


Reglas de derivación

La validez de todas estas reglas se demuestra en el penúltimo apartado de esta unidad.

	$D[f(x) + g(x)] = f'(x) + g'(x)$	
DERIVACIÓN POR UN NÚMERO	$D[k \cdot f(x)] = k f'(x)$	
	$D[f(x) \cdot g(x)] = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$	
	$D\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2}$	
DERIVACIÓN DE LA CADENA	$D\{f[g(x)]\} = f'[g(x)] \cdot g'(x)$ $D\{f[g[h(x)]]\} = f'[g[h(x)]] \cdot g'[h(x)] \cdot h'(x)$	En la web  Ejercicios para repasar la composición de funciones.
	$D(x^k) = k \cdot x^{k-1}, k \in \mathbb{R} - \{0\}$ $D(\sqrt{x}) = D(x^{1/2}) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $D\left(\frac{1}{x}\right) = D(x^{-1}) = -\frac{1}{x^2}$	$D[f(x)^k] = k f(x)^{k-1} \cdot f'(x)$ $D[\sqrt{f(x)}] = \frac{1}{2\sqrt{f(x)}} \cdot f'(x)$ $D\left[\frac{1}{f(x)}\right] = -\frac{1}{f(x)^2} \cdot f'(x)$
DERIVADAS TRIGONOMÉTRICAS	$D(\sin x) = \cos x$ $D(\cos x) = -\sin x$ $D(\operatorname{tg} x) = 1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$D(\sin f(x)) = \cos f(x) \cdot f'(x)$ $D(\cos f(x)) = -\sin f(x) \cdot f'(x)$ $D(\operatorname{tg} f(x)) = [1 + \operatorname{tg}^2 f(x)] \cdot f'(x)$
DERIVADAS DE LOS ARCOS O RECÍPROCAS TRIGONOMÉTRICAS	$D(\operatorname{arc} \sin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $D(\operatorname{arc} \cos x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ $D(\operatorname{arc} \operatorname{tg} x) = \frac{1}{1+x^2}$	$D[\operatorname{arc} \sin f(x)] = \frac{1}{\sqrt{1-f(x)^2}} \cdot f'(x)$ $D[\operatorname{arc} \cos f(x)] = \frac{-1}{\sqrt{1-f(x)^2}} \cdot f'(x)$ $D[\operatorname{arc} \operatorname{tg} f(x)] = \frac{1}{1+f(x)^2} \cdot f'(x)$
DERIVADAS DE LOS LOGARITMOS	$D(e^x) = e^x$ $D(a^x) = a^x \cdot \ln a$	$D[e^{f(x)}] = e^{f(x)} \cdot f'(x)$ $D[a^{f(x)}] = a^{f(x)} \cdot \ln a \cdot f'(x)$
DERIVADAS DE LAS FUNCIÓNES LOGARÍTMICAS	$D(\ln x) = \frac{1}{x}, x > 0$ $D(\ln x) = \frac{1}{x}, x \neq 0$ $D(\log_a x) = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln a}, x > 0$ $D(\log_a x) = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln a}, x \neq 0$	$D[\ln f(x)] = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x), f(x) > 0$ $D[\ln f(x)] = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x), f(x) \neq 0$ $D[\log_a f(x)] = \frac{1}{f(x)} \cdot \frac{1}{\ln a} \cdot f'(x), f(x) > 0$ $D[\log_a f(x)] = \frac{1}{f(x)} \cdot \frac{1}{\ln a} \cdot f'(x), f(x) \neq 0$

conjunto vectores \rightarrow linealmente dependientes si al menos
1 de ellos lo podemos poner como combinacion lineal.
de otros.



2 vectores = direccion \rightarrow linealm. dependientes



2 vectores \neq direccion \rightarrow linealm. independientes



3 vectores coplanarios \rightarrow linealm. dependientes

3 vectores no coplanarios \rightarrow linealmente independientes

\hookrightarrow formar una base del espacio tridimensional.

cualquier otro \rightarrow se puede poner como comb. lineal

$$\vec{v} = a\vec{x} + b\vec{y} + z\vec{c}$$

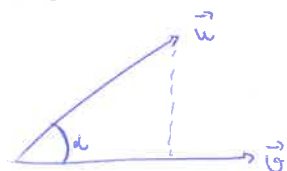
PRODUCTO ESCALAR: $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \alpha = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$

$\cos(\vec{u} \wedge \vec{v}) > 0 \rightarrow$ agudo

$\cos(\vec{u} \wedge \vec{v}) < 0 \rightarrow$ obtuso

$$\cos \alpha = \frac{\text{proy}_{\vec{u}} \vec{v}}{|\vec{u}|}$$

$$\text{proy} = \vec{u} \cdot \cos \alpha$$



$$\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{v}| \cdot \text{proy}_{\vec{v}} \vec{u}$$

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{i} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 0$$

-D- $\rightarrow (u_1\vec{i}, u_2\vec{j}, u_3\vec{k}) (\vec{i}_1, \vec{i}_2, \vec{i}_3)$

MODULO \vec{u}	ANGULO \vec{u} y \vec{v}	CRITERIO DE \perp DE \vec{u} y \vec{v}
------------------	------------------------------	--

$$|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$$

$$|\vec{u}| |\vec{v}| \cos \alpha = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$$

Si \vec{u} y $\vec{v} \rightarrow \perp \rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

$$\Rightarrow \cos \alpha = \frac{u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3}{|\vec{u}| |\vec{v}|}$$

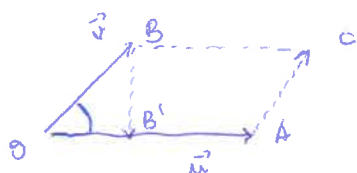
PROD. ESCALAR = 0 $\Rightarrow \perp$

PRODUCTO VECTORIAL

sentido $\rightarrow \vec{u} \times \vec{v} = |\vec{u}| |\vec{v}| \cdot \sin(\vec{u} \wedge \vec{v})$

direccion $\rightarrow \perp$ a ambos vectores

PROD. VECTORIAL = 0 $\left\{ \begin{array}{l} \text{linealmente dependientes} \\ = \text{direccion} \\ \text{alguno es } 0 \end{array} \right.$



$$\sin(\vec{u} \wedge \vec{v}) = \frac{|\vec{BB'}|}{|\vec{v}|} \Rightarrow |\vec{BB'}| = |\vec{v}| \sin(\vec{u} \wedge \vec{v})$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = |\vec{BB'}| |\vec{u}| \rightarrow \text{AREA PARALELOGRAMO}$$

* ANTICOMUTATIVA

$$\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$$

* HOMOGÉNEA

$$k(\vec{u} \times \vec{v}) = k\vec{u} \times \vec{v} = \vec{u} \times k\vec{v}$$

regla de la mano derecha

$$\vec{u} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = \vec{0}$$

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$$

$$\vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}$$

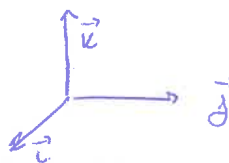
$$\vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}$$

$$\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$$

$$\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$$

$$\vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}$$

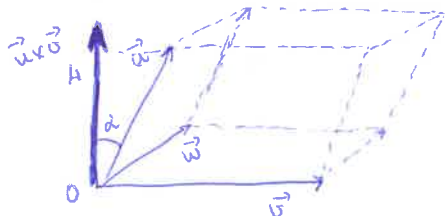
derecha
se mete



obtenemos un vector \perp

PRODUCTO MIXTO

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$$



$$\cos \alpha = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v} \times \vec{w}|}{|\vec{u}| |\vec{v} \times \vec{w}|} \Rightarrow |\vec{u} \cdot \vec{v} \times \vec{w}| = |\vec{u}| |\vec{v} \times \vec{w}| \cos \alpha$$

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) &= |\vec{u}| |\vec{v} \times \vec{w}| \cos \alpha = \\ &= |\vec{v} \times \vec{w}| |\vec{u}| = \text{VOLUMEN} \\ &\quad \text{PARALELEPIPEDO} \end{aligned}$$

si $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 0 \Rightarrow$ linealmente dependientes

$$\begin{aligned} \vec{u} &= (x_1, y_1, z_1) \\ \vec{v} &= (x_2, y_2, z_2) \\ \vec{w} &= (x_3, y_3, z_3) \end{aligned} \quad \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = \sim u^3$$

* Determinar recta \rightarrow punto + \vec{d}

* Posición relativas rectas $\begin{vmatrix} d_1 & d'_1 & P'_1 - P_1 \\ d_2 & d'_2 & P'_2 - P_2 \\ d_3 & d'_3 & P'_3 - P_3 \end{vmatrix}$

$\text{Rang}(M) \begin{cases} 1 & \begin{cases} \text{Rang}(M') = 1 \Rightarrow \text{✓} \\ \text{Rang}(M') = 2 \Rightarrow \text{//} \end{cases} \\ 2 & \begin{cases} \text{Rang}(M') = 2 \Rightarrow \text{X} \\ \text{Rang}(M') = 3 \Rightarrow \text{X} \end{cases} \end{cases}$

* Determinar plano $\rightarrow 2 \vec{d}$ no \parallel + Punto
vector \perp y punto

Ec. implícita $\begin{vmatrix} d_1 & d'_1 & x - P_1 \\ d_2 & d'_2 & y - P_2 \\ d_3 & d'_3 & z - P_3 \end{vmatrix} = 0$

Ec. vector \perp

$\vec{n}(a, b, c)$

$P(1, 2, 3)$

$a(x-1) + b(y-2) + c(z-3)$

* Posición relativa recta y plano
 \downarrow
paramétrica \downarrow implícita

$\begin{cases} 8 \text{ sol} \Rightarrow \text{//} \\ 1 \text{ sol} \Rightarrow \text{X} \\ \infty \text{ sol} \Rightarrow \text{//} \end{cases}$

* Posición relativa dos planos

$\pi: ax + by + cz + d = 0$

$\pi': a'x' + b'y + c'z + d' = 0$

$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \end{vmatrix} = M'$
 $\underbrace{\hspace{10em}}_M$

$\text{rang}(M) \begin{cases} 1 & \begin{cases} \text{Rang}(M') = 1 \Rightarrow \text{✓} \\ \text{Rang}(M') = 2 \Rightarrow \text{//} \end{cases} \\ 2 & \rightarrow \text{Rang}(M') = 2 \Rightarrow \text{X} \end{cases}$

* Pensar de ec. plano implícita \rightarrow paramétrica

Tomamos 3 pto del plano.

$x=0 \quad y=0 \Rightarrow z=?$
 $y=0 \quad z=0 \Rightarrow x=?$
 $x=0 \quad z=0 \Rightarrow y=?$



tema 6

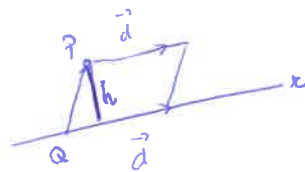
α entre dos rectas $\cos \alpha = \frac{|\vec{d} \cdot \vec{d}'|}{|\vec{d}| \cdot |\vec{d}'|}$

α entre dos planos $\cos \alpha = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{n}'|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{n}'|}$

α entre plano recta $\sin \alpha = \frac{|\vec{d} \cdot \vec{n}|}{|\vec{d}| \cdot |\vec{n}|}$

* Distancia entre punto y recta.

$$d(P, r) = \frac{|\vec{QP} \times \vec{d}|}{|\vec{d}|}$$



* Distancia pro plano

$A(x_1, y_1, z_1)$

$\pi: ax + by + cz + d = 0$

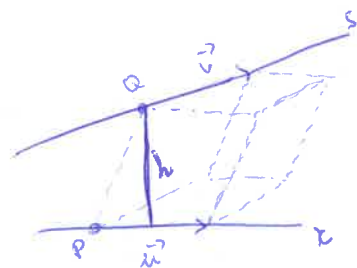
$$d(A, \pi) = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

* distancia entre 2 rectas

\rightarrow cortan \Rightarrow distancia = 0

$\rightarrow \parallel \Rightarrow$ dista (P, r)

$\rightarrow \times \Rightarrow \text{dist}(r, s) = \frac{|[\vec{u}, \vec{v}, \vec{PQ}]|}{|\vec{u} \times \vec{v}|}$



* Area paralelogramo $|\vec{AB} \times \vec{AC}|$

* Area triángulo $\frac{|\vec{AB} \times \vec{AC}|}{2}$

* Volumen tetraedro $V = \frac{|[\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}]|}{6}$

* Plano mediador \rightarrow LG que equidista de extremos segmento
 $\text{dist}(X, A) = \text{dist}(X, B)$

* Plano bisector \rightarrow LG equidistan de dos planos $\rightarrow \text{dist}(X, \pi) = \text{dist}(X, \pi')$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = l$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \neq$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$$

LIMITE FINITO

• Si $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a$ y $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = b$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\log_a f(x)) = \log_a a \quad (\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a)$$

LIMITE ∞

$f(x)$ es un ∞ superior a $g(x)$ si:

- Potenciales
- Exponenciales
- Logarítmicas

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$$

Exponenciales > Potenciales > Logarítmicas $f(x)$ es un ∞ del mismo orden si:
base > 1

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = l \neq 0$$

$$\star \infty^{-\infty} = 0$$

$$l < 0 \quad \infty^l = 0$$

$$l > 1 \quad l^{-\infty} = 0$$

$$0 < l < 1 \quad l^{+\infty} = 0$$

$$l^{-\infty} = \infty$$

$$-\infty^{-\infty} = \frac{-1}{\infty^{\infty}} = 0$$

$$(-\infty)^{-\infty} = \frac{1}{-\infty^{\infty}} = \neq \lim$$

Cuente polinomios

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^p + \dots}{bx^q + \dots}$$

$$\left. \begin{array}{l} p > q \Rightarrow \pm \infty \text{ (signo } \rightarrow \frac{a}{b}) \\ p = q \Rightarrow \frac{a}{b} \\ p < q \Rightarrow 0 \end{array} \right\}$$

