EJERCICIOS SELECTIVIDAD

(Acts Nº 3)

1 Considera el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \alpha x + y + 3z = 4 \\ x + y - 2z = -2 \\ -x + 2y + (3+\alpha)z = 4+\alpha \end{cases}$$

a) Determina, si existen, los valores de α para los que el sistema dado tiene solución única.

b) Determina, si existen, los valores de α para los que el sistema dado tiene al menos dos soluciones.

Halla las soluciones en dichos casos.

$$\left.\begin{array}{l} \alpha x + y + 3z = 4 \\ x + y - 2z = -2 \\ -x + 2y + (3+\alpha)z = 4+\alpha \end{array}\right\} \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 3+\alpha \end{pmatrix} = A$$

$$|A| = \alpha(3+\alpha) + 6 + 2 + 3 + 4\alpha - 3 - \alpha \Rightarrow \alpha^2 + 6\alpha + 8 = 0$$

$$\alpha = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 4(8)}}{2} = \frac{-6 \pm 2}{2} < \begin{array}{l} -4 \\ -2 \end{array}$$

* Si $\alpha \neq -4$ y $\alpha \neq -2$

Rang $(A) = 3 =$ Rang $(A') =$ nº incógnitas $\Rightarrow$ SCD

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \\ 4+\alpha & 2 & 3+\alpha \end{vmatrix} = \cancel{12} + \cancel{4\alpha} - \cancel{12} - 8 - \cancel{2\alpha} - 12 - \cancel{3\alpha} + 16 + 6 + \cancel{2\alpha} =$$

$$= \alpha + 2$$

$$x = \frac{(\alpha \cancel{+2})}{(\alpha \cancel{+2})(\alpha+4)} = \frac{1}{\alpha+4}$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} \alpha & 4 & 3 \\ 1 & -2 & -2 \\ -1 & 4+\alpha & 3+\alpha \end{vmatrix} = (-2\alpha)(3+\alpha) + 12 + 3\alpha + 8$$
$$- 6 + (2\alpha)(4+2) - 12 + 4\alpha$$

$$-\cancel{6\alpha} - \cancel{2\alpha^2} + \cancel{12} + \cancel{3\alpha} + 8 - 6 + \cancel{8\alpha} + \cancel{2\alpha^2} - \cancel{12} + \cancel{4\alpha} =$$

$$= 9\alpha + 2$$

$$y = \frac{9\alpha + 2}{(\alpha+2)(\alpha+4)}$$

$$|A_z| = \begin{vmatrix} \alpha & 1 & 4 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 4+\alpha \end{vmatrix} = \cancel{4\alpha} + \cancel{\alpha^2} + \cancel{8} + \cancel{2} + \cancel{4} + \cancel{4\alpha} + \cancel{4+\alpha}$$
$$= \alpha^2 + 9\alpha + 18$$

$$z = \frac{(\alpha+9)}{(\alpha+2)(\alpha+4)}$$

* Si $\alpha = -4 \longrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$

$\begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ Rang $(A) = 2 \neq$ Rang $(A') = 3$ = SI

* Si $\alpha = -2 \longrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$

$\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ Rang $(A) = 2 =$ Rang $(A') \Rightarrow$ SCI

$$\left.\begin{array}{l} -2x + y + 3z = 4 \\ x + y - 2z = -2 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} -2x + \cancel{y} = 4 - 3z \\ x + \cancel{y} = -2 + 2z \end{array}\right\} \; z = \lambda$$
$$-3x = 6 - 5z$$

$$x = \frac{6 - 5\lambda}{-3} \qquad y = \frac{\lambda}{3} \qquad z = \lambda$$

② Considera las matrices : $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

a) Halla el determinante de una matriz X que verifique la igualdad $X^2 A X = B$

b) Determina, si existe, la matriz Y que verifica la igualdad $A^2 Y B^{-1} = A$

a)

$$|X| \Rightarrow X^3 |A| = |B|$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2 = -1$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 4 + 4 = 8$$

$$X^3 = \frac{|B|}{|A|}$$

$$|X^3| = \frac{8}{-1} \Rightarrow |X^3| = -8$$

$$|X| = \sqrt[3]{-8} = -2$$

$$A^2 Y B^{-1} = A$$

$$A^2 Y = A B$$

$$Y = A^{-2} A B$$

$$Y = A^{-1} I B$$

$$Y = A^{-1} B$$

$$A^{-1} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

$$Y = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

③ Considera el sistema dado por $AX = B$

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & \alpha \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha-2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

a) Determina, si existen, los valores de α para los que el sistema tiene solución única.

b) Determina, si existen, los valores de α para los que el sistema no tiene solucion

c) Determina, si existen, los valores de α para los que el sistema tiene al menos dos soluciones. Halla todas las soluciones en dichos casos.

$$\begin{pmatrix} \alpha & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & \alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha-2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{r} \alpha x + 2y - z = 1 \\ y + 2z = \alpha - 2 \\ 3x + 4y + \alpha z = 3 \end{array}\right\} \underbrace{\left(\overbrace{\begin{matrix} \alpha & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & \alpha \end{matrix}}^{A} \left| \begin{matrix} 1 \\ \alpha-2 \\ 3 \end{matrix}\right.\right)}_{A'}$$

$$|A| = \alpha^2 + 12 + 3 - 8\alpha = \alpha^2 - 8\alpha + 15$$

$$\alpha = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 4(15)}}{2} = \frac{8 \pm 2}{2} < \begin{matrix} 3 \\ 5 \end{matrix}$$

* Si $\alpha = 5 \longrightarrow \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 3 \end{vmatrix} \neq 0 \qquad \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$

$\text{Rang}(A) = 2 \neq \text{Rang}(A') = 3 \Rightarrow SI$

* Si $\alpha = 3$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$Rang(A) = 2 = Rang(A') \Rightarrow SCI$

$$\left.\begin{array}{r} 3x + 2y - z = 1 \\ y + 2z = 1 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} 3x + 2y = 1 + z \\ y = 1 - 2z \end{array}\right\} \quad z = \lambda$$

$y = 1 - 2\lambda \qquad z = \lambda$

$$3x + 2(1 - 2\lambda) = 1 + \lambda$$

$$x = \frac{5\lambda - 1}{3}$$

* Si $\alpha \neq 3$ y $\alpha \neq 5$ $\quad Rang(A) = 3 = Rang(A') = n^o\ incog \Rightarrow SCD$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ \alpha-2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & \alpha \end{vmatrix} = \alpha + (-4)(\alpha-2) + 12 + 3 - 8 - (2\alpha)(\alpha-2)$$

$$= \cancel{\alpha} - \cancel{4\alpha} + \cancel{8} + 12 + 3 - \cancel{8} - 2\alpha^2 + \cancel{4\alpha} =$$

$$= -2\alpha^2 + \alpha + 15$$

$$x = \frac{(\cancel{\alpha-3})(\alpha + \frac{5}{2})}{(\cancel{\alpha-3})(\alpha-5)} = \frac{\alpha + \frac{5}{2}}{\alpha - 5}$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} \alpha & 1 & -1 \\ 0 & \alpha-2 & 2 \\ 3 & 3 & \alpha \end{vmatrix} = (\alpha^2)(\alpha-2) + \cancel{6} + 3\alpha - \cancel{6} - 6\alpha =$$

$$= \alpha^3 - 2\alpha^2 + 3\alpha - 6\alpha =$$

$$\alpha^3 - 2\alpha^2 - 3\alpha = \alpha(\alpha^2 - 2\alpha - 3) \begin{cases} \alpha = 0 \\ \alpha^2 - 2\alpha - 3 \begin{cases} \alpha = 4 \\ \alpha = -1 \end{cases} \end{cases}$$

$$y = \frac{(\alpha+1)(\alpha-4)}{(\alpha-3)(\alpha-5)}$$

$$|A_z| = \begin{vmatrix} \alpha & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \alpha-2 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 3\alpha + 6\alpha - 12 - 3 - (4\alpha)(\alpha-2) =$$

$$= -4\alpha^2 + 17\alpha - 15$$

$$z = \frac{(\cancel{\alpha-3})(\alpha + \frac{5}{4})}{(\cancel{\alpha-3})(\alpha-5)}$$

4) Considera las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

a) Halla la matriz X que verifica $AX - B = I$

b) Calcula el determinante de la matriz $(A^2 B^{-1})^{2015}$

$$AX - B = I$$

$$AX = B + I$$

$$X = A^{-1}(B+I)$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix} = 18 + 4 + 3 - 2 - 12 - 9 = 2$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = B + I$$

$$A^{-1} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 6 & 6 & 2 \\ 5 & 8 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 6 & -6 & 2 \\ -5 & 8 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 6 & -5 & 1 \\ -6 & 8 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ -3 & 4 & -1 \\ 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = A^{-1}$$

$$X = \begin{pmatrix} 3 & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ -3 & 4 & -1 \\ 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & \frac{7}{2} & \frac{1}{2} \\ 3 & -4 & 1 \\ -1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\left|\left(A^2 B^{-1}\right)^{2015}\right| = ? \Rightarrow \left(\frac{|A||A|}{|B|}\right)^{2015}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix} = 18 + 4 + 3 - 2 - 12 - 9 = 2$$

$$|B| \Rightarrow \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 4$$

$$\left(\frac{2 \cdot 2}{4}\right)^{2015} = 1$$

5 Halla la matriz X que verifica la igualdad

$AXA^{-1} + B = CA^{-1}$ sabiendo que:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -5 & -3 \end{pmatrix}$$

$$AXA^{-1} + B = CA^{-1}$$

$$AX + BA = C \qquad |A| = -1$$

$$AX = C - BA$$

$$X = A^{-1}(C - BA)$$

$$A^{-1} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -3 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & +1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

$$X = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -5 & -3 \end{pmatrix} \right];$$

$$X = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 6 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

6 Considera el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \lambda x + \lambda y + \lambda z = 0 \\ \lambda x + 2y + 2z = 0 \\ \lambda x + 2y + z = 0 \end{cases}$$

a) Discute el sistema según los valores de λ

b) Determina, si existen, los valores de λ para los que el sistema tiene alguna solución en la que $z \neq 0$

$$\left.\begin{array}{l} \lambda x + \lambda y + \lambda z = 0 \\ \lambda x + 2y + 2z = 0 \\ \lambda x + 2y + z = 0 \end{array}\right\} \begin{pmatrix} \lambda & \lambda & \lambda \\ \lambda & 2 & 2 \\ \lambda & 2 & 1 \end{pmatrix} = A$$

$$|A| = 2\lambda + \cancel{2\lambda^2} + \cancel{2\lambda^2} - \cancel{2\lambda^2} - \cancel{4\lambda} - \cancel{\lambda^2} = \lambda^2 - 2\lambda$$

$$\lambda^2 - 2\lambda = \lambda(\lambda - 2) \begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda = 2 \end{cases}$$

* Si $\lambda \neq 0$ y $\lambda \neq 2$

Rang (A) = 3 = Rang (A') = nº incógnitas $\Rightarrow$ SCD

sistema trivial $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

* Si $\lambda = 2$ $\longrightarrow$ $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$

Rang (A) = 2 = Rang (A') $\neq$ nº incg $\Rightarrow$ SCI

$$\left.\begin{array}{l} 2x + 2y + 2z = 0 \\ 2x + 2y + z = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{r} \cancel{2x} + \cancel{2y} = -2z \\ - \cancel{2x} + \cancel{2y} = -z \\ \hline 0 = -z \end{array} \qquad z = 0$$

$z = 0$ y $x = t$

$2x + 2y = 0 \Rightarrow x = -y$

solución : $x = t$
$y = -t$
$z = 0$

* Si $\lambda = 0$

$$\left.\begin{array}{l} 2y + 2z = 0 \\ 2y + z = 0 \end{array}\right\} - \begin{array}{l} \cancel{2y} = -2z \\ \cancel{2y} = -z \\ \hline 0 = -z \Rightarrow z = 0 \end{array}$$

$2y + 0 = 0$

$2y = 0 \Rightarrow y = 0$ $\qquad x = t$

Solución: $x = t$
$y = 0$
$z = 0$

7 Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & m \\ m-1 & 0 & 2 \\ 0 & 1-m & 0 \end{pmatrix}$

a) Halla el valor, o valores, de m para los que la matriz A tiene rango 2.

b) Para $m = 1$, determina A^{2015}

a)

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & m \\ m-1 & 0 & 2 \\ 0 & 1-m & 0 \end{vmatrix} = (m-1)(1-m)(m) \Rightarrow (m-m^2-1+m)m \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cancel{m^2} - \cancel{m^3} - m + \cancel{m^2} = 0$$

$$\Rightarrow -m^3 + 2m^2 - m = 0$$

$$-m^3 + 2m^2 - m = 0$$

$$m(-m^2 + 2m - 1) = 0 \quad \begin{cases} m = 0 \\ -m^2 + 2m - 1 = 0 \end{cases}$$

$$m = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4(-1)(-1)}}{-2} = \frac{-2 \pm \sqrt{0}}{-2} = 1$$

