MODELOS MAT.

- Progresión geométricas: $x_{n+1} = \alpha x_n$, $n \geq 0$, $\alpha \in \mathbb{C}$
- Progresión aritméticas: $x_{n+1} = x_n + \beta$, $n \geq 0$, $\beta \in \mathbb{C}$
- Suc. Fibonacci: $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$, $n \geq 0$, $f_0 = 1$, $f_1 = 1$.

Ec en diferencias.

Ec en la que intervienen un nº fijo de términos consecutivos de una sucesión.

$$F(x_{n+k}, x_{n+k-1}, \ldots, x_{n+1}, x_n, n) = 0$$

F: función varias variables.

$\{x_n\}_{n\geq 0}$ sucesión

$k \geq 1$ siendo k el orden de la ec.

Resolverla consiste en encontrar la expresión general de todas las sucesiones que satisfagan la ecuación.

Sea la siguiente ec en diferencias:

$$a_k(n)\, x_{n+k} + \cdots + a_1(n)\, x_{n+1} + a_0(n)\, x_n = b(n)$$

- Si $a_k(n) \neq 0$ se dice de orden k.
- Si $b(n) = 0$ se dice ec. homogénea.

Ec en diferencias de primer orden, lineales, y con coeficientes ctes.

La forma de estas ec es: $x_{n+1} = \alpha x_n + \beta$ $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$

•) Si $\alpha = 1 \Longrightarrow$ prog. aritmética.

$x_{n+1} = x_n + \beta$; Sol: $x_n = x_0 + n\beta$

•) Si $\beta = 0 \Longrightarrow$ prog. geométrica

$x_{n+1} = \alpha x_n$; Sol: $x_n = x_0 \alpha^n$

- Si $\alpha \neq 1 \implies x_{n+1} = \alpha x_n + \beta$ tiene una sol. cte
$$x_* = \frac{\beta}{1-\alpha}$$

- Si $\alpha \neq 1$

$\{x_n\}_{n\geq 0}$ es sol de $x_{n+1} = \alpha x_n + \beta$ $\iff$ $\{z_n\}_{n\geq 0} : z_n = x_n - x_*$ es solución de $z_{n+1} = \alpha z_n$ $\rightarrow$ Ec homogenea asociada

En otras palabras:

$$x_{n+1} = \alpha x_n + \beta \quad (1)$$ Ec en dif completa

$$z_{n+1} = \alpha z_n \quad (2)$$ Ec homogenea asociada

Hay ec en dif que No admiten sol. ctes

$(x_* = \alpha x_* + \beta)$

$\left.\begin{array}{l}\{x_n\}_{n\geq 0}\\ \{z_n\}_{n\geq 0}\end{array}\right\}$ Sucesiones

$$\{z_n\} \text{ sol } (2) \iff \{x_n\} = \{z_n + x_*\} \text{ es sol } (1)$$

Dem

$\Rightarrow)$ Por hipótesis, $\{z_n\}$ sol de (2) y además $\{x_*\}$ es sol cte de (1). Sustituimos en (1):

por ser x_* sol cte de (1)

$$x_{n+1} = z_{n+1} + x_* = \alpha z_n + (\alpha x_* + \beta) = \alpha(z_n + x_*) + \beta$$
$$= \alpha x_n + \beta$$

$\Leftarrow)$ $\left.\begin{array}{l}\{x_*\} \text{ sol cte } (1)\\ \{x_n\} \text{ sol } (1)\end{array}\right\} \implies$ ¿$\{z_n\} = \{x_n - x_*\}$ sol (2)?

Sustituimos en (2):

$$z_{n+1} = x_{n+1} - x_* = (\alpha x_n + \beta) - (\alpha x_* + \beta) = \alpha(x_n - x_*)$$
$$= \alpha z_n$$

- $\alpha \neq 1$, $x_{n+1} = \alpha x_n + \beta$, tiene tantas soluciones como valores posibles tenga la condición inicial.

$$x_n = x_* + (x_0 - x_*)\alpha^n \qquad n = 0, 1, \ldots$$

Dem

$$x_{n+1} = \alpha x_n + \beta \quad (1)$$
$$z_{n+1} = \alpha z_n \quad (2)$$

Sabemos que $x_n = z_n + x_*$.

$z_n = C_1 \alpha^n$ ya que es la sol de la homogenea asociada.