Diferencia de ∞

- Simple vista, al ser distinto orden
- Operamos ∞ limite
- \exists radicales cuadráticos se multiplica por la raíz conjugada.

$$\frac{\infty}{0} \rightarrow \text{lim laterales}$$

$$\frac{0}{0} \rightarrow \text{factoriza}$$

$$\frac{\pm \infty}{\pm \infty} \rightarrow \text{Divide mayor potencia } \times \neq \text{ raíces } \rightarrow \text{racionaliza}$$

$$\infty - \infty \rightarrow \text{se opera}$$

$$0^0, \pm \infty^0 \rightarrow \text{logaritmos}$$

$$1^{\infty} \rightarrow e$$

$$* \quad 1^\infty \rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)^{g(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - 1] g(x)}$$

$$* \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(-x)$$

* $\lim f(x)$ en un punto \rightarrow lim laterales

$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = \infty = \lim_{x \rightarrow c^+} f(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow c} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = -\infty = \lim_{x \rightarrow c^+} f(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow c} f(x) = -\infty$$

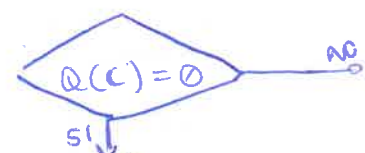
$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow c^+} f(x) \Rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow c} f(x)$$

* lim laterales $f(x)$ son ∞

$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = l = \lim_{x \rightarrow c^+} f(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c) = l$$

$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow c^+} f(x) \Rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow c} f(x)$$

$$* \quad \lim_{x \rightarrow c} \frac{P(x)}{Q(x)}$$



$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \frac{P(c)}{Q(c)}$$

lim laterales ($\neq \infty$)

se simplifica por $(x-c)$

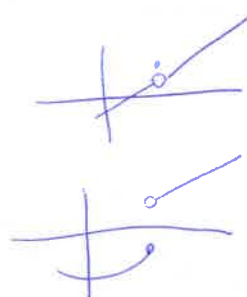
Continuidad pto

$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = f(c)$$

Discontinuidad

• Evitable: Si \exists lim laterales pero no $f(c)$

• No evitable: Asintota



$$① \log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

$$② \log_a \left(\frac{x}{y} \right) = \log_a x - \log_a y$$

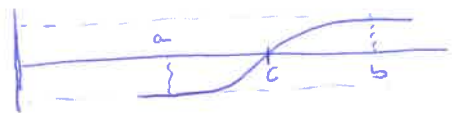
$$③ \log_a (x^n) = n \log_a x$$

$$④ \log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

$f(x)$ es continua en un intervalo si es continua en cada punto
 $f(x)$ a trozos pueden presentar discontinuidad \rightarrow pto en el que

TEOREMA BOLZANO

Si $f(x)$ es continua $[a, b]$ y $\text{signo } f(a) \neq \text{signo } f(b) \exists c \in (a, b) / f(c) = 0$

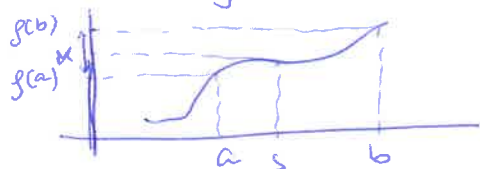


2 consecuencias:

• Teorema valores intermedios

Si $f(x)$ continua $[a, b]$ toma todos los valores internos entre $f(a)$ y $f(b)$

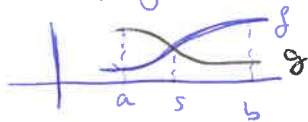
$\forall k / f(a) < k < f(b) \exists s, a < s < b / f(s) = k$



• 2ª consecuencia

Si f y g son continuas $[a, b]$ y $f(a) < g(a) \text{ y } f(b) > g(b)$

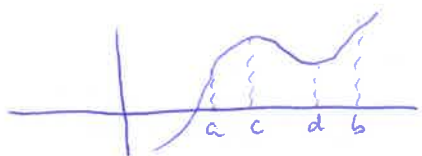
$\exists s \in (a, b) / f(s) = g(s)$



TEOREMA WEIERSTRASS

Si $f(x)$ continua en $[a, b] \Rightarrow \exists \max$ y \min absoluto en intervalo

Si $f(x)$ continua $[a, b]$, $\exists c, d \in [a, b] / \forall x \in [a, b]$ y $f(d) \leq f(x) \leq f(c)$



* TABLA DERIVADAS

* Derivabilidad de funciones a trozos

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{si } x \leq x_0 \\ f_2(x) & \text{si } x > x_0 \end{cases}$$

Continuidad en x_0

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

Derivabilidad en x_0

$$f'(x_0^-) = f'(x_0^+)$$

Cuando una $f(x)$ es continua pero no derivable, son pts angulosos

* Derivada de la función inversa.

Hallamos

$$[f^{-1}(x)]' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Ej: $f(x) = x^2$
 $f'(x) = 2x$
 $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$

$f^{-1}(x) = \Rightarrow y = x^2 \Rightarrow x = y^2$
 $y = \sqrt{x}$

$$[f^{-1}(x)]' = \frac{1}{f'(\sqrt{x})} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

* Derivación logarítmica:

Ej: $f(x) = x^x$

$\ln f(x) = \ln x^x$

$(\ln f(x))' = (\ln x^x)' \Rightarrow (x \ln x)'$

$\frac{f'(x)}{f(x)} = 1 \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1 \Rightarrow$

$f'(x) = x^x (\ln x + 1)$

Derivación implícita:

A veces se puede calcular su derivada expresándola en función de coordenadas (x, y)

Ej: $f'(x)$

$$f(x) = xy^5 - y^2 + x^3 = 9$$

$$y^5 + x5y^4y' - 2yy' + 3x^2 = 0$$

$$x5y^4y' - 2yy' = -y^5 - 3x^2 \quad f(x)=y = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$$

$$y'(5y^4x - 2y) = -y^5 - 3x^2$$

$$y' = \frac{-y^5 - 3x^2}{5y^4x - 2y}$$

Recta tg a $f(x)$ en $x=x_0$

Notación de Leibnitz $\rightarrow f'(x) = \frac{dy}{dx} \Rightarrow dy = f'(x) dx$

Ej: $dy?$ en $f(x) = 3x^2 - 2x$

$$dy = 6x - 2 dx$$

Domínio

- Si \exists denominador
- Si \exists raíces pares
- Si \exists logaritmos

Continuidad y derivabilidad

- Función raíz \rightarrow AV en radicando $= 0$
- Función valor absoluto \rightarrow pts angulosos

Simetría

$$f(x) \begin{cases} f(x) \rightarrow \text{PAR} \\ -f(x) \rightarrow \text{IMPAR} \end{cases} \quad \text{No simetría}$$

Periodicidad \rightarrow trigonométricas

- Si $f(x)$ tiene periodo $k \Rightarrow f(mx+n)$ tiene periodo $\frac{k}{m}$
- Si $f(x)$ y $g(x) \rightarrow$ periódicas $\rightarrow f \pm g ; f \cdot g ; f/g$
son periódicas con mcm del periodo.

Asintotas

$$\text{AV} \rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm \infty \quad \exists x = a \text{ AV}$$

$$\text{AH} \rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = l \quad \exists y = l \text{ AH}$$

$$\text{AO} \rightarrow \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) &= \pm \infty & \exists \text{ AO en } y = mx + n \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} &= m & \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = n \end{aligned}$$

$$\text{RP} \rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \pm \infty \quad \text{y } \nexists \text{ AO}$$

Pts singulares

$$f'(x) = 0$$

Pts cortes

$$y = 0 \Rightarrow x = ?$$

$$x = 0 \Rightarrow y = ?$$

Funciones polinómicas

Derivables, continuas, \exists A

① Simetría

② RP

③ Pts singulares

④ Pts corte

⑤ Representación

Funciones racionales

Exceptuando cuando $Q(x) = 0$, $f(x)$ es continua en \mathbb{R}

① Simetría

② AV $Q(x) = 0$ + posición

③ AH o AO

④ Pts singulares

⑤ Pts de corte

⑥ Representar

2) Dominio... periodicidad...

- Valor absoluto

- Radicales \rightarrow Dominio y 2 asíntotas.

- Exponenciales \rightarrow AH y RP

- Trigonométricas \rightarrow periodicidad

- Logarítmicas \rightarrow cualquier cosa

TEMA 1 : MATRICES

Matriz \rightarrow tabla numérica rectangular formada por m filas y n columnas. Así su dimensión es $m \times n$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad a_{ij} \in \mathbb{R}$$

\downarrow filas \downarrow columnas

También se designa $(a_{ij})_{m,n}$ Siempre 1° filas \rightarrow columnas

- Matrices iguales \rightarrow son iguales si tienen la misma dimensión y coinciden término a término
 - Matriz con 1 fila \rightarrow Vector fila
 - Matriz con 1 columna \rightarrow Vector columna
 - Matriz traspuesta de una matriz A a otra A^t cuando se cambian la filas por columnas.
 - Matriz simétrica si coincide con su traspuesta, siendo siempre cuadrada.
- Cuando hablamos de grados, nos referimos a las filas o columnas de una matriz, partiendo siempre de que es cuadrada.
- Matriz triangular \rightarrow es una matriz cuadrada en la que todos los elementos por encima o por debajo de la diagonal son 0.

Operaciones con matrices.

* SUMA DE MATRICES: para sumar dos matrices, deben tener la misma dimensión y se suma término a término. Propiedades:

① ASOCIATIVA: $A + (B + C) = (A + B) + C$

② COMMUTATIVA: $A + B = B + A$

③ ELEMENTO NEUTRO: $O_{m,n}$

④ ELEMENTO OPUESTO: $-A$

$$A + (-A) = O_{m,n}$$

- la matriz $O_{m,n}$, cuyos elementos son todos 0, al sumarle otra matriz da esa otra matriz.
- la matriz $-A$ se llama matriz opuesta a aquella que tiene todos los signos cambiados.

Corolario : se llama matriz antisimétrica aquella matriz cuya opuesta coincide con su transpuesta

$$A \Rightarrow A^t = -A$$

El conjunto de las matrices $M_{m,n}$ respecto a la suma con estas propiedades forma un grupo Abelianos.

* PRODUCTO DE UN NÚMERO POR UNA MATRIZ. se multiplica por el número cada elemento de la matriz.

$$k (a_{ij})_{mn} = (ka_{ij})_{mn}$$

Cumple que...

$$a, b \in \mathbb{R} ; A, B \in M_{m,n}$$

$$\textcircled{1} \text{ ASOCIATIVA: } a \cdot (bA) = (a \cdot b)A$$

$$\textcircled{2} \text{ DISTRIBUTIVA:}$$

$$(a+b)A = aA + bA$$

$$a(A+B) = aA + aB$$

$$\textcircled{3} \text{ ELEMENTO NEUTRO: } 1 \cdot A = A$$

El conjunto de las matrices $M_{m,n}$ con la operación de suma de matrices y producto por un escalar tienen estructura de un espacio vectorial.

* PRODUCTO DE MATRICES. El producto de un vector fila por un vector columna con el mismo número de elementos, es un número que se obtiene multiplicando término a término y sumando los resultados

$$(a_1 \ a_2 \ a_3 \ \dots \ a_n) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + \dots + a_n b_n$$

Para multiplicar dos matrices A y B , se necesita que el n° de columnas de A coincida con el n° de filas de B . la matriz resultante se obtiene multiplicando cada vector fila de A por cada vector columna de B .

- las filas de A y las columnas de B indican las dimensiones de la matriz resultante.

- Solo se pueden multiplicar A y B si columnas A = filas B

Propiedades del producto de matrices:

① ASOCIATIVA: $(A_{mn} \cdot B_{np}) \cdot C_{pq} = A_{mn} (B_{np} \cdot C_{pq})$

② NO CONMUTATIVA: $AB \neq BA$

③ DISTRIBUTIVA: $A(B+C) = AB + AC$

④ $(AB)^t = B^t \cdot A^t \Leftrightarrow \exists A \cdot B$

Matriz inversa

- Matriz unidad o matriz identidad (I_n) es aquella cuyos términos son todos 0 menos la diagonal que son 1.

$$A \cdot I_n = A$$

Dada A y B del mismo orden...

$$\text{Si } A \cdot B = B \cdot A = I_n \rightarrow B = A^{-1}$$

- si una matriz tiene inversa, se llama regular
- Si no tiene inversa, se llama singular.

Para calcular la inversa de una matriz, utilizamos el método de Gauss. $A \cdot A^{-1} = I_n$

Se coloca A a la derecha y I_n a la izquierda. Cada línea se multiplica o divide por un número y se suman entre sí para transformar A en I .

Si durante el proceso, aparece una fila de 0, la matriz no tiene inversa.

Dependencia e independencia lineal

Una colección de n números reales dados en cierto orden es una n -upla.

El conjunto de todas las n -uplas de \mathbb{R} forman un espacio vectorial que se designa \mathbb{R}^n

Las filas y columnas de matrices son n -uplas.

- N -upla de 2 elementos \rightarrow par
- N -upla de 3 elementos \rightarrow terna
- N -upla de 4 elementos \rightarrow cuaterna

$\mathbb{R}^2 \rightarrow$ conjunto de las n -uplas de 2 elementos
 $\mathbb{R}^3 \rightarrow$ conjunto de las n -uplas de 3 elementos
 $\mathbb{R}^4 \rightarrow$ conjunto de n -uplas de 4 elementos -2-

Teniendo...

$\vec{v}_1, \vec{v}_2 \dots \vec{v}_n$ y $a_1, a_2 \dots a_n$

el vector $\vec{v}_1 a_1 + \vec{v}_2 a_2 + \vec{v}_3 a_3 + \dots + \vec{v}_n a_n$ es combinación lineal de los vectores anteriores.

- Un conjunto de vectores son linealmente dependientes si alguno de ellos se puede poner como combinación lineal de los demás.

- En caso contrario, son linealmente independientes.