Para que A tenga rango 2, el determinante de $A = 0$. $|A|$ solo se hace 0 para $m = 0$ y $m = 1$

* Cuando $m = 0 \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$; $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$

Rang $(A) = 2$

* Cuando $m = 1 \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$; $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$

Rang $(A) = 2$

b) $m=1$

* Para $m=1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\cdots$$

$$A^{2015} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ya que cualquier matriz multiplicada por A^3, da A^3

③ Considera el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + \alpha z = 2 \\ 2x + \alpha y = \alpha + 4 \\ 3x + y + (\alpha+4)z = 7 \end{cases}$$

a) Discute el sistema según los valores de α

b) Resuelve el sistema para $\alpha = 2$

$$\left.\begin{array}{l} x + \alpha z = 2 \\ 2x + \alpha y = \alpha + 4 \\ 3x + y + (\alpha+4)z = 7 \end{array}\right\} \overbrace{\left(\underbrace{\begin{array}{ccc} 1 & 0 & \alpha \\ 2 & \alpha & 0 \\ 3 & 1 & \alpha+4 \end{array}}_{A} \left| \begin{array}{c} 2 \\ \alpha+4 \\ 7 \end{array}\right.\right)}^{A'}$$

$$|A| = \alpha(\alpha+4) + 2\alpha - 3\alpha^2 = \cancel{\alpha^2} + 4\alpha + 2\alpha - 3\cancel{\alpha^2} =$$

$$= -2\alpha^2 + 6\alpha = 2\alpha(-\alpha+3) \begin{cases} \alpha = 0 \\ \alpha = 3 \end{cases}$$

* Si $\alpha \neq 0$ y $\alpha \neq 3$

Rang $(A) = 3 =$ Rang $(A') =$ nº incógnitas $\Rightarrow$ SCD

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & \alpha \\ \alpha+4 & \alpha & 0 \\ 7 & 1 & \alpha+4 \end{vmatrix} = (2\alpha)(\alpha+4) + (\alpha+4)(\alpha) - 7\alpha^2 =$$

$$= 2\cancel{\alpha^2} + 8\alpha + \cancel{\alpha^2} + 4\alpha - \cancel{7\alpha^2} =$$

$$= -4\alpha^2 + 12\alpha = -4\alpha(\alpha+3)$$

$$x = \frac{4\alpha(-\alpha+3)}{2\alpha(-\alpha+3)} = 2$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & \alpha \\ 2 & \alpha+4 & 0 \\ 3 & 7 & \alpha+4 \end{vmatrix} = (\alpha+4)(\alpha+4) + 14\alpha - 3\alpha(\alpha+4)$$

$$-4(\alpha+4) =$$

$$= \cancel{\alpha^2} + \cancel{4\alpha} + \cancel{4\alpha} + \cancel{16} + \cancel{14}\alpha - 3\cancel{\alpha^2} - \cancel{12}\alpha - \cancel{4\alpha} - \cancel{16}$$

$$-2\alpha^2 + 6\alpha = 2\alpha(-\alpha + 3)$$

$$y = \frac{2\alpha(-\alpha+3)}{2\alpha(-\alpha+3)} = 1$$

$$|A_z| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & \alpha & \alpha+4 \\ 3 & 1 & 7 \end{vmatrix} = \cancel{7}\cancel{\alpha} + \cancel{4} - \cancel{6\alpha} - \cancel{\alpha} - \cancel{4} = 0 \; ; \; z = 0$$

* Si $\alpha = 0 \longrightarrow \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 1 & 4 & 7 \end{vmatrix} = 0$

Rang $(A) = 2 =$ Rang $(A') \neq$ nº incog. $\Rightarrow$ SCI

$$\left.\begin{array}{l} x = 2 - \alpha z \\ 2x + \alpha y = \alpha + 4 \\ 3x + y = 7 - (\alpha+4)z \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} x = 2 \\ 2x = 4 \Rightarrow x = 2 \\ 3x + y = 7 - 4z \end{array}$$

$$3(2) + y = 7 - 4z$$

$$y = 1 - 4z \qquad z = \lambda$$

Sol $\left\{\begin{array}{l} x = 2 \\ y = 1 - 4\lambda \\ z = \lambda \end{array}\right.$

* Si $\alpha = 3 \longrightarrow \begin{vmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 7 \\ 1 & 7 & 7 \end{vmatrix} = 42 + 21 - 63 = 0$

Rang $(A) = 2 =$ Rang $(A') \neq$ nº incog $\Rightarrow$ SCI

$$\left.\begin{array}{l} x = 2 - \alpha z \\ 2x + \alpha y = \alpha + 4 \\ 3x + y = 7 - (\alpha+4)z \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x = 2 - 3z \\ 2x + 3y = 7 \\ 3x + y = 7 - 7z \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} z = \lambda \\ x = 2 - 3\lambda \\ y = 1 - 2\lambda \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} 2x + 3y = 7 \\ 3x + y = 7 - 7z \end{array}\right\} \begin{array}{l} \cancel{6x} + 9y = 21 \\ \cancel{6x} + 2y = 14 - 14z \\ \hline 7y = 7 - 14z \end{array} \Rightarrow y = \frac{7 - 14z}{7}$$

b) Resuelto en el apartado A.

$\alpha = 2$?,

⑨ Considera el siguiente sistema de ecuaciones

a) Discute el sistema según los valores de λ.

b) Resuelve el sistema para $\lambda = 0$

$$\left.\begin{array}{l} \lambda x + y - z = -1 \\ \lambda x + \lambda z = \lambda \\ x + y - \lambda z = 0 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & 1 & -1 & -1 \\ \lambda & 0 & \lambda & \lambda \\ 1 & 1 & -\lambda & 0 \end{array}\right) = A'$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \lambda & 1 & -1 \\ \lambda & 0 & \lambda \\ 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}}_{A}$$

$$|A| = \cancel{-\lambda} + \cancel{\lambda} - \cancel{\lambda^2} + \cancel{\lambda^2} = 0 \Rightarrow \text{Rang}(A) < 3$$

* Si $\lambda = 0$

$$|A'| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$\text{Rang}(A) = 2 = \text{Rang}(A') \neq$ nº incóg. $\Rightarrow$ <u>SCI</u>

$$\left.\begin{array}{l} \lambda x + y - z = -1 \\ \lambda x + \lambda z = \lambda \\ x + y - \lambda z = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} \lambda x + y = z - 1 \\ \lambda x = \lambda - \lambda z \\ x + y = \lambda z \end{array}\right\} y = z - 1$$

$y = z - 1$

$x + y = \lambda z \Rightarrow x + y = 0 \Rightarrow x = -y \Rightarrow x = -z + 1$

$z = t$

$$\text{Solución} \left\{\begin{array}{l} x = -t + 1 \\ y = t - 1 \\ z = t \end{array}\right.$$

* Si $\lambda \neq 0$ $\quad \text{Rang}(A) = 2 \neq \text{Rang}(A') = 3 \Rightarrow$ SI

b) $\lambda = 0$

$x = 1$

$y = -1$

$z = 0$

(10) Considera las matrices: $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & m \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & m & 0 \\ 3 & 2 & m \end{pmatrix}$

a) Encuentra el valor, o valores de m para los que A y B tienen el mismo rango

b) Determina, si existen, los valores de m para los que A y B tienen el mismo determinante.

a)

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & m \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & m & 0 \\ 3 & 2 & m \end{pmatrix}$$

$|A| = -1m - 4 = 0$

$-m = 4$

$m = -4 \Rightarrow Rang(A) = 1$

$m \neq -4 \Rightarrow Rang(A) = 2$

$|B| = m^2 + 4m$

$m(m+4) \begin{cases} m=0 \\ m=-4 \end{cases}$

$Rang(B) = 2$

$Rang(B) = 3 \Rightarrow m \neq 0$ y $m \neq -4$

$=$ Rang $\Rightarrow$ $Rang(A) = Rang(B) = 2 \Rightarrow m = 0$

b) $-m - 4 = m^2 + 4m \Rightarrow$ Igualamos determinantes

$m^2 + 5m + 4 = 0 \Rightarrow$

$$m = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 4(4)}}{2} = \frac{-5 \pm 3}{2} \begin{cases} -4 \\ -1 \end{cases}$$

Cuando $m = -4$ y $m = -1 \Rightarrow |A| = |B|$

11 Considera las matrices

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Determina la matriz X para que $A^t X B^{-1} = C$

b) Calcula el determinante de $B^{-1}(C^t C)B$

$$A^t X B^{-1} = C$$

$$X = (A^t)^{-1} C B$$

$$A^t = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow |A^t| = 1 - 4 = -3$$

$$(A^t)^{-1} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix};$$

$$X = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{10}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{5}{3} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -7 & \frac{10}{3} & 0 \\ -3 & \frac{5}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

b)

$$|B^{-1}| \cdot |C^t C| \cdot |B| = ? = |C^t C|$$

$$B^{-1} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & -7 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -7 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -7 & -2 & 1 \end{pmatrix} = B^{-1}$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \qquad |B^{-1}| = 1$$

$$(C^t C) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 0 \\ -5 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|C^t C| = 0$$

(12) Considera el siguiente sistema de ecuaciones

a) Resuelve el sistema para $\alpha = 1$

b) Determina, si existen, el valor de α para el que $(x, y, z) = (1, -3, \alpha)$ es la única solución del sistema dado

$$\left.\begin{array}{l} 2x + y + (\alpha-1)z = \alpha - 1 \\ x - \alpha y - 3z = 1 \\ x + y + 2z = 2\alpha - 2 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & \alpha-1 & \alpha-1 \\ 1 & -\alpha & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2\alpha-2 \end{array}\right)$$

a) $$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$|A| = -4 - 3 + 6 - 2$

$|A| = -3$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -2 \Rightarrow x = \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3}$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 \Rightarrow y = \frac{4}{-3}$$

$$|A_z| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 - 2 = -1 \Rightarrow z = \frac{1}{3}$$

b) $x = 1$
$y = -3$
$z = \alpha$

$$\left.\begin{array}{l} 2 + (-3) + (\alpha - 1)(\alpha) = \alpha - 1 \\ 1 - \alpha(-3) - 3(\alpha) = 1 \\ 1 + (-3) + 2(\alpha) = 2\alpha - 2 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha^2 - 2\alpha = 0 \\ 1 + 3\alpha - 3\alpha = 1 \\ -2 + 2\alpha = 2\alpha - 2 \end{array}\right\} \alpha^2 - 2\alpha = 0$$

$$\alpha^2 - 2\alpha = 0 \Rightarrow \alpha(\alpha - 2) < \begin{array}{l} \alpha = 0 \\ \alpha = 2 \end{array}$$

* Si $\alpha = 0$ Rang $(A) = 2 =$ Rang $(A') \neq$ nº incog.

SCI $\Rightarrow \infty$ sol

Por tanto, no va a ser solución única.

* Si $\alpha = 2$ Rang $(A) = 3 =$ Rang $(A') =$ nº incog $\Rightarrow$ SCD

Al ser SCD, sabemos que la solución será:

$x = 1$
$y = -3$
$z = 2$

EJERCICIOS SELECTIVIDAD

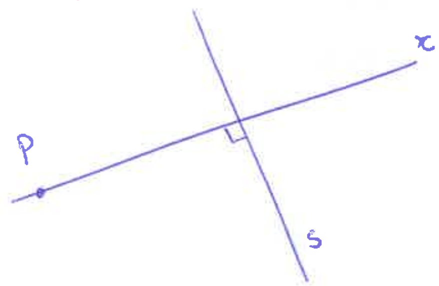
(Acts Nº4)

1. Halla las ecuaciones paramétricas para la recta r, que contiene al punto $P(3,-5,4)$ y corta perpendicularmente a la recta s.

$$s \equiv \frac{x-4}{5} = \frac{y-8}{-3} = \frac{z}{4}$$

$P(3,-5,4)$

$\perp$ a s



Cualquier punto M de la recta s tiene de coordenadas:

$$s: \begin{cases} x = 4+5t \\ y = 8-3t \\ z = 4t \end{cases}$$

$M(4+5t, 8-3t, 4t)$

$\vec{PM}(1+5t, 13-3t, -4+4t)$

El vector $\vec{PM}$ ha de ser $\perp$ a el $\vec{d}(5,-3,4)$

De forma que al hacer sus productos escalares, deben ser $= 0$.

