A \neq \emptyset$, $f : A \to \mathbb{R}$, decimos que f alcanza máximo absoluto en $a \in A$ cuando $f(a) = \max f(A)$, esto es, $f(a) \geq f(x)$ $\forall x \in A$.

Analogo para mínimo absoluto.

Decimos que f tiene extremo absoluto cuando tiene un max o min absoluto en a.

- Sea $A \subset E$, $f : A \to \mathbb{R}$ tiene un máximo relativo en $a \in A$, cuando $\exists r \in \mathbb{R}^+$ verificando:

$$B(a, r) \subset A \quad y \quad f(a) \geq f(x) \quad \forall x \in B(a, r)$$

Analogo para mínimo relativo.

Decimos que f tiene extremo relativo cuando tiene un max o min relativo en a.

- Sea $A \neq \emptyset$, $A \subset \mathbb{R}^N$, $f : A \to \mathbb{R}$.

si f tiene extremo relativo en $a \in A^\circ$, y es parcialmente derivable en a. $\Rightarrow \nabla f(a) = 0$

Se dice entonces que a es un pto crítico.

TEMA 9

Def si f diferenciable en $a \in \Omega$, la matriz de la aplicación lineal $Df(a) \in L(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^M)$ recibe el nombre de matriz jacobiana de f en a. Denotada por $Jf(a)$

$$Jf(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_N}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_M}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_M}{\partial x_N}(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla f_1(a) \\ \vdots \\ \nabla f_M(a) \end{pmatrix}$$

→ v.gradiente

↓ v. derivada

Regla de la cadena para derivadas parciales nos dice:

$f : \Omega^{\subset \mathbb{R}^N} \longrightarrow \mathbb{R}^M$

$g : U^{\subset \mathbb{R}^M} \longrightarrow \mathbb{R}^P$

$h = g \circ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^P$

$$\begin{tikzcd} \Omega^{\subset \mathbb{R}^N} \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "h"'] & U^{\subset \mathbb{R}^M} \arrow[r, "g"] & \mathbb{R}^P \end{tikzcd}$$

a diferenciable en f
f(a) diferenciable en g $\Big\} \Longrightarrow$ a diferenciable en h.

$$Dh(a) = Dg(f(a)) \circ Df(a)$$

$$Jh(a) = Jg(f(a)) \cdot Jf(a)$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{\partial h_i}{\partial x_k}(a) = \sum_{j=1}^{M} \frac{\partial g_i}{\partial y_j}(f(a)) \frac{\partial f_j}{\partial x_k}(a) \qquad \forall k \in I_n, \forall i \in I_p.$$

TEMA 10

Teorema del valor medio (funciones reales de variable real)

Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua. derivable en $]a,b[$

-) TVM:

$\exists\, c \in]a,b[\,:\quad f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$

-) Desigualdad VM.

Si $\exists\, M > 0 : \quad |f'(x)| \leq M \ \forall x \in]a,b[\implies |f(b) - f(a)| \leq M(b-a)$

- Toda función derivable
derivable en un intervalo con derivada acotada $\Big\} \implies$ es lipschitziana

TVM (escalar)

sea Ω abierto de X. $a, b \in \Omega : [a,b] \subset \Omega$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ continua en } [a,b] \\ f \text{ diferenciable en }]a,b[\end{array}\right\} \implies \exists\, c \in]a,b[\;: \quad f(b) - f(a) \leq M \|b-a\|$$

- sea Ω abierto de $\mathbb{R}^N$, $a, b \in \Omega : [a,b] \subset \Omega$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ continua en } [a,b] \\ f \text{ diferenciable en }]a,b[\end{array}\right\} \implies \exists\, c \in]a,b[: \quad f(b) - f(a) = (\nabla f(c) \mid b-a)$$

Si $\exists\, M > 0 : \ \|\nabla f(x)\| \leq M \ \forall x \in]a,b[\implies |f(b) - f(a)| \leq M \|b-a\|$

- Sea Y esp. normado, $g : [0,1] \to Y$, $\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{l} \text{continuas en } [0,1] \\ \text{derivables en }]0,1[\\ \|g'(t)\| \leq \alpha'(t) \end{array}\right\} \implies \|g(1) - g(0)\| \leq \alpha(1) - \alpha(0)$$

Última proposición

* * *

- Sea Ω abierto. convexo de $\mathbb{R}^2$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ parc. derivable con respecto } x_1 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0. \ \forall (x,y) \in \Omega \end{array}\right\} \implies \begin{array}{l} \exists\, J \subset \mathbb{R},\ \varphi : J \to \mathbb{R} : \\ (x,y) \in \Omega \implies y \in J,\ f(x,y) = \varphi(y) \end{array}$$

desigualdad del valor medio

sean X, Y esp. normados, Ω abierto de X, $a,b \in X$: $[a,b] \subset \Omega$

$$\left. \begin{array}{l} f: \Omega \to Y \\ \text{continua en } [a,b] \\ \text{diferenciable en }]a,b[\\ \exists M>0 : \|Df(x)\| \leq M \ \ \forall x \in]a,b[\end{array} \right\} \Rightarrow \|f(b)-f(a)\| \leq M \|b-a\|$$

- X, Y esp. normados, Ω abierto convexo de X, $f: \Omega \to Y$

$$\left. \begin{array}{l} \text{diferenciable.} \\ \exists M>0 : \|Df(x)\| \leq M \ \ \forall x \in \Omega \end{array} \right\} \Rightarrow f \text{ lipschitziana con cte } M$$

$$\Updownarrow$$

$$\|f(b)-f(a)\| \leq M \|b-a\|$$

- X, Y esp. normados, Ω abierto conexo de X, $f: \Omega \to Y$

$$\left. \begin{array}{l} \text{diferenciable} \\ Df(x)=0 \ \ \forall x \in \Omega \end{array} \right\} \Longrightarrow f \text{ cte}$$

- sea Ω abierto de $\mathbb{R}^N$. $f: \Omega \to \mathbb{R}$, $a \in \Omega$, $k \in I_N$.

$$\left. \begin{array}{l} \cdot) \ f \text{ es parcialmente derivable en } a \\ \text{en } a \text{ con respecto a } k\text{-esima} \\ \text{variable, esto es, } \exists \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) \\ \cdot) \ f \text{ es parcialmente derivable con} \\ \text{respecto a la } j\text{-ésima variable} \\ \text{en todo punto. } (j \in I_N \backslash \{k\}) \\ \cdot) \ \frac{\partial f}{\partial x_j} : \Omega \to \mathbb{R} \text{ continua en } a. \end{array} \right\} \Longrightarrow f \text{ diferenciable en } a.$$

- sea Ω abierto de $\mathbb{R}^N$, $f: \Omega \to \mathbb{R}$, ELSA:

1) $f \in C^1(\Omega)$

2) f es parcialmente derivable en todo $x \in \Omega$ y $\forall k \in I_N$ y la función derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ es continua en Ω.