Para que dos vectores sean linealmente independientes...

la condición necesaria para que $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \dots \vec{v}_n$ sean linealmente independientes es que la siguiente igualdad solo sea cierta cuando $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$

$$x_1 \vec{v}_1 + x_2 \vec{v}_2 + \dots + x_n \vec{v}_n = 0$$

Rango de una matriz

Entre las filas o columnas de una matriz puede haber dependencia o independencia

El rango de una matriz es el número de filas o columnas linealmente independientes. Se designa $\text{rang}(A)$

Para calcularlo por el método de Gauss.

El rango en una matriz escalonada es el nº de filas $\neq 0$

TEMA 2: DETERMINANTES

Determinantes de orden 2

El determinante de una matriz cuadrada de orden 2, es un número que se obtiene...

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} = n$$

se designa como $|A|$

Cumplen:

- ① $|A| = |A^t|$ El determinante de una matriz coincide con su traspuesta
- ② Si en una matriz \exists una línea (fila o columna) de 0, su determinante = 0
- ③ Si cambiamos de orden las dos filas o columnas de una matriz, su determinante cambia de signo
- ④ Si dos filas o dos columnas son =, su determinante = 0
- ⑤ Si los elementos de una línea (fila o columna) están multiplicados por un mismo número, el determinante queda multiplicado por ese número.
- ⑥ Si una fila o columna es proporcional a otra, el determinante se hace 0.
- ⑦ Si una fila o columna se presenta como suma de valores, su determinante puede descomponerse como suma de los determinantes de dos matrices

$$\begin{vmatrix} a + a' & b \\ c + c' & d \end{vmatrix} = (a + a')d - (c + c')b = ad + a'd - bc - bc' = ad - bc + a'd - bc' \\ = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' & b \\ c' & d \end{vmatrix}$$

- ⑧ Si una fila o columna de una matriz se le suma otra fila o columna multiplicada por un número, el determinante de la nueva es igual al de la primera

$$\begin{vmatrix} a & b+ka \\ c & d+kc \end{vmatrix} = a(d+kc) - c(b+ka) = ad + akc - cb - cka =$$

$$= ad - cb + \underbrace{akc - cka}_0$$

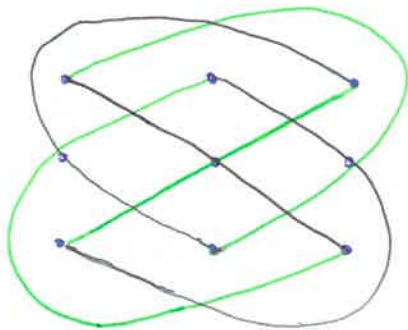
$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & ka \\ c & kc \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

⑨ El determinante del producto de dos matrices, es igual al producto de sus determinantes

$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$$

Determinantes de orden 3

El determinante de una matriz de orden 3 se obtiene según la regla de Sarrus



$$- + - + - - = |A|$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11} = |A|$$

la otra forma es...

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{33}a_{12}a_{21} = |A|$$

las 9 primeras propiedades se comparten con los determinantes de orden

16) si una fila de un determinante es combinación lineal de las otras 2, el determinante = 0

También vale al contrario, es decir, si el determinante vale 0, sabemos que alguna de las filas es combinación lineal.

Calculo de determinantes por los elementos de una línea

En una matriz cuadrada de orden n , se llama menor complementario de un elemento a_{ij}

y se denomina Δ_{ij} al determinante de la matriz de orden $n-1$ que resulta de eliminar la fila i y la columna j

se llama adjunto del elemento a_{ij} y se designa A_{ij} (adjunto de a_{ij}) a lo siguiente:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \Delta_{ij}$$

Δ_{ij} menor complementario

Para calcular determinantes de orden 3, utilizamos:

17) si los elementos (fila o columna) de una matriz cuadrada, se multiplican con sus respectivos adjuntos y se suman los resultados, se obtiene el determinante de la matriz inicial. Se dice entonces que el determinante está desarrollado por los elementos de esa línea

CONSEJO cuando desarrollamos determinantes por líneas, se nos facilita la labor cuando en la línea tenemos 0. Si no los hay, los fabricamos.

Inversa de una matriz cuadrada mediante determinantes

la condición, es que $|A| \neq 0$

- ① Formar una matriz con los menores complementarios de cada elemento
- ② Cambiar el signo de cada elemento alternativamente según su fila y columna.
- ③ Hacer la traspuesta de la matriz obtenida
- ④ Dividir por el determinante de A.

Rango de una matriz por determinantes

Si las filas o columnas de una matriz son linealmente dependientes, su determinante es 0.

Consiste en ir tomando sus matrices cuadradas de orden cada vez mayor para ver si todas sus combinaciones son $= 0$.

Si hay alguna $\neq 0$ garantiza ese rango.

Conviene ver si una fila es linealmente dependiente de otras 2 para descartarla.

• Proporcional (Alberto por 8)

• Linealmente dependiente (Alberto por 8 + Carlos por 2)

RECUERDO: Comprobar el número que de al igualar el determinante a cero, en otra submatriz donde debe dar 0.

- Para comprobar el rango de una matriz, debemos de hacer el determinante de la mayor matriz cuadrada posible/s, ya que puede ser más de una.
- los valores que obtengamos, son puntos en los que si la matriz no vale esos valores, va a ser del máximo rango
- Pero si a toma estos valores, hay que estudiarlos, para ver que rango tiene la matriz con estos valores.
- De manera, que nos tomamos submatrices dentro de la matriz escogida anteriormente y sustituimos el o los valores.
- Si ese valor es $\neq 0$, el rango es 1 menor al rango máximo.
- Si ese valor es $= 0$ en todas las posibles submatrices, ese rango $= 1$

Ej:

$$N = \begin{pmatrix} a+1 & 1 & 1 & a \\ 1 & a+1 & 1 & a \\ 1 & 1 & a+1 & a \end{pmatrix}$$

1ª Hacemos el determinante de, por ejemplo:

$$\begin{vmatrix} a+1 & 1 & 1 \\ 1 & a+1 & 1 \\ 1 & 1 & a+1 \end{vmatrix} = \begin{cases} a=0 \\ a=-3 \end{cases}$$

* Aunque teóricamente habría que analizar cada una de las posibles matrices de 3×3 .

2° Estudiamos los valores obtenidos:

- $\forall a \neq 0 \text{ y } a \neq -3 \Rightarrow \text{rang}(N) = 3$

- $\forall a = -3 \Rightarrow \text{rang}(N) = 2$

↑

Esto es así porque al sustituir
(-3) en una submatriz, el determinante $\neq 0$

- $\forall a = 0 \Rightarrow \text{rang}(N) = 1$

↑

Esto es así porque al sustituir
(0) en todas las posibles submatrices, el
determinante = 0.

TEMA 3: SISTEMAS DE ECUACIONES

Sistemas de ecuaciones lineales

Ecuación lineal \rightarrow aquella que tiene grado 1 con 1 o + incógnitas

1 incógnita \rightarrow punto

2 incógnitas \rightarrow recta

3 incógnitas \rightarrow plano

Dos ecuaciones son equivalentes si tienen = solución

Para pasar de una ecuación equivalente a otra,

basta con multiplicar o dividir por un $n^\circ \neq 0$

sistemas de ecuaciones con:

2 incógnitas \rightarrow rectas

3 incógnitas \rightarrow planos

Para pasar de un sistema equivalente a otro:

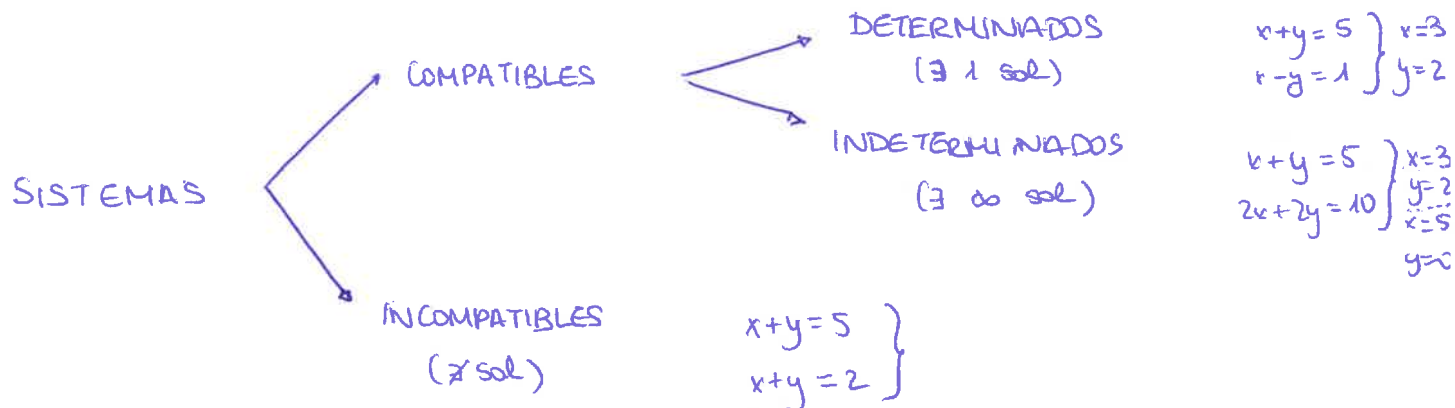
* Multiplicar o dividir alguna ecuación por $n^\circ \neq 0$

* Sustituir una ecuación por el resultado

de \oplus o \ominus otra multiplicada por un n°

Si una ecuación es combinación lineal de las otras se puede suprimir.

Interpretación geométrica de los sistemas de ecuaciones lineales



Sistemas escalonados

Para resolver un sistema de ecuaciones, se intenta llegar mediante sistemas equivalentes

si \exists + incógnitas que ecuaciones, se deja en función de una incógnita.

Método de Gauss

Es el método del sistema escalonado.

Su práctica se hace + cómoda si cogemos los coeficientes y los términos en matrices.

Durante el proceso podemos obtener:

- Una fila con todo 0. Es algo trivial, prescindimos.
- Dos filas = 0 proporcionales. Podemos prescindir de una de ellas
- Una fila con todo 0 menos el último n° es incompatible.

■ $\rightarrow n^\circ \neq 0$

□ $\rightarrow n^\circ$

$$\text{I} \left(\begin{array}{cccc|c} \blacksquare & \square & \square & \square & \square \\ \bigcirc & \blacksquare & \square & \square & \square \\ \bigcirc & \bigcirc & \blacksquare & \square & \square \\ \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc & \blacksquare & \square \end{array} \right) \quad \text{SCD}$$

$$\text{II} \left(\begin{array}{cccc|c} \blacksquare & \square & \square & \square & \square \\ \bigcirc & \blacksquare & \square & \square & \square \\ \bigcirc & \bigcirc & \blacksquare & \square & \square \end{array} \right) \quad \text{SCI} \quad (+ \text{ incógnitas que soluciones})$$

$$\text{III} \left(\begin{array}{cccc|c} \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc & \blacksquare \end{array} \right) \quad \text{SI}$$

Resolver Sistemas

Es identificar para que valores de unos parámetros, el sistema es compatible, determinado o indeterminado, o incompatible.

Criterios para saber si un sistema es compatible si en un sistema de ecuaciones, llamamos $A \rightarrow$ matriz coeficientes y $A' \rightarrow$ matriz ampliada

Teorema de Rouché

La condición necesaria para que un sistema tenga solución: $\text{rang}(A) = \text{rang}(A')$

* Si el rango coincide con el nº incógnitas \Rightarrow SCD

* Si el rango no coincide con el nº incógnitas \Rightarrow SCI

Debemos comprobar todas las columnas de la matriz para hallar el rango.

Regla de Cramer

Sirve para obtener la solución de un sistema de n ecuaciones con n incógnitas \Rightarrow SCD

$$\left. \begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z &= c_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z &= c_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z &= c_3 \end{aligned} \right\}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\text{rang}(A) = 3 = \text{rang}(A') = \text{nº incóg} \Rightarrow \text{SCD}$$

$$|Ax| = \begin{vmatrix} c_1 & a_{12} & a_{13} \\ c_2 & a_{22} & a_{23} \\ c_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \Rightarrow x = \frac{|Ax|}{|A|}$$

$$|Ay| = \begin{vmatrix} a_{11} & c_1 & a_{13} \\ a_{21} & c_2 & a_{23} \\ a_{31} & c_3 & a_{33} \end{vmatrix} \Rightarrow y = \frac{|Ay|}{|A|}$$

$$|Az| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & c_2 \\ a_{31} & a_{32} & c_3 \end{vmatrix} \Rightarrow z = \frac{|Az|}{|A|}$$

la regla de Cramer podemos aplicarla también a sistemas con + incógnitas que ecuaciones, pasando la incógnita al término independiente, o si hubiera falta, 2.

