$(\Omega, \mathcal{A}, P)$ esp probabilidad

- Ω conjunto
- $\mathcal{A}$ σ-álgebra
  - $\emptyset, \Omega \in \mathcal{A}$
  - Si $A \in \mathcal{A} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{A}$
  - cerrado unión numerable
- $P: \mathcal{A} \longrightarrow [0,1]$
  - $P(A) \geq 0 \quad \forall A \in \mathcal{A}$
  - $P(\Omega) = 1$
  - $P(\bigcup A_i) = \sum P(A_i)$ con A_i disjuntos

T^ma Prob Compuesta:

$$P(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} \Rightarrow P(B \cap A) = P(A)P(B/A)$$

$$P(C/B\cap A) = \frac{P(C \cap B \cap A)}{P(B \cap A)} \Rightarrow P(C \cap B \cap A) = P(B \cap A) P(C/B\cap A)$$
$$= P(A)P(B/A)P(C/B\cap A)$$

$$\Rightarrow P(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2/A_1) \cdots P(A_n/A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1})$$

T^ma Prob Total

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B/A_i)$$

T^ma Bayes

$$P(A_i/B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} \underset{T^{ma}\,P.T}{\overset{T^{ma}\,P.C.}{=}} \frac{P(A_i)P(B/A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B/A_i)}$$

Independencia sucesos $\Leftrightarrow$ $P(A/B) = P(A)$

$$\Downarrow$$

$$\frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A) \Rightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Var. Al

$$X: (\Omega, \mathcal{A}, P) \longrightarrow (\mathbb{R}, \beta, P_X)$$

$X^{-1}(B) \in \mathcal{A} \quad \forall B \in \beta, \qquad X^{-1}(B) = \{w \in \Omega : X(w) \in \beta\}$

$\boxed{\text{VA discretas}}$

fmp.

(a cada valor asigna una prob)

1) $0 \leq p_i \leq 1 \quad \forall i$

2) $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ o $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$

$p_i = P[X = x_i]$

¿ $P_X[X=2] = P[X^{-1}(2)]$?

- Si $\exists$ f definida en un conj numerable, no negativo, y suma de valores $= 1$ $\Rightarrow$ es la fmp de una va discreta

F. distribución $F: \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$

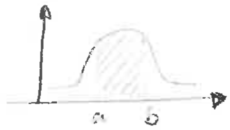
$$F(x) = P[X \leq x] = \sum_{x \leq X} p_i$$

- $0 \leq F(x) \leq 1$
- $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ y $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$
- $F(x_1) \leq F(x_2) \quad \forall x_1 \leq x_2$
- Continua a la derecha

- Si $\exists$ $F: \mathbb{R} \to [0,1]$ que crece a saltos $\Rightarrow$ es la f distribución de una va discreta

VA continua

f densidad $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$



- $f(x) \geq 0$
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$
- $P[a \leq X \leq b] = \int_a^b f(x)\,dx$
- $P[X = a] = 0 = \int_a^a f(x)\,dx$
- $P[a < X < b] = P[a \leq X \leq b]$

F distribución $F: \mathbb{R} \to [0,1]$

$F(x) = P[X \leq x] = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$

$\Rightarrow f(x) = F'(x) \ \forall x$

$P[a \leq X \leq b] = F(b) - F(a)$

- Si $\exists f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ verificando las props $\Rightarrow$ es la f densidad de una va continua.

Esperanza

- Discreto $E[X] = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$ ($p_i = P[X = x_i]$)
- Continuo $E[X] = \int_{\mathbb{R}} x f(x)\,dx$

- X, Y VA tq $Y = a + bX \Rightarrow E[Y] = a + bE[X]$
- Si $X \leq Y \Rightarrow E[X] \leq E[Y]$

Momentos

- No centrados. $m_k = E[(X-0)^k] = E[X^k]$
- Centrados $\mu_k = E[(X-\mu)^k]$

- Discreto $m_k = E[X^k] = \sum_i x_i^k p_i$ $\quad \mu_k = \sum_i (x_i - \mu)^k p_i = E[(X-\mu)^k]$
- Continuo $m_k = E[X^k] = \int_{\mathbb{R}} x^k f(x)\,dx$ $\quad \mu_k = \int_{\mathbb{R}} (x-\mu)^k f(x)\,dx = E[(X-\mu)^k]$

$m_1 = E[X]$ $\qquad \mu_1 = E[X] - \mu$

$m_2 = E[X^2]$ $\qquad \mu_2 = Var[X] = E[X^2] - E[X]^2$

$M_X(t) = E[e^{tX}] \quad \forall t \in (-t_0, t_1)$ ← F. generatriz de momento

Al derivar K veces y sustituir por 0 te da el momento no centrado de orden K.