- Sea Ω abierto conexo de $\mathbb{R}^N$, $f: \Omega \to \mathbb{R}$ parc. derivable.

Si $\frac{\partial f}{\partial x_k}(x) = 0 \quad \begin{array}{l} \forall x \in \Omega \\ \forall k \in I_N \end{array} \Longrightarrow f$ cte.

→ Cálculo de límites

- límites iterados $x \to 0$, luego $y \to 0$.
- Límites direccionales
- Polares. (solo se aplica en (0,0))

→ Estudiar diferenciabilidad.

- Est. continuidad, en (a,b) $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = z$
  $f(a,b) = z$

Si son iguales
. simetría par
Si signos cambiados
. simetría impar

- Calcular las primeras derivadas

$$D_1 f(a,b) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0) - f(a,b)}{t-a}$$

$$D_2 f(a,b) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t) - f(a,b)}{t-a}.$$

No hace falta que sean iguales.

- Dif.

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{f(x,y) - f(a,b) - x D_1 f(a,b) - y D_2 f(a,b)}{\sqrt{x^2+y^2}} \overset{?}{=} 0$$

Si ∃ las derivadas parciales y son continuas $\Rightarrow$ Diferenciable.

→ Imagen de una función

- Compacidad (cerrado y acotado)
- Conexión (convexidad)

$\left.\begin{matrix} \text{Compacidad} \\ \text{Conexión} \end{matrix}\right\}$ $f(A)$ $\left.\begin{matrix} \text{compacto} \\ \text{conexo.} \end{matrix}\right\} \Rightarrow [\alpha, \beta]$

- interior / frontera buscando puntos críticos. con las der. parciales y las max y min imágenes.

→ Ptos críticos

- Derivadas parciales (cálculo de los ptos críticos)
- Matriz Hessiana.

$\left\{\begin{matrix} \text{def pos} \Rightarrow \text{min rel.} \\ \text{indef} \Rightarrow \text{pto silla.} \end{matrix}\right.$

TEMAS TEÓRICOS DE ANÁLISIS MATEMÁTICO I PARA EL EXAMEN FINAL, 2^0 GRADO DE INFORMÁTICA Y MATEMÁTICAS, CURSO 2018-19

Versión preliminar, día 23-11-2018

→ Pedir demostración

X 1. Complitud. Teorema del punto fijo de Banach.

X 2. Compacidad. Caracterización de la compacidad en $\mathbb{R}^N$. Teorema de conservación de la compacidad.

X 3. Espacios normados. Normas equivalentes. Teorema de Hausdorff.

X 4. Conexión. Caracterización y conservación mediante funciones continuas.

5. Diferenciabilidad, derivadas direccionales y derivadas parciales. Relaciones entre los conceptos anteriores.

6. Teorema del valor medio. Consecuencias.

X 7. Teorema de Taylor para campos escalares. Aplicaciones (extremos relativos).

X 8. Teoremas de la función inversa e implícita.

Taylor

$$p(x) = f(a) + \frac{f'(a)(x-a)}{1!} + \frac{f''(a)(x-a)^2}{2!}$$

1. Complitud. T^{ma} del p. fijo de Banac

Dado un espacio métrico E con distancia d. Se dice que d es una distancia completa, o también que E es un espacio métrico completo, cuando toda sucesión de Cauchy de puntos de E es convergente.

Sucesiones de Cauchy

Si E es un espacio métrico con distancia d, y $x_n \in E$ $\forall n \in \mathbb{N}$, se dice que $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy en E, cuando:

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists m \in \mathbb{N} : p, q \geq m \Rightarrow d(x_p, x_q) < \varepsilon$$

* En cualquier espacio métrico, toda sucesión convergente es una sucesión de Cauchy.

El teorema de complitud de $\mathbb{R}$, afirma que la distancia usual de $\mathbb{R}$ es completa, o que $\mathbb{R}$ con la distancia usual es un espacio métrico completo. La complitud de un e.m. no es una prop. topológic

Una norma $\|\cdot\|$ en un espacio vectorial X es una norma completa cuando es completa la distancia d asociada, definida por $d(x,y) = \|y - x\|$ $\forall x, y \in X$. Un espacio normado cuya norma es completa recibe el nombre de espacio de Banach.

Prop ~~Dos normas equivalentes en un mismo espacio vectorial dan lugar a las mismas sucesiones de Cauchy. Por tanto, toda norma equivalente a una norma completa es completa.~~

* ~~Si $\|\cdot\|$ y $|||\cdot|||$ son dos normas equivalentes en un espacio vectorial X, entonces $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach, si, y solo si, $(X, |||\cdot|||)$ lo es.~~

Tma ~~Todo espacio normado de dimensión finita es un espacio de Banach. Por tanto, el espacio euclídeo N-dimensional es un espacio de Hilbert. (espacio pre-hilbertiano cuya norma, la asociada a su producto escalar, es completa)~~

~~Prop. Sea E un espacio métrico y A un subespacio métrico de E. Se tiene:~~

~~(i) Si A es completo, entonces A es un subconj. cerrado de E.~~

~~(ii) Si E es completo y A es un subconjunto cerrado de E, entonces A es completo.~~

Teorema del punto fijo de Banach.

Tma Sea E un espacio métrico completo no vacío y $f: E \to E$ una aplicación contractiva. Entonces f tiene un único punto fijo, es decir, existe un único punto $x \in E$ tal que $f(x) = x$.