Sistemas homogéneos

son sistemas de ecuaciones cuyos términos independientes son 0. Propiedades:

- * Solución trivial que es todo cero
- * Para que tenga otras soluciones, es necesario que $\text{rang}(A) < n^\circ \text{ incógnitas}$

Forma matricial de un sistema de ecuaciones

Un sistema de ecuaciones lleva asociado

3 matrices: la de los coeficientes, la de las incógnitas y la de los términos independientes.

$$\left. \begin{array}{l} x - y - z = 1 \\ -x \quad \quad + 3z = 18 \\ -2x + 5y - 3z = -52 \end{array} \right\} A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & 5 & -3 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Matriz de coeficientes Incógnitas

$$C = \begin{pmatrix} 1 \\ 18 \\ -52 \end{pmatrix}$$

Términos independientes

$$\left. \begin{array}{rcl} x & -y & -z = 1 \\ -x & & +3z = 18 \\ -2x & +5y & -3z = -52 \end{array} \right\} A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & 5 & -3 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} 1 \\ 18 \\ -52 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot X = C ;$$

Si $A^{-1} \nexists$, no tiene solución

$$X = A^{-1}C$$

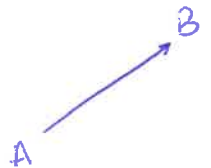
$$X = \begin{pmatrix} 15 & 8 & 3 \\ 9 & 5 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 18 \\ -52 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} x = 3 \\ y = -5 \\ z = 7 \end{array}$$

TEMA 4: VECTORES EN EL ESPACIO

Operaciones con vectores

Características de los vectores en el espacio así como sus operaciones, son idénticas que las de los vectores en el plano:

- * Un vector \vec{AB} tiene origen en A y extremo en B
 - Módulo: distancia de A a B $|\vec{AB}|$
 - Dirección: recta que pasa por A y B
 - Sentido: recorrido desde A hacia B



- * Dos vectores iguales tienen = módulo, = dirección y el mismo sentido.
- * Los vectores fijos son los vectores individuales (\vec{AB}) que en conjunto forman un vector libre (\vec{u})
- * Operaciones:

- Producto de un escalar con un vector.

$$k \neq 0 \quad k\vec{u} \quad \begin{cases} \text{módulo } k|\vec{u}| \\ \text{dirección } = \\ \text{sentido } \begin{cases} \text{cambia si } k < 0 \\ \text{no cambia si } k > 0 \end{cases} \end{cases}$$

vectores de módulo 1 \rightarrow unitarios

vector unitario \rightarrow dividiendo entre su módulo

Propiedades:

- ASOCIATIVA $(ab)\vec{u} = a(b\vec{u})$

- DISTRIBUTIVA $a(\vec{u} + \vec{v}) = a\vec{u} + a\vec{v}$
 $\vec{u}(a + b) = \vec{u}a + \vec{u}b$

- ELEMENTO NEUTRO $1\vec{u} = \vec{u}$

- Suma y resta de vectores

Se sitúa \vec{v} a continuación de \vec{u} y se une el origen de \vec{u} con el extremo de \vec{v} . Restar es sumar el opuesto



Propiedades:

- ASOCIATIVA $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$
- COMMUTATIVA $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
- ELEMENTO OPUESTO $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$ vector nulo
- VECTOR NULO $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$

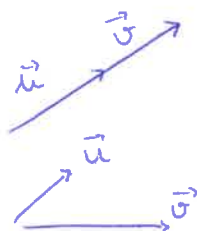
Estas propiedades le dan al conjunto de vectores la estructura de espacio vectorial.

expresión analítica de un vector

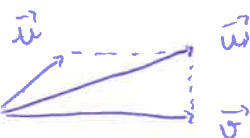
Dados los vectores $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \dots \vec{w}$ y los números $a, b, c \dots m$ se llama combinación lineal de los vectores

$$a\vec{x} + b\vec{y} + c\vec{z} + \dots + m\vec{w}$$

Un conjunto de vectores son linealmente dependientes si al menos uno de ellos se puede poner como combinación lineal de los demás.



linealmente dependientes \Rightarrow = Dirección = sentido



linealmente independientes.

linealmente dependientes.

$$\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$$

son vectores coplanarios porque están en = plano

Siempre que haya 3 vectores coplanarios, es decir, en el mismo plano, van a ser linealmente dependientes.

3 vectores no coplanarios forman una base del espacio tridimensional. Son linealmente independientes y cualquier otro vector del espacio se puede poner como combinación lineal de ellos.

Si los 3 vectores son \perp entre sí, forman una base ortogonal. Si además tienen la misma longitud y es igual a 1, se llama base ortonormal.

Dada una base $B(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ cualquier vector \vec{v} se puede poner como combinación lineal de los vectores de la base

$$\vec{v} = a\vec{x} + b\vec{y} + c\vec{z}$$

Las coordenadas (a, b, c) se les llama coordenadas del vector \vec{v} respecto a la base B

$$\begin{array}{l} \vec{v}(a, b, c) \\ \vec{x} (1, 0, 0) \\ \vec{y} (0, 1, 0) \\ \vec{z} (0, 0, 1) \end{array}$$

operaciones con coordenadas de dos vectores \vec{u} y \vec{v}

$$\vec{u} (x_1, y_1, z_1)$$

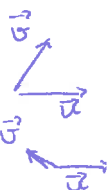
$$\vec{v} (x_2, y_2, z_2)$$

- $\vec{u} + \vec{v} (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$
- $k\vec{u} (kx_1, ky_1, kz_1)$
- $a\vec{u} + b\vec{v} (ax_1 + bx_2, ay_1 + by_2, az_1 + bz_2)$

Producto escalar de vectores

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\vec{u} \wedge \vec{v})$$

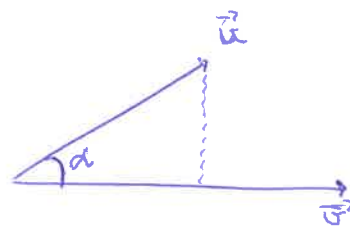
$$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \begin{cases} \text{agudo} \Rightarrow \cos(\vec{u} \wedge \vec{v}) > 0 \Rightarrow \vec{u} \vec{v} \oplus \\ \text{obtuso} \Rightarrow \cos(\vec{u} \wedge \vec{v}) < 0 \Rightarrow \vec{u} \vec{v} \ominus \end{cases}$$



geométricamente; si $\alpha < 90^\circ$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| |\vec{v}| \cos(\vec{u} \wedge \vec{v})$$

$$\cos(\vec{u} \wedge \vec{v}) = \frac{\text{proyección } \vec{u} \text{ sobre } \vec{v}}{|\vec{u}|}$$



proyección _{\vec{v}} $\vec{u} > 0$

$$\text{proyección } \vec{u} \text{ sobre } \vec{v} = \cos(\vec{u} \wedge \vec{v}) |\vec{u}|$$

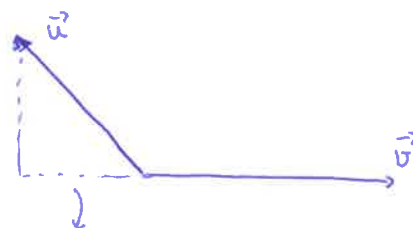
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{v}| \text{proyección}_{\vec{v}} \vec{u}$$

Propiedades producto escalar:

- COMMUTATIVA $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

- ASOCIATIVA $(k\vec{u}) \cdot \vec{v} = k(\vec{u} \cdot \vec{v}) = \vec{u} \cdot (k\vec{v})$

- DISTRIBUTIVA $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$



$$|\vec{u}| \cos(\vec{u} \wedge \vec{v}) < 0$$

La expresión analítica del producto escalar en una base ortonormal cumple lo siguiente:

$$B(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$$

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1$$

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = 0$$



Así, si $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ y $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

Demostración

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= (x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k}) \cdot (x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k}) = \\ &= x_1 x_2 \vec{i} \cdot \vec{i} + x_1 y_2 \vec{i} \cdot \vec{j} + x_1 z_2 \vec{i} \cdot \vec{k} + y_1 x_2 \vec{j} \cdot \vec{i} + \\ &+ y_1 y_2 \vec{j} \cdot \vec{j} + y_1 z_2 \vec{j} \cdot \vec{k} + z_1 x_2 \vec{k} \cdot \vec{i} + z_1 y_2 \vec{k} \cdot \vec{j} + z_1 z_2 \vec{k} \cdot \vec{k} = \\ &= x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 \end{aligned}$$

las aplicaciones del producto escalar se resumen en:

sean $\vec{u} (x_1, y_1, z_1)$

$\vec{v} (x_2, y_2, z_2)$

* Módulo \vec{u} $|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$

* ANGULO DE \vec{u} y \vec{v}

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| |\vec{v}|} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

* CRITERIO DE \perp DE \vec{u} y \vec{v}

$$\text{si } \vec{u} \perp \vec{v} \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = 0$$

Una forma de obtener un vector perpendicular a otro es cambiar dos coordenadas de lugar y una de ellas de signo. la otra se hace 0.


$$\vec{u} (-2, 3, 1) \perp \begin{cases} (3, 2, 0) \\ (1, 0, 2) \\ (0, -1, 3) \end{cases}$$

Producto vectorial

Es un nuevo vector

$$\vec{u} \times \vec{v} \begin{cases} \text{MÓDULO} & |\vec{u}| \times |\vec{v}| = |\vec{u}| |\vec{v}| \sin(\vec{u}, \vec{v}) \\ \text{DIRECCIÓN} & \perp \text{ a } \vec{u} \text{ y } \vec{v} \\ \text{SENTIDO} & (\vec{u}, \vec{v}) \end{cases}$$

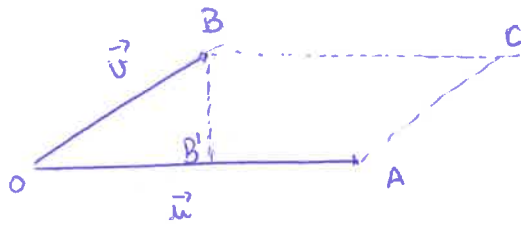
$\begin{matrix} < 180^\circ & \text{HACIA ARRIBA} \\ > 180^\circ & \text{HACIA ABAJO} \end{matrix}$



Si \vec{u} y \vec{v} son linealmente dependientes
 tienen = dirección
 si alguno es 0

} Producto vectorial = 0

geometricamente...



$$\sin(\vec{u} \wedge \vec{v}) = \frac{|BB'|}{|\vec{v}|}$$

$$|BB'| = |\vec{v}| \sin(\vec{u} \wedge \vec{v})$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = |\vec{u}| |BB'| = |\vec{u}| |\vec{v}| \sin(\vec{u} \wedge \vec{v})$$

base · altura = Area del paralelogramo.

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = \text{Area paralelogramo}$$

Propiedades:

* ANTICOMUTATIVA

$$\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$$

* HOMOGÉNEA

$$k(\vec{u} \times \vec{v}) = k\vec{u} \times \vec{v} = \vec{u} \times k\vec{v}$$

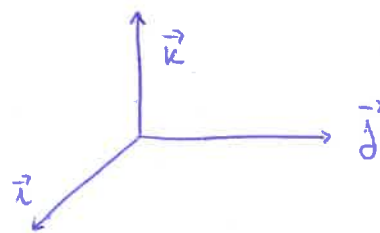
* DISTRIBUTIVA

$$\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$$

Para ver la expresión analítica del producto vectorial partimos de una base ortonormal.

$$B(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$$

Regla del sacacorchos



$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}$$

$$\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}$$

$$\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}, \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}$$

$$\vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}$$

$$\vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}$$

$$\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$$

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$$

Sacacorchos $\begin{cases} \text{sentido horario} \rightarrow \text{se mete} \\ \text{antihorario} \rightarrow \text{se saca} \end{cases}$

$$\text{Si } \vec{u} = (\vec{x}_1 \vec{i}, \vec{y}_1 \vec{j}, \vec{z}_1 \vec{k}) \text{ y } \vec{v} = (\vec{x}_2 \vec{i}, \vec{y}_2 \vec{j}, \vec{z}_2 \vec{k})$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = x_1 \vec{y}_2 \vec{k} - x_1 \vec{z}_2 \vec{j} - y_1 x_2 \vec{k} + y_1 \vec{z}_2 \vec{i} + \vec{z}_1 x_2 \vec{j} - \vec{z}_1 \vec{y}_2 \vec{i} =$$

$$= (y_1 z_2 - y_2 z_1) \vec{i} + (z_1 x_2 - z_2 x_1) \vec{j} + (x_1 y_2 - x_2 y_1) \vec{k}$$

$$= \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{i} + \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \vec{k} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

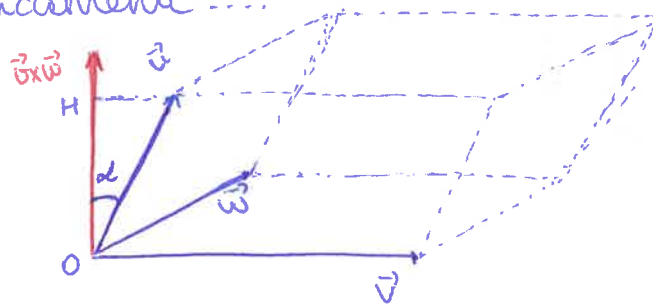
$$\Rightarrow \vec{u} \times \vec{v} = \left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right)$$

El producto vectorial $\vec{u} \times \vec{v}$ nos da un vector perpendicular a \vec{u} y a \vec{v}

Producto mixto

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$$

Geometricamente...



$$\cos \alpha = \frac{|\vec{OH}|}{|\vec{u}|}$$

$$|\vec{OH}| = |\vec{u}| \cos \alpha$$

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = |\vec{u}| |\vec{v} \times \vec{w}| \cos (\vec{u}, \vec{v} \times \vec{w})$$

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{altura}}}{\vec{OH}} |\vec{v} \times \vec{w}| = \text{volumen paralelepípedo}$$

\uparrow
 área de la base

Si el producto mixto de 3 vectores = 0
estos son linealmente dependientes.

Analíticamente...

$$\vec{u} (x_1, y_1, z_1)$$

$$\vec{v} (x_2, y_2, z_2)$$

$$\vec{w} (x_3, y_3, z_3)$$

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) =$$

$$= (x_1, y_1, z_1) \cdot \left(\begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} z_2 & x_2 \\ z_3 & x_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} \right)$$

$$= \begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} x_1 + \begin{vmatrix} z_2 & x_2 \\ z_3 & x_3 \end{vmatrix} y_1 + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} z_1$$

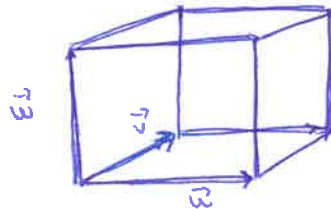
Signo \ominus lo ponemos
en valor absoluto
ya que volumen \ominus
no tiene sentido

$$= \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \text{ unidades cúbicas}$$

Producto escalar $= 0 \Rightarrow$ Perpendiculares

Producto vectorial $= 0 \Rightarrow$ Paralelos o coplanarios
linealmente dep.

Al hayar \vec{w} obtenemos un vector \perp \vec{u} y \vec{v}
cuya altura es el paralelepípedo.