$\vec{PM} \cdot \vec{d} = (5,-3,4)(1+5t, 13-3t, -4+4t) = 0$

$\vec{PM} \cdot \vec{d} = 5 + 25t - 39 + 9t - 16 + 16t = 0 \Rightarrow 50t = 50 \Rightarrow \underline{\underline{t=1}}$

Por tanto, el vector

$\vec{PM} = (6, 10, 0)$

La ecuación paramétrica es, a partir del punto P(3,-5,4) y vector director es $\vec{PM}(6,10,0)$

$$(x,y,z) = (3,-5,4) + \lambda(6,10,0)$$

$$s = \begin{cases} x = 3 + 6\lambda \\ y = -5 + 10\lambda \\ z = 4 \end{cases}$$

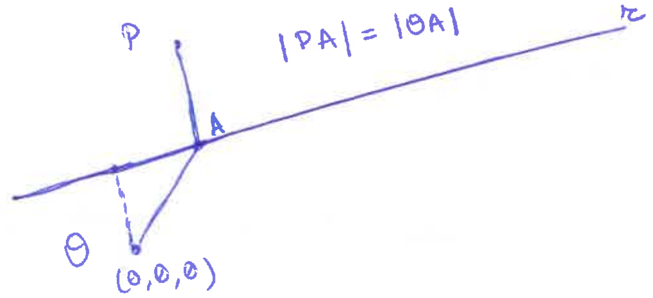
② Sea r la recta de ecuación $\frac{x+2}{3} = \frac{y+1}{4} = z$

a) Halla el punto de r que equidista del origen de coordenadas y del P(4,-2,2)

b) Determina el punto de la recta r más próximo al origen de coordenadas.

$O(0,0,0)$

$P(4,-2,-2)$



Pasamos la recta s a ecuación paramétricas:

$$\frac{x+2}{3} = \frac{y+1}{4} = z \qquad \begin{cases} x = -2+3\mu \\ y = -1+4\mu \\ z = \mu \end{cases}$$

las coordenadas de cualquier punto de la recta son:

$$A = (-2+3\mu,\ -1+4\mu,\ \mu)$$

se debe cumplir, que la distancia $|OA| = |PA|$

$$\vec{OA} = (-2+3\mu,\ -1+4\mu,\ \mu) \Rightarrow |\vec{OA}| = \sqrt{(3\mu-2)^2+(4\mu-1)^2+\mu^2} \Rightarrow$$

$$|\vec{OA}| = \sqrt{9\mu^2+4-12\mu+16\mu^2+1-8\mu+\mu^2} = \sqrt{26\mu^2-20\mu+5}$$

$$\vec{PA} = (-6+3\mu,\ 1+4\mu,\ -2+\mu) \Rightarrow |\vec{PA}| = \sqrt{(3\mu-6)^2+(4\mu+1)^2+(\mu-2}$$

$$|\vec{PA}| = \sqrt{9\mu^2+36-36\mu+16\mu^2+1+8\mu+\mu^2+4-4\mu} = \sqrt{26\mu^2-32\mu+41}$$

Por tanto, como $|PA| = |OA|$

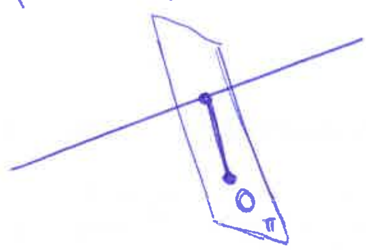
$$\left(\sqrt{26\mu^2 - 20\mu + 5}\right)^2 = \left(\sqrt{26\mu^2 - 32\mu + 41}\right)^2$$

$$\cancel{26\mu^2} - 20\mu + 5 = \cancel{26\mu^2} - 32\mu + 41$$

$$12\mu = 36 \Rightarrow \mu = \frac{36}{12} = 3$$

$$A = (7, 11, 3)$$

6) Calculamos $\pi \perp$ a r que pasa por O



Como el vector $\vec{n}(3, 4, 1)$

el plano es:

$$\pi: 3x + 4y + z + d = 0 \Rightarrow D = 0$$

$$\pi: 3x + 4y + z = 0$$

Punto de corte recta y plano

$$3(-2+3\mu) + 4(-1+4\mu) + \mu = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -6 + 9\mu - 4 + 16\mu + \mu = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 26\mu - 10 = 0 \Rightarrow \mu = \frac{10}{26} = \frac{5}{13}$$

$$X = \text{punto de corte} = \left(-\frac{11}{13}, \frac{7}{13}, \frac{5}{13}\right)$$

③ Considera los puntos $B(1,2,-3)$, $C(9,-1,2)$ $D(5,0,-1)$ y $r \equiv \begin{cases} x+y+1=0 \\ y-z=0 \end{cases}$

a) Calcula el área del triángulo cuyos vértices son B, C, y D.

b) Halla un punto A en la recta r de forma que el triángulo ABC sea rectángulo en A.

a) Para hallar el área aplicamos el producto vectorial, para luego dividirlo por 2.

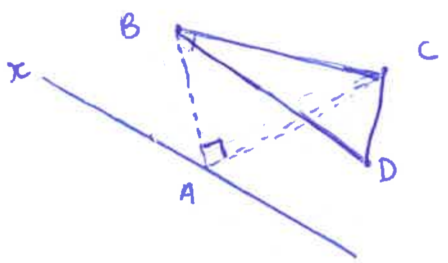
$$\text{Area}_{\text{triangulo}} = \frac{1}{2} |\vec{BC} \times \vec{BD}|$$

$B(1,2,-3)$
$C(9,-1,2)$ $\Rightarrow \vec{BC}(8,-3,5)$
$D(5,0,-1)$ $\Rightarrow \vec{BD}(4,-2,2)$

$$\vec{BC} \times \vec{BD} = (4,4,-4) \Rightarrow |(4,4,-4)| = \sqrt{4^2+4^2+(-4)^2}$$
$$|(4,4,-4)| = \sqrt{48}$$

$$\text{Area}_{\text{triangulo}} = \frac{\sqrt{48}}{2} = \sqrt{12} = 3'46\ u^2$$

b)



$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 0$$

Pasamos la recta r a paramétricas:

$$r \equiv \begin{cases} x+y+1=0 & \rightarrow \vec{n}(1,1,0) \\ y-z=0 & \rightarrow \vec{n}'(0,1,-1) \end{cases} \Rightarrow \vec{n} \times \vec{n}' = (-1,1,1) = \vec{d}$$

Ese vector junto con el punto P,

$y=0 \Rightarrow P(-1, 0, 0)$ hallamos las paramétricas

$$r = \begin{cases} x = -1 - t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$$

cualquier punto de r será $A = (-1-t, t, t)$

$$\vec{AB} = (2+t, 2-t, -3-t)$$
$$\vec{AC} = (10+t, -1-t, 2-t)$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 0 \Rightarrow (2+t)(10+t) + (2-t)(-1-t) + (-3-t)(2-t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cancel{20} + \cancel{2t} + \cancel{10t} + t^2 \cancel{-2} \cancel{-2t} + \cancel{t} + \cancel{t^2} \cancel{-6} + \cancel{3t} - \cancel{2t} + t^2 = 0$$

$$\Rightarrow 3t^2 + 12t + 12 = 0$$

$$t = \frac{-12 \pm \sqrt{12 - 4(3)(12)}}{6} = \frac{-12 \pm 0}{6} \Rightarrow t = -2$$

Por tanto, $A = (1, -2, -2)$

(4) Considera el punto $P(1,0,-1)$ y la recta r dada por $\begin{cases} x+y=0 \\ z-1=0 \end{cases}$

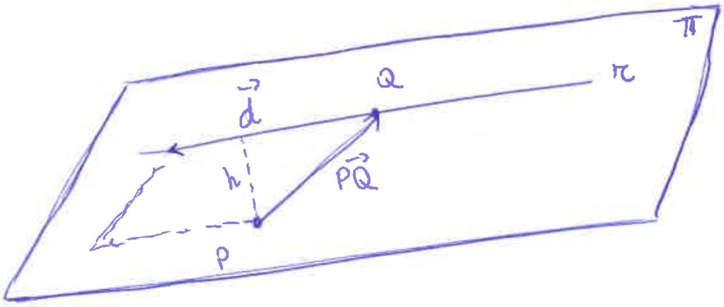
a) Halla la distancia de P a r.

b) Determina la ecuación general del plano que pasa por P y contiene a r.

$P(1,0,-1)$

$Q(0,0,1)$

$\vec{PQ}(-1,0,2)$



$r = \begin{cases} x+y=0 \\ z-1=0 \end{cases}$ Nos tomamos un punto Q de r

Hallamos las paramétricas de r.

$r = \begin{cases} x+y=0 \to \vec{n}\,(1,1,0) \\ z-1=0 \to \vec{n}'\,(0,0,1) \end{cases} \Rightarrow \vec{n} \times \vec{n}' = (1,-1,0) = \vec{d}$

$Q = (0,0,1)$

$r = \begin{cases} x = \mu \\ y = -\mu \\ z = 1 \end{cases}$ $\quad \vec{d}(P,r) = \dfrac{|\vec{QP} \times \vec{d}|}{|\vec{d}|} = h$

$\vec{PQ} \times \vec{d} = (-1,0,2) \times (1,-1,0) = (2,-2,1)$

$|\vec{PQ} \times \vec{d}| = \sqrt{2^2+2^2+1^2} = 3 \; ; \; |\vec{d}| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$

$\text{dist}(P,r) = \dfrac{3}{\sqrt{2}} = 2'12\,u$

El plano π, viene definido por el vector $\vec{d}$, el vector $\vec{PQ}$ y el punto P.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & x-1 \\ -1 & 0 & y \\ 0 & 2 & z+1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2(x-1) - 2y - (z+1) = -2x + 2 - 2y - z - 1$$

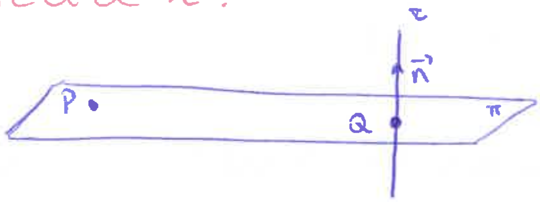
$$\Rightarrow \pi: -2x - 2y - z + 1 = 0$$

5. Considera el punto $P(-3,1,6)$ y la recta r dada por $\begin{cases} 2x - y - 5 = 0 \\ y - z + 2 = 0 \end{cases}$

a) Determina la ecuación del plano que pasa por P y es perpendicular a r.

b) Calcula las coordenadas del punto simétrico de P respecto de la recta r.

$P(-3,1,6)$



Para hallar el plano π debemos hallar el vector normal $\vec{n}$ de la recta r y el punto P, ya dado.

$$\left.\begin{array}{l} 2x - y - 5 = 0 \\ y - z + 2 = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \vec{d}\,(2,-1,0) \\ \vec{d}'\,(0,1,-1) \end{array} \Rightarrow \vec{d} \times \vec{d}' = (1,2,2) = \vec{n}$$

El prod. vectorial $\vec{d} \times \vec{d}'$ nos da el vector normal $\vec{n}$

$$\pi \equiv 1(x+3) + 2(y-1) + 2(z-6) = 0$$

b) Para hallar el punto simétrico de P respecto a r debemos hallar el punto Q intersección de la recta y el plano. Así se haría el punto simétrico de P respecto a Q.

$$\pi \equiv x + 3 + 2y - 2 + 2z - 12 = 0 \Rightarrow \pi \equiv x + 2y + 2z - 11 = 0$$

Pasamos la recta a paramétricas. Nos tomamos un punto, X, siendo $x = 0 \Rightarrow X = (0, -5, -3)$

$$r \equiv \begin{cases} x = \mu \\ y = -5 + 2\mu \\ z = -3 + 2\mu \end{cases}$$

Para hallar el punto de corte de r con π:

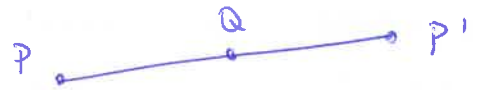
$$(\mu) + 2(-5+2\mu) + 2(-3+2\mu) - 11 = 0$$

$$\mu - 10 + 4\mu - 6 + 4\mu - 11 = 0$$

$$9\mu = 10 + 6 + 11 \Rightarrow 9\mu = 27 \Rightarrow \mu = 3$$

$$Q = (3, 1, 3)$$

Ahora hacemos el simétrico de P respecto a Q.