Dem Fijamos $x_0 \in E$ arbitrario y definimos por inducción una sucesión $\{x_n\}$ de puntos de E, tomando $x_1 = f(x_0)$ y $x_{n+1} = f(x_n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Probaremos que $\{x_n\}$ es convergente y su límite será el punto fijo que buscamos.

Si $\alpha < 1$ es la constante de Lipschitz de f y $\rho = d(x_0, x_1)$, comprobamos por inducción que $d(x_n, x_{n+1}) \leq \alpha^n \rho$ $\forall n \in \mathbb{N}$ (2)

En efecto, tenemos $d(x_1, x_2) = d(f(x_0), f(x_1)) \leq \alpha d(x_0, x_1) = \alpha\rho$ y, suponiendo que (2) se verifica para un $n \in \mathbb{N}$, deducimos que:

$$d(x_{n+1}, x_{n+2}) = d(f(x_n), f(x_{n+1})) \leq \alpha d(x_n, x_{n+1}) \leq \alpha \alpha^n \rho = \alpha^{n+1} \rho$$

Ahora, para cualesquiera $n, k \in \mathbb{N}$, tenemos:

$$d(x_n, x_{n+k}) \leq \sum_{j=0}^{k-1} d(x_{n+j}, x_{n+j+1}) \leq \rho \sum_{j=0}^{k-1} \alpha^{n+j} \leq \rho\alpha^n \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j = \frac{\rho\alpha^n}{1-\alpha} \quad (3)$$

De la desigualdad (3) deducimos que $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy. Dado $\varepsilon > 0$, como $\{\alpha^n\} \to 0$, $\exists m \in \mathbb{N}$ tal que, para $n \geq m$ se tiene $\rho\alpha^n < \varepsilon(1-\alpha)$. Entonces, para $p, q \geq m$, suponiendo que $p < q$, usamos (3) con $n = p$ y $k = q - p$: $d(x_p, x_q) = d(x_n, x_{n+k}) \leq \frac{\rho\alpha^n}{1-\alpha} < \varepsilon$

Como por hipótesis E es completo, tenemos $\{x_n\} \to x \in E$, luego $\{f(x_n)\} = \{x_{n+1}\} \to x$. Pero f continua, luego $\{f(x_n)\} \to f(x)$, y concluimos que $f(x) = x$. Finalmente si y es otro punto fijo, se tiene $d(x,y) = d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x,y)$, luego $(1-\alpha) d(x,y) \leq 0$. Como $\alpha > 1$, deducimos que $d(x,y) \leq 0$, luego $x = y$

2. Compacidad. Caracterización de la comp. en $\mathbb{R}^N$ Teorema de la conservación de la comp.

Se dice que un espacio métrico E es compacto cuando tod sucesión de puntos de E admite una sucesión parcial convergen Se trata de una propiedad topológica.

Si E es un espacio métrico y $A \subset E$, diremos que A es un subconjunt compacto de E cuando A sea un espacio métrico compacto. con la distancia inducida por la de E. Esto significa que toda sucesión de puntos de A admite una sucesión parcial convergente a un punto de A.

Tma (De Bolzano-Weierstrass)
Toda sucesión acotada de vectores de $\mathbb{R}^N$ admite una sucesió parcial convergente.

Prop Sea A un subconjunto compacto de un espacio métrico E. Entonces A está acotado y es un subconjunto cerrado de E.

Dem Suponiendo que A no está contenido en ninguna bola llegaremos a contradicción. Fijado un punto cualquiera $x \in E$, $\forall n \in \mathbb{N}$ $\exists x_n \in A$ tal que $d(x_n, x) > n$. Entonces $\{x_n\}$ admite una sucesión parcial $\{x_{\sigma(n)}\}$ que converge a un punto $a \in A$, es decir $\{d(x_{\sigma(n)}, a)\} \to 0$. Pero $d(x_{\sigma(n)}, x) \leq d(x_{\sigma(n)}, a) + d(a, x)$ $\forall n \in \mathbb{N}$, luego la sucesión $\{d(x_{\sigma(n)}, x)\}$ está mayorada, lo cual es una contradicción, ya que $d(x_{\sigma(n)}, x) \geq \sigma(n) \geq n$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Sea ahora $x \in \bar{A}$ y $\{a_n\}$ una sucesión de puntos de A con $\{a_n\} \to x$. Por ser A compacto, tenemos una sucesión parcial $\{a_{\sigma(n)}\}$ que converge a un $a \in A$, pero también $\{a_{\sigma(n)}\} \to x$, luego $x = a \in A$. Esto prueba que $\bar{A} \subset A$, es decir, A es cerrado.

Prop Un subconjunto de $\mathbb{R}^N$ es compacto, si y sólo si, es cerrado y acotado.

Dem Ya hemos visto que una implicación es válida, no sólo en $\mathbb{R}^N$, sino en cualquier espacio métrico. Para el recíproco, sea A un conjunto cerrado y acotado de $\mathbb{R}^N$. Toda sucesión $\{a_n\}$ de puntos de A es una sucesión acotada de vectores de $\mathbb{R}^N$, y el teorema de Bolzano-Weierstrass nos dice que $\{a_n\}$ admite una sucesión parcial $\{a_{\sigma(n)}\}$ que converge a un vector $x \in \mathbb{R}^N$. Como A es cerrado, tenemos $x \in A$, lo que prueba que toda sucesión de puntos de A admite una sucesión parcial que converge a un punto de A, es decir, A es compacto.

Tma Sean E y F dos espacios métricos y $f: E \to F$ una función continua. Si E es compacto, entonces $f(E)$ es compacto.

Dem Dada una sucesión $\{y_n\}$ de puntos de $f(E)$, deberemos probar que $\{y_n\}$ admite una sucesión parcial que converge a un punto de $f(E)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, existirá un punto $x_n \in E$ tal que $f(x_n) = y_n$. Como, por hipótesis, E es un espacio métrico compacto, la sucesión $\{x_n\}$ admitirá una sucesión parcial $\{x_{\sigma(n)}\}$ que converge a un punto $x \in E$. Por ser f continua deducimos que $\{f(x_{\sigma(n)})\} \to f(x)$, es decir, $\{y_{\sigma(n)}\} \to f(x) \in f(E)$.