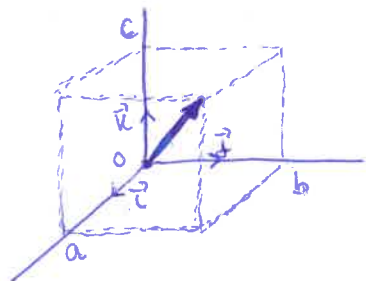
TEMA 5: PUNTOS, RECTAS, Y PLANOS EN EL ESPACIO

Sistema de referencia en el espacio

Un sistema de referencia en el espacio consiste en el conjunto $\{O, (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})\}$ tal que O es un punto fijo llamado origen e $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ una base

A cada punto P se le asocia un vector \vec{OP} de coordenadas (a, b, c)

Los ejes de coordenadas se llaman x, y, z que son una base ortonormal



DIAGONAL OPUESTA

Aplicaciones de los vectores a problemas geométricos

* Coordenadas del vector que une dos puntos

$$P(x_1, y_1, z_1)$$

$$Q(x_2, y_2, z_2)$$

$$\vec{PQ}(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

* comprobación de que 3 vectores estén alineados

$$A(x_1, y_1, z_1)$$

$$B(x_2, y_2, z_2)$$

$$C(x_3, y_3, z_3)$$

\vec{AB} y \vec{AC} alineados \Rightarrow dirección \Rightarrow coordenadas proporcionales

$$\frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_1} = \frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1}$$

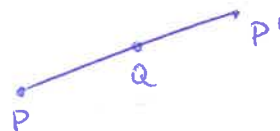
* Punto medio de un segmento

$$A(x_1, y_1, z_1)$$

$$B(x_2, y_2, z_2)$$

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$$

* Simétrico de un punto respecto a otro
simétrico de P respecto Q



$$P(x_1, y_1, z_1)$$

$$Q(x_2, y_2, z_2)$$

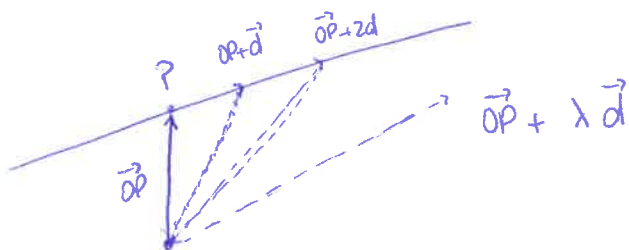
$$P'(\alpha, \beta, \gamma)$$

$$\frac{x_1 + \alpha}{2} = x_2; \quad \frac{y_1 + \beta}{2} = y_2; \\ \frac{z_1 + \gamma}{2} = z_2;$$

Ecuaciones de la recta

Necesitamos conocer:

- Punto P de la recta
- Vector de posición \vec{OP} (conociendo P)
- Vector dirección \vec{d} (paralelo a la recta)



$$\vec{OP} = \vec{P}$$

$$\vec{OX} = \vec{P} + \lambda \vec{d}$$

ECUACIÓN VECTORIAL \rightarrow

$$P(x_1, y_1, z_1)$$

$$\vec{d}(d_1, d_2, d_3)$$

$$(x, y, z) = (x_1, y_1, z_1) + \lambda (d_1, d_2, d_3)$$

ECUACIONES
PARAMÉTRICAS

$$\rightarrow \lambda : \begin{cases} x = x_1 + \lambda d_1 \\ y = y_1 + \lambda d_2 \\ z = z_1 + \lambda d_3 \end{cases}$$

ECUACIÓN CONTINUA

$$\rightarrow \frac{x - x_1}{d_1} = \frac{y - y_1}{d_2} = \frac{z - z_1}{d_3}$$

Si d_1, d_2, d_3 son 0, esta expresión no es correcta analíticamente pero sí simbólicamente.

ECUACIÓN IMPLÍCITA

$$\rightarrow \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

$ax + by + cz + d = 0 \rightarrow$ plano

Ec. implícita \rightarrow corte de dos planos

Posiciones relativas de dos rectas

- ✓ * Coincidentes : $= \text{dir.}$ ∞ puntos común
- ✓✓ * Paralelas : $= \text{dir.}$ \nexists punto en común
- X * Secantes : $\neq \text{dir.}$ 1 punto en común
- X * Que se cruzen : $\neq \text{dir.}$ \nexists punto común

Análiticamente....

$$r: \begin{cases} P(P_1, P_2, P_3) \\ \vec{d}(d_1, d_2, d_3) \end{cases} \quad s: \begin{cases} P'(P'_1, P'_2, P'_3) \\ \vec{d}'(d'_1, d'_2, d'_3) \end{cases}$$

• Si $\vec{d} \parallel \vec{d}' \Rightarrow \vec{d} = k\vec{d}' \quad (d_1, d_2, d_3) = k(d'_1, d'_2, d'_3)$

Rectas $\begin{cases} \rightarrow \text{coincidentes} \\ \rightarrow \text{Paralelas} \end{cases}$

Para discernirlo, tomamos un punto R

$A \in R$, Si $A \in S \Rightarrow r \text{ y } s \Rightarrow \text{Coincidentes}$
 Si $A \notin S \Rightarrow r \text{ y } s \Rightarrow \text{Paralelas}$

• Si \vec{d} no es \parallel a \vec{d}'

Rectas $\begin{cases} \rightarrow \text{cortan} \Rightarrow \vec{d}, \vec{d}' \text{ y } \vec{PP}' \rightarrow \text{coplanarios} \rightarrow \text{L.I.} \\ \rightarrow \text{se cruzan} \Rightarrow \text{linealmente independientes} \end{cases}$

4 casos

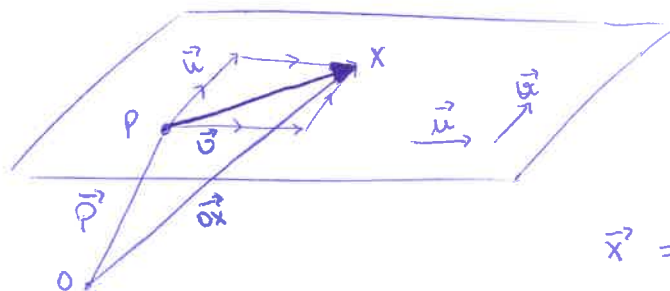
$$M' = \begin{matrix} \underbrace{\hspace{1cm}} \\ \begin{vmatrix} d_1 & d'_1 & P'_1 - P_1 \\ d_2 & d'_2 & P'_2 - P_2 \\ d_3 & d'_3 & P'_3 - P_3 \end{vmatrix} \end{matrix}$$

$\text{rang}(M) \begin{cases} 1 & \begin{cases} \text{rang}(M') = 1 & r \text{ y } s \text{ coincidentes} \\ \text{rang}(M') = 2 & r \text{ y } s \text{ paralelas} \end{cases} \\ 2 & \begin{cases} \text{rang}(M') = 2 & r \text{ y } s \text{ se cortan} \\ \text{rang}(M') = 3 & r \text{ y } s \text{ se cruzan} \end{cases} \end{cases}$

Ecuaciones del plano

El plano π queda determinado conociendo:

- * Un punto P , con lo que conocemos $\vec{OP} = \vec{p}$
- * Dos vectores \vec{u} y \vec{v} paralelos al plano independientes (no \parallel entre si)



$$\vec{x} = \vec{p} + \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}$$

Ecuación Vectorial

$$\vec{OX} = \vec{p} + \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}$$

Ecuaciones Paramétricas

$$\begin{cases} x = p_1 + u_1 \lambda + v_1 \mu \\ y = p_2 + u_2 \lambda + v_2 \mu \\ z = p_3 + u_3 \lambda + v_3 \mu \end{cases}$$

Ecuación Implícita

$$Ax + By + Cz + d = 0$$

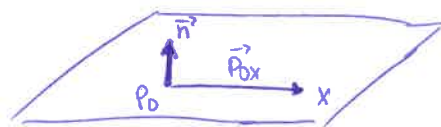
Para calcularla:

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & x - p_1 \\ u_2 & v_2 & y - p_2 \\ u_3 & v_3 & z - p_3 \end{vmatrix} = 0$$

Ecuación Plano a partir de punto y vector \perp plano

$$P_0 (x_0, y_0, z_0)$$

$$\vec{N} (a, b, c) \perp \text{plano}$$



$$\vec{n} \perp \vec{P_0x}$$

$$\vec{n} \cdot \vec{P_0x} = 0$$

De esta forma, si conocemos la ecuación implícita, el vector (a, b, c) es \perp plano

$$(a, b, c) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0$$

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

Posiciones relativas de rectas y planos

* COINCIDENTES



* PARALELAS



* SECANTE



Necesitamos:

* Recta en forma paramétrica

* Plano en forma implícita

$$r: \begin{cases} x = x_1 + \lambda d_1 \\ y = y_1 + \lambda d_2 \\ z = z_1 + \lambda d_3 \end{cases} \quad \pi: ax + by + cz + d = 0$$

Sustituimos las paramétricas en la ecuación del plano y calculamos. λ

* Si \nexists sol. para ningún valor \Rightarrow PARALELAS

* Si $\exists \infty$ sol. \Rightarrow COINCIDENTES

* Si $\exists 1$ sol. \Rightarrow SECANTES sol = Punto de corte

Posiciones relativas entre dos planos

* COINCIDENTES



* PARALELOS



* SE CORTAN



Trabajamos con la ecuación implícita.

$$\pi: ax + by + cz + d = 0$$

$$\pi': a'x + b'y + c'z + d' = 0$$

$$\underbrace{\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \end{vmatrix}}_M = M'$$

$$\text{rang}(M) = \begin{cases} 1 \Rightarrow \text{Rang}(M') = 1 \\ 2 \Rightarrow \text{Rang}(M') = 2 \end{cases} \begin{cases} 1 \Rightarrow \text{COINCIDENTES} \\ 2 \Rightarrow \nexists \text{ sol} = \text{PARALELOS} \\ 2 \Rightarrow \text{Rang}(M') = 2 \Rightarrow \text{CORTAN} \end{cases}$$

Para pasar de implícita a paramétrica

$$\begin{cases} \pi: x + 3y - z - 1 = 0 \\ \pi': x - 2y + z - 1 = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} (1, 3, -1) \vec{n} \perp \\ (1, -2, 1) \end{matrix}$$

① Resolver el sistema

② Hallando un vector director \perp vectores normales y un punto

* Si dos rectas se cortan, el determinante

$$\begin{vmatrix} d_1 & d'_1 & P'_1 - P_1 \\ d_2 & d'_2 & P'_2 - P_2 \\ d_3 & d'_3 & P'_3 - P_3 \end{vmatrix} = 0$$

Cuando se cortan, para hallar el punto de corte, igualamos x en paramétricas, de lo que igualamos las incógnitas

* Para pasar de la ec. plano en forma implícita a forma paramétrica, debemos de tomarlos 3 puntos del plano. Así, teniendo:

$$\pi: ax + by + cz + d = 0$$

$$\text{Cuando } x = y = 0; z = ? \Rightarrow (0, 0, z)$$

$$\text{Cuando } x = z = 0; y = ? \Rightarrow (0, y, 0)$$

$$\text{Cuando } y = z = 0; x = ? \Rightarrow (x, 0, 0)$$

Con tres puntos...



2 vectores
1 punto.

TEMA 6 : PROBLEMAS MÉTRICOS

Introducción

- * Dirección de una recta dada en paramétricas
la dirección nos la da el vector director
- * Dirección de un plano en forma implícita
En un plano en forma implícita $ax+by+cz+d=0$
el vector (a, b, c) es el normal al plano
Si tenemos un punto (x_0, y_0, z_0) y $\vec{n}(a, b, c)$, sería:
$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$
- * Plano paralelo a dos rectas si el plano π
es paralelo a dos rectas r y r' con
vectores \vec{d} y \vec{d}' , el vector normal sería $\vec{d} \times \vec{d}'$
- * Recta definida por dos planos si se da la
recta implícita definida por dos planos, para
calcular la ecuación de la recta, hacemos
el producto vectorial de los vectores normales.
y calculamos un punto.

Medidas de ángulos entre rectas y planos

Para ello debemos conocer el vector que determina la dirección

- Si es una recta, es el director
- Si es un plano, es el normal

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| |\vec{v}|}$$

- * Ángulo entre dos rectas Dos rectas r y r'
con vectores \vec{d} y \vec{d}'

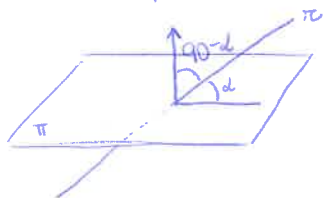
$$\cos \alpha = \frac{|\vec{d} \cdot \vec{d}'|}{|\vec{d}| \cdot |\vec{d}'|}$$

- * Ángulo entre dos planos π y π' que tienen como vectores \vec{n} y \vec{n}'

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{n}'|}{|\vec{n}| |\vec{n}'|}$$

- * Ángulo entre una recta y un plano ese ángulo es el existente entre la recta y su proyección con el plano.

El ángulo entre la recta y el normal es el complementario al anterior



$$\cos (90 - \alpha) = \frac{|\vec{d} \cdot \vec{n}|}{|\vec{d}| |\vec{n}|}$$

Distancias entre puntos, rectas y planos

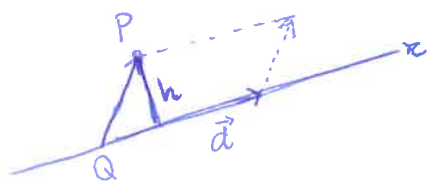
- * Distancia entre 2 puntos

$$A(x_1, y_1, z_1)$$

$$B(x_2, y_2, z_2)$$

$$d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

- * Distancia entre punto y recta



$$d(P, r) = \frac{|\vec{QP} \times \vec{d}|}{|\vec{d}|} = h = \frac{\text{Area}}{\text{Base}}$$

∃ otros métodos, pero usaremos este, donde $Q \in r$
y $\vec{d} \in r$

* Distancia de un punto a un plano

$$A(x_1, y_1, z_1)$$

$$\pi: ax + by + cz + d = 0$$

$$d(A, \pi) = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

* Distancia de una recta a un plano

Si se cortan, la distancia = 0

Si no, se toma un punto de la recta y se calcula la distancia de un punto a un plano

* Distancia entre dos planos

Si se cortan, la distancia = 0

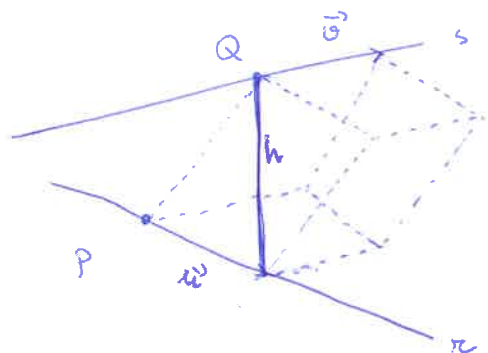
Si no, se toma un punto del plano y se calcula la distancia de un punto a un plano.

