Differential Toplogy

Trakatus

2020 Summer

1 Manifold and smooth map

미분위상(differential topology) 역시 기하학적 이해이므로 공간과 그 사이의 사상(Map)에 대한 이해를 다룬다.

1.1 Euclidean Space

Euclidean space는 Vector space structure로써 기본적인 이해들이 잘 알려져 있다.

$\mathbb{R}^n$은 n-겹의 실수들의 집합이다. 만일 거리구조 (Metric structure) $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$를 (선형대수에서 내적으로도 볼수 있다.) 부여해서 생각한다면 이를 **euclidean**이라고 한다.

$$d(x,y) := \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}.$$

(표준) 내적구조 $(*,*)$는 거리구조와 호환가능한 매핑이다.

$$(x,y) := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = x^t I y$$

이때 정확히 $d^2(x,y) = (x-y, x-y)$. **norm**은 다음과 같다; $\|x\| := \sqrt{(x,x)}$. 또한 내적과 norm을 관련시키는 다음 공식이 있다.

$$(x,y) = \|x\|\|y\| \cos\theta$$

θ는 끼인 각. 특히 이 둘이 수직하다는 것은 $(x.y) = 0$임과 동치.

일반적으로 내적은 Symmetric positive definite matrix A로 인해 정의된다.

$$(x,y)_A := x^t A y$$

Metric stucture는 $\mathbb{R}^n$을 위상공간(topological space)으로 볼 자연스러운 관점을 제공한다.

부분집합 $U \subseteq \mathbb{R}^n$이 **열려있다 (open)**는 말은 모든 $x \in U$에, $r > 0$ 이 있어 open n-ball of center x and radius r;

$$B^n(x;r) := \{y \in \mathbb{R}^n : d(x,y) < r\}$$

이 $B^n(x;r) \subseteq U$. 이때 $x = 0$ and $r = 1$인 경우를 **unit ball**, B^n이라 한다. 비슷하게 다음들을 정의하자: **unit disk** D^n and **unit sphere** S^n;

$$D^n := \overline{B^n} = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x,0) \leq 1\}, \quad S^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$$

일반적으로, Vector space의 내적구조가 여럿있다. 비슷하게 다양한 거리구조, 위상구조를 줄 수 있다. e.g. $\mathbb{R}^n$의 거리구조를 다음처럼 줄 수 있다.

$$\delta_\alpha(x,y) := \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^\alpha\right)^{1/\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, \cdots, +\infty.$$

위상구조를 그대로 부분집합에 물려줄 수 있다;topological space $(\mathbb{R}^n, \tau)$의 부분집합 X에게,

$$\tau \cap X := \{U \cap X : U \in \tau\}.$$

라는 위상을 줄수 있고, **위상 부분공간 (topological subspace)**이라 한다.

두 위상공간 (X, τ_X)과 (Y, τ_Y)사이의 매핑 $f : X \to Y$이 **연속 (continuous)**이라함은 Y의 모든 열린 집합 U에 대해, 각각의 preimage $f^{-1}(U)$이 X 위의 열린 집합이다.

연속함수 f가 **위상동형 (homeomorphism)** 이라는 건 전단사이고, 역함수 역시 연속이라는 뜻.

그 외에 중요한 위상 성질로는 1. **컴팩트성 (compactness)**과 2. **연결성 (connectedness)**이 있다. 왜? 연속함수 공간을 끌고 갈 때 이 성질을 보존하며 대려간다.

1. 부분공간 $U(\subseteq X)$이 컴팩트라는 것은 모든 U의 open covering이 finite subs 를 갖는다는 것.
2. 부분공간 $U(\subseteq X)$이 연결됐다라는 것은 Clopen subset이 오직 공집합과 자신만인 것.

Proposition 1.1. *$f : X \to Y$ 이 연속이라 하자. 그러면*

1. *If X이 컴팩트면, Y위의 $f(X)$또한 그렇다.*
2. *If X이 연결돼있다면, Y위의 $f(X)$또한 그렇다.*

Proof. 1. $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$를 $f(X)$ 위의 open covering이라 하자. f가 연속이라, 각각의 $i \in I$에 대해 $f^{-1}(U_i)$ 역시 X 위의 open sets. 그러면

$$\bigcup_{i\in I} f^{-1}(U_i) = f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} U_i\right) = f^{-1}(f(X)) = X$$

즉 $f^{-1}(\mathcal{U}) := \{f^{-1}(U_i)\}_{i\in I}$은 X 위의 open covering. X가 컴팩트해서, 적당한 subcovering $\{f^{-1}(U_1), \cdots, f^{-1}(U_r)\}$이 있다. 즉 모든 $x \in X$에, $i = 1, \cdots, r \in I$가 있어 $x \in f^{-1}(U_i)$이게끔, $f(x) \in U_i$이게끔 한다. (물론 $r \in \mathbb{N}$.) 그래서 모든 $y \in f(X)$가, 적당한 $i = 1, \cdots, r \in I$에서 $y \in U_i$. 그리하여 $\{U_1, \cdots, U_r\}$은 $\mathcal{U}$의 finite sub.