Así, $x_n = C_1\alpha^n + x_*$ y con el valor x_0 calculamos C_1

$$x_0 = C_1 \alpha^0 + x_* \Rightarrow C_1 = x_0 - x_*$$

Finalmente,

$$x_n = (x_0 - x_*)\alpha^n + x_*$$

$$\boxed{x_n = \left(x_0 - \frac{\beta}{1-\alpha}\right)\alpha^n + \frac{\beta}{1-\alpha}}$$

Repaso de Nº complejos:

$\alpha = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$

$\exists!\, r, \theta \in \mathbb{R} \mid 0 \le r,\ 0 \le \theta < 2\pi$:

$\alpha = a + bi = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$ ↳ expresión en polares

$r = \sqrt{a^2+b^2}$ (módulo)

$\theta = \operatorname{arctg}\frac{b}{a}$, $a \neq 0$ (argumento)

- Fórmula de Demoivre

$$\alpha^n = r^n(\cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta))$$

La dem se realiza por inducción, está en los apuntes

- Comportamiento asintótico de $\{\alpha^n\}$

∘) $|\alpha| < 1 \Rightarrow \{\alpha^n\} \to 0$ $\quad \alpha^n = \underset{\downarrow 0}{r^n}(\cos n\theta + \operatorname{sen} n\theta)$ acotado

∘) $|\alpha| > 1 \Rightarrow \{|\alpha|^n\} \to +\infty$ $\quad \alpha^n = \underset{\downarrow +\infty}{r^n}(\cos n\theta + \operatorname{sen} n\theta)$

∘) $|\alpha| = 1 \Rightarrow$ No converge ($\alpha^n \in S^1$)

Teorema (Comportamiento asintóticos de soluciones)

Las soluciones de $x_{n+1} = \alpha x_n + \beta$ verifican:

- $|\alpha| < 1 \Rightarrow \alpha^n \to 0 \Rightarrow x_n \to x_*$
- $|\alpha| > 1 \Rightarrow |\alpha|^n \to +\infty \Rightarrow \{|x_n|\}$ diverge.

$$|x_n| = |C_1\alpha^n + x_*| \geq |C_1\alpha^n| - |x_*| = |C_1|\underbrace{|\alpha|^n}_{+\infty} - |x_*|$$

- $|\alpha| = 1,\ \alpha \neq 1 \Rightarrow \{x_n\}$ oscila a x_*, esto es, x_n está en la circunferencia de radio $|x_0 - x_*|$ y centro x_*.

$$|x_n - x_*| = |C_1\alpha^n| = |C_1|\underbrace{|\alpha|^n}_{1} \Rightarrow |x_n - x_*| = |C_1|$$

centro: x_*
radio: $|C_1|$

Modelo de la telaraña

$$\boxed{\begin{array}{ll} O(p) = a + bp, & b>0 \\ D(p) = c - dp, & b<0 \end{array}}$$

$$p_{n+1} = \underbrace{\left(\frac{-b}{d}\right)}_{\alpha} p_n + \underbrace{\frac{c-a}{d}}_{\beta}$$

Calculemos la sol.

① Sol cte $\quad \frac{-b}{d} \neq 1$

$$p_* = \frac{-b}{d} p_* + \frac{c-a}{d} \Rightarrow p_* = \frac{c-a}{b+d}$$

② Sol homogenea asociada

$$z_{n+1} = \left(\frac{-b}{d}\right) z_n, \quad z_n = C_1\left(\frac{-b}{d}\right)^n$$

③ Sol. general

$$p_n = p_* + z_n = \frac{c-a}{b+d} + C_1\left(\frac{-b}{d}\right)^n = \frac{c-a}{b+d} + (-1)^n\left(\frac{b}{d}\right)^n C_1$$

Vemos ahora el comportamiento asintótico:

① $b < d \Rightarrow \left(\frac{b}{d}\right) < 1 \Rightarrow \left(\frac{b}{d}\right)^n \to 0$, así: $p_n \to p_* = \frac{c-a}{b+d}$

② $b > d \Rightarrow p_n$ oscila, $|p_n| \to +\infty \quad p_n \ominus \Rightarrow$ pierde sentido

③ $b = d \Rightarrow$ sucesión oscilante

La ecuación de Malthus

Modelita la evolución de una población de una determinada especie en un hábitat.

$$p_{n+1} = p_n + (\text{nacimientos}) - (\text{muertes}) \quad ; \quad p_{n+1} = p_n + p_n \alpha_N + p_n \alpha_M$$

$$p_{n+1} = p_n (1 + \alpha_N + \alpha_M) \qquad \begin{array}{l} 0 \leq \alpha_N \\ 0 \leq \alpha_M \leq 1 \end{array}$$

Ec en dif lineal, orden 1, homogenea.