$P(-3, 1, 6)$

$Q(3, 1, 3)$

$P'(x, y, z)$

$$\frac{-3+x}{2} = 3 \Rightarrow -3+x = 6 \Rightarrow \underline{\underline{x = 9}}$$

$$\frac{1+y}{2} = 1 \Rightarrow 1+y = 2 \Rightarrow \underline{\underline{y = 1}}$$

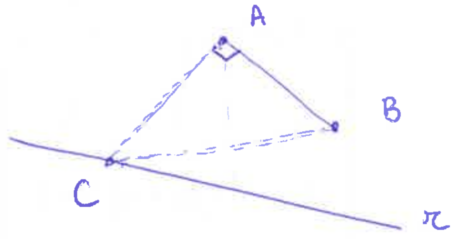
$P'(9, 1, 0)$

$$\frac{6+z}{2} = 3 \Rightarrow 6+z = 6 \Rightarrow \underline{\underline{z = 0}}$$

⑥ Los puntos $A(0,1,1)$ y $B(2,1,3)$ son 2 vértices de un triángulo. El tercer vértice es un punto de la recta r dada por $\begin{cases} 2x + y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

a) Las coordenadas de los posibles puntos C de r para que el triángulo ABC tenga un ángulo recto en el vértice A.

b) Calcula las coordenadas de los posibles puntos D de r para que el triángulo ABD tenga un área igual a $\sqrt{2}$



$\vec{AC} \cdot \vec{AB} = 0$

$A(0,1,1)$

$B(2,1,3)$

Pasamos la recta a paramétricas

$r \equiv \begin{cases} 2x + y = 0 \Rightarrow \vec{n}(2,1,0) \\ z = 0 \Rightarrow \vec{n}'(0,0,1) \end{cases} \Rightarrow \vec{n} \times \vec{n}' = (1,-2,0) = \vec{d}$

$P = (0,0,0)$

$r = \begin{cases} x = t \\ y = -2t \\ z = 0 \end{cases}$ Cualquier punto C tendrá:

$C = (t, -2t, 0)$

$\vec{AC} = (t, -2t-1, -1)$

$\vec{AB} = (2, 0, 2)$

$\vec{AC} \cdot \vec{AB} = (t, -2t-1, -1) \cdot (2,0,2) = 2t - 2 = 0 \Rightarrow t = 1$

Por tanto, el punto C será:

$C(1,-2,0)$

b) $D = (t, -2t, 0)$ son las coordenadas de D.

$AB = (2, 0, 2)$
$AD = (t, -2t-1, -1)$

$$A_{ABD} = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AD}| = \sqrt{2}$$

$$\vec{AB} \times \vec{AD} = \begin{matrix} (2, & 0 & ,2) \\ (t, & -2t-1, & -1) \end{matrix} =$$

$$= -2(-2t-1) - (-2 \cdot 2t) + 2(-2t-1) =$$

$$= \cancel{4t} + \cancel{2} + 2 + 2t - \cancel{4t} - \cancel{2} = 2t + 2$$

← No vale

$$\vec{AB} \times \vec{AD} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 0 & 2 \\ t & -(2t+1) & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2(-2t-1)\vec{k} + 2t\vec{j} - 2(-2t-1)\vec{i} + 2\vec{j} =$$

$$= (4t+2)\vec{i} + (2t+2)\vec{j} + (-4t-2)\vec{k}$$

$$|\vec{AB} \times \vec{AD}| = \sqrt{(4t+2)^2 + (2t+2)^2 + (4t+2)^2} =$$

$$= \sqrt{16t^2 + 4 + 16t + 4t^2 + 4 + 8t + 16t^2 + 4 + 16t} =$$

$$= \sqrt{36t^2 + 40t + 12} \Rightarrow$$

$$A_{ABD} = \frac{1}{2}\sqrt{36t^2 + 40t + 12} = \sqrt{2} \Rightarrow$$

$$36t^2 + 40t + 12 = 2^3 \Rightarrow 36t^2 + 40t + 4 = 0$$

$$9t^2 + 10t + 1 = 0$$

$$t = \frac{-10 \pm \sqrt{100 - 4(9)}}{18} = \frac{-10 \pm 8}{18} < \begin{matrix} -1 = t \\ -0'1 = t \end{matrix}$$

luego D sera $= (-1, 2, 0)$ y $D' = (-\frac{1}{9}, \frac{2}{9}, 0)$

7) Sean los planos $\pi \equiv x + 3y + 2z - 5 = \emptyset$

y $\pi' \equiv -2x + y + 3z + 3 = \emptyset$

a) Determina el ángulo que forman π y π'

b) Calcula el volumen del tetraedro limitado por π y planos coordenados

$\pi \equiv x + 3y + 2z - 5 = \emptyset \rightarrow \vec{n} = (1, 3, 2)$

$\pi' \equiv -2x + y + 3z + 3 = \emptyset \longrightarrow \vec{n}' = (-2, 1, 3)$

Para determinar el α que forman, necesitamos hallar sus vectores $\vec{n}$.

$$\cos \alpha = \frac{\vec{n} \cdot \vec{n}'}{|\vec{n}| \cdot |\vec{n}'|} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{-2 + 3 + 6}{\sqrt{1^2+3^2+2^2}\sqrt{2^2+1^2+3^2}} \Rightarrow$$

$$\cos \alpha = \frac{7}{14} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 60°$$

b)

$x = \emptyset \quad y = \emptyset \Rightarrow z = \frac{5}{2} \qquad (\emptyset, \emptyset, \frac{5}{2})$

$y = \emptyset \quad z = \emptyset \Rightarrow x = 5 \qquad (5, \emptyset, \emptyset)$

$z = \emptyset \quad x = \emptyset \Rightarrow y = \frac{5}{3} \qquad (\emptyset, \frac{5}{3}, \emptyset)$

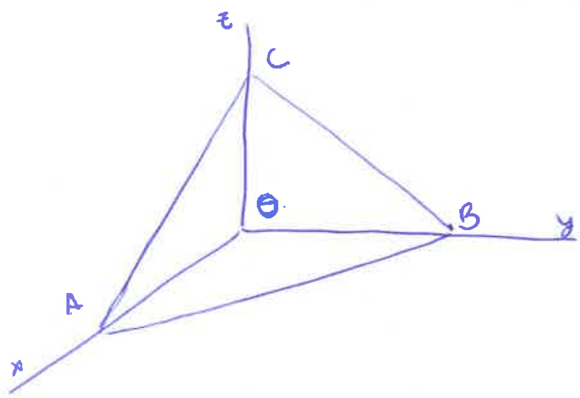
Estos son los puntos de corte del plano.

Calculamos

$\vec{OA} = (5, \emptyset, \emptyset)$

$\vec{OB} = (\emptyset, \frac{5}{3}, \emptyset)$

$\vec{OC} = (\emptyset, \emptyset, \frac{5}{2})$



$$\text{Volumen}_{\text{tetraedro}} = \frac{\frac{1}{2}\,|\vec{AB} \times \vec{AC}|\,\vec{AD}}{3} = \frac{|[\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}]|}{6}$$

$$[\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}] = \begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5/3 & 0 \\ 0 & 0 & 5/2 \end{vmatrix} = \frac{125}{36}\,u^3 = 3'47\,u^3$$

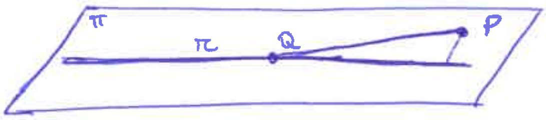
(8) Sean el punto $P(1,6,-2)$ y la recta

$$r \equiv \frac{x-5}{6} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z}{2}$$

a) Halla la ecuación general del plano π que contiene al punto P y a la recta r.

b) Calcula la distancia entre el punto P y la recta r.

$P(1,6,-2)$



$$r \equiv \begin{cases} x = 5+6\mu \\ y = -1-3\mu \\ z = 2\mu \end{cases}$$

Tomamos un punto de r, por ejemplo; $Q=(5,-1,0)$

$\vec{QP}(-4,7,-2)$ $\quad \vec{d}_r(6,-3,2)$

$$\begin{vmatrix} -4 & 6 & x-5 \\ +7 & -3 & y+1 \\ -2 & 2 & z \end{vmatrix} = 0 =$$

$$= 12z + 14(x-5) - 12(y+1) - 6(x-5) + 8(y+1) - 42z =$$

$$= 12z + 14x - 70 - 12y - 12 - 6x + 30 + 8y + 8 - 42z =$$

$$= 8x - 4y - 30z - 44 = 0 \Rightarrow 4x - 2y - 15z - 22 = 0$$

b) $\quad \text{dist}(P,\pi) = \dfrac{|\vec{QP} \times \vec{d}|}{|\vec{d}|} = \dfrac{\sqrt{980}}{7} = 4'47\ u$

$$\vec{QP} \times \vec{d} = \begin{matrix}(-4,7,-2) \\ (6,-3,2)\end{matrix} = (8,-4,-30) \Rightarrow |\vec{QP} \times \vec{d}| = \sqrt{980}$$

$$|\vec{d}| = \sqrt{6^2+9+4} = 7$$

9) Sea r la recta definida por $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ z=\lambda-2 \end{cases}$

y s la recta dada por $\begin{cases} x-y=1 \\ z=-1 \end{cases}$

a) Halla la ecuación de la recta que corta perpendicularmente a las rectas dadas

b) Calcula la distancia entre r y s.

Pasamos ambas ecuaciones a paramétricas:

$$s=\begin{cases} x-y=1 & \Rightarrow \vec{v}(1,-1,0) \\ z=-1 & \Rightarrow \vec{u}(0,0,1) \end{cases} \Rightarrow \vec{v}\times\vec{u}=(-1,-1,0)=\vec{d}$$

$$\vec{d}=(-1,-1,0)=(1,1,0)$$

$y=0 \Rightarrow P(1,0,-1)$

$$r\equiv\begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ z=\lambda-2 \end{cases} \qquad s\equiv\begin{cases} x=1+\mu \\ y=\mu \\ z=-1 \end{cases}$$

Cualquier punto de la recta r será:

$A=(1,\ 1,\ \lambda-2)$

Cualquier punto de la recta s será:

$B=(1+\mu,\ \mu,\ -1)$

$\vec{AB}=(\mu,\ \mu-1,\ -\lambda+1)$ Al ser $\vec{AB}\perp$ a la recta...

$$\vec{AB}\cdot\vec{u}=0 \Rightarrow (\mu,\mu-1,-\lambda+1)\cdot(0,0,1)=0 \Rightarrow -\lambda+1=0$$

$$\underline{\lambda=1}$$

$$\vec{AB}\cdot\vec{v}=0 \Rightarrow (\mu,\mu-1,-\lambda+1)\cdot(1,1,0)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mu+\mu-1=0 \Rightarrow 2\mu-1=0 \Rightarrow 2\mu=1 \Rightarrow \underline{\mu=\tfrac{1}{2}}$$

Por tanto, los puntos A y B que están a la mínima distancia son:

$$A = (1, 1, -1) \qquad B = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -1\right)$$

a) la recta viene dada por

$A(1, 1, -1)$

$\vec{AB}\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right)$

$$(x, y, z) = (1, 1, -1) + j\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right)$$

$$j \equiv \begin{cases} x = 1 + \frac{1}{2} j \\ y = 1 - \frac{1}{2} j \\ z = -1 \end{cases}$$

b) $$|\vec{AB}| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 0^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0'70\ u$$

10 Considera el plano π de ecuación $mx+5y+2z=0$ y la recta r dada por

$$\frac{x+1}{3} = \frac{y}{n} = \frac{z-1}{2}$$

a) Calcula m y n en el caso en el que la recta r es $\perp$ al plano π.

b) Calcula m y n en el caso en el que la recta r está contenida en el plano π.

a) Si $r \perp \pi \Rightarrow \vec{d}_r = \vec{n}_\pi$ o proporcionales

$$r \equiv \frac{x+1}{3} = \frac{y}{n} = \frac{z-1}{2} \Rightarrow \vec{d}\,(3, n, 2)$$

$$\pi \equiv mx + 5y + 2z = 0 \Rightarrow \vec{n}\,(m, 5, 2)$$

$$\frac{3}{m} = \frac{n}{5} = \frac{2}{2} \Rightarrow m = 3 \quad y \quad n = 5$$

b) Si r está contenida en $\pi \Rightarrow \vec{d}_r \perp \vec{n}_\pi$

$$\Downarrow$$

$$\vec{d}_r \cdot \vec{n}_\pi = 0$$

Un punto de r debe pertenecer a π

Ponemos r en paramétricas:

$$r \equiv \begin{cases} x = -1 + 3\lambda \\ y = n\lambda \\ z = 1 + 2\lambda \end{cases}$$

Sustituimos el punto $(-1, 0, 1)$ en el plano:

$$\pi: m(-1) + 5(0) + 2(1) = 0 \Rightarrow -m + 2 = 0 \Rightarrow \underline{\underline{m = 2}}$$

$$\vec{d}_r \cdot \vec{n}_\pi = 0 \Rightarrow (3, n, 2) \cdot (2, 5, 2) = 0$$

$$\Rightarrow 6 + n5 + 4 = 0 \Rightarrow 5n = -10 \Rightarrow \underline{\underline{n = -2}}$$

(11) Sean los puntos $A(0,1,1)$ $B(2,1,3)$ $C(-1,2,0)$ y $D(2,1,m)$

a) Calcula m para que A, B, C y D estén en un mismo plano.

b) Determina la ecuación del plano respecto del cual los puntos A y B son simétricos

c) Calcula el área del triángulo de vértices A, B y C.