Vector Aleatorio

$$\mathbb{X} = (X_1, \dots X_n) : (\Omega, \mathcal{A}, P) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, \beta^n, P_{\mathbb{X}})$$

$$\mathbb{X}^{-1}(B) \in \mathcal{A} \quad \forall B \in \beta^n \qquad y \qquad X_i : (\Omega, \mathcal{A}, P) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, \beta^n, P_{\mathbb{X}})$$

vector aleatorio (discreto) $\iff$ X_i es una var. aleatoria. (discreto)

$\iff \mathbb{X}^{-1}((-\infty, x]) \in \mathcal{A} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, \dots, x_n)$

$\mathbb{X}^{-1}((-\infty, x]) = \{w \in \Omega : \mathbb{X}(w) \leq x\}$

(continua) $\implies$ X_i es una var al continua

Dist. Prob

$$P_{\mathbb{X}} : \beta^n \longrightarrow [0,1]$$

$$P_{\mathbb{X}}(B) = P[w \in \Omega : \mathbb{X}(w) \in B] = P[x \in B] \quad \forall B \in \beta^n$$

Verifica las props de P. (medida prob)

F. distribución

$$F_{\mathbb{X}} : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0,1]$$

$$F_{\mathbb{X}}(x) = P_X((-\infty, x]) = P(\mathbb{X} \leq x)$$

1) Monotona No decreciente $\quad F(x,y_1) \leq F(x,y_2)$, $F(x_1,y) \leq F(x_2,y)$ $\quad y_1 \leq y_2$, $x_1 \leq x_2$
2) Continua a la derecha

$$\lim_{y_1 \to y^+} F(x,y_1) = F(x,y) \qquad \lim_{x_1 \to x^+} F(x_1,y) = F(x,y)$$

3) $\lim_{x \to -\infty} F(x,y) = \lim_{y \to -\infty} F(x,y) = 0$ y $\lim_{x,y \to \infty} F(x,y) = 1$

4) $\exists (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \in \mathbb{R}^{2+}$ tq

$$F(x_1 + \varepsilon_1, x_2 + \varepsilon_2) - F(x_1, x_2 + \varepsilon_2) - F(x_1 + \varepsilon_1, x_2) - F(x_1, x_2) \geq 0$$

T^ma correspondencia

$P_{\mathbb{X}} : \beta^n \longrightarrow [0,1]$ medida prob $\iff$ $F_{\mathbb{X}} : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0,1]$ función distribución.

$P_{\mathbb{X}}(B) = P[x \in B]$ $\qquad$ $F_{\mathbb{X}}(x) = P_{\mathbb{X}}((-\infty, x])$

- $\to P_X(B) \geq 0$
- $\to P_X(\mathbb{R}^n) = 1$
- $\to P(\cup B_i) = \sum P(B_i)$

Vect. Aleatorio.

Si $\exists E_X \subset \mathbb{R}^n$ numerable tq $P_X(E_X) = P(X \in E_X) = 1$

$\Rightarrow$ X vect. aleatorio discreto.