2. 그렇지 않다고 하자. 즉 X가 연결되어 있지만, $f(X)$는 Y위에서 그렇지 않다고 하자. 그러면 적당한 공집합이 아닌 clopen V가 $f(X)$위에 있다. f가 연속이므로, $U := f^{-1}(V)$역시 X위의 clopen. $V \neq f(X)$라 하자, $U \neq X$가 된다. 그러나 U는 열결되어 있는 X위의 clopen set, 그래서 U는 공집합이거나 X 자체. V가 공집합이 아니라 U역시 공집합이 아니다; 결론: U는 clopen이지만 공집합도 X 자체도 아닌 연결된 X 상의 부분집합; 모순이다.

□

Remark. On Hausdorff, 2nd countable, Compact $\iff$ Sequentially compact.
If given space is locally euclidean, Connectedness $\iff$ Sequentially Path-Connectedness.

1.2 Differential Calculus

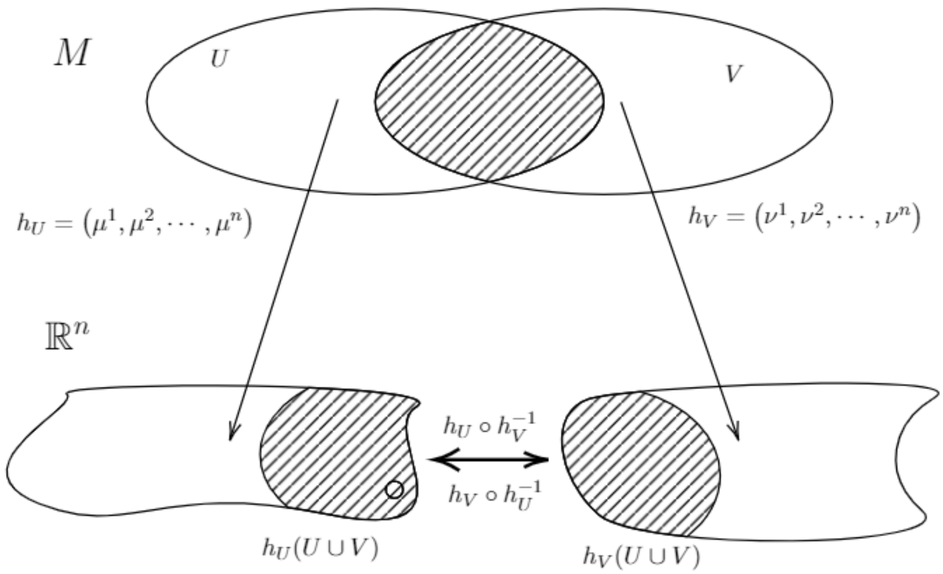
Another fundamental structure on $\mathbb{R}^n$ is an *differential calculus*. In very intuitive words, linear approximation;
For open sets U of $\mathbb{R}^n$ and V of $\mathbb{R}^m$, consider a map $f : U \to V$, with standard coordinates $f = (f_1, f_2, \cdots, f_m)$. The map $f : U \to V$ is said to be *differentiable* at $x \in U$ if there exists an linear map $L := df_x \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$ that

1.3 Smooth Category

1.4 Tangent Functor

smooth map을 그의 pushforward, differential로 보내는, smooth manifold를 그의 tangent bundle로 보내는, Functor를 T라고 생각할 수 있다.

1.5 Manifolds



References

[1] R. Benedetti. Lectures on differential topology. *arXiv preprint arXiv:1907.10297*, 2019.

[2] M. P. Do Carmo. *Differential forms and applications*. Springer Science & Business Media, 2012.

[3] M. P. Do Carmo. *Differential geometry of curves and surfaces: revised and updated second edition*. Courier Dover Publications, 2016.

[4] V. Guillemin and A. Pollack. *Differential topology*, volume 370. American Mathematical Soc., 2010.

[5] S. Helgason. *Differential geometry and symmetric spaces*, volume 341. American Mathematical Soc., 2001.

[6] J. Milnor and J. D. Stasheff. *Characteristic Classes.(AM-76), Volume 76*, volume 76. Princeton university press, 2016.

[7] J. Milnor and D. W. Weaver. *Topology from the differentiable viewpoint.* Princeton university press, 1997.

[8] B. O'neill. *Elementary differential geometry.* Elsevier, 2006.