Como es prog. geométrica,

Sol: $\boxed{P_n = C_1 (1 + \alpha_n + \alpha_M)^n}$ $\quad n \geq 0$

Estudio asintótico: (Nunca puede ser negativo)

1. $0 \leq 1 + \alpha_N + \alpha_M < 1 \iff \alpha_N < \alpha_M \Rightarrow$ EXTINCIÓN
2. $1 + \alpha_N + \alpha_M > 1 \iff \alpha_N > \alpha_M \Longrightarrow$ CRECIMIENTO
3. $\alpha_N = \alpha_M \Rightarrow P_{n+1} = P_n, \; n \geq 0 \Longrightarrow$ POBLACIÓN CTE

Modelo de Verhulst

Según la hipótesis de Verhulst, $\qquad M = \max$ nº personas del hábitat

$$\alpha = \frac{P_{n+1} - P_n}{P_n} \text{ es proporcional a } M - P_n$$

$$\swarrow \; \frac{P_{n+1} - P_n}{P_n} = k(M - P_n) \quad (1)$$

$$P_{n+1} = (1 + KM) P_n - K P_n^2$$

1. Si $P_n < M \Rightarrow P_{n+1} - P_n > 0 \iff P_{n+1} > P_n$ La población crece
2. Si $P_n > M \Rightarrow P_{n+1} - P_n < 0 \iff P_{n+1} < P_n$ La población decrece
3. Si $P_n = M \Rightarrow P_{n+1} = P_n$ La población se estabiliza

$$P_{n+1} = K(M - P_n) P_n + P_n = KMP_n - KP_n^2 + P_n = P_n(KM + 1) - KP_n^2,$$

$$P_{n+1} = (1 + KM) P_n \left(1 - \frac{K}{1 + KM} P_n\right), \qquad \boxed{\begin{array}{l} \mu = 1 + KM \\ x_n = \dfrac{K}{1 + KM} P_n \end{array}}$$

$\boxed{x_{n+1} = \mu x_n (1 - x_n) \qquad \mu > 0}$ ecuación logística discreta.

Sistemas Dinámicos Discretos

Es la descripción de un fenómeno evolutivo en términos de una función con imagen ⊂ dominio.

Def Sea $I \subset \mathbb{R}$ intervalo, $f: I \to I$ continua, entonces al par $\{I, f\}$ se denomina SDD, de primer orden, autónomo y en forma normal. f suele ser la función evolución.

Sea $x_0 \in I$, definimos $x_{n+1} = f(x_n)$ $n \geq 0$.

es una ec en dif de primer orden, autonomía

↳ ningún término depende del tiempo

y en forma normal.

↳ cuando x_{n+1} está despejada

Condiciones: f debe ser continua

I debe tomarse tq $f(I) \subset I$.

Def Dado SDD, $x_0 \in I$,

$$\{x_0, \underset{x_1}{f(x_0)}, \underset{x_2}{f^2(x_0)}, \dots, \underset{x_n}{f^n(x_0)}, \dots\}$$

Notación
$f^2 = f \circ f$
$f^3 = f \circ f \circ f$
$x_n = (f \circ \overset{n}{\dots} \circ f)(x_0)$

Se denomina órbita o trayectoria del SDD asociada a x_0, denotada $\gamma(I, f, x_0)$

Prop.

Sea $\{I, f\}$ SDD, $x_0 \in I$, $\gamma(I, f, x_0)$ su órbita $\{x_0, f(x_0), \dots, f^n(x_0) \dots$

$x_{n+1} = f(x_n)$.

Si $\exists \lim_{x \to \infty} x_n = L \implies f(L) = L$

Dem

Sup que $\lim_{n \to \infty} x_n = L \in \mathbb{R}$

$$L = \lim_{n \to \infty} x_n = \lim_{n \to \infty} x_{n+1} = \lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(\lim_{n \to \infty} x_n) = f(L)$$

Así, $L = f(L)$, por lo que L es un punto fijo de $f(x)$ o equivalentemente, una sol de la ec $x = f(x)$ o un punto de corte de $f(x)$ y la bisectriz ✗.