$\boxed{E_X \text{ esp medida de } X}$

Vect. Aleat. Discreto

F. masa prob

$P_X : E_X \longrightarrow [0,1]$

$P_X(x) = P(X = x)$

1) $P(X = x) \geq 0$

2) $\sum_{x \in E_X} P(X = x) = 1$

F distribución

$F_X : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0,1]$

$F_X(x) = P(X \leq x) = \sum_{\substack{x_i \in E_X \\ x_i \leq x}} P(X = x_i)$

- Toda colección de nº no negativos con suma 1 es la fmp de un va discreto

Vect Aleat. Continuos

Si $\exists f_X : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt$

f_X es la f. densidad y $P_X(B) = P(X \in B) = \int_B f_X(x)\,dx$

- f_X no negativa y integrable
- $\int_{\mathbb{R}^n} f_X(x)\,dx = 1$
- $\lim_{x_i \to -\infty} f_X(x_1, \dots, x_n) = \lim_{x_i \to \infty} f_X(x_1, \dots, x_n) = 0$
- Continua en casi todo punto y $F_X(x)$ derivable $\dfrac{\partial^n F_X(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_1 \dots \partial x_n}$
- Podemos cambiar f_X en un conj de medida nula sin que afecte su integral
- E numerable $\Rightarrow$ $P_X(E) = \int_E f_X(x)\,dx = 0$

Caracterizaciones

1) Si $f_X : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ f densidad vect al. cont $\Rightarrow$ No negativa, integrable y $\int_{\mathbb{R}^n} f_X(x)\,dx = 1$

2) Si $\exists f_X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ No negativa, integrable $\int_{\mathbb{R}^n} f_X(x)\,dx = 1$ $\Rightarrow$ Es la f densidad de algún vector al.

- $X : (\Omega, \mathcal{A}, P) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, \beta^n, P_X)$ vect. al. cont $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ $X_i : (\Omega, \mathcal{A}, P) \longrightarrow (\mathbb{R}, \beta, P_{X_i})$ es una va continua.

DISTRIBUCIONES

Degenerada $X \sim D(c)$

Cuando la v.a toma el mismo valor c.

$$P[X=x] = \begin{cases} 1 & si \quad x=c \\ 0 & si \quad x \neq c \end{cases}$$

$$E[X]=c \qquad Var[X]=0$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x<c \\ 1 & si \quad x \geq c \end{cases}$$

$$M_X(t) = E[e^{tX}] = \sum_i e^{tx_i} p_i = e^{tc}$$

Bernoulli $X \sim B(p)$

Solo se dan 2 resultados

$$P[X=x] = \begin{cases} p & si \quad x=1 \\ 1-p=q & si \quad x=0 \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x<0 \\ q & si \quad 0 \leq x < 1 \\ 1 & si \quad x \geq 1 \end{cases}$$

$$E[X] = p \quad , \quad Var[X] = pq$$

✓ $M_X(t) = E[e^{tX}] = pe^t + (1-p)$

Poisson $X \sim P(\lambda)$

Cuenta el nº eventos por unidad de tiempo conocido un promedio λ.

$$P[X=x] = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}$$

$$E[X] = Var[X] = \lambda$$

✓ $M_X(t) = e^{-\lambda(e^t-1)}$

Uniforme Discreta $X \sim U\{x_1, \dots, x_n\}$

Todos los valores tienen la misma probabilidad.

$$P[X=x] = \begin{cases} 1/n & si \quad x \in \{x_1, \dots, x_n\} \\ 0 & otro\ caso \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < x_1 \\ 1/n & si \quad x_1 \leq x < x_2 \\ \vdots & \\ \frac{n-1}{n} & si \quad x_{n-1} \leq x < x_n \\ 1 & si \quad x \geq x_n \end{cases}$$

$$E[X] = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i = \bar{x}$$

$$Var[X] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \right)^2$$

✓ $M_X(t) = E[e^{tX}] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} e^{tx_i}$

Binomial $X \sim B(n,p)$

Cuenta el nº exitos en n repeticiones

$$P[X=x] = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

$$E[X] = np \quad , \quad Var[X] = npq$$

✓ $M_X(t) = \left(pe^t + (1-p)\right)^n$

Binomial Negativa $X \sim BN(r,p)$

Cuenta el nº fracasos antes del r-ésimo éxito

$$P[X=x] = \binom{x+r-1}{x} q^x p^r$$

$$E[X] = \frac{rq}{p} \qquad Var[X] = \frac{rq}{p^2}$$

$$M_X(t) = \left(\frac{p}{1-qe^t} \right)^r \qquad \forall t < -\ln q$$

Hipergeométrica $H(N,n,K)$

Cuenta elementos con una determinada característica en una muestra de tamaño n de los N totales donde K tienen la característica.

$$P[X=x] = \frac{\binom{K}{x}\binom{N-K}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

$$E[X] = K\frac{n}{N}$$

$$Var[X] = \frac{Kn}{N}\left(1-\frac{K}{N}\right)\frac{N-n}{N-1}$$

$$M_X(t) = \sum_{x=\max(0,n-(N-K))}^{\min(n,K)} e^{tx}\binom{N}{n}^{-1}\binom{K}{x}\binom{N-K}{n-x}$$

Normal $X \rightarrow N(\mu, \sigma^2)$

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$F(x) = P[X \leq x]$ se mira en la tabla.