* Distancia entre 2 rectas

Si se cortan, su distancia es 0.

Si son paralelas, tomamos un punto de una y tomamos la distancia de un punto a una recta

Si se cruzan, usaremos:

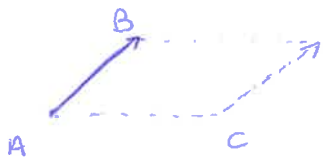


$$d(r, s) = \frac{|[\vec{u}, \vec{v}, \vec{PQ}]|}{|\vec{u} \times \vec{v}|} = h$$

Medidas de áreas y volúmenes

- * Área paralelogramo Dados A, B, C

$$|\vec{AB} \times \vec{AC}|$$

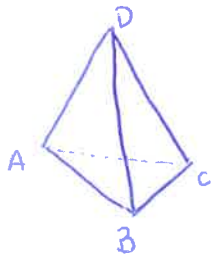


Debemos empezar
del mismo punto

- * Área triángulo ABC

$$\text{Area } A = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}|$$

- * Volumen tetraedro cuerpo de 4 caras



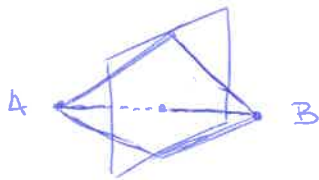
$$V = \frac{h \cdot b}{3}$$

$$\text{base} = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}|$$

$$V = \frac{\frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}| |\vec{AD}|}{3} = \frac{|[\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}]|}{6}$$

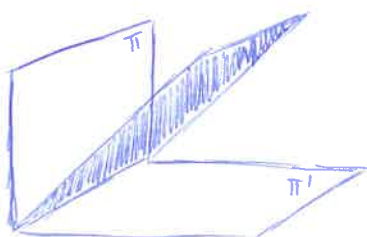
Lugares geométricos en el espacio

- * Plano mediador es el LG de los puntos del espacio que equidistan de los extremos de un segmento
Un plano mediador de un segmento es el perpendicular a él en su punto medio



$$\text{dist}(x, A) = \text{dist}(x, B)$$

- * Plano bisector es el LG de los puntos del espacio que equidistan de dos planos.



$$\text{dist}(x, \pi) = \text{dist}(x, \pi')$$

* Esfera es el LG de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo llamado centro

$$C(x_0, y_0, z_0)$$

Radio r

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$$

:

$$x^2 + y^2 + z^2 + Ax + By + Cz + D = 0$$

$$C\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}, -\frac{C}{2}\right) \quad r = \sqrt{\left(\frac{A}{2}\right)^2 + \left(\frac{B}{2}\right)^2 + \left(\frac{C}{2}\right)^2 - D}$$

* Elipsoides es el LG de los puntos del espacio cuya suma de distancias a dos puntos fijos F y F' es cte

$$\text{dist}(P, F) + \text{dist}(P, F') = \text{cte}$$

Ej: balón
rugby



* Hiperboloide es el LG de los puntos del espacio cuya diferencia de distancia a dos puntos fijos es cte

$$\text{dist}(P, F) - \text{dist}(P, F') = \text{cte}$$

* Paraboloide es el LG de los puntos del espacio que equidistan de un punto F y un plano π

$$\text{dist}(P, F) = \text{dist}(P, \pi)$$

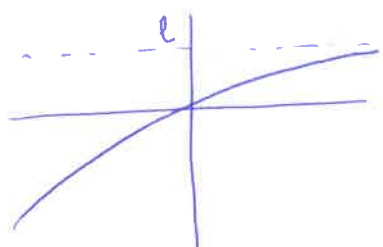
Ej: antena parabólica



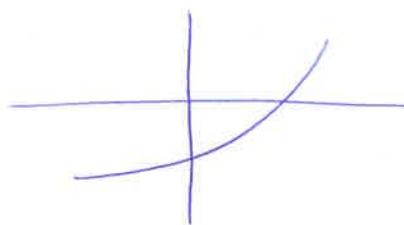
TEMA 7: LIMITES DE FUNCIONES

limites de una función cuando $x \rightarrow \infty$

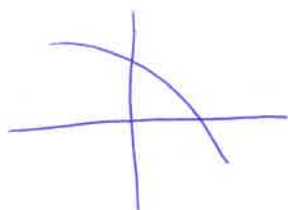
Cuando $x \rightarrow \infty$, una función puede comportarse así:



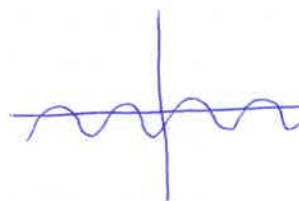
$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = l$$



$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$$



$$\nexists \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$$

DEFINIMOS EL LIMITE FINITO:

• $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = l$ podemos conseguir que $f(x)$ se aproxime a l

tanto como queramos dándole a x valores grandes.

Cuando $x \rightarrow -\infty$, el tratamiento es análogo.

Si $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a$ & $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = b$

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = a \pm b$$

$$\textcircled{2} \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = a \cdot b$$

$$\textcircled{3} \text{ Si } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \neq 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)}{\lim_{x \rightarrow \infty} g(x)} = \frac{a}{b}$$

④ Si $f(x) > 0$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x)^{g(x)}) = \left(\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \right)^{\lim_{x \rightarrow \infty} g(x)} = a^b$$

⑤ Si n impar o n par y $f(x) > 0$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)} = \sqrt[n]{a}$$

⑥ Si $a > 0$ y $f(x) > 0$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\log_a f(x)) = \log_a \left(\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \right) = \log_a a$$

DEFINIMOS EL LIMITE INFINITO

Podemos conseguir que $f(x)$ sea tan grande como queramos dando valores cada vez + grandes a x .

Funciones que hacen $\pm \infty$ resultado de $\lim_{x \rightarrow \infty}$ son:

* Potenciales Si $k > 0$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} p x^k = \pm \infty$$

* Exponenciales Si $a > 1$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} p a^x = \pm \infty$$

* Logarítmicas Si $a > 1$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} p \log_a x = \pm \infty$$

Si $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \pm \infty = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$ se dice que $f(x)$ es un infinito superior a $g(x)$ si se cumple 1 de estas 2 cosas:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$$

Serían infinitos del mismo orden si:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = l \neq 0$$

Por tanto, podemos decir:

- F. exponenciales de base > 1 son ∞ de orden superior a las F. potenciales.
- F. potenciales son ∞ de orden superior a las F. logarítmicas.

F. exponenciales. \supset F. potenciales \supset F. logarítmicas
base > 1

Las operaciones con expresiones infinitas se cumplen

SUMA

$$\begin{aligned}\infty + l &= \infty \\ \infty + \infty &= \infty \\ -\infty + l &= -\infty \\ -\infty - \infty &= -\infty \\ -(-\infty) &= +\infty\end{aligned}$$

COCIENTE

$$\begin{aligned}\frac{l}{\pm\infty} &= 0 \\ \frac{l}{0} \text{ si } l \neq 0 &= \pm\infty \\ \frac{\pm\infty}{0} &= \infty \\ \frac{0}{\pm\infty} &= 0\end{aligned}$$

PRODUCTO

$$\begin{aligned}(\infty)(\infty) &= \infty \\ (\infty)(-\infty) &= -\infty \\ \text{si } l > 0 &\begin{cases} (\infty)l = \infty \\ (-\infty)l = -\infty \end{cases} \\ \text{si } l < 0 &\begin{cases} (\infty)l = -\infty \\ (-\infty)l = \infty \end{cases}\end{aligned}$$

POTENCIA

$$\begin{aligned}\infty^+ &= +\infty \\ \infty^{-\infty} &= 0 \\ \text{si } l &\begin{cases} > 0 & (+\infty)^l = \infty \\ < 0 & (+\infty)^l = 0 \end{cases} \\ \text{si } l > 1 &\begin{cases} l^{+\infty} = \infty \\ l^{-\infty} = 0 \end{cases} \\ \text{si } 0 < l < 1 &\begin{cases} l^{+\infty} = 0 \\ l^{-\infty} = \infty \end{cases}\end{aligned}$$

Calculo $\lim_{x \rightarrow \infty}$: Indeterminaciones

INDETERMINACIÓN

METODO

$$k/0$$

limites laterales ($\infty, -\infty, \neq$)

$$0/0$$

se factoriza numerados y denominador

$$\frac{\pm \infty}{\pm \infty}$$

se divide entre la mayor potencia de x .
Si \exists raices en el denominador, se racionaliza.

$$\infty - \infty$$

se opera antes de calcular el limite

$$0^0, (\pm \infty)^0$$

se toman logaritmos

$$1^{\pm \infty}$$

Da lugar a potencias de e

En un cociente de polinomios...

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a x^p + \dots}{b x^q + \dots} \left\{ \begin{array}{l} \text{si } p > q \Rightarrow \pm \infty \text{ (signo depende } \frac{a}{b}) \\ \text{si } p = q \Rightarrow \frac{a}{b} \\ \text{si } p < q \Rightarrow 0 \end{array} \right.$$

Esta regla tambien se aplica a cocientes con radicales en donde:

$$\sqrt[p]{a x^n + \dots} = \sqrt[p]{a} \cdot x^{n/p}$$

Diferencia de expresiones infinitas.

I. Cuando se aprecia a simple vista cuando las expresiones son infinitos de orden \neq . Se atribuye $+\infty$ o $-\infty$.

II. Cuando puede efectuarse la operacion calculamos, $\Rightarrow \lim$.

III. Cuando \exists radicales cuadraticos se multiplica en ambos miembros por la raíz conjugada.

límites inmediatos relacionados con e

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

- $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{-x} = e^{-1}$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{ax} = e^a$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{ax} = e^{-a}$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{ax+b} = e^a$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^x = e^k$

* La indeterminación 1^∞ mediante e.

$$\text{Si } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1 \quad \& \quad \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = +\infty \Rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)^{g(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - 1] g(x)}$$

límite de $f(x)$ cuando $x \rightarrow -\infty$ y su cálculo

El tratamiento aplicado en $+\infty$ es análogo a $-\infty$ pero hay que tener en cuenta el signo

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(-x)$$

límite de una función en un punto

Estudicemos los lím laterales.

$$\text{Si } \lim = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = +\infty = \lim_{x \rightarrow c^+} f(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow c} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = -\infty = \lim_{x \rightarrow c^+} f(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow c} f(x) = -\infty$$

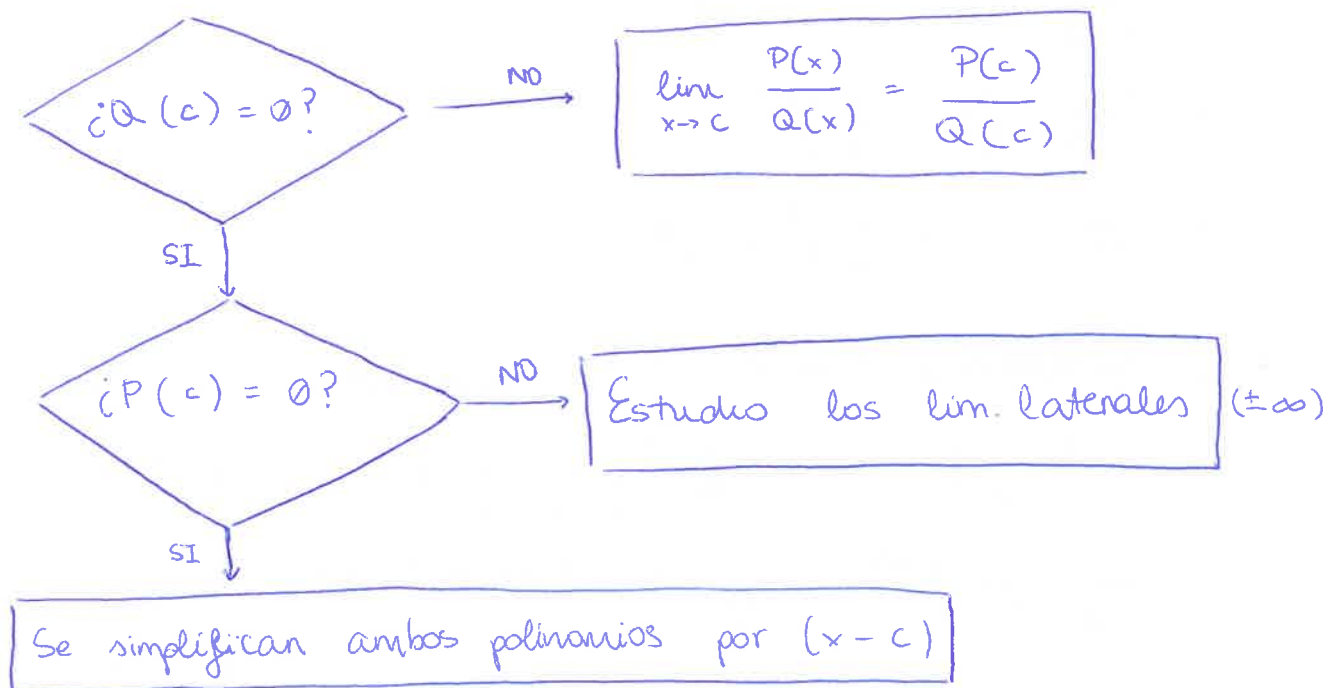
$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow c^+} f(x) \Rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow c} f(x)$$

Si los lim laterales de $f(x)$ son infinitos

$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = l = \lim_{x \rightarrow c^+} f(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow c} f(x) = l = f(c)$$

$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow c^+} f(x) \Rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow c} f(x)$$

$\lim_{x \rightarrow c} \frac{P(x)}{Q(x)}$; aplicamos el siguiente algoritmo:



Continuidad de un punto

Una función $f(x)$ es continua en un punto cuando:

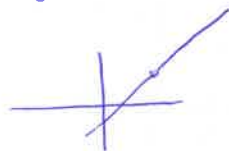
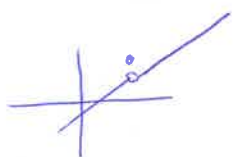
$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$$

$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = f(c)$$

Es decir, $f(x)$ está definida en $x=c$, \exists lim y coinciden los límites laterales.