$x_0 = 1$ define una órbita eventualmente estacionaria

$f(x_0) = x_1 = f(1) = \mu(1-1) = 0$

$f(x_1) = x_2 = f(0) = 0 = \alpha_0$

$\vdots$

$\gamma = ([0,1], f, 1) = \{1, 0, \dots, 0\}$

Prop

Todo SDD $\{I, f\}$ con I cerrado y acotado posee un pto eq.

Dem

$\{[a,b], f\}$ f continua

$g(x) = f(x) - x$

$g(a) = f(a) - a \geq 0$

$g(b) = f(b) - b \leq 0$

Como $\left.\begin{array}{l} g(a) > 0 \\ g(b) < 0 \end{array}\right\} \overset{T.B}{\Longrightarrow} \exists c \in (a,b) : g(c) = 0$

$\iff f(c) = c$

$f([a,b]) \subset [a,b]$

$\left.\begin{array}{l} g(a) = 0 \iff f(a) = a \\ g(b) = 0 \iff f(b) = b \end{array}\right\} \Rightarrow$ pto eq.

Prop.

Sea SDD $\{I, f\}$ I cerrado, f contractiva, esto es, $\exists\, 0 < K < 1$:

$|f(x) - f(y)| \leq K |x - y| \quad \forall x, y \in I$

Entonces $\exists!$ punto equilibrio de f.

Prop

Sea SDD $\{I, f\}$ I cerrado acotado, $f \in C^1(I)$: $|f'(x)| < 1 \quad \forall x \in I$.

Entonces $\exists!$ pto eq. de f.

Dem

$x, y \in I$, sea f continua en $[x,y]$, por el TVM $\exists\, \xi \in (x,y)$:

$|f(x) - f(y)| = f'(\xi)|x - y| \leq M|x - y| \Rightarrow f$ contractiva

$\overset{\text{Teor. 2}}{\Longrightarrow} \exists!$ pto equilibrio. Hemos podido aplicar el teorema 2 ya que $|f'(x)| < 1$, ya que $M < 1$

Ptos equilibrio

Sea $\alpha \in \mathbb{R}$, se dice pto eq del SDD $\{I, f\}$ si $f(\alpha) = \alpha \in I$

Se denomina pto fijo de $f(x)$ o sol cte de la ec en dif.

$x_{n+1} = f(x_n)$

Si tomamos como valor inicial un pto equilibrio del SDD $x_0 = \alpha$ $\Longrightarrow$ órbita resultante es cte y se denomina órbita estacionaria: $\gamma(I, f, \alpha) = \{\alpha, \alpha, \dots \alpha\}$

Estudio de la ec. logística (discreta) desde el pto de vista de los SDD.

$x_{n+1} = \mu\, x_n (1 - x_n)$ $\quad n \geq 0$, $\mu > 0$

$f(x) = \mu\, x\,(1 - x)$ $\quad$ Continua por ser polinomio

Podríamos tomar $I = \mathbb{R}$ pero con la ec. logística se suele tomar el intervalo $[0,1]$, ya que es deseable que $x_n \geq 0$, $n \geq 0$

¿$f([0,1]) \subset [0,1]$? Busquemos el μ que lo verifique:

Estudiamos el máximo de la función en $[0,1]$

El máx está en $x = \frac{1}{2}$, $f(1/2) = \frac{\mu}{4} \leq 1$

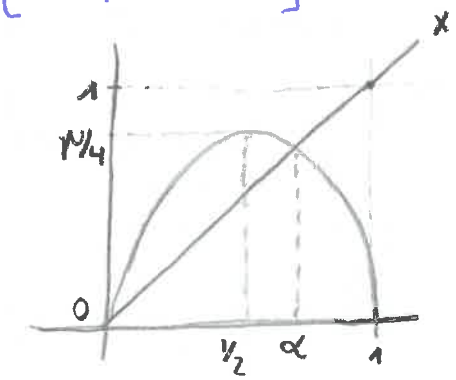
Así, para que $f([0,1]) \subset [0,1]$, tomamos $0 < \mu \leq 4$

De esta forma, el SDD que nos queda es: $\{[0,1], f\}$ SDD

Buscamos las sol de la ec. $f(x) = x$

$x = \mu x(1-x)$; $\quad x - \mu x(1-x) = 0 \iff x[1 - \mu(1-x)] = 0$

$$x[1 - \mu(1-x)] = 0 \quad \begin{cases} \alpha_0 = 0 \\ \alpha_1 = \frac{\mu - 1}{\mu}, \quad \mu \neq 0 \end{cases}$$



Necesitamos $\alpha_0, \alpha_1 \in [0,1]$

$$0 \leq \frac{\mu - 1}{\mu} \leq 1 \Longrightarrow 0 \leq \mu - 1 \leq \mu$$
$$1 \leq \mu$$

Prop.