·) $f(M_o) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$

·) $X \sim N(\mu,\sigma^2)$, $Y = a + bX$ $\Rightarrow Y \sim N(a+b\mu, b^2\sigma^2)$

Factor corrección $D \rightarrow C$

Tipificación

$$M_X(t) = e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$$

$M_X(t) = e^{t^2/2}$ si $X \sim N(0,1)$

Uniforme Continua $X \sim U(a,b)$

Si su f densidad es cte en el intervalo (a,b).

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } x\in(a,b) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x<a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } a \leq x < b \\ 1 & \text{si } x \geq b \end{cases}$$

$$E[X] = \frac{a+b}{2} \qquad Var[X] = \frac{(b-a)^2}{12}$$

$$M_X(t) = E[e^{tX}] = \frac{e^{bt}-e^{at}}{t(b-a)}$$

Exponencial $X \sim \exp(\lambda)$

Tiempo entre 2 acontecimientos consecutivos de Poisson.

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x<0 \\ 1-e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

$$E[X] = \frac{1}{\lambda}, \quad Var[X] = \frac{1}{\lambda^2}$$

✓ $M_X(t) = \left(1-\frac{t}{\lambda}\right)^{-1} = \dfrac{\lambda}{\lambda-t}$

Erlang $X \sim \mathcal{E}(n,\lambda)$

Tiempo hasta el n-ésimo acontecimiento con promedio λ

$$f(x) = \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} x^{n-1} e^{-\lambda x}, \quad \Gamma(n) = (n-1)!$$

$$E[X] = \frac{n}{\lambda}, \quad Var[X] = \frac{n}{\lambda^2}$$

$$M_X(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda-t}\right)^n$$

Gamma $X \sim \Gamma(\mu, \lambda)$

generalización Erlang con $n \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{\lambda^{\mu}}{\Gamma(\mu)} x^{\mu-1} e^{-\lambda x}$$

$$\Gamma(\mu) = \int_0^{\infty} x^{\mu-1} e^{-x}\, dx$$

$$E[X] = \frac{\mu}{\lambda}, \quad Var[X] = \frac{\mu}{\lambda^2}$$

$$M_X(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^{\mu}$$

$$\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

Beta $X \sim \beta(p, q)$

Mide proporciones.

$$f(x) = \frac{1}{\beta(p,q)} x^{p-1} (1-x)^{q-1}$$

$$\beta(p,q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1}\, dx$$

$$= \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

$$\beta(p,q) = U(0,1)$$

$$E[X] = \frac{p}{p+q} \quad Var[X] = \frac{pq}{(p+q)^2(p+q+1)}$$

$\boxed{\text{Aproximaciones}}$

$$\begin{tikzcd}
 & & N(\underset{\mu}{np}, \underset{\sigma^2}{npq}) & \\
H(N,n,K) \arrow[r, "N>50,\ n\leq 0'1N"'] & B(n,p),\ p=\frac{K}{N} \arrow[ur, "n>10,\ np>5,\ nq>5"] \arrow[dr, "n>50,\ p\leq 0'1 \text{ o } pn\leq 5"] & & \\
 & & P(\lambda),\ \lambda = np \arrow[r, "\lambda>10"'] & N(\lambda,\lambda)
\end{tikzcd}$$

• Discreto

X, Y independientes $\Longleftrightarrow P[X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n] = P[X_1 = x_1] \cdots P[X_n = x_n]$

$\Longleftrightarrow P[X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n] = h_1(x_1) \cdots h_n(x_n)$

esta 2ª caracterización es cuando las variables de la f densidad no dependen una de otra

• Continuo

X, Y independientes $\Longleftrightarrow f_X(x_1, \ldots, x_n) = \underbrace{f_1(x_1) \cdots f_n(x_n)}_{\text{marginales}}$

