

TECHNICAL NOTE

Mathematische Modellierung und Simulation der Gesamtkoffeinmenge im Blut

Autor Eric Benjamin Wramling

ARTIKEL VERÖFFENTLICHUNG

21.01.2026

ABSTRAKT

In diesem Artikel wird ein mathematisches Modell zur Beschreibung der Koffeinmenge im Blut nach Konsum beliebiger koffeinhaltiger Getränke zu beliebigen Zeitpunkten hergeleitet. Das Modell basiert auf einer vereinfachten Darstellung des Körpers als ein einziges homogenes Kompartiment (One-Compartment Model) und berücksichtigt sowohl First-Order-Absorption als auch First-Order-Elimination. Es dient als Grundlage für eine Computersimulation, mit denen die Dynamik des Koffeinhaushalts individuell visualisiert werden kann.

OFFENLEGUNGSERKLÄRUNG

Dieser Artikel erhebt keinen Anspruch auf eine wissenschaftliche Publikation. Er wurde nicht peer-reviewed und enthält keine Quellenarbeit. Ziel des Textes ist eine technische und didaktische Aufarbeitung der mathematischen Grundlagen des verwendeten Modells im Kontext eines Softwareprojekts. Der Fokus liegt ausschließlich auf der nachvollziehbaren und schrittweisen Herleitung der mathematischen Zusammenhänge, um das zugrunde liegende Modell transparent zu machen und einer breiteren Öffentlichkeit zugänglich zu machen. Ein Anspruch auf neue wissenschaftliche Erkenntnisse oder eine eigenständige Forschungsleistung besteht nicht.

1. Einleitung

Koffein gehört zu den weltweit am häufigsten konsumierten psychoaktiven Substanzen und ist fest in Kultur, Tradition und Alltag verankert. Dabei können Konsumenten den Überblick über die tatsächliche Koffeinmenge im Körper verlieren. Ziel dieses technischen Artikels ist die Herleitung einer mathematischen Funktion, die die Koffeinmenge im Blut als Funktion der Zeit beschreibt. Der Fokus liegt auf der mathematischen Herleitung auf Basis des One-Compartment-Models, während die zugrunde liegenden biologischen Prozesse nicht betrachtet werden. In dieser Arbeit werden zunächst die Grundannahmen des One-Compartment-Models definiert. Anschließend werden die beiden zentralen Prozesse modelliert: Absorption (Aufnahme von Koffein ins Blut) und Eliminierung (Abbau von Koffein aus dem Blut). Diese Prozesse werden zu einer Funktion kombiniert. Anschließend wird das Modell erweitert, um den Blutkoffeingehalt nach mehrere Dosen zu beliebigen Zeitpunkten darzustellen. Das resultierende Modell dient als Grundlage für eine Computersimulation, mit der die Dynamik des individuellen Koffeinhaushalts visualisiert werden kann.

2. One-Compartment-Model

Koffein gelangt nach der oralen Einnahme in den Magen-Darm-Trakt und wird von dort aus in den Blutkreislauf absorbiert, wo es anschließend eliminiert wird.

Das One-Compartment-Model stellt eine Simplifikation der Wirklichkeit dar. Es beschreibt die Verteilung und Elimination des Koffeins im Blut in einem einzigen homogenen Kompartiment, in dem sich das Koffein unmittelbar und gleichmäßig verteilt. Innerhalb des Kompartiments existieren per Definition keine Konzentrationsunterschiede. Der Blutkreislauf ist das zentrale Kompartiment. Der Magen-Darm-Trakt stellt ein externes homogenes Kompartiment dar. Es wird angenommen, dass die gesamte Koffeinmenge zum Zeitpunkt der Einnahme im Magen-Darm-Trakt Kompartiment vorliegt und dann in das zentrale Kompartiment absorbiert wird.

Es werden zwei Prozesse betrachtet:

- **First-Order-Absorption:** Transport des Koffeins aus einem externen Absorptionskompartiment (Magen-Darm-Trakt) in das Verteilungs- und Eliminierungskompartiment (Blutkreislauf).
- **First-Order-Elimination:** Eliminierung des Koffeins aus dem Verteilungs- und Eliminierungskompartiment (Blutkreislauf).

Modelliert wird der Zufluss und Abbau aus dem zentralen Verteilungs- und Eliminierungskompartiment. Diese Prozesse werden anschließend kombiniert, um die zeitliche Entwicklung der Koffeinmenge im Blutkreislauf über die Zeit zu modellieren. Zuerst wird der Zufluss einer Dosis Koffein zu dem Zeitpunkt $t=0$ betrachtet. Später wird auch die Gesamtkoffeinmenge mit beliebig vielen Dosen zu beliebigen Zeitpunkten modelliert.

3. First Order Absorption

Nach oraler Einnahme befindet sich das Koffein zunächst im Magen-Darm-Trakt und wird von dort in den Blutkreislauf absorbiert. Es wird die noch nicht absorbierte Koffeinmenge im Magen-Darm-Trakt über die Zeit betrachtet $K_a(t) \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ [mg]. Diese gleicht der Menge des Koffeins im Magen-Darm-Trakt. Unter der Annahme einer First-Order-Absorption ist die Geschwindigkeit der Absorption vom Magen-Darm-Trakt in das Blut (die Absorptionsrate) proportional zur der momentan im Magen-Darm-Trakt verbleibenden Menge und hängt ausschließlich von dieser ab. Je mehr Koffein im Magen-Darm-Trakt, desto schneller wird das Koffein in das Blut aufgenommen (Absorbiert). Die Änderung der Menge des Koffeins im Magen-Darm-Trakt stellt die Absorptionsrate dar. Unter den Annahmen der First-Order-Absorption ergibt sich eine Differentialgleichung. $\frac{dK_m}{dt} = -\lambda_m K_m$. Die Absorptionskonstante $\lambda_a \in \mathbb{R}_{>0}$ [h^{-1}] variiert je nach Konsumform. Für getrunkenen Kaffee beträgt sie typischerweise etwa. 1,3/h. Die Lösung der Differenzialgleichung beschreibt einen Exponentiellen Absorptionszusammenhang. Die Koffeinmenge im Magen-Darm-Trakt nimmt exponentiell über die Zeit ab.

$$\begin{aligned} \frac{dK_m}{dt} = -\lambda_m K_m &\Leftrightarrow dK_m = -\lambda_m K_m dt \Leftrightarrow \frac{dK_m}{K_m} = -\lambda_m dt \quad (K_m \neq 0) \\ &\Leftrightarrow \int \frac{1}{K_m} dK_m = \int -\lambda_m dt \Leftrightarrow \ln|K_m(t)| + C_1 = C_2 - \lambda_m t \\ &\Leftrightarrow K_m(t) = e^C \cdot e^{-\lambda_m t} = D \cdot e^{-\lambda_m t} [\text{mg}] \end{aligned}$$