Sea el SDD $\{I, f\}$ I cerrada, $f \in C^1(I)$

Sup $\exists K: 0 < K < 1$ y $|f'(x)| \leq K < 1$ $\forall x \in I$

Entonces $\exists!$ pto equilibrio de f.

Def Sea α un pto del SDD $\{I, f\}$

•) α es estable si : $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$:

$$\left.\begin{array}{l} |x_0 - \alpha| < \delta \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad x_n = f^n(x_0) \end{array}\right\} \Rightarrow |x_n - \alpha| < \varepsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

•) α es asint. estable si es estable y $\exists \delta > 0$:

$$|x_0 - \alpha| < \delta \Rightarrow \lim_{n \to \infty} x_n = \alpha$$ podría ser otro pto eq.

•) α se dice inestable si No es estable, esto es,

$\exists \varepsilon_0 > 0$; $\forall \delta > 0$ podemos encontrar $x_0 \in I$, $n_0 \in \mathbb{N}$:

$|x_0 - \alpha| < \delta$ y $|x_{n_0} - \alpha| > \varepsilon_0$

Recordemos $x_n = \underbrace{x_*}_{\substack{\text{sol cte} \\ \| \\ \text{pto eq}}} + \underbrace{z_n}_{\text{sol. homogenea}}$

Def Un pto de equilibrio α del SDD $\{I, f\}$ se dice un atractor local si $\exists \eta > 0$: $\forall x_0 \in [I \cap (\alpha - \eta, \alpha + \eta)]$ y $x_n = f^n(x_0)$, se verifica $\lim_{n \to \infty} x_n = \alpha$.

Diremos que α es localmente asint. estable.

Teorema (Est. asintótica local)

Si $\alpha \in$ SDD $\{I, f\}$, $f \in C^1(I)$. Entonces:

1) Si $|f'(\alpha)| < 1 \Rightarrow \alpha$ local. asint. est.

2) Si $|f'(\alpha)| > 1 \Rightarrow \alpha$ inestable

Dem

Sea $\{I, f\}$ SDD, $f: I \to I$, $f \in C^1(I)$, α pto eq., esto es, $f(\alpha) = \alpha$, $x_{n+1} = f(x_n)$ $n \geq 0$. Sup $|f'(\alpha)| < 1$

$f \in C^1(I) \Rightarrow f \in C(I)$

$|f'(\alpha)| < 1 \Rightarrow \exists \eta > 0 : |f'(x)| < 1 \quad \forall x \in [(\alpha-\eta, \alpha+\eta) \cap I]$

Sea $x_0 \in (\alpha-\eta, \alpha+\eta) \Leftrightarrow |x_0 - \alpha| < \eta$. Veamos que $|x_1 - \alpha| < \eta$

Entonces, por TVM $\exists \xi_0 \in (\min\{x_0, \alpha\}, \max\{x_0, \alpha\}) \subset (\alpha-\eta, \alpha+\eta)$

$$\underbrace{|f(x_0) - f(\alpha)|}_{= |x_1 - \alpha|} = |f'(\xi_0)||x_0 - \alpha| < |x_0 - \alpha| < \eta$$

ya que $|f'(\xi_0)| < 1$

Por inducción, sup $|x_n - \alpha| < \eta \Rightarrow ¿|x_{n+1} - \alpha| < \eta$?

sabemos por el TVM que $\exists \xi_n \in (\min\{x_n, \alpha\}, \max\{x_n, \alpha\}) \subset (\alpha-\eta, \alpha+\eta)$:

$$|x_{n+1} - \alpha| = |f(x_n) - f(\alpha)| = |f'(\xi_n)||x_n - \alpha|$$

Se cumple además, que $\exists M > 0 : |f'(x)| \leq M < 1 \quad \forall x \in (\alpha-\eta, \alpha+\eta)$

Hasta ahora hemos visto que si $|x_0 - \alpha| < \eta \Rightarrow |x_n - \alpha| < \eta$ luego α es estable, nos queda ver que $\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$ para ver si es asint. est.