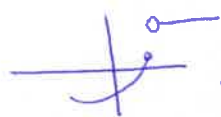
La discontinuidad de una función puede ser:

✦ Evitable

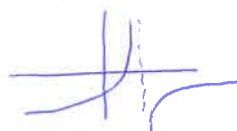


Si \exists los lim. laterales pero no $f(c)$

✦ No evitable



salto finito



salto infinito = asíntota

Recordemos las propiedades de los logaritmos:

$$\textcircled{1} \log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

$$\textcircled{2} \log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$$

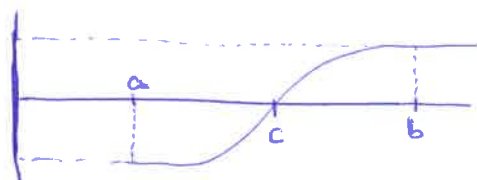
$$\textcircled{3} \log_a (x^n) = n \log_a x$$

$$\textcircled{4} \log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

Continuidad en un intervalo

Una función es continua en un intervalo de \mathbb{R} si es continua en cada punto del intervalo. Las funciones definidas a trozos pueden presentar discontinuidad en los puntos de empalme.

* Teorema de Bolzano Si $f(x)$ es continua en $[a, b]$ y signo $f(a) \neq \text{signo } f(b) \exists c \in (a, b) / f(c) = 0$

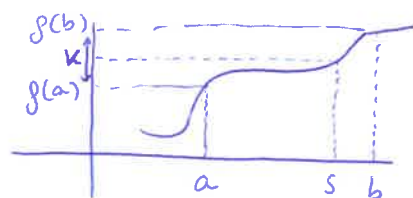


Este teorema tiene 2 consecuencias:

• TEOREMA DE LOS VALORES INTERMEDIOS (DARBOUX)

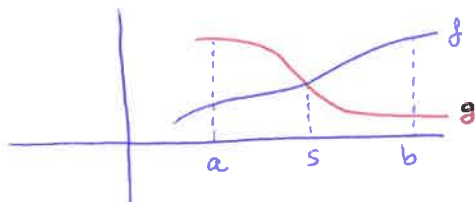
Si $f(x)$ es continua $[a, b]$ toma todos los valores internos entre $f(a)$ y $f(b)$

$\forall k / f(a) < k < f(b) \exists s, a < s < b / f(s) = k$



• LA SEGUNDA CONSECUENCIA:

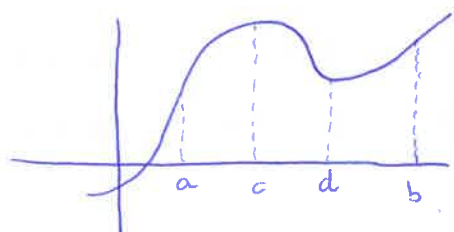
Si f y g son 2 funciones continuas en $[a, b]$ y $f(a) < g(a)$ & $f(b) > g(b)$
 $\exists s \in (a, b) / f(s) = g(s)$



* Teorema de Weierstrass

Si f es continua $[a, b] \Rightarrow \exists$ un máx y un mín absoluto en el intervalo.

Si f continua en $[a, b]$, $\exists c, d \in [a, b] /$
 $\forall x \in [a, b] \text{ y } f(d) \leq f(x) \leq f(c)$

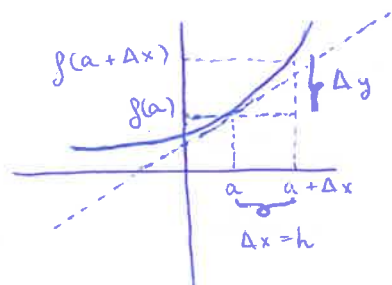


" \exists " existe
 "/" tal que
 " \forall " para todo
 " \in " pertenece

TEMA 8: DERIVADAS

Introducción

Para poder diferenciar 2 funciones que crecen y ver si una lo hace + rápido que otra, tenemos que ver la relación que \exists entre el incremento de x (Δx) y el incremento de y (Δy)



Se llama tasa de variación media (TVM)

$$TVM = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{a + \Delta x - a} = \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

Ese valor es la pendiente de la recta que pasa por dos puntos y eso nos da una idea de como crece la función en el intervalo $[a, a + h]$

La rapidez media de variación de una función es distinta en cada punto de la función, nosotros tenemos idea de como lo hace en un intervalo.

Para calcularlo en cada punto:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} = f'(a)$$

Si ese límite \exists , se llama derivada de la función en $x = a$; si \nexists decimos que la función no es derivable en $x = a$.

$f'(a)$ = pte de la recta tg a $f(x)$ en $x = a$

Se definen las derivadas laterales:

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a^-) \rightarrow \text{Derivada lateral izquierda}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a^+) \rightarrow \text{Derivada lateral derecha}$$

Así una función es derivable en un punto si solo si \exists derivadas laterales en ese punto y ambas coinciden.

Si en un punto las derivadas laterales no coinciden, se forma un punto anguloso.

Una función puede ser continua en un punto pero no ser derivable. Aunque si es derivable es continua.

REGLAS DE DERIVACIÓN

* Constante $(k)' = 0$

* Suma $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$

* $(kx)' = k$

* Producto $(f \cdot g)' = f'g + fg'$

* Cociente $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

* Composición $(f[g(x)])' = f'[g(x)] g'(x)$

* Potencia $(x^n)' = n x^{n-1}$

$$(f^n)' = n f^{n-1} f'$$

* Derivadas trigonométricas

$$(\operatorname{sen} x)' = \cos x$$

$$(\operatorname{sen} f)' = \cos f \cdot f'$$

$$(\cos x)' = -\operatorname{sen} x$$

$$(\cos f)' = -\operatorname{sen} f \cdot f'$$

$$(\operatorname{tg} x)' = 1 + \operatorname{tg}^2 x$$

$$(\operatorname{tg} f)' = (1 + \operatorname{tg}^2 f) \cdot f'$$

* Derivadas arco

$$(\operatorname{arc} \operatorname{sen} x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\operatorname{arc} \operatorname{sen} f)' = \frac{1}{\sqrt{1-f^2}} \cdot f'$$

$$(\operatorname{arc} \cos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\operatorname{arc} \cos f)' = \frac{-1}{\sqrt{1-f^2}} \cdot f'$$

$$(\operatorname{arc} \operatorname{tg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(\operatorname{arc} \operatorname{tg} f)' = \frac{1}{1+f^2} \cdot f'$$

* Exponenciales

$$(e^x)' = e^x$$

$$(e^f)' = e^f \cdot f'$$

$$(a^x)' = a^x \ln a$$

$$(a^f)' = a^f \ln a \cdot f'$$

* Logarítmicas

$$(\ln(x))' = \frac{1}{x}$$

$$(\ln f)' = \frac{f'}{f}$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln a}$$

$$(\log_a f)' = \frac{f'}{f} \cdot \frac{1}{\ln a}$$

Estudio de la derivabilidad de funciones definidas a trozos

$$\text{sea } f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{si } x \leq x_0 \\ f_2(x) & \text{si } x > x_0 \end{cases}$$

① Estudiar la continuidad en x_0

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

② Estudiar la derivabilidad en x_0

$$f'(x_0^-) = f'(x_0^+)$$

los puntos donde la función es continua pero no es derivable, son los llamados puntos angulosos

Si una función no es continua, no es derivable en ese punto.

Derivada de una función inversa o recíproca

Sea f y f' , queremos calcular $(f^{-1}(x))'$

$$f[f^{-1}(x)] = x$$

$$(f[f^{-1}(x)])' = (x)'$$

$$f'[f^{-1}(x)] \cdot [f^{-1}(x)]' = 1$$

$$[f^{-1}(x)]' = \frac{1}{f'[f^{-1}(x)]}$$

Para hallar la función recíproca cambiamos $x \leftrightarrow y$

$$-\infty^{-\infty} = \frac{-1}{\infty^{\infty}} = 0$$

$$(-\infty)^{-\infty} = \frac{1}{-\infty^{\infty}} = \cancel{\neq} \text{lin}$$

Derivación logarítmica e implícita

Son técnicas de derivación para derivadas no inmediatas.

Derivación logarítmica a veces al tomar logaritmos y sus propiedades simplifica el cálculo de derivadas.

Ej: $f(x) = x^x$

$$\ln f(x) = \ln x^x$$
$$[\ln f(x)]' = [\ln x^x]'$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = 1 \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$$

$$f'(x) = x^x (\ln x + 1)$$

Derivación implícita A veces no es posible despejar en una función y en términos de x, pero se puede calcular su derivada expresándola en función de coordenadas (x, y)

Ej: calcular (2, 1) la $f'(x)$

$$f(x) = xy^5 - y^2 + x^3 = 9$$

$$y^5 + 5x^5 y^4 y' - 2y y' + 3x^2 = 0$$

$$x^5 y^4 y' - 2y y' = -3x^2 - y^5$$

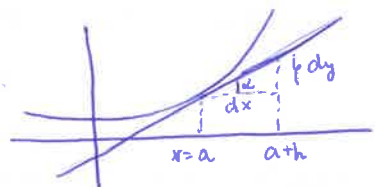
$$y'(x^5 y^4 - 2y) = -3x^2 - y^5$$

$$y' = \frac{-3x^2 - y^5}{5x^5 y^4 - 2y}$$

recta tg a $f(x)$
en $x = x_0$ es:

$$f(x) = y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Diferencial de una función



Si una función es derivable en un punto a , al dibujar la tg se observa que para los intervalos en a , los valores de la función y los correspondientes en la tg son muy parecidos. Por eso se dice que la ecuación de la tg es una aprox lineal de la función en ese punto.

$$y = f(a) + f'(a)(x-a)$$

La notación de Leibnitz para la derivada es:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} \Rightarrow dy = f'(x) dx$$

Esto se llama diferencial de una función en un punto.

Utilizar diferenciales para aprox una función es igual que utilizar la aprox lineal.

Ej: $dy?$ en $f(x) = 3x^2 - 2x$

$$dy = 6x - 2dx$$

Ej: obtener $\sqrt[5]{32.3}$

$$\sqrt[5]{32.3} = 2.00373...$$

$$f(x) = \sqrt[5]{x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{5} x^{-\frac{4}{5}} = \frac{1}{5 \sqrt[5]{x^4}}$$

$$f(32.3) = f(32 + 0.3) \approx f(32) + f'(32) 0.3 = 2.00375$$

TEMA 9: APLICACIONES DERIVADAS

Introducción

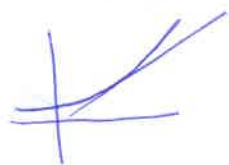
la derivada de una función en un punto, es la pendiente de la recta tg a esa curva en ese punto

De esta forma, si una $f(x)$ es derivable en $x=x_0$, la ecuación de la recta tg a la curva en ese punto será

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Información extraída de la 1ª derivada

- Crecimiento y decrecimiento de funciones



f es creciente $\Rightarrow f' > 0$



f es decreciente $\Rightarrow f' < 0$

Cuando nos pidan estudiar el crecimiento o decrecimiento de una función, nos tomamos las raíces de la función

$$f'(x) = \begin{cases} a & \rightarrow (-\infty, a) \\ b & \rightarrow (a, b) \\ c & \rightarrow (b, c) \\ & (c, +\infty) \end{cases}$$

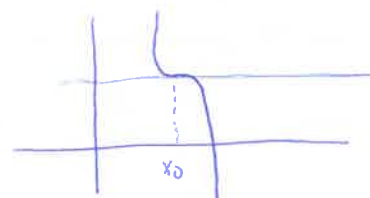
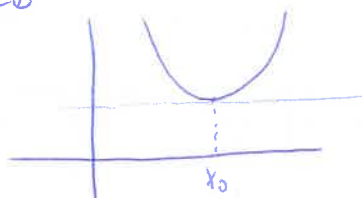
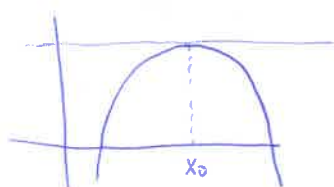
las soluciones de f'

pueden ser máx, mínimos o puntos de inflexión

- Máximos y mínimos se llaman puntos singulares o puntos críticos a aquellos donde la 1ª derivada $= 0$

Pueden ser máx, mínimos o puntos de inflexión.

$$f'(x_0) = 0$$



Para saber si es un máximo o un mínimo, podemos ver el signo de su derivada por ambos lados.