3. Espacios normados. Normas equivalentes. T^{ma} de Hausdorff

Una norma en un espacio vectorial X es una aplicación $\|\cdot\|: X \to \mathbb{R}$ que a cada $x \in X$ hace corresponder un número real $\|x\|$, verificando

① Desigualdad triangular: $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in X$

② Homogeneidad por homotecias: $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\| \quad \forall x \in X, \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$

③ No degeneración: $x \in X \quad \|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$

Un espacio normado es un espacio vectorial X, en el que hemos fijado una norma $\|\cdot\|$. Para cada $x \in X$ se dice también que el número real $\|x\|$ es la norma del vector x.

Si $\|\cdot\|$ es una norma en un espacio vectorial X, usando la homogeneidad por homotecias, con $\lambda = 0$ obtenemos $\|0\| = 0$, mientra que tomando $\lambda = -1$, vemos que $\|-x\| = \|x\| \ \forall x \in X$, pero entonces la desigualdad triangular implica que:

$$0 = \|x + (-x)\| \leq \|x\| + \|-x\| = 2\|x\| \quad \forall x \in X$$

lo que nos dice que una norma nunca puede tomar valores negativ

Por otra parte, dados $x, y \in X$, tenemos $\|x\| - \|y\| = \|x - y + y\| - \|y\| \leq \|x - y\|$, pero podemos intercambiar x e y y concluir que $\big| \|x\| - \|y\| \big| \leq \|x - y\|$

Prop ~~En todo espacio normado X se tiene que:~~

~~(i) $\|x\| \geq 0 \quad \forall x \in X$, siendo $\|x\| = 0$ si, y sólo si, $x = 0$~~

~~(ii) $\big| \|x\| - \|y\| \big| \leq \|x \pm y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in X$~~

~~(iii) Si $n \in \mathbb{N}$, $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ y $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, entonces:~~

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \right\| \leq \sum_{k=1}^{n} \|\lambda_k x_k\| = \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k| \, \|x_k\|$$

Prop Dos normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ en un espacio vectorial X son equivalentes si, y sólo si, existen constantes $\lambda, \rho \in \mathbb{R}^+$ tales que:

$$\lambda \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \rho \|x\|_1 \quad \forall x \in X.$$

Teorema de Hausdorff

Todas las normas en $\mathbb{R}^N$ son equivalentes.

Dem Bastará ver que toda norma $\|\cdot\|$ en $\mathbb{R}^N$ es equivalente a la norma de la suma $\|\cdot\|_1$. Sea $\{e_k \mid k\in I_N\}$ la base usual de $\mathbb{R}^N$ y tomemos $p=\max\{\|e_k\| : k\in I_N\}$. Por ser $\|\cdot\|$ una norma, $\forall x\in\mathbb{R}^N$:

$$\|x\|=\left\|\sum_{k=1}^{N} x(k)e_k\right\|\leq\sum_{k=1}^{N}|x(k)|\,\|e_k\|\leq p\sum_{k=1}^{N}|x(k)|=p\|x\|_1$$

Hemos conseguido así de fácilmente, la desigualdad

$$\exists p\in\mathbb{R}^+ : \|x\|\leq p\|x\|_1 \quad \forall x\in\mathbb{R}^N \qquad (3)$$

Debemos ahora encontrar $\lambda\in\mathbb{R}^+$ que verifique $\lambda\|x\|_1\leq\|x\|$, también $\forall x\in\mathbb{R}^N$. En particular, si $\|x\|_1=1$ se deberá tener $\|x\|\geq\lambda$, lo que nos indica cómo encontrar λ.

Consideramos por tanto el conjunto $S=\{x\in\mathbb{R}^N : \|x\|_1=1\}$, que es cerrado y acotado, luego compacto, para la topología usual de $\mathbb{R}^N$. Además la función $\|\cdot\| : \mathbb{R}^N\to\mathbb{R}$ es continua, pues de hecho, usando (3), tenemos

$$\big|\,\|x\|-\|y\|\,\big|\leq\|x-y\|\leq p\|x-y\|_1 \quad \forall x,y\in\mathbb{R}^N$$

Deducimos que la función continua $\|\cdot\|$ tiene mínimo en el conjunto compacto S, lo que nos permite tomar $\lambda=\min\{\|x\|, x\in S$
Como $\lambda=\|x_0\|$ para algún $x_0\in S$, será $\lambda\in\mathbb{R}^+$. Además, para $x\in\mathbb{R}^N\setminus\{0\}$ tenemos:

$$\frac{x}{\|x\|_1}\in S, \text{ luego } \lambda\leq\left\|\frac{x}{\|x\|_1}\right\|=\frac{\|x\|}{\|x\|_1} \text{ es decir, } \lambda\|x\|_1\leq\|x\|$$

Esta desigualdad es clara para $x=0$, y hemos probado que

$$\exists\lambda\in\mathbb{R}^+ : \lambda\|x\|_1\leq\|x\| \quad \forall x\in\mathbb{R}^N \qquad (4)$$

En vista de (3) y (4) las normas $\|\cdot\|$ y $\|\cdot\|_1$ son equivalentes, como queríamos.

NOTA: Norma de la suma: $\|x\|_1=\sum_{k=1}^{N}|x_k|$

4. Conexión. Caracterización y conservación mediante f

Decimos que un espacio métrico E es conexo, cuando no se puede expresar como unión de dos subconjuntos abiertos, no vacíos y disjuntos. Conviene re-formular esta condición negativa como una implicación. Decir que dos subconjuntos abiertos de E, por ejemplo, U y V, no pueden cumplir las cuatro condiciones $U \cup V = E$, $U \cap V = \emptyset$, $U \neq \emptyset$ y $V \neq \emptyset$, equivale a decir que, si U y V cumplen algunas de estas condiciones, no pueden cumplir las restantes. Esto deja varias posibilidades:

$$U = U^\circ,\ V = V^\circ,\ U \cup V = E,\ U \cap V = \emptyset \Rightarrow U = \emptyset \text{ ó } V = \emptyset.$$

A su vez, esta implicación puede expresarse de manera que aparezca solo uno de los dos conjuntos, digamos U. En efecto, las condiciones $U \cup V = E$ y $U \cap V = \emptyset$ equivalen a que se tenga $V = E \setminus U$, y entonces, decir que V es abierto equivale a decir que U es cerrado. En cuanto a la conclusión, es claro que $V = \emptyset$ equivale a $U = E$.