$(*) \quad f_{Y/X=x_0} = \dfrac{f(x_0, y)}{f_X(x_0)} = \dfrac{f_X(x_0) f_Y(y)}{f_X(x_0)} = f_Y(y)$

$\Longleftrightarrow f_X(x_1, \ldots, x_n) = h_1(x_1) \cdots h_n(x_n)$

$\Longleftrightarrow M_X(t_1, \ldots, t_n) = M_X(t_1) \cdots M_X(t_n)$

$\Longleftrightarrow P[X_1 \in B_1, \ldots, X_n \in B_n] = P[X_1 \in B_1] \cdots P[X_n \in B_n]$

- Var al degenerada, $P[X = C] = 1 \Rightarrow$ indep.
- Todas las marginales coinciden con las condicionadas asociadas $(*)$
- Todas las marginales coinciden con las condicionadas asociadas (*)
- $X_1, \ldots X_n$ v.a. indep $\Rightarrow$ cualquier subconjunto estará formado por una v.a. indep.
- Si $X_1, \ldots X_n$ independientes $\Rightarrow E[X_1 \cdots X_n] = E[X_1] \cdots E[X_n]$
- Si X, Y independientes $\Rightarrow Cov(X, Y) = 0$

Indep. Mutua $\neq$ Indep. dos a dos

$\Rightarrow$

$\not\Leftarrow$

- $P(A \cap B) = P(A) P(B)$

Distribuciones Reproductivas.

- BINOMIAL

$$X_i \rightsquigarrow B(n_i, p) \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} X_i \rightsquigarrow B\left(\sum_{i=1}^{n} n_i, p\right)$$

independientes

- POISSON

$$X_i \rightsquigarrow P(\lambda_i) \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} X_i \rightsquigarrow P\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right)$$

independientes

- BIN. NEGATIVA

$$X_i \rightsquigarrow BN(r_i, p) \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} X_i \rightsquigarrow BN\left(\sum_{i=1}^{n} r_i, p\right)$$

independientes

- NORMAL

$$X_i \rightsquigarrow N(\mu_i, \sigma_i^2) \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} X_i \rightsquigarrow N\left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i, \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2\right)$$

independientes

- GAMMA

$$X_i \rightsquigarrow \Gamma(\mu_i, \lambda) \Rightarrow \sum_{\lambda=1}^{n} X_i \rightsquigarrow \Gamma\left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i, \lambda\right)$$

independientes

- ERLANG

$$X_i \rightsquigarrow \mathcal{E}(K_i, \lambda) \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} X_i \rightsquigarrow \mathcal{E}\left(\sum_{i=1}^{n} K_i, \lambda\right)$$

independientes

- EXPONENCIAL

$$X_i \rightsquigarrow exp(\lambda) \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} X_i \rightsquigarrow \mathcal{E}(n, \lambda)$$

independientes

$$E[X/Y=y_0] = \begin{cases} \sum_x x\, P[X=x/Y=y_0] & \text{discreta} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_{X/Y=y_0}(x)\, dx & \text{continua} \end{cases}$$

- $E[c/Y] = c$
- $E[aX+b/Y] = aE[X/Y] + b$
- $E[a_1X_1 + \dots + a_nX_n/Y] = a_1 E[X_1/Y] + \dots + a_n E[X_n/Y]$
- $E[X/Y] \geq 0$ y $E[X/Y] = 0 \iff P[X=0] = 1$
- $E[X_1] \leq E[X_2] \Rightarrow E[X_1/Y] \leq E[X_2/Y]$.
- $E[E[X/Y]] = E[X]$ (también sirve para f. medibles)

Momento condicionado No centrado orden n

$E[X^n/Y]$

Centrado

$E[(X-E[X/Y])^n/Y]$

- MNC orden 1 es $E[X/Y]$
- MC orden 2 es $Var[X/Y] = E[X^2/Y] - (E[X/Y])^2$

Tma Descomp Varianza $= E[Var[X/Y]] + Var[E[X/Y]]$

$Var[X] \geq E[Var[X/Y]]$

$Var[X] \geq Var[E[X/Y]]$

- $COV[X,Z] = E[XZ] - E[X]E[Z]$

RECTA REGRESION Y/X

$$Y = aX + \underbrace{E[Y] - aE[X]}_{CR}$$

$$a = \frac{Cov[X,Y]}{Var[X]}$$

$CR_{Y/X} : \gamma_{Y/X}$ (coef. regresión)