- Si $f'(x_0)_{izq} < 0$ y $f'(x_0)_{der} > 0 \Rightarrow x_0$ es mínimo
- Si $f'(x_0)_{izq} > 0$ y $f'(x_0)_{der} < 0 \Rightarrow x_0$ es máximo
- Si tienen igual signo, x_0 podría ser un punto de inflexión

Información obtenida de la 2ª derivada

- Curvatura y punto de inflexión



El punto B es un punto de inflexión ya que cambia la curvatura de convexa a cóncava

$$f''(x_0) > 0 \Rightarrow f \text{ es cóncava en } x_0$$

$$f''(x_0) < 0 \Rightarrow f \text{ es convexa en } x_0$$

$$f''(x_0) = 0 \text{ y } f'''(x_0) \neq 0 \Rightarrow \exists \text{ punto inflexión en } x_0$$

- Aplicación de la 2ª derivada en máx y mín

- Si $f'(x_0) = 0$ y $f''(x_0) > 0 \Rightarrow \exists x_0$ mínimo
- Si $f'(x_0) = 0$ y $f''(x_0) < 0 \Rightarrow \exists x_0$ máximo

Optimización de funciones

En estos problemas, nos interesa calcular los extremos para obtenerlos:

- Si $f(x)$ es derivable en $[a, b]$ resolvemos $f'(x) = 0$ sustituimos la función en esas raíces y resolvemos cual es el máximo y el mínimo.

* Si \exists algún punto $\in [a, b] / x_0$ sea continua pero no derivable (pto anguloso)

calculamos el valor de la función en ese punto ya que podría ser un extremo

* Si f no es continua en todo el intervalo $[a, b]$ vemos el valor de la función en la cercanía de los ptos discontinuos.

Regla de L'hôpital

Sean f y g dos funciones tal que:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow a} g(x); \text{ y}$$

$$\exists \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

A veces, es necesario repetir el proceso varias veces utilizando la 2ª derivada y demás.

los límites donde se aplica esta regla, también permiten aplicarla en la siguiente situación.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \left\{ \begin{array}{l} 0/0 \\ \pm\infty \\ \pm\infty \end{array} \right.$$

También sirve para:

$$0 - \infty, \quad 0^0, \quad \infty^0, \quad \infty - \infty, \quad 1^\infty$$

Para eso, bien se intenta poner en forma de cociente o bien se aplican logaritmos. Debemos deshacer el logaritmo en el último caso.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{1/x} = \infty^0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \ln(f(x)) = 0$$

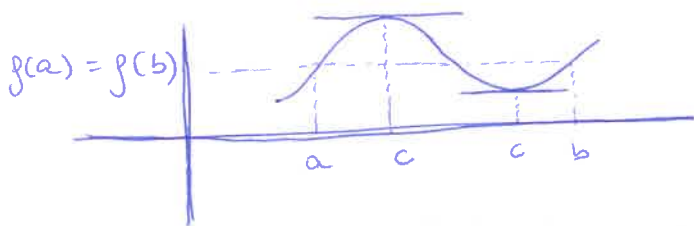
$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{\ln f(x)} = e^0 = 1$$

Teorema de Rolle y del valor medio

* Teorema de Rolle Sea $f(x)$ continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b)

$$\text{Si } f(a) = f(b) \Rightarrow \exists c \in (a, b) / f'(c) = 0$$

Hipótesis \Rightarrow Tesis

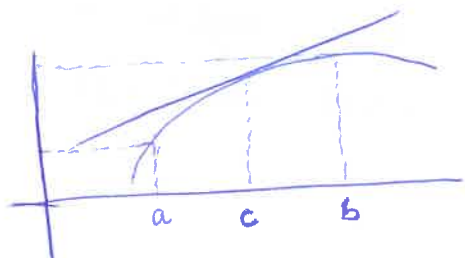


\exists al menos un máx o mín

La idea es que en una curva que toma los mismos valores en los extremos del intervalo, necesariamente tiene un punto con tg horizontal.

* Teorema del valor medio Sea $f(x)$ continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b)

$$\exists c \in (a, b) / f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



La idea es que en una curva de un intervalo $[a, b]$ haya algún punto c con tg \parallel al segmento AC

Teorema de Cauchy

Sean f y g continuas en $[a, b]$ y derivables en (a, b)

$$\exists c \in (a, b) / \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Continuidad y derivabilidad A este nivel, las funciones son continuas en todo \mathbb{R} salvo las funciones a trozos, donde habría que verlo. Las funciones son derivables con algunas excepciones.

TEMA 10 : REPRESENTACION FUNCIONES

Elementos a estudiar

* Dominio son los valores de x para los cuales

\exists la función. Suelen ser \mathbb{R} salvo 3 casos

- Si \exists denominador: Donde se anula no está definido el dominio

- Si \exists raíces de índice par: No está definido para valores negativos

- Si \exists logaritmos: no está definido para valores negativos.

* Continuidad y derivabilidad A este nivel, las funciones son continuas en \mathbb{R} salvo las funciones a trozos. Donde habría que verlo. Las funciones son derivables con algunas excepciones

- RAÍZ \rightarrow presenta tg vertical \rightarrow donde se anula el radicando \rightarrow NO son derivables.

- VALOR ABSOLUTO \rightarrow da lugar a ptos angulosos

* Simetría

$$f(-x) \begin{cases} f(x) \rightarrow \text{PAR} \\ -f(x) \rightarrow \text{IMPAR} \\ \exists \text{ simetría} \end{cases}$$

* Periodicidad Solo son las trigonométricas

• Si $f(x)$ tiene periodo $K \Rightarrow f(mx+n)$ tiene periodo $\frac{K}{m}$

• Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones periódicas;

$f(x)$ y $g(x) \rightarrow$ periódicas $\Rightarrow f \pm g$; $f \cdot g$; $\frac{f}{g}$ son también

funciones periódicas con periodo \rightarrow mcm del periodo f y g .

* **Asíntotas** son rectas tg a una curva en ∞

• **ASÍNTOTAS VERTICALES:**

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm \infty \Rightarrow \exists x = a \text{ AV}$$

$$\begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \\ \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \end{array} \Rightarrow \begin{array}{cc} \begin{array}{c} \uparrow \uparrow \\ | \\ \hline \end{array} & \begin{array}{c} \hline | \\ \downarrow \downarrow \end{array} \\ \begin{array}{c} \uparrow \\ | \\ \hline \downarrow \end{array} & \begin{array}{c} \hline | \\ \downarrow \uparrow \end{array} \end{array}$$

• **ASÍNTOTAS HORIZONTALES:**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = l \Rightarrow \exists y = l \text{ AH}$$

La posición de la curva respecto a la asíntota se averigua estudiando el signo de $f(x) - l$ para valores grandes de x .

• **ASÍNTOTAS OBLICUAS:** son oblicuas con las AH

$$\begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \pm \infty \\ \bullet \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = m \neq 0 \\ \bullet \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - mx = n \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \pm \infty \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = m \neq 0 \\ \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - mx = n \end{array}} \right\} \exists \text{ AO en } y = mx + n$$

• **RAMAS PARABÓLICAS**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \pm \infty \quad \text{y} \quad \nexists \text{ AO}$$

* **Puntos singulares** son aquellos que tienen tg horizontal, es decir, aquellos donde $f'(x) = 0$

$$f'(x) = 0 \rightarrow \text{Máximos y mínimos}$$

$$f''(x) = 0 \quad \text{y} \quad f'''(x) \neq 0 \rightarrow \text{Puntos inflexión}$$

* Puntos de corte con los ejes

$$y = f(x) \quad \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \rightarrow y = f(0) \\ y = 0 \rightarrow x = \text{raíces de } f(x) \end{array} \right.$$

Representación de funciones polinómicas

Todas las funciones polinómicas son derivables y continuas en todo \mathbb{R} . No tienen asíntotas.

Si ramas parabólicas.

Si solo tienen términos de grado par \rightarrow Simetría Par

Si solo tienen términos de grado impar \rightarrow Simetría Impar.

① SIMETRÍA

② RAMAS PARABÓLICAS

③ MÁXIMOS, MÍNIMOS Y Puntos de INFLEXIÓN

④ Puntos de corte con los ejes

⑤ REPRESENTAR Puntos, RAMAS Y UNIRLOS

Representación de funciones racionales

Exceptuando cuando se anula el denominador, la función es continua y derivable en todo \mathbb{R}

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

① SIMETRÍA

② AV $\rightarrow Q(x) = 0$ + ver la posición de la curva con respecto a la asíntota

③ AH o AO \rightarrow si tiene una no tiene la otra

$$\text{Grado } P(x) \quad \left\{ \begin{array}{l} < \text{Grado } Q(x) \Rightarrow \exists \text{ AH en } y = 0 \\ = \text{Grado } Q(x) \Rightarrow \exists \text{ AH en } y = l \\ = \text{Grado } Q(x) + 1 \Rightarrow \exists \text{ AO en } y = mx + n \end{array} \right.$$

④ Puntos singulares

⑤ Puntos de corte con ejes

⑥ Unir y representar

Representación de otros tipos de funciones

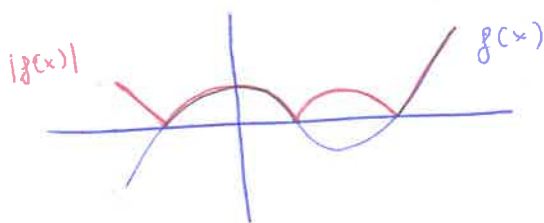
Si no es polinómica ni racional, al analizarla...

→ Dominio, simetría, periodicidad...

→ Otras características:

• VALOR ABSOLUTO → para ello podemos representar la función $f(x)$ y luego hacemos una simetría respecto al eje x .

Si el valor absoluto no afecta a toda la función, hay que analizarla por partes.



• RADICALES → hay que tener cuidado con el dominio
Suelen tener dos asíntotas distintas para $+\infty$ y $-\infty$

• EXPONENCIALES → Suelen tener una AH y rama parabólica

• TRIGONOMETRICAS → Periodicidad

• LOGARÍTMICAS → Puede ocurrir cualquier cosa

TEMA 11: CÁLCULO DE PRIMITIVA

Integral indefinida

Es el proceso contrario a la derivada. Es, conociendo una tasa de variación instantánea, ver a qué función pertenece.

$F(x)$ es una primitiva de $f(x)$ si $F'(x) = f(x)$. Se expresa

$$\int f(x) dx = F(x) \iff F'(x) = f(x)$$

Si $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$ también lo es $F(x) + K$ siendo K una cte. Por ello, cada función tiene ∞ primitivas

$$\int f(x) dx = F(x) + K$$

Propiedades

$$\textcircled{1} \int K f(x) dx = K \int f(x) dx$$

$$\textcircled{2} \int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$$

Reglas para la integración inmediata

$$* \int a dx = ax + K \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

$$* \int f(x)^n f'(x) dx = \frac{f(x)^{n+1}}{n+1} + K \quad n \neq -1$$

$$* \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + K$$

$$* \int e^{f(x)} f'(x) dx = e^{f(x)} + K$$

$$* \int a^{f(x)} f'(x) dx = \frac{1}{\ln a} a^{f(x)} + C$$

$$* \int \ln(f(x)) f'(x) dx = f(x) \ln(f(x)) - f(x) + C$$

$$* \int \sin(f(x)) f'(x) dx = -\cos f(x) + C$$

$$* \int \cos(f(x)) f'(x) dx = \sin(f(x)) + C$$

$$* \int \operatorname{tg}(f(x)) f'(x) dx = -\ln |\cos f(x)| + C$$

$$* \int (1 + \operatorname{tg}^2(f(x))) f'(x) dx = \operatorname{tg} f(x) + C = \frac{1}{\cos^2 f(x)} + C$$

$$* \int \frac{f'(x)}{1 + f^2(x)} dx = \operatorname{arcc} \operatorname{tg} f(x) + C$$

$$* \int \frac{f'(x)}{\sqrt{1 - f^2(x)}} dx = \operatorname{arcc} \sin f(x) + C$$

$$* \int \frac{-f'(x)}{\sqrt{1 - f^2(x)}} dx = \operatorname{arcc} \cos f(x) + C$$

Para integrar cocientes polinómicos, podemos la siguiente

regla:

$$\frac{D}{d} = C + \frac{\pi}{d}$$

En las funciones compuestas $[g(f(x))]' = g'(f(x)) f'(x)$

Por tanto la integral será:

$$\int g'(f(x)) f'(x) dx = g[f(x)] + C$$

Aplicando la regla de la cadena.

A veces es necesario multiplicar o dividir por un número.

$$\int f'(ax+b) dx = \frac{f(ax+b)}{a} + K$$

$$\text{Ej: } \int \cos(3x+5) dx = \frac{1}{3} \int \cos(3x+5) 3 dx = \frac{\sin(3x+5)}{3} + K$$

Método de sustitución de cambio de variables

$$\int h(x)/h'(x) = \int [g(x)] \cdot g'(x)$$

Realizamos el siguiente cambio de variable

$$t = g(x)$$

$$dt = g'(x) dx$$

$$\int [g(x)] g'(x) dx = \int f(t) dt = F(t) + K \xrightarrow{\text{Des hacemos el cambio}} = F[g(x)] + K$$

Método de integración por partes

Partiendo de la derivada en un pto.

$$[u(x) \cdot v(x)]' = u'(x) \cdot v(x) + v'(x) u(x);$$

$$d[u(x) \cdot v(x)] = du(x) v(x) + u(x) dv(x);$$

$$u(x) dv(x) = d[u(x) v(x)] - v(x) du(x)$$

$$\boxed{\int u dv = u \cdot v - \int v du}$$

"Un día vi una vaca vestida de uniforme".

Debemos elegir quien es la u y quien la v

Arccos

Logaritmos

Potenciales

Exponenciales

Senos y coseno

Integración de funciones racionales

Una función racional es el cociente de dos polinomios

Si el grado del numerador es \geq que el del denominador, aplicamos la regla:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{D}{d} = c + \frac{r}{d}$$

En caso contrario

- * Si grado denominador = 1 la integral es inmediata
- * Si el denominador solo tiene raíces reales simples
Pasamos de la siguiente igualdad.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{c}{x-c} + \dots + \frac{N}{x-n}$$

- * Si el denominador tiene raíces reales múltiples.

Si el denominador de una fracción algebraica tiene una raíz múltiple de orden k , al descomponerlo en fracciones simples obtenemos:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{(x-a)^2} + \frac{C}{(x-a)^3} + \dots + \frac{K}{(x-a)^k}$$