Por tanto, la implicación anterior equivale a:

$$U \subset E,\ U^\circ = U = \overline{U} \Rightarrow U = \emptyset \text{ o } U = E$$

Así pues, vemos que un espacio métrico E es conexo si, y solo si, $\emptyset$ y E son los únicos subconjuntos de E que son a la vez abiertos y cerrados.

La conexión es una propiedad topológica.

Prop Para un espacio métrico E, las siguientes afirmaciones son equiv.:

(i) E es conexo.

(ii) La imagen de toda función continua de E en $\mathbb{R}$ es un interval

(iii) Toda función continua de E en $\{0, 1\}$ es constante.

Dem (i)⇒(ii) Hemos visto anteriormente que si E no verifica (ii), no puede ser conexo. Si $f: E \to \mathbb{R}$ es una función continua, para probar que $f(E)$ es un intervalo tomamos $\alpha, \beta \in f(E)$ con $\alpha < \beta$, y $a, b \in E$ tales que $f(a) = \alpha$ y $f(b) = \beta$. Fijado $\lambda \in]\alpha, \beta[$ debemos probar que $\lambda \in f(E)$. Para ello consideramos los conjuntos abiertos $U = f^{-1}(]-\infty, \lambda[)$ y $V = f^{-1}(]\lambda, +\infty[)$
Tenemos $U \neq \emptyset$ porque $a \in U$, y $V \neq \emptyset$ porque $b \in V$. También es obvio que $U \cap V = \emptyset$. Por ser E conexo, no podrá ser $E = U \cup V$, luego ha de exisistir $x \in E \setminus (U \cup V)$. Entonces $x \notin U$, luego $f(x) \geq \lambda$, y $x \notin V$, luego $f(x) \leq \lambda$. Por tanto $\lambda = f(x) \in f(E)$ como queríamos.

(ii)⇒(iii) Toda función continua $f: E \to \{0,1\}$ es una función continua de E en $\mathbb{R}$, luego tenemos que $f(E)$ es un intervalo contenido en $\{0,1\}$, lo que implica que f es cte.

(iii)⇒(i) Si U es un subconjunto abierto y cerrado de E, podemos considerar la función característica $\chi_U : E \to \mathbb{R}$ definida por

$$\chi_U(x) = 1 \ \forall x \in U \text{ y } \chi_U(x) = 0 \ \forall x \in E \setminus U$$

Puesto que U y $E \setminus U$ son abiertos y χ_U es constante en cada uno de los conjuntos, el carácter local de la continuidad nos dice que χ_U es continua. De (iii) deducimos que χ_U es constante, luego $U = E$ ó $U = \emptyset$.

Prop: Un subconjunto de $\mathbb{R}$ es conexo si, y solo si, es un intervalo.

Tma Sean E y F espacios métricos, y $f: E \to F$ una función continua. Si E es conexo, entonces $f(E)$ es un subc. conexo de F.

Dem Para toda función continua $g: f(E) \to \mathbb{R}$ tenemos que $g \circ f$ es continua, luego de ser E conexo deducimos que $(g \circ f)(E)$ es un intervalo. Así pues, la imagen de toda función continua de $f(E)$ en $\mathbb{R}$ es un intervalo luego $f(E)$ es conexo.
Alternativamente, si V es un subconjunto abierto y cerrado de $f(E)$, la continuidad de f nos dice que $U = f^{-1}(V)$ es un subc. abierto y cerrado de E. Como E es conexo, tenemos $U = \emptyset$ o $U = E$. Por ser $V \subset f(E)$, tenemos que $V = f(U)$, luego $V = \emptyset$ o $V = f(E)$

5. Diferenciabilidad, derivadas direccionales y d. parciales.

Def. Sean X e Y espacios normados, $A \subseteq X$, $a \in \mathring{A}$. $f: A \to Y$. Diremos que f es diferenciable en a si existe $T \in L(X, Y)$ tal que $\exists \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - T(x-a)}{\|x-a\|} =$

Prop Sean X e Y espacios normados, $A \subseteq X$, $a \in \mathring{A}$, $f: A \to Y$. Si f es diferenciabl en a, entonces $\exists f'(a;v)$, $\forall x \in X \setminus \{0\}$ y $T(v) = f'(a;v)$ $\forall v \in X \setminus \{0\}$ donde T es la aplicación lineal de X en Y que verifica $\exists \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - T(x-a)}{\|x-a\|} =$

Dem f diferenciable en $a \Rightarrow \exists T \in L(X, Y)$ tal que verifica $\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - T(x-a)}{\|x-a\|}$ (1

Sea $v \in X \setminus \{0\}$, $t \in \mathbb{R}$, $x = a + tv$

Por ser $a \in \mathring{A}$ $\exists \delta > 0 : t \in \mathbb{R}$, $|t| < \delta \Rightarrow a + tv \in A$

Por (1) $\lim_{t \to 0} \frac{f(a+tv) - f(a) - T(v)}{\|tv\|} = 0$; $\lim_{t \to 0} \frac{f(a+tv) - f(a) - tT(v)}{|t| \cancel{\|v\|}} = 0$;

$\lim_{t \to 0} \frac{f(a+tv) - f(a) - tT(v)}{|t|} = 0$; $\exists \lim_{t \to 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t} - T(v) = 0$

$\exists f'(a;v) = T(v)$

Prop T es única y se la llama diferencial de f en a $(T = Df(a))$

Si $X = \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$, $a \in \mathring{A}$, $f: A \to Y$ f derivable en $a \Leftrightarrow f$ diferenciable en a y $Df(a) = f'(a)t$ $\forall t \in \mathbb{R}$ $f'(a) \in Y$.