$A(0,1,1)$

$B(2,1,3)$

$C(-1,2,0)$

$D(2,1,m)$

Para que pertenezcan al mismo plano, es decir, coplanarios, los vectores $\vec{AB}$, $\vec{AC}$, $\vec{AD}$; su producto mixto debe ser $= 0$

$\vec{AB}(2,0,2)$

$\vec{AC}(-1,1,-1)$

$\vec{AD}(2,0,m-1)$

$$[(\vec{AB},\vec{AC},\vec{AD})] = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & m-1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & m-1 \end{vmatrix} = 0 = 2(m-1)-4 \Rightarrow 2m-2-4=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2m-6=0 \Rightarrow 2m=6 \Rightarrow \underline{\underline{m=3}}$$

b) Para hallar ese plano, solo necesitamos un vector normal, como puede ser el vector $\vec{AB}$ y un punto, es decir, el punto intermedio de A y B.

$Q(x, y, z)$ $\qquad \frac{0+2}{2} = x = 1$

$\vec{AB}(2, 0, 2)$ $\qquad \frac{1+1}{2} = y = 1 \quad \Rightarrow Q(1, 1, 2)$

$A(0, 1, 1)$

$B(2, 1, 3)$ $\qquad \frac{3+1}{2} = z = 2$

$\pi: \ 2(x-1) + 0(y-1) + 2(z-2) = 0$

$2x - 2 + 2z - 4 = 0$

$2x + 2z - 6 = 0 \Rightarrow x + z - 3 = 0$

c) $\vec{AB}(2, 0, 2)$

$\vec{AC}(-1, 1, -1)$

$$Area_{\Delta} = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}|$$

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = (-2, 0, 2) \Rightarrow |\vec{AB} \times \vec{AC}| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8}$$

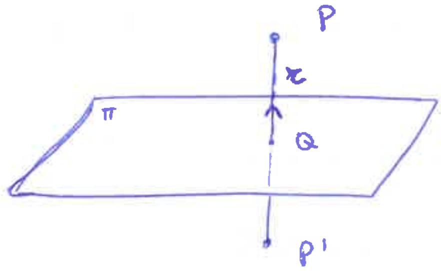
$$Area_{\Delta} = \frac{\sqrt{8}}{2} = 1'41 \ u^2$$

(12) Sea el plano $\pi \equiv 2x + y - z + 8 = 0$

a) Calcula el punto P' simétrico del punto $P(2,-1,5)$ respecto del plano π.

b) Calcula la recta r', simétrica de la recta $r \equiv \frac{x-2}{-2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-5}{1}$ respecto del plano π.

$\pi: 2x + y - z + 8 = 0$



$P(2,-1,5)$

$\vec{n}_\pi (2,1,-1) = \vec{d}_r$

Para hallar el punto simétrico, debemos hallar primero la recta ⊥ al plano que queda determinada por el vector $\vec{n}_\pi (2,1,-1)$ y el punto P.

$(x,y,z) = (2,-1,5) + \lambda(2,1,-1)$

$$r: \begin{cases} x = 2 + 2\lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = 5 - \lambda \end{cases}$$

Una vez determinada la recta, hallamos los puntos de corte con el plano.

$2(2+2\lambda) + (-1+\lambda) - (5-\lambda) + 8 = 0$

$4 + \cancel{4\lambda} - 1 + \cancel{\lambda} - 5 + \cancel{\lambda} + 8 = 0$

$6\lambda = -4 + 1 + 5 - 8 \Rightarrow 6\lambda = -6 \Rightarrow \lambda = -1$

$Q = (0,-2,6)$

$P(2,-1,5)$ $\qquad \dfrac{2+x}{2} = 0 \Rightarrow 2+x=0 \Rightarrow \underline{\underline{x=-2}}$

$Q(0,-2,6)$

$P'(x,y,z)$ $\qquad \dfrac{-1+y}{2} = -2 \Rightarrow -1+y=-4 \Rightarrow \underline{\underline{y=-3}}$

$\qquad \dfrac{5+z}{2} = 6 \Rightarrow 5+z=12 \Rightarrow \underline{\underline{z=7}}$

$P' = (-2,-3,7)$

b) Calculamos el punto de corte de la recta, si existe:

$$r: \begin{cases} x = 2-2\lambda \\ y = -1+3\lambda \\ z = 5+\lambda \end{cases}$$

Sustituimos en el plano π:

$$2(2-2\lambda)+(-1+3\lambda)-(5+\lambda) = -8$$

$$4 - \cancel{4\lambda} - 1 + \cancel{3\lambda} - 5 - \cancel{\lambda} = -8$$

$$-2\lambda = -8-4+1+5$$

$$-2\lambda = -6 \Rightarrow \underline{\underline{\lambda = 3}}$$

Punto corte $(-4,8,8)$

La recta queda definida por el punto $P'(-2,-3,7)$ y el vector $AP'(2,-11,-1)$

$$(x,y,z) = (-4,8,8) + \lambda(2,-11,-1)$$

$$r' = \begin{cases} x = -4+2\lambda \\ y = 8-11\lambda \\ z = 8-\lambda \end{cases}$$

Juan Manuel Mateos Pérez

(Acts N°1) # EJERCICIOS SELECTIVIDAD

1. Halla los valores a, b, y c sabiendo que la gráfica de la función $f(x) = \frac{a\ x^2 + b}{x + c}$ tiene una asíntota vertical en $x = 1$, una asíntota oblicua de pendiente 2 y un extremo local en el punto de abcisa $x = 3$

$$f(x) = \frac{ax^2 + b}{x + C}$$

$\exists$ AV en $x = 1$

$\exists$ AO $m = 2$

$\exists$ extremo local en $x = 3$

Como la AV aparece cuando se anula el denominador...

$$x + C = 0 \Rightarrow x = -C \quad \text{y como } x = 1$$

$$\boxed{C = -1}$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = 2 \Rightarrow \lim_{x \to \infty} \frac{ax^2 + b}{x^2 - x} = 2$$

Para que se cumpla que el $\lim_{x \to \infty} \frac{ax^2 + b}{x^2 - x}$ sea igual a 2; a debe ser igual a 2 ya que cuando el numerador y denominador tienen el mismo grado, se divide a entre 1 (en este caso); por tanto $\boxed{a = 2}$

$$f'(x) = \frac{2x^2+b}{x-1} \Rightarrow f'(x) = \frac{4x(x-1)-(2x^2+b)}{(x-1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{4x^2-4x-2x^2-b}{(x-1)^2} = \frac{2x^2-4x-b}{(x-1)^2} = 0$$

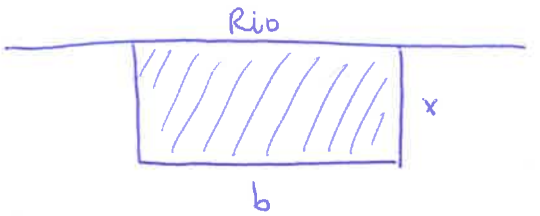
Como 3 es un extremo local de abcisa, $f'(3)=0$

$$f'(3) = \frac{18-12-b}{4} = \frac{6-b}{4} = 0$$

Se anula cuando: $6-b=0$

$$\boxed{b=6}$$

e) Un granjero desea vallar un terreno rectangular de pasto adyacente a un río. EL terreno debe tener 180.000 m^2 para producir suficiente pasto para su ganado. ¿Qué dimensiones tendrá el terreno de modo que utilice la mínima cantidad de valla, si el lado que da al río no necesita vallado?



$A = 180.000 \ m^2$

Mínima cantidad de vaya

$$A = b \cdot x = 180.000 \ m^2 \Rightarrow b = \frac{180.000}{x}$$

Perímetro $= 2x + b$

$$P = 2x + \frac{180.000}{x} = \frac{2x^2 + 180.000}{x}$$

$$P' = \frac{4x^2 - (2x^2 + 180.000)}{x^2} = \frac{4x^2 - 2x^2 - 180.000}{x^2}$$

$$P' = \frac{2x^2 - 180\,000}{x^2} = 0$$ Se anula cuando:

$$2x^2 - 180\,000 = 0 \Rightarrow 2x^2 = 180\,000$$

$$x^2 = 90\,000$$

$$x = \pm 300$$ ← No tiene sentido que sea negativo

Para comprobar que es mínimo:

$$p'' = \frac{4x(x^2) - 2x(2x^2 - 180000)}{x^4} = \frac{\cancel{4x^3} - \cancel{4x^3} + 360000x}{x^4}$$

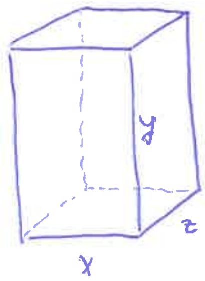
$$p'' = \frac{360000}{x^3} \Rightarrow p''(300) > 0 \Rightarrow \text{mínimo}$$

Por tanto:

$$\boxed{x = 300 \text{ m}}$$

$$b = \frac{180.0\cancel{0}\cancel{0}}{3\cancel{0}\cancel{0}} = \boxed{600\text{m} = b}$$

(3) Se quiere construir un depósito abierto de base cuadrada y paredes verticales con capacidad para 13'5 m³. Para ello, se dispone de una chapa de acero de grosor uniforme. Calcula las dimensiones del depósito para que el gasto en chapa sea el mínimo.



$x = z \rightarrow$ ya que es cuadrado

$$V = 13'5\ m^3 = x \cdot y \cdot z = x^2 y$$

$$A = x^2 + 4xy$$

$$V = 13'5 = x^2 y \Rightarrow y = \frac{13'5}{x^2}$$

$$A = x^2 + 4x\left(\frac{13'5}{x^2}\right)$$

$$A = x^2 + \frac{54x}{x^2} \Rightarrow A = x^2 + \frac{54}{x}$$

$$A' = 2x - \frac{54}{x^2} = 0 \Rightarrow A' = \frac{2x^3 - 54}{x^2} = 0$$

$$2x^3 - 54 = 0 \Rightarrow 2x^3 = 54 \Rightarrow x^3 = 27 \Rightarrow \boxed{x = 3}$$

Para comprobar que es un mínimo:

$$A'' = \frac{6x^2(x^2) - 2x(2x^3 - 54)}{x^4} = \frac{6x^4 - 2x^4 + 108x}{x^4}$$

$$A'' = \frac{4x^4 + 108x}{x^4} \Rightarrow A'' = \frac{4x^3 + 108}{x^3}$$

$$A''(3) = \frac{216}{27} = 8 > 0 \Rightarrow \text{Mínimo}$$

Por tanto:

$$\boxed{x = z = 3m}$$

$$y = \frac{13'5}{9} = \boxed{1'5\,m = y}$$

4

Sabiendo que $\lim_{x \to 0} \frac{ax^2 + bx + 1 - \cos x}{\operatorname{sen}(x^2)}$ es finito e igual a 1

calcula los valores de a y b

$$\lim_{x \to 0} \frac{ax^2 + bx + 1 - \cos x}{\operatorname{sen} x^2} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{p(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{p'(x)} \Rightarrow \text{Regla de L'hôpital}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{2ax + b + \operatorname{sen} x}{\cos x^2 (2x)} = \frac{b}{0} = 1$$

Como dice que el limite ha de ser finito, $\boxed{b = 0}$

para que de esta forma, se obtenga una nueva indeterminación y tengamos que utilizar L'hôpital de nuevo.

$$\lim_{x \to 0} \frac{2a + \cos x}{-\operatorname{sen} x^2 (2x)(2x) + 2(\cos x^2)} = \frac{2a + 1}{2} = 1$$

$$\frac{2a+1}{2} = 1 \Rightarrow 2a + 1 = 2 \Rightarrow 2a = 1 \Rightarrow \boxed{a = \frac{1}{2}}$$

De esta forma hallamos a.