Sea $x_0 : \quad |x_0 - \alpha| < \eta \Rightarrow |x_n - \alpha| < \eta \quad \forall n \geq 0$

$\exists \xi_{n-1} \in (\min\{x_{n-1}, \alpha\}, \max\{x_{n-1}, \alpha\})$:

$$|x_n - \alpha| = |f(x_{n-1}) - f(\alpha)| = |f'(\xi_{n-1})||x_{n-1} - \alpha| \leq M|x_{n-1} - \alpha|$$

$\exists \xi_{n-2} \in (\min\{x_{n-2}, \alpha\}, \max\{x_{n-2}, \alpha\})$

$$= M|f(x_{n-2}) - f(\alpha)| = |f'(\xi_{n-2})||x_{n-2} - \alpha| \leq M^2|x_{n-2} - \alpha|$$

$$\leq \dots \leq M^n|x_0 - \alpha| \longrightarrow 0 \Rightarrow |x_n - \alpha| \to 0$$

Esto es, $|x_n - \alpha| \to 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$.

Así hemos visto que α es local. asint. estable.

Teorema 2 (Estabilidad asintótica local)

Sea α pto eq del SDD $\{I, f\}$, $f \in C^3(I)$, $f'(\alpha)=1$

Entonces

① si $f''(\alpha) \neq 0 \Rightarrow \alpha$ inestable

② si $f''(\alpha) = 0$ y $f'''(\alpha) < 0 \Rightarrow \alpha$ local. asint. est.

③ si $f''(\alpha) = 0$ y $f'''(\alpha) > 0 \Rightarrow \alpha$ inestable

Faltan los casos en que $f'(\alpha) = 1$ o $f'''(\alpha) = 0$

- $\alpha \neq 1$ $\quad x_{n+1} = \alpha x_n + \beta \quad (1)$

$$z_{n+1} = \alpha z_n \quad (2)$$

$\{x_n\}$ es sol de (1) $\iff$ $\{z_n\} = \{x_n - x_*\}$ sol de (2)

- Demoivre: $\alpha^n = r^n(\cos(n\theta) + i\,\mathrm{sen}(n\theta))$

$$\theta = \operatorname{arctg} \frac{b}{a}$$

$$r = \sqrt{a^2+b^2}$$

- Modelo Telaraña

$O(p) = a + bp$, $b>0$

$D(p) = c - dp$, $d>0$

$D(p_n) = O(p_{n-1})$

se resuelve esta ec. en dif.

- Ecuación Malthus

$p_{n+1} = (1 + \alpha_N - \alpha_M)\, p_N \quad n \geq 0$

resolver esa ec en dif.

- Ecuación Verhulst.

$p_{n+1} = (1+KM)\, p_n - K p_n^2 \Rightarrow x_{n+1} = N x_n (1 - x_n)$ ecuación logística.

- SDD.
  - $I \subset \mathbb{R}$
  - $f: I \to I$ continua.
  - autónomo $\to$ no depende de n.
  - $f(I) \subset I$
  - normal.

$\gamma(I, f, x_0)$ es órbita o trayectoria.

El conjunto de todas las órbitas asociadas al SDD y a todos los ptos se denomina retrato de fase.

- α pto equilibrio $\iff$ $\alpha = f(\alpha)$ $\alpha \in I$. $\quad \gamma(I, f, \alpha) = \{\alpha, \alpha, \dots, \alpha\}$

- Sea $\{I, f\}$ SDD, $x_0 \in I$, $\gamma(I, f, x_0) = \{x_0, f(x_0), \dots, f^n(x_0)\}$

$$x_{n+1} = f(x_n) = f^n(x_0) \quad n \geq 0$$

Sup que $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = L \Rightarrow f(L) = L$

- Ec. logística $\mu x(1-x)$ $\quad 0 \le \mu \le 4$ ← para $f(I) \subset I$

$\mu \ge 1$ ← para tener 2 ptos eq.

$\mu < 3$ ← para que sea l.a.e

$\mu > 3$ ← tenga ciclos en $\mathbb{R}$

- Si α es pto eq de SDD $\{I, f\}$ también lo será de SDD $\{I, f^n\}$

1) • SDD $\{I, f\}$ I cerrado y acotado $\Longrightarrow$ $\exists$ pto eq.