Def. Sea $A \subseteq \mathbb{R}^N$, $f: A \to \mathbb{R}$, $a \in \mathring{A}$. Diremos que f tiene derivada parcial i-ésima en a si $\exists f'(a; e_i)$ donde $\{e_1, \dots, e_N\}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^N$ $(1 \leq i \leq n)$

Notaremos por $D_i f(a)$ ó $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ a $f'(a; e_i)$.

El vector gradiente de f en a se nota $\nabla f(a)$ y es el elemento de $\mathbb{R}^N$ dado por: $\nabla f(a) = (D_1 f(a), D_2 f(a), \dots, D_N f(a))$

Prop Sea $A \subseteq \mathbb{R}$, $f: A \to \mathbb{R}$, $a \in \mathring{A}$. Si f es diferenciable en a, entonces f tiene gradiente en a y $Df(a)(x) = \langle \nabla f(a), x \rangle$, $\forall x \in \mathbb{R}^N$

ef. Sabemos que $Df(a)u = \lim_{t\to 0} \frac{\;) - f(a)}{t} \quad \forall u \in X \quad (1)$

Si $v = \lambda u$ con $\lambda \in \mathbb{R}^*$, los cambios de variable $t = \lambda s$ y $s = t/\lambda$ nos dicen

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(a+tu) - f(a)}{t} = y \in Y \iff \lim_{s\to 0} \frac{f(a+sv) - f(a)}{s} = \lambda y \qquad (2)$$

Esto permite normalizar cada vector $u \in X \setminus \{0\}$, es decir, suponer $\|u\| = 1$. Una dirección en el espacio normado X es un vector $u \in X$ con $\|u\| = 1$, y denotaremos por S al conjunto de todas las direcciones en X, es decir, $S = \{u \in X : \|u\| = 1\}$. Observamos que para cada $u \in S$, el límite que aparece a la derecha de (1), cuando existe, es el vector derivada de una función de variable real, con valores en el espacio normado Y. Más concretamente fijamos $r \in \mathbb{R}^+$ tal que $B(a,r) \subset \Omega$ y para cada $u \in S$, consideramos la función φ_u definida de la siguiente forma:

$$\varphi_u :]-r, r[\to Y \;,\; \varphi_u(t) = f(a+tu) \quad \forall t \in]-r, r[$$

Dado $u \in S$, decimos que f es derivable en la dirección u, en el punto a cuando la función φ_u es derivable en 0, en cuyo caso, al vector derivada $\varphi_u'(0)$ lo llamamos derivada direccional de f en a, según la dirección u, y lo denotamos por $f_u'(a)$. Así pues,

$$f_u'(a) = \varphi_u'(0) = \lim_{t\to 0} \frac{\varphi_u(t) - \varphi_u(0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(a+tu) - f(a)}{t}$$

$f_{-u}'(a) = -f_u'(a)$ (con $\lambda = -1$ en (2))

Decimos que f es direccionalmente derivable en el punto a cuando es derivable en todas las direcciones $u \in S$.

Prop Sean X, Y espacios normados, Ω un abierto de X y $f : \Omega \to Y$ una función. Si f es diferenciable en un punto $a \in \Omega$, entonces f es direccionalmente derivable en a con $f_u'(a) = Df(a)u \quad \forall u \in S$.

Def. Fijado $k \in I_n$, cuando f es derivable en la dirección e_k, en el punto a, decimos que f es parcialmente derivable con respecto a la k-ésima variable en el punto a. Entonces la derivada direccional de f en a en la dirección e_k se llama derivada parcial de f con respecto a la k-ésima variable en el punto a, y se denota por $\frac{\partial f}{\partial x_k}(a)$, es decir $\frac{\partial f}{\partial x_k}(a) = f_{e_k}'(a) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a+e_k) - f(a)}{t}$. Si ocurre $\forall k \in I_n$, decimos que f es parcialmente derivable en a.

Prop Si f es diferenciable en a, entonces f es parcialmente derivable en a con $\frac{\partial f}{\partial x_k}(a) = Df(a)e_k \quad \forall k \in I_N$.

6. Teorema del Valor Medio Consecuencias.

Tma (del valor medio escalar)

Sea Ω un abierto de un espacio normado X, $a,b\in\Omega$ tales que $[a,b]\subset\Omega$ y $f:\Omega\to\mathbb{R}$ una función continua en $[a,b]$ y diferenciable en $]a,b[$. Entonces existe $c\in]a,b[$ tal que:

$$f(b)-f(a)=Df(c)(b-a) \qquad (1)$$

Como consecuencia, si $M\in\mathbb{R}_0^+$ verifica que $\|Df(x)\|\leq M$ para todo $x\in]a,b[$ se tendrá:

$$|f(b)-f(a)|\leq M\|b-a\| \qquad (2)$$

Dem Definimos una función $\varphi:[0,1]\to\mathbb{R}$ escribiendo $\varphi(t)=f(a+t(b-a)$ para todo $t\in[0,1]$. Entonces φ es continua y, por la regla de la cadena, es derivable en $]0,1[$ con derivada dada por

$$\varphi'(t)=Df(a+t(b-a))(b-a) \quad \forall t\in]0,1[.$$

El teorema del valor medio para funciones reales de variable real nos da un $t_0\in]0,1[$ tal que

$$f(b)-f(a)=\varphi(1)-\varphi(0)=\varphi'(t_0)=Df(a+t_0(b-a))(b-a)$$

Tomando $c=a+t_0(b-a)\in]a,b[$, obtenemos (1). Para deducir (2) basta usar la definición de la norma en $L(X,\mathbb{R})$

$$|f(b)-f(a)|=|Df(c)(b-a)|\leq\|Df(c)\|\,\|b-a\|\leq M\|b-a\|$$

Cor Sean X e Y espacios normados, Ω un abierto convexo de X y $f:\Omega\to Y$ una función diferenciable. Supongamos que $\exists M\in\mathbb{R}_0^+$ verificando que $\|Df(x)\|\leq M$ para todo $x\in\Omega$. Entonces f es lipschitziana con constante M, es decir:

$$\|f(b)-f(a)\|\leq M\|b-a\| \qquad \forall a,b\in\Omega.$$

Cor Sean X e Y espacios normados, Ω un subconjunto abierto y conexo de X y $f: \Omega \to Y$ una función diferenciable tal que $Df(x) = 0$ para todo $x \in \Omega$. Entonces f es constante.