5 Sea la función definida por $f(x) = \frac{e^x}{x-1}$ para $x \neq 1$

a) Estudia y calcula las asíntotas de la gráfica de f

b) Halla los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y los extremos relativos (abcisas donde se obtienen y valores que se alcanzan) de f.

$$f(x) = \frac{e^x}{x-1} \quad \text{para} \quad x \neq 1$$

Asíntotas:

* AV: cuando el denominador $= 0$

$$x - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 1} \Rightarrow \exists \text{ AV en } x = 1$$

* AH: $\lim_{x \to \infty} f(x) = \frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{1} = \infty \Rightarrow \nexists \text{ AH cuando } x \text{ tiende a } \infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \frac{e^{-\infty}}{-\infty} = \frac{0}{-\infty} = 0 \Rightarrow \exists \text{ AH en } y = 0$$

* AO: $\nexists$ AO ya que $\exists$ AH

b) $$f'(x) = \frac{e^x(x-1) - e^x}{(x-1)^2} = \frac{e^x x - e^x - e^x}{(x-1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{e^x(x-2)}{(x-1)^2} = 0$$

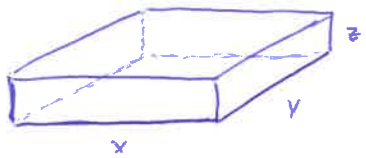
se anula cuando $e^x (x-2) = 0 \Rightarrow x - 2 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 2}$

$f'(0) = \frac{-}{+} < 0 \rightarrow$ Decrece

$\rightarrow \exists$ mínimo en $x=2$

$f'(3) = \frac{+}{+} > 0 \rightarrow$ Crece

6 Queremos fabricar una caja con base cuadrada de tal manera que la altura de la caja más el perímetro de la base sumen 60 cm. Determina sus dimensiones para que contenga el mayor volumen posible.



$x = y$ → ya que la base es cuadrada

$V_{máx} = x\,y\,z = x^2 z$

Perímetro $= 4x$

$z + P = 60$ cm

$z + 4x = 60$ cm $\Rightarrow z = 60 - 4x$

$V = x^2(60-4x)$

$V = -4x^3 + 60x^2$

$V' = -12x^2 + 120x = 0$

$12x(-x+10) = 0 \quad \begin{cases} x = 0 \longrightarrow \text{No tiene sentido} \\ -x+10 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 10} \end{cases}$

Comprobamos que es un máximo:

$V'' = -24x + 120$

$V''(10) < 0 \longrightarrow$ Máximo

Por tanto:

$\boxed{x = 10}$ $\boxed{y = 10}$ $z = 60 - 40 \Rightarrow \boxed{z = 20}$

⑦ Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función dada por $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Halla los coeficientes a, b, c y d sabiendo que f presenta un extremo local en el pto de abcisa $x = 0$ que $(1, 0)$ es pto de inflexión de la gráfica de f y que la pte de la recta tg en dicho punto es -3

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$x = 0 \Rightarrow$ extremo local

$(1, 0) \Rightarrow$ pto inflexión

pte de tg es -3 en ese pto

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c = 0$

$f''(x) = 6ax + 2b = 0$

• Como $\exists$ un extremo local en $x = 0$

$f'(0) = 0 \Rightarrow \boxed{c = 0}$

• Como sabemos que el pto $(1, 0)$ es pto de inflexión

$$\left.\begin{array}{l} f''(1) = 0 \Rightarrow 6a + 2b = 0 \\ \text{Pasa por } (1, 0) \Rightarrow a + b + d = 0 \end{array}\right\} \text{Sistema 2 ecuaciones, 3 incógnitas}$$

Necesitamos otra ecuación

• Como la pte de la tg de f en ese pto $(x = 1)$ tiene $m = -3$

$f'(1) = -3 \Rightarrow 3a + 2b + c = -3 \Rightarrow 3a + 2b = -3$

Sistema
3 ecuaciones
3 incógnitas

$$\left\{\begin{array}{l} 6a + 2b = 0 \\ 3a + 2b = -3 \\ a + b + d = 0 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} a + b + d = 0 \\ (1^a - 2^a) \quad 3a = 3 \Rightarrow \boxed{a = 1} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 6a + 2b = 0 \\ - \quad 6a + 4b = -6 \\ \hline -2b = 6 \Rightarrow \boxed{b = -3} \end{array}$$

$$a + b + d = 0$$

$$1 - 3 + d = 0 \Rightarrow \boxed{d = 2}$$

Por tanto, la función quedaría:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$$

8

Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x^2 - |x|$

a) Estudia la derivabilidad de f.

b) Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f.

c) Calcula los extremos relativos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan)

$f(x) = x^2 - |x|$

Procedamos a estudiar la continuidad y derivabilidad de la función. Debemos estudiar previamente la continuidad, ya que si no es continua, no es derivable.

$$f(x) \begin{cases} x^2 + x & \text{si } x < 0 \\ x^2 - x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

El 0 es el pto que nos tomamos ya que al ser el pto de empalme, puede dar problemas.

* Continuidad:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0)$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0) = 0$$

$\Rightarrow f(x)$ es continua en $x = 0$

Al ser polinómica, es continua en todo $\mathbb{R}$

* Derivabilidad:

$$f'(x) \begin{cases} 2x + 1 & \text{si } x < 0 \\ 2x - 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

$f'(0-) = f'(0+)$

$f'(0-) = 1$

$f'(0+) = -1$ $\Rightarrow$ la funcion no es derivable en $x=0$
existe un pto anguloso.

b) $2x + 1 = 0 \Rightarrow 2x = -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$

$2x - 1 = 0 \Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

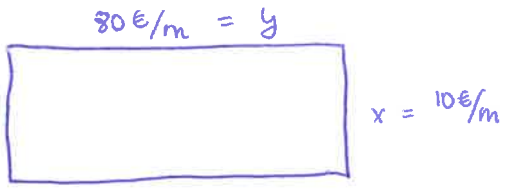
$f'(-1) < 0 \Rightarrow$ Decrece

$f'(-0'01) > 0 \Rightarrow$ Crece $\rightarrow \exists$ mínimo en $x = -\frac{1}{2}$

$f'(0'01) < 0 \Rightarrow$ Decrece

$f'(1) > 0 \Rightarrow$ Crece $\rightarrow \exists$ mínimo en $x = \frac{1}{2}$

⑨ Se quiere vallar un campo rectangular que está junto a un camino. Si la valla del lado del camino cuesta 80 €/metro y la de otros lados 10 €/metro, halla las dimensiones del campo de área máx que puede vallarse con 28800 €



Area max con 28800 €

$$A = x \cdot y$$

$$28800 = 80y + 20x + 10y \Rightarrow 80y + 10y = 28800 - 20x$$

$$y = \frac{2880 - 2x}{9}$$

$$A = x \cdot \left(\frac{2880 - 2x}{9}\right) = \frac{2880x - 2x^2}{9}$$

$$A' = \frac{(-4x + 2880)\,9}{81} \Rightarrow A' = \frac{-4x + 2880}{9} = 0$$

$$-4x + 2880 = 0 \Rightarrow -4x = -2880 \Rightarrow \boxed{x = 720}$$

Comprobamos si es un máximo:

$$A'' = \frac{(-4)\,9}{81} = \frac{-4}{9} < 0 \Rightarrow \text{máximo}$$

Por tanto:

$$\boxed{x = 720}$$

$$y = \frac{2880 - 1440}{9} \Rightarrow \boxed{y = 160}$$

10 Determina a y b sabiendo que $b > 0$ y que la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como: es derivable.

$$f(x) = \begin{cases} a\cos x + 2x & \text{si } x < 0 \\ a^2 \ln(x+1) + \dfrac{b}{x+1} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Para conocer a y b, sabiendo que la función es derivable, primero, debemos comprobar si es continua

* Continuidad:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0)$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = a$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0) = b$$

$\Rightarrow a = b$ Para que sea continua

* Derivabilidad:

$$f'(x) \begin{cases} a(-\operatorname{sen} x) + 2 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{a^2}{x+1} - \dfrac{b}{(x+1)^2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

$$f'(0^-) = f'(0^+)$$

$$f'(0^-) = 2$$

$$f'(0^+) = a^2 - b$$

$\Rightarrow a^2 - b = 2$ Para que sea derivable

Sistema

2 ecuaciones

2 incognitas

$$\left.\begin{array}{l} a = b \\ a^2 - b = 2 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} b^2 - b = 2 \\ b(b-1) = 2 \end{array} \quad < \begin{array}{l} b = 2 \\ b = -1 \end{array}$$

Como dice $b > 0 \Rightarrow a = b = 2$

11 Halla a y b sabiendo que es continua la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x + \cos x - a e^x}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ b & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Para que $f(x)$ sea continua:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0)$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = \frac{1-a}{0}$$

$$f(0) = b$$

Para que sea contínua, $\dfrac{1-a}{0} = b$

Como es continua, la única forma de que sea continua, es que numerador sea igual a 0 de forma que queda una indeterminación de $\dfrac{0}{0}$

$1 - a = 0 \Rightarrow \boxed{a = 1}$ → de esta forma, f es continua

Para resolver la indeterminación $0/0$, aplicamos L'hôpital.

$$\lim_{x \to 0} \frac{x + \cos x - e^x}{x^2} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \text{sen } x - e^x}{2x} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{-\cos x - e^x}{2} = \frac{-1 - 1}{2} = \frac{-2}{2} = \boxed{-1 = b}$$

(12) Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por

$f(x) = (x^2 + 3x + 1)e^{-x}$.

a) Estudia y calcula las asíntotas de la gráfica de f.

b) Halla los puntos de la gráfica de f cuya recta tangente es horizontal.

c) Determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abcisa $x=0$

$$f(x) = (x^2 + 3x + 1)e^{-x} = \frac{x^2+3x+1}{e^x}$$

- Asíntotas

* AV: $\nexists$ AV ya que ningún valor anula el denominador

* AH: $\lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{\infty}{\infty}$

$\lim_{x\to\infty} \frac{2x+3}{e^x} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{2}{e^x} = \frac{2}{\infty} = 0$

$\exists$ AH en $y=0$ cuando x tiende a ∞

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \frac{\infty}{0} = \infty \Rightarrow \nexists$ AH cuando x tiende a $-\infty$.

* AO: $\nexists$ ninguna AO ya que $\exists$ AH

b) $f'(x) = \dfrac{(2x+3)e^x - e^x(x^2+3x+1)}{e^{2x}} =$

$$f'(x) = \frac{2x+3 - x^2 - 3x - 1}{e^x} = \frac{-x^2 - x + 2}{e^x}$$

Se anula cuando $x^2 + x - 2 = 0$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4(-2)}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \begin{cases} \boxed{x = -2} \\ \boxed{x = 1} \end{cases}$$

Puntos $\begin{cases} (-2, -e^2) \\ \left(1, \frac{5}{e}\right) \end{cases}$

c)

$$y_{tg} = f(0) + f'(0)(x-0)$$

$f(0) = 1$

$f'(0) = 2$

La recta tg a $f(x)$ en $x = 0$ es:

$$y = 1 + 2(x-0)$$

Juan Manuel Mateos Pérez

EJERCICIOS SELECTIVIDAD

1

Calcula $\displaystyle\int \frac{-x^2}{x^2+x-2}\,dx$

$$\int \frac{-x^2}{x^2+x-2}\,dx \Rightarrow$$

Como es una integral racional, aplicamos el cociente de polinomios

$$\begin{array}{r|l} -x^2 & x^2+x-2 \\ \hline +x^2+x-2 & -1 \\ \hline x-2 & \end{array}$$

$$\frac{D}{d} = c + \frac{r}{d}$$

$$\int\left(-1+\frac{x-2}{x^2+x-2}\right)dx = -1\int 1\,dx + \int \frac{x-2}{x^2+x-2}\,dx =$$

$$= -x + \int \frac{x-2}{x^2+x-2}\,dx \Rightarrow \quad x^2+x-2=0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2-4(-2)}}{2} = \frac{-1\pm 3}{2} \begin{cases} -2 \\ 1 \end{cases}$$

$$\int \frac{x-2}{x^2+x-2}\,dx = \int \frac{x-2}{(x+2)(x-1)}\,dx \Rightarrow$$

$$\frac{A}{(x+2)} + \frac{B}{(x-1)} = \frac{A(x-1)+B(x+2)}{(x+2)(x-1)} = \frac{Ax-A+Bx+2B}{(x+2)(x-1)} =$$

$$= \frac{(A+B)x + (-A+2B)}{(x+2)(x-1)} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \cancel{A} + B = 1 \\ -\cancel{A} + 2B = -2 \end{array} \right\}$$

$$3B = -1 \Rightarrow B = -\frac{1}{3}$$

$$A + B = 1 \Rightarrow A = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$$

Portanto,

$$\int \frac{x-2}{x^2+x-2}\,dx = \int \left(\frac{4/3}{(x+2)} - \frac{1/3}{(x-1)} \right) dx =$$

$$= \frac{4}{3} \int \frac{1}{x+2}\,dx - \frac{1}{3} \int \frac{1}{x-1}\,dx = \frac{4}{3} \ln|x+2| - \frac{1}{3} \ln|x-1| + K$$

Finalmente:

$$\int \frac{-x^2}{x^2+x-2}\,dx = -x + \frac{4}{3} \ln|x+2| - \frac{1}{3} \ln|x-1| + K$$

2 Determina la función $f: (0,\infty) \to \mathbb{R}$ sabiendo que $f''(x) = \ln(x)$ y que su gráfica tiene tangente horizontal en el punto $P(1,2)$