2) • SDD $\{I, f\}$
I cerrado
f contractiva $\Big\} \Longrightarrow \exists\ 0<k<1: \ |f(x)-f(y)| \le k|x-y|$

Entonces $\exists!$ pto eq de f

3) • SDD $\{I, f\}$
I cerrado y acotado
$f \in C^1(I)$
$|f'(x)| < 1 \quad \forall x \in I$ $\Bigg\} \Longrightarrow \exists!$ pto eq de f

4) • SDD $\{I, f\}$
$f \in C^1(I)$
$\exists\ 0<k<1: \ |f'(x)| \le k < 1$ $\Big\} \Longrightarrow \exists!$ pto eq de f
$\forall x \in I$

- Un pto eq α es atractor global si $\forall x_0 \in I$, $x_n = f^n(x_0)$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$$

- Un pto eq α es atractor local si $\exists \eta > 0$: $\forall x_0 \in [I \cap (\alpha-\eta, \alpha+\eta)]$ y $x_n = f^n(x_0)$, $\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$

- α pto eq del SDD $\{I, f\}$, $f \in C^1(I)$
  - si $|f'(\alpha)| < 1 \Rightarrow \alpha$ es l.a.e.
  - si $|f'(\alpha)| > 1 \Rightarrow \alpha$ es inestable.

- α pto eq del SDD $\{I, f\}$, $f \in C^3(I)$, $f'(\alpha) = 1$
  - si $f''(\alpha) \neq 0 \Rightarrow \alpha$ inestable
  - si $f''(\alpha) = 0$, $f'''(\alpha) < 0 \Rightarrow \alpha$ l.a.e.
  - si $f''(\alpha) = 0$, $f'''(\alpha) > 0 \Rightarrow \alpha$ inestable.

$$\boxed{\begin{array}{l} f'(\alpha) = -1\,? \\ f'''(\alpha) = 0\,? \end{array}}$$

- α pto eq es semiestable si es l.a.e. por un lado e inestable por el otro.

- Estrategias de pesca.

$$x_{k+1} = 1'5\, x_k - 0'5\, x_k^2$$

$f: I \to I$, s-ciclo

1) Si $|f'(\alpha_0) f'(\alpha_1) \dots f'(\alpha_{s-1})| < 1 \Rightarrow$ l.a.e

2) Si $|f'(\alpha_0) f'(\alpha_1) \dots f'(\alpha_{s-1})| > 1 \Rightarrow$ inestable

---

- Sean $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ las sol de $p(\lambda)$. ELSA:
  - ·) Todas las soluciones de la ec lineal en dif homogenea verifican $\lim_{n \to \infty} x_n = 0$
  - ·) Las raices verifican $\max_{i=1 \dots s} |\lambda_i| < 1$

- Caso $k=2$. Las raices del pol $p(\lambda) = \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0$ verifican

$$|\lambda_i| < 1, \ i \in \{1,2\} \iff \left.\begin{array}{l} p(1) = 1 + a_1 + a_0 > 0 \\ p(-1) = 1 - a_1 + a_0 > 0 \\ p(0) = a_0 < 1 \end{array}\right\}$$

- $x_n = x_n^{(h)} + x_n^{(p)}$

$b(n)$		$x_n^{(p)}$
a^n	$\longrightarrow$	$c_1 a^n n^m$
$n^k a^n$	$\longrightarrow$	$(c_0 + c_1 n + \dots + c_k n^k) a^n n^m$
$a^n \operatorname{sen}(bn)$, $a^n \cos(bn)$,	$\longrightarrow$	$[c_1 \operatorname{sen}(bn) + c_2 \cos(bn)] n^m a^n$
$a^n n^k \operatorname{sen}(bn)$, $a^n n^k \cos(bn)$,	$\longrightarrow$	$(c_0 + c_1 n + \dots + c_k n^k) \operatorname{sen}(bn)\, a^n n^m + (d_0 + d_1 n + \dots + d_k n^k) \cos(bn)\, a^n n^m$

- Si $f'(x) = -1 \Rightarrow 2 f'''(p_*) + 3(f''(p^*))^2 > 0 \Rightarrow$ l.a.e

$< 0 \Rightarrow$ inestable