Dem ~~Fijado $a \in \Omega$, consideramos el conjunto $A = \{x \in \Omega : f(x) = f(a)\}$ y se trata de probar $A = \Omega$. Por ser f continua, A es un subconjunto cerrado de Ω, pero vamos a comprobar que también es abierto. Dado $x \in A$, como Ω es abierto, $\exists r \in \mathbb{R}^+$ tal que $B(x,r) \subset \Omega$. Podemos entonces aplicar el corolario anterior, a la restricción de f al abierto convexo $B(x,r)$, cuya función diferencial es idénticamente nula, obteniendo que f es constante en $B(x,r)$. Por tanto tenemos que $f(y) = f(x) = f(a)$ $\forall y \in B(x,r)$, es decir, $B(x,r) \subset A$. Como $x \in A$ era arbitrario, hemos probado que A es abierto. Puesto que Ω es conexo y $A \neq \emptyset$, porque $a \in A$, concluimos que $A = \Omega$ como se quería.~~

7. Teorema de Taylor para campos escalares. Aplicaciones (e. relativos)

Notación:

$f: A \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, $A = \mathring{A}$, $a \in A$

$d^1(f,a,x) = <\nabla f(a), x> = \sum_{i=1}^{N} D_i f(a) x_i$

$d^2(f,a,x) = (\sum_{i=1}^{N} D_i f)^2 (a,x) = \sum_{i,j=1}^{N} D_{ij} f(a) x_i x_j$

$d^3(f,a,x) = (\sum_{i=1}^{N} D_i f)^3 (a,x) = \sum_{i_1,i_2,i_3 \in \{1,\dots,N\}} D_{i_1 i_2 i_3} f(a) x_{i_1} x_{i_2} x_{i_3}$

$d^k(f,a,x) = (\sum_{i=1}^{N} D_i f)^k (a,x)$.

Tma (Taylor - Fómula infinitesimal del resto)

Sea $A = \mathring{A} \subseteq \mathbb{R}^N$, $f: A \to \mathbb{R}$, $f \in C^{k+1}(A)$. $a \in A$ y $x \in \mathbb{R}^N$: $[a, x+a] \subseteq A$

entonces $\exists c \in [a, a+x]$ tal que

$$f(a+x) = f(a) + \sum_{i=1}^{k} \frac{d^i(f,a,x)}{i!} + \frac{d^{k+1}(f,c,k)}{(k+1)!}$$

Dem $[0,1] \xrightarrow{\gamma} [a, a+x] \subseteq A \xrightarrow{f} \mathbb{R}$

$\gamma(t) = a + tx$, $(t \in [0,1])$, $h(t) = f(\gamma(t)) = f(a+tx)$

Sabemos que $[a, a+x] \subseteq A$ y $\mathring{A} = A \Rightarrow \exists J$ intervalo abierto de $\mathbb{R}$ tal que $J \supseteq [0,1]$ y se verifica que $a+tx \in A$, $\forall t \in J$.

Extendemos h a J, $h(t) = f(a+tx)$ $(t \in J)$ $\gamma(t) = a+tx$ $(t \in J)$ $h(0) = f(a)$

¿h derivable? γ diferenciable por ser afín y por hipótesis $f \in C^{k+1}(A)$
↳ f diferenciable.

Luego la composición (h) es diferenciable en J y

$$h'(t) = Dh(t)(1) = D(f \circ \gamma)(t)(1) = Df(\gamma(t))(D\gamma(t)(1)) =$$
$$= Df(a+tx)(\gamma'(t)) = \gamma'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0} =$$
$$= \lim_{t \to 0} \frac{(a+tx) - (a+t_0 x)}{t - t_0} = \lim_{t \to 0} x = x \quad \forall t_0 \in J.$$

Luego $h'(t) = Df(a+tx)(x) = <\nabla f(a+tx), x> = \sum_{i=1}^{N} D_i f(a+tx) x_i = d_i(f, a+tx,$

$f \in C^2(A) \Rightarrow D_i f \in C^1(A) \Rightarrow t \mapsto D_i f(a+tx)$ es derivable en J.

Derivamos para cada $1 \leq i \leq n$ la función $t \mapsto D_i f(a+tx) \Rightarrow$ su derivada en t vale : $\sum_{j=1}^{N} D_j(D_i f)(a+tx)\, x_j = \sum_{j=1}^{N} D_{ij} f(a+tx)\, x_j$.

luego h' es derivable en J y $h''(t) = \sum_{i=1}^{N} \left(\sum_{j=1}^{N} D_{ij} f(a+tx)\, x_j \right) x_i = d^2(f, a+tx, x)$

Repitiendo el mismo argomento, se prueba que si $1<k+1$,

$h^{i)}(t) = d^i(f, a+tx, x) \Rightarrow h^{i)}$ es derivable en J y

$h^{i+1)}(t) = d^{i+1}(f, a+tx, x)$. $\forall t \in J$ y $h(0) = f(a) \Rightarrow$ luego $h \in C^{k+1}(J)$

Polinomio de Taylor de orden k de h en 0 evaluado en 1.

$$h(1) = h(0) + \sum_{i=1}^{K} \frac{h^{i)}(0)}{i!} + \frac{h^{k+1)}(t_0)}{(k+1)!} \quad \text{donde } t_0 \in]0,1[$$

Sustituimos $h(0)$, $h(1)$ y $h^{i)}(0)$ $1 \leq i \leq k$, $h^{k+1}(t_0)$ $\quad h(1) = f(a+k)$

$$f(a+x) = f(a) + \sum_{i=1}^{k} \frac{d^i(f,a,x)}{i!} + \frac{d^{k+1}(f, a+t_0x, x)}{(k+1)!}$$

Como $t_0 \in]0,1[\Rightarrow c = a+t_0x \in [a, a+x]$

$$f(a+x) = f(a) + \sum_{i=1}^{k} \frac{d^i(f,a,x)}{i!} + \frac{d^{k+1}(f,c,x)}{(k+1)!}$$