$(0, \infty)$

$f''(x) = \ln(x)$

$\exists$ tg horizontal en $P(1,2)$

$$f'(x) = \int \ln(x)\, dx = x \ln(x) - x + k$$

Sabiendo que $\exists$ tg horizontal en $P(1,2)$

$$f'(1) = 0 \Rightarrow -1 + k = 0 \Rightarrow k = 1$$

Por tanto,

$$\boxed{f'(x) = x \ln(x) - x + 1}$$ Integrando, obtenemos $f(x)$

$$\int (x \ln x - x + 1)\, dx = \int x \ln x\, dx - \int x\, dx - \int 1\, dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int x \ln x\, dx \Rightarrow \begin{array}{ll} u = \ln x & du = 1/x\, dx \\ dv = x\, dx & v = \frac{x^2}{2} \end{array}$$

$$= \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{\cancel{x}}\, dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int x\, dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + k$$

$$\int (x \ln x - x + 1)\,dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} - \frac{x^2}{2} - x + K'$$

Para hallar K'

$$f(1) = 2 \Rightarrow \quad -\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1 + K' = 2$$

$$K' = 2 - 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$$

$$K' = \frac{8}{4} - \frac{4}{4} + \frac{2}{4} + \frac{1}{4}$$

$$K' = \frac{7}{4}$$

$$f(x) = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} - \frac{x^2}{2} + x + \frac{7}{4}$$

$$f(x) = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{3x^2}{4} + x + \frac{7}{4}$$

③ Calcula $\int_0^{\pi} x^2 \operatorname{sen} x \, dx$

Como nos encontramos ante una integral definida, debemos aplicar el teorema de Barrow para obtenerla.

$$\int_0^{\pi} x^2 \operatorname{sen} x \, dx = G(\pi) - G(0)$$

Para ello debemos hallar $G(x)$

$$\int x^2 \operatorname{sen} x \, dx = G(x)$$

Esta integral debemos tratarla utilizando el método por partes.

$$I = \int x^2 \operatorname{sen} x \, dx = \quad \begin{array}{ll} u = x^2 & du = 2x \, dx \\ dv = \operatorname{sen} x \, dx & v = -\cos x \end{array}$$

$$= -\cos x \,(x^2) + \underbrace{\int \cos x \; 2x \, dx}_{I_1}$$

Volvemos aplicar el método por parte.

$$I_1 = \int \cos x \; 2x \, dx = \quad \begin{array}{ll} u = 2x & du = 2 \, dx \\ dv = \cos x \, dx & v = \operatorname{sen} x \end{array}$$

$$I_1 = 2x \operatorname{sen} x - 2 \int \operatorname{sen} x \, dx = 2x \operatorname{sen} x - 2(-\cos x)$$

$$I = (-\cos x)(x^2) + 2x \operatorname{sen} x + 2 \cos x + K$$

$$I = -x^2 \cos x + 2x \operatorname{sen} x + 2 \cos x + K$$

Una vez hallada $g(x)$

$$\int_0^{\pi} x^2 \operatorname{sen} x \, dx = g(\pi) - g(\emptyset)$$

$$G(\pi) = \pi^2 - 2$$

$$G(\emptyset) = 2$$

$$\int_0^{\pi} x^2 \operatorname{sen} x \, dx = \pi^2 - 2 - 2 = (\pi^2 - 4)\, u^2$$

4 Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por

$f(x) = |x^2 - 4|$

a) Haz un esbozo de la gráfica f.

b) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f y la recta $y = 5$

$f(x) = |x^2 - 4|$

Para poder representar la siguiente función, debemos hallar las raíces de la ecuación

$$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si} \quad x < -2 \\ -x^2 + 4 & \text{si} \quad -2 \leq x \leq 2 \\ x^2 - 4 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

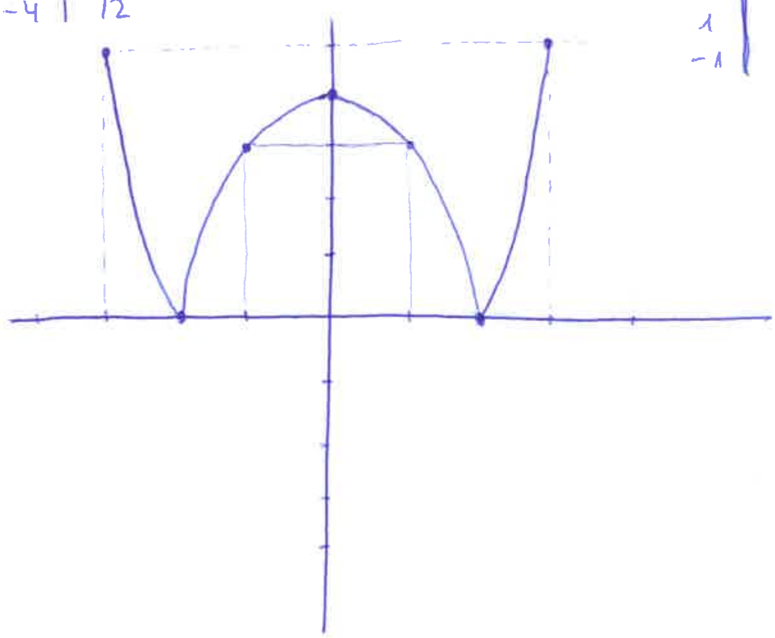
Representación:

$x^2 - 4$

x	y
-2	0
-3	5
-4	12

$-x^2 + 4$

x	y
0	4
-2	0
2	0
1	3
-1	3



b) $f(x) = |x^2 - 4| \qquad g(x) = 5$

$$A = 2\left[\int_0^2 (5 + x^2 - 4)\,dx + \int_2^3 (5 - x^2 + 4)\,dx\right] =$$

$$= 2\left[\left(\left[x + \frac{x^3}{3}\right]_0^1\right) + \left(\left[9x - \frac{x^3}{3}\right]_2^3\right)\right] =$$

$$= 2\left[(g(1) - g(0)) + (H(3) - H(2))\right] =$$

$$= 2\left[\left(2 + \frac{8}{3}\right) + \left(27 - \frac{27}{3}\right) - \left(18 - \frac{8}{3}\right)\right] =$$

$$= 2\left(\frac{6+8}{3} + \frac{81-27}{3} - \frac{54-8}{3}\right) =$$

$$= 2\left(\frac{14}{3} + \frac{54}{3} - \frac{46}{3}\right) = 2\left(\frac{22}{3}\right) = \frac{44}{3}\ u^2$$

⑤ Sea f la función definida por $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{2x}$ para $x > 0$ y sea F la primitiva de f tal que $F(1) = 2$

a) Calcula $F'(e)$

b) Halla la ecuación de la recta tg a la gráfica de F en el pto de abcisa $x = e$

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{2x} \qquad x > 0$$

$$\int f(x) = F(x) \qquad F(1) = 2$$

a) $F'(e)$

Para hallar $F(x)$ debemos integrar $f(x)$

$$F = \int \frac{\ln(x)}{2x} dx = \int \ln x \, (2x)^{-1} dx \Rightarrow$$

$$u = \ln x \qquad du = \frac{1}{x} dx$$

$$dv = (2x)^{-1} dx \qquad v = \frac{1}{2} \ln x$$

$$\int (2x)^{-1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{x} dx = \frac{1}{2} \ln |x|$$

$$= \ln^2 x \, \frac{1}{2} - \int \frac{1}{2} \ln x \left(\frac{1}{x}\right) dx = \ln^2 x \, \frac{1}{2} - \underbrace{\int \frac{\ln x}{2x} dx}_{I_1}$$

$$I = \ln^2 x \, \frac{1}{2} - I$$

$$2I = \ln^2 x \, \frac{1}{2} \Rightarrow I = \frac{\ln^2 x \, \frac{1}{2}}{2} \Rightarrow \boxed{F = \frac{\ln^2 x}{4} + K}$$

Ahora debemos hallar su derivada

$$F = \frac{\ln^2 x}{4} = \frac{1}{4}(\ln x)^2 + K$$

$$F' = \frac{1}{4} \, 2 \ln(x) \, \frac{1}{x} \Rightarrow F' = \frac{1}{2} \ln x \left(\frac{1}{x}\right) \Rightarrow F' = \frac{\ln x}{2x}$$

$$F'(e) = \frac{1}{2e}$$

b) Como $F(1) = 2$

$$F(1) = \frac{\emptyset}{4} + K = 2 \Rightarrow \underline{\underline{K = 2}}$$

Ecuación de la recta tg: $y = F(e) + F'(e)\,(x - e)$

$$Fe = \frac{1}{4} + 2$$

$$y = \left(\frac{1}{4} + 2\right) + \left(\frac{1}{2e}\right)(x - e)$$

$$y = \frac{9}{4} + \frac{1}{2e}(x - e)$$

⑥ Sean $f : [0, \infty) \to \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ las funciones definidas por

$f(x) = \sqrt{2x}$ y $g(x) = \frac{1}{2} x^2$

a) Halla los ptos de corte de las gráficas de f y g.

Haz un esbozo del recinto que limitan

b) Calcula el área de dicho recinto

$f(x) = \sqrt{2x}$ $\qquad$ $g(x) = \frac{1}{2} x^2$

Para hallar los ptos de corte, debemos hallar las soluciones de la ecuación $f(x) - g(x)$

$$f(x) - g(x) = \sqrt{2x} - \frac{1}{2} x^2 = 0$$

$$\sqrt{2x} = \frac{1}{2} x^2 \Rightarrow 2x = \frac{1}{4} x^4 \Rightarrow 8x = x^4 \Rightarrow$$

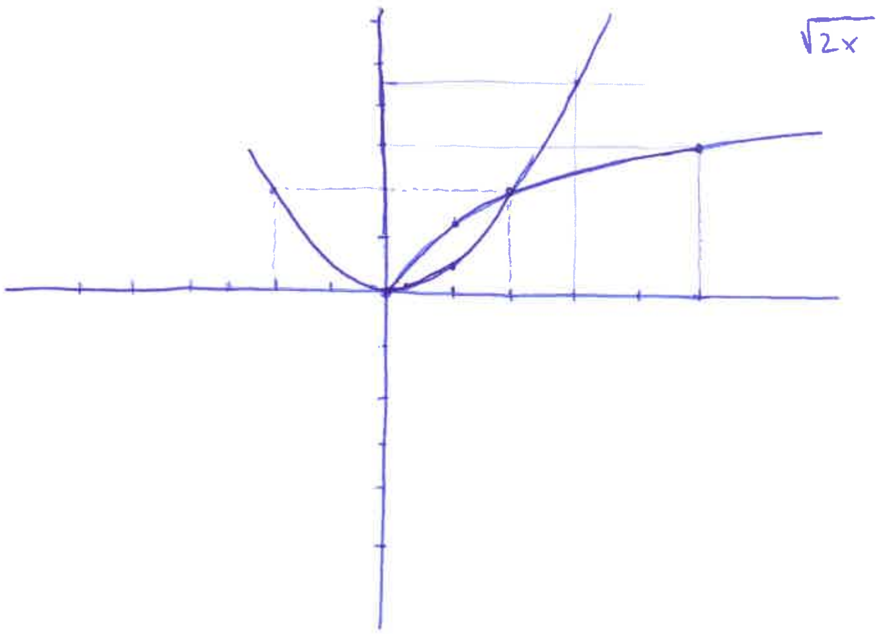
$$x^4 - 8x = 0 \Rightarrow x(x^3 - 8) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x^3 - 8 = 0 \Rightarrow x^3 = 8 \Rightarrow x = 2 \end{cases}$$

Por tanto, los ptos de corte son $(0, 0)$ y $(2, 2)$

Representar:

$\frac{x^2}{2}$

x	y
1	1/2
2	2
3	9/2
4	8



x	y
0	0
1	$\sqrt{2}$
2	2
5	$\sqrt{10}$

b) Para hallar el área que piden:

$$A = \int_0^2 \left[\sqrt{2x} - \frac{1}{2}x^2\right] dx = ?$$

$$\int \left[\sqrt{2x} - \frac{1}{2}x^2\right] dx = \int \sqrt{2x}\, dx - \frac{1}{2}\int x^2\, dx =$$

$$= \frac{2\sqrt{2}\, x^{3/2}}{3} - \frac{x^3}{6} + K$$

$$A_T = \left[\frac{2\sqrt{2}\, x^{3/2}}{3} - \frac{x^3}{6}\right]_0^2 = G(2) - G(0)$$

$$G(2) = \frac{4}{3}$$

$$G(0) = 0$$

$$A_T = \frac{4}{3}\ u^2$$

7. Calcula el valor de $a > 1$ sabiendo que el área del recinto comprendido entre la parábola $y = -x^2 + ax$ y la recta $y = x$ es $\frac{4}{3}$