RECTA REGRESION X/Y

$$X = a'Y + \underbrace{E[X] - a'E[Y]}_{CR}$$

$$a' = \frac{Cov[X,Y]}{Var[Y]}$$

$CR\ X/Y : \gamma_{X/Y}$

- Curva es recta => son la misma
- Pto corte rectas = $(E[X], E[Y])$ ¿son indep?
- Coef regresion tienen = signo y además = signo que la covarianza
- $Cov[X,Y] = 0 \Rightarrow Y = E[Y],\ X = E[X]$

$$ECM_{Y/X} = Var[Y] - \frac{Cov[X,Y]^2}{Var[X]} = E[Var[Y/X]] \qquad ECM_{X/Y} = Var[X] - \frac{Cov[X,Y]^2}{Var[Y]}$$

Coeficiente determinación lineal

$$\rho^2_{X,Y} = \frac{Cov[X,Y]^2}{Var[X]Var[Y]}$$

- ·) $0 \le \rho^2_{X/Y} \le 1$
- ·) $\rho^2_{X,Y} = \gamma_{X/Y} \cdot \gamma_{Y/X}$
- ·) $\rho^2_{X,Y} = 0 \Rightarrow$ paralelas ejes $Y = E[Y],\ X = E[X]$
- ·) $\rho^2_{X,Y} = 1 \Rightarrow$ dependencia funcional lineal.
- ·) $0 \le \rho^2_{Y/X} \le \eta^2_{Y/X} \le 1$ (= si curvas = rectas)

Coeficiente correlación lineal.

$$\rho_{X,Y} = \sqrt{\frac{Cov[X,Y]^2}{Var[X]\,Var[Y]}}$$

- ·) $-1 \le \rho_{XY} \le 1$
- ·) mismo signo que la covarianza y coef. regresión
- ·) $\rho_{XY} = 0 \Rightarrow$ incorreladas. $E[X] = X$, $E[Y] = Y$ (independientes), $|\rho_{X,Y}| = 1 \Rightarrow$ Dependencia funcional.

φ : función regresión

$\varphi(X) = E[Y/X]$

$ECM = E[Var[Y/X]]$ (Error cuadrático medio)

$Var[Y] = E[Var[Y/X]] + Var[E[Y/X]]$

$= ECM[\varphi(X)] + Var[\varphi(X)]$

Curva Regresión Y/X

Sin observar X	A partir de X	A partir de X_0
$E[Y]$	$E[Y/X]$	$E[Y/X=X_0]$
$Var[Y]$	$E[Var[Y/X]]$	$Var[Y/X=X_0]$

Curva Regresión X/Y

$E[X/Y=y_0]$

$Var[X/Y=y_0]$

- X, Y independientes $\Rightarrow$ Curvas paralelas a ejes
  $X = E[X]$ $ECM = Var[X]$
  $Y = E[Y]$ $ECM = Var[Y]$

- Y dep funcionalmente X (viceversa) $\Rightarrow$ Curva Y/X = curva dependencia
  $ECM = 0$ (viceversa)

- Dep funcional recíproca $\Rightarrow$ Ambas curvas coinciden
  $Y = f(X)$ $ECM = 0$
  $X = f^{-1}(Y)$ $ECM = 0$

- Razón correlación o bondad del ajuste.

$$\eta^2_{Y/X} = \frac{Var[E[Y/X]]}{Var[Y]} = 1 - \frac{E[Var[Y/X]]}{Var[Y]}$$

$$\eta^2_{X/Y} = \frac{Var[E[X/Y]]}{Var[X]} = 1 - \frac{E[Var[X/Y]]}{Var[X]}$$

·) $0 \leq \eta^2_{Y/X} \leq 1$

·) $\eta^2_{Y/X} = 0 \Rightarrow Y = E[Y]$

·) $\eta^2_{Y/X} = 1 \Rightarrow$ Y dep funcionalmente de X

$\wedge$ $\eta^2_{X/Y} = 1 \Rightarrow$ dep funcional recíproca