<u>Tma</u> (Taylor-Young)

Sea $A = \mathring{A} \subseteq \mathbb{R}^N$, $f : A \to \mathbb{R}$, $f \in C^k(A)$, $a \in A$, existe $r>0$: $B(a,r) \subseteq A$ y $\varphi : B(0,r) \to \mathbb{R}$ tal que $\lim_{x \to 0} \varphi(x) = 0$ y:

$$f(a+x) = f(a) + \sum_{i=1}^{k} \frac{d^i(f,a,x)}{i!} + \|x\|^k \varphi(x)$$

$$\left(\Leftrightarrow \lim_{x \to 0} \frac{f(a+x) - f(a) - \sum_{i=1}^{k} \frac{d^i(f,a,x)}{i!}}{\|x\|^k} = 0 \right)$$

<u>Def</u> Diremos que f tiene un máximo relativo en a si existe $B(a,r) \subseteq A$ tal que $f(x) \leq f(a)$, $\forall a \in B(a,r)$. Análoga mínimo relativo ($f(x) \geq f(a)$)

f tiene un extremo relativo en a si $a \in \mathring{A}$ y f tiene un mínimo relativo en a o un máximo relativo en a.

Teorema de la función implícita y función inversa

Teorema f. implícita.

Sean $G \subset \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M$ abierto, $f : G \to \mathbb{R}^M$ un campo vectorial de clase C^1, esto es, sus campos escalares componentes tienen gradiente continuo.

El teorema ~~nos~~ dice que si:

- $\exists\, (a,b) \in G : f(a,b) = 0$
- $$\det \begin{pmatrix} D_{N+1} f_1(a,b) & \cdots & D_{N+M} f_1(a,b) \\ \vdots & & \vdots \\ D_{N+1} f_M(a,b) & \cdots & D_{N+M} f_M(a,b) \end{pmatrix} \neq 0$$

Entonces sabemos:

- $\exists\, \Omega \in \mathcal{U}^{(a,b)} : (a,b) \in \Omega \subset G$
- $\exists\, U \in \mathcal{U}^a$
- $\exists\, \varphi : U \to \mathbb{R}^M$ de clase C^1:

$$\{(x,y) \in \Omega : f(x,y) = 0\} = \{(x, \varphi(x)) : x \in U\}$$

Esto es, ponemos los n+m últimos términos en fun
de los n primer

Además, $\forall x \in U$ se verifica:

$$\det \begin{pmatrix} D_{N+1} f_1(x,\varphi(x)) & \cdots & D_{N+M} f_1(x,\varphi(x)) \\ \vdots & & \vdots \\ D_{N+1} f_M(x,\varphi(x)) & \cdots & D_{N+M} f_M(x,\varphi(x)) \end{pmatrix} \neq 0.$$

y que:

$$J_\varphi(x) = -\begin{pmatrix} D_{N+1} f_1(x,y) & \cdots & D_{N+M} f_1(x,y) \\ \vdots & & \vdots \\ D_{N+1} f_M(x,y) & \cdots & D_{N+M} f_M(x,y) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} D_1 f_1(x,y) & \cdots & D_N f_1(x,y) \\ \vdots & & \vdots \\ D_1 f_M(x,y) & \cdots & D_N f_M(x,y) \end{pmatrix}$$

$y = \varphi(x)$

Si $\forall K \in \mathbb{N} : K > 1$, f es K veces derivable, en (a,b), entonces φ es K veces derivable en a.

Teorema de la función inversa

Sean $I \subset \mathbb{R}$ un abierto, $f: I \to \mathbb{R}$ derivable. con derivada distinta de cero.

Entonces f es inyectiva (estrictamente monótona).
y su inversa $f^{-1}: f(I) \longrightarrow \mathbb{R}$ derivable:

$$(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)} \qquad \forall x \in I$$

Porque la imagen por una función continua de un intervalo es un intervalo abierto, $f(I)$ es un abierto de $\mathbb{R}$ y la función biyectiva es un difeomorfismo, esto es, un homeomorfismo tal que él y su inversa son derivables.

ANÁLISIS MATEMÁTICO I

Doble grado en Informática y Matemáticas. **2^0 Curso.**

Examen Final (enero 2019)

1) Compacidad. Caracterización de la compacidad en $\mathbb{R}^N$. Teorema de conservación de la compacidad. (2 ptos.)

2) Justifica si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas: (2 ptos.)

F a) Toda función continua entre espacios métricos verifica que la imagen inversa de un conjunto conexo es un conjunto conexo.

b) La restricción a un conjunto acotado de un campo escalar C^1 definido en $\mathbb{R}^3$ es una función lipschitziana.

V c) El polinomio $p(x, y) = x^2 + 8xy + 3$ se puede escribir en las variables $x - 1$, $y - 2$ y admite la expresión $20 + 18(x - 1) + 8(y - 2) + (x - 1)^2 + 8(x - 1)(y - 2)$.

F d) Todo campo vectorial de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$ de clase uno y tal que $\det(J_f(x)) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ es inyectivo.

3) Estudia si el campo escalar definido por (2 ptos.)

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} \sin x & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

es diferenciable en $(0, 0)$. Calcula el gradiente de f en todos los puntos en los que exista.

4) Prueba que el sistema de ecuaciones (2 ptos.)

$$\begin{cases} xu - yv + e^u \cos v = 1 \\ xv + yu + e^u \sin v = 0 \end{cases}$$

define a u y v como funciones implícitas de x e y entorno al punto $(0, 0)$ si imponemos que $u(0, 0) = 0 = v(0, 0)$. Calcula las derivadas parciales de primer orden de u y v en $(0, 0)$. ¿Es el campo vectorial $(x, y) \mapsto (u(x, y), v(x, y))$ un difeomorfismo en algún entorno de $(0, 0)$?

5) Sea A el subconjunto de $\mathbb{R}^2$ dado por (2 ptos.)

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \geq 0, x + y \leq 3\}.$$

Calcula la imagen de A mediante el campo escalar f dado por

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - xy - x - y \qquad ((x, y) \in A).$$

En Granada, a 25 de enero de 2019