$A_T = \frac{4}{3}\ u^2$

$y = -x^2 + ax$

$y = x$

Para hallar el área de dos funciones, debemos restarlas

$$f(x) - g(x) = -x^2 + ax - x = -x^2 + (a-1)x = 0$$

$$-x^2 + (a-1)x = 0 \Rightarrow x[-x + (a-1)] = 0 \begin{cases} x = 0 \\ -x + a - 1 = 0 \\ x = a - 1 \end{cases}$$

Por tanto, los lim del área que debemos hallar son $x = 0$ y $x = a-1$

$$A = \int_0^{a-1} [-x^2 + (a-1)x]\, dx = \int_0^{a-1} (-x^2 + ax - x)\, dx =$$

$$= -\frac{x^3}{3} + a\frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{2}\Big]_0^{a-1} = G(a-1) - G(0) = \frac{4}{3}$$

$$= -\frac{(a-1)^3}{3} + \frac{a(a-1)^2}{2} - \frac{(a-1)^2}{2} = \frac{4}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{2(a-1)^3}{6} + \frac{3a(a-1)^2}{6} - \frac{3(a-1)^2}{6} = \frac{8}{6}$$

$$\Rightarrow -2(a-1)^3 + 3a(a-1)^2 - 3(a-1)^2 = 8$$

$$\Rightarrow -2(a^3 - 3a^2 + 3a - 1) + 3a(a^2 + 1 - 2a) - 3(a^2 + 1 - 2a) = 8$$

$$-2a^3+6a^2-6a+2+3a^3+3a-6a^2-3a^2-3+6a=8$$

$$\Rightarrow a^3-3a^2+3a-9=0$$

$1 \rightarrow 1-3+3-9 \neq 0$

$-1 \rightarrow -1-3-3-9 \neq 0$

$3 \rightarrow 27-27+9-9=0$

	1	-3	$+3$	-9
3		3	0	9
	1	0	3	0

$$a^2+3=0 \Rightarrow a^2=-3 \Rightarrow a=\pm\sqrt{-3}$$

↑ solución imaginaria

Por tanto, la solución es $a=3$ como nos indica Ruffini.

8 Sea f la función definida por $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2(x-1)}$

para $x \neq 0$ y $x \neq 1$, sea F la primitiva de f

cuya gráfica pasa por el pto $P(2, \ln 2)$

a) Calcula la recta tg a la gráfica de F en el pto P.

b) Determina la función F.

$f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2(x-1)}$ $\quad F = \int f(x)$ $\quad P(2, \ln 2)$

a) tg de F en P

como $F(x)$ es primitiva de $f(x)$ $\quad F'(x) = f(x)$

Ecuación de la recta tg

$$y = F(2) + F'(2)(x-2)$$

$F(2) = \ln 2$

$F'(2) = f(2) = \dfrac{5}{4}$

$$y = \ln 2 + \frac{5}{4}(x-2)$$

b) $F = \int f(x)$ $\quad F = \int \dfrac{x^2+1}{x^2(x-1)}\,dx \Rightarrow$

$$\frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1} = \frac{Ax(x-1) + B(x-1) + Cx^2}{x^2(x-1)}$$

$$= \frac{Ax^2 - Ax + Bx - B + Cx^2}{x^2(x-1)} = \frac{Ax^2 + Cx^2 - Ax + Bx - B}{x^2(x-1)}$$

$$= \frac{(A+C)x^2 + (-A+B)x - B}{x^2(x-1)} \Rightarrow \begin{cases} A + C = 1 \\ -A + B = 0 \end{cases} \quad -B = 1$$

$\boxed{B = -1}$ $\qquad -A - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{A = -1}$

$\boxed{C = 2}$

$$= \int \left(\frac{-1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{(x-1)} \right) dx =$$

$$= -1 \int \frac{1}{x}\, dx - \int \frac{1}{x^2}\, dx + 2 \int \frac{1}{x-1}\, dx =$$

$$= -1 \ln|x| - \int \frac{1}{x^2}\, dx + 2 \ln|x-1| + k$$

$$\int \frac{1}{x^2}\, dx = \int (x^{-2})\, dx = \frac{x^{-1}}{-1} = -\frac{1}{x}$$

$$F = \int \frac{x^2+1}{x^2(x-1)}\, dx = -\ln|x| + \frac{1}{x} + 2\ln|x-1| + k$$

Como $F(x)$ pasa por $(2, \ln 2)$

$$\ln 2 = -\ln 2 + \frac{1}{2} + k \Rightarrow k = 2\ln 2 - \frac{1}{2}$$

$$F(x) = -\ln|x| + \frac{1}{x} + 2\ln|x-1| + 2\ln 2 - \frac{1}{2}$$

⑨ Calcula

$$\int \frac{dx}{(x-2)\sqrt{x+2}} \Rightarrow \text{Sugerencia } \left(\sqrt{x+2} = t\right)$$

$$t = \sqrt{x+2} = (x+2)^{1/2} \Rightarrow t^2 = x+2 \Rightarrow x = t^2-2$$

$$dt = \frac{1}{2}(x+2)^{-1/2}\,dx = \frac{1}{2\sqrt{x+2}}\,dx \Rightarrow dx = 2\sqrt{x+2}\,dt$$

$$= \int \frac{2\sqrt{x+2}\;dt}{[(t^2-2)-2]\sqrt{t^2-2+2}} = \int \frac{2\sqrt{x+2}\;dt}{(t^2-4)\,t} =$$

$$= \int \frac{2\sqrt{t^2-2+2}\;dt}{(t^2-4)\,dt} = \int \frac{2\cancel{t}\;dt}{(t^2-4)\cancel{t}} = \int \frac{2}{t^2-4}\,dt =$$

$$= 2\int \frac{1}{t^2-4}\,dt \Rightarrow \qquad t^2-4=0 \Rightarrow t^2=4 \Rightarrow t=\pm 2$$

$$= 2\int \frac{1\;dt}{(t+2)(t-2)} \Rightarrow \frac{A}{(t+2)} + \frac{B}{(t-2)} = \frac{A(t-2)+B(t+2)}{(t+2)(t-2)}$$

$$= \frac{At-2A+Bt+2B}{(t+2)(t-2)} = \frac{(A+B)t+(-2A+2B)}{(t-2)(t+2)}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2A+2B=0 \\ -2A+2B=1 \end{array}\right\} \qquad \begin{array}{l} A+B=0 \\ A=-B \end{array}$$

$$4B = 1 \Rightarrow \boxed{B=\frac{1}{4}} \qquad \boxed{A=-\frac{1}{4}}$$

$$= 2\int\left[\frac{-1/4}{(t+2)} + \frac{1/4}{(t-2)}\right]dt = -\frac{1}{2}\int\frac{1}{(t+2)}\,dx + \frac{1}{2}\int\frac{1}{(t-2)}\,dt =$$

$$= -\frac{1}{2}\ln|t+2| + \frac{1}{2}\ln|t-2| + K$$

Ahora deshacemos el cambio:

$$\int\frac{dx}{(x-2)\sqrt{x+2}} = -\frac{1}{2}\ln\left|\sqrt{x+2}+2\right| + \frac{1}{2}\ln\left|\sqrt{x+2}-2\right| + K$$

(10) Sea g la función definida por $g(x) = \ln(x)$ para $x > 0$
Calcula el valor de $a > 1$ para que el área del recinto limitado por la gráfica de g, el eje de abcisas y la recta $x = a$ es 1.

$g(x) = \ln(x) \quad a > 1$

$A_T = 1$ entre $g(x)$ y $x = a$

$A = \int_1^a \ln x \, dx$; para ello, debemos tomar previamente la integral.

$$\int \ln x \, dx = x \ln(x) - x + K$$

Por tanto:

$$A = \int_1^a \ln x \, dx = x \ln(x) - x \Big]_1^a = G(a) - G(1)$$

$G(a) = a \ln(a) - a$

$G(1) = -1$

$G(a) - G(1) = a \ln(a) - a + 1 = 1$ Esto es así porque es el área que nos indican

$a \ln(a) - a = 0$

$a \ln(a) = a$

$\ln(a) = 1 \Rightarrow$ El número que cumple esta ecuación es el número e ya que $\ln(e) = 1$

Por tanto, $\boxed{a = e}$

(11) Sea $f(x)$ la función definida por $f(x)=|\ln(x)|$ para $x>0$

a) Esboza el recinto limitado por la gráfica de f y la recta $y=1$.

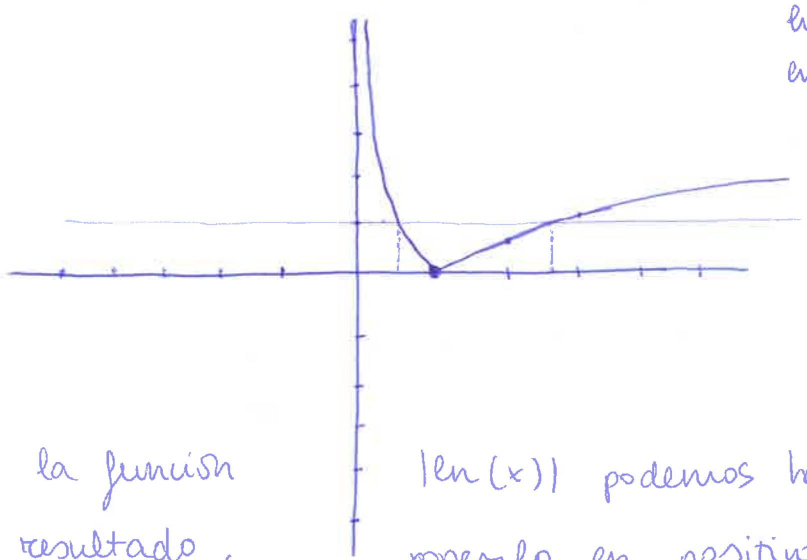
b) Calcula los ptos de corte de la gráfica de f con la recta $y=1$

c) Calcula el área del recinto citado.

$f(x) = |\ln(x)| \quad x>0$

$\ln 3 = 1'09$
$\ln 2 = 0'69$
$\ln 1 = 0$
$\ln 0 = \nexists$ sol

a)



Para dibujar la función $|\ln(x)|$ podemos hallar la función $\ln(x)$ y el resultado, ponerlo en positivo

b) Pto de corte $f(x)$ con $y=1$

$$|\ln(x)| = 1 \left\{ \begin{array}{l} \ln(x) = 1 \Rightarrow x = e \\ -\ln(x) = 1 \Rightarrow x = e^{-1} = \dfrac{1}{e} \end{array} \right.$$

c) $$A = \int_{1/e}^{1} [1-(-\ln(x))]\,dx + \int_{1}^{e} [1-\ln(x)]\,dx \Rightarrow$$ Para hallar esto hallamos

$$\int [1 + \ln(x)]\, dx = \int 1\, dx + \int \ln(x)\, dx = x + x\ln(x) - x + k$$

$$\int [1 - \ln(x)]\, dx = \int 1\, dx - \int \ln(x)\, dx = x - x\ln(x) + x + k$$

$$A = \left[x + x\ln(x) - x\right]_{1/e}^{1} + \left[x - x\ln(x) + x\right]_{1}^{e} \Rightarrow$$

$$A = \left[G(1) - G(1/e)\right] + \left[G(e) - G(1)\right] \Rightarrow$$

$$A = \left[-\left(-\frac{1}{e}\right)\right] + \left[(2e - e) - (2)\right] \Rightarrow$$

$$A = \frac{1}{e} + (e-2) = \underline{\underline{\left(\frac{1}{e} + e - 2\right)}}\, u^2$$

⑫ Calcula $\int e^{2x}\,\text{sen}(x)\,dx$

$$\underbrace{\int e^{2x}\,\text{sen}\,x\;dx}_{I} = \qquad u = e^{2x} \qquad du = e^{2x}\,2\,dx$$
$$dv = \text{sen}\,x\,dx \qquad v = -\cos x$$

$$= -e^{2x}\cos x + 2\underbrace{\int \cos x\, e^{2x}\,dx}_{I_1}$$

$$I_1 = \int \cos x\, e^{2x}\,dx = \qquad u = e^{2x} \qquad du = e^{2x}(2)\,dx$$
$$dv = \cos x\,dx \qquad v = \text{sen}\,x$$

$$= e^{2x}\,\text{sen}\,x - 2\underbrace{\int \text{sen}\,x\; e^{2x}\,dx}_{I}$$

$$I = -e^{2x}\cos x + 2\left(e^{2x}\,\text{sen}\,x - 2I\right)$$
$$I = -e^{2x}\cos x + 2e^{2x}\,\text{sen}\,x - 4I$$
$$5I = -e^{2x}\cos x + 2e^{2x}\,\text{sen}\,x \Rightarrow$$

$$I = \frac{-e^{2x}\cos x + 2e^{2x}\,\text{sen}\,x}{5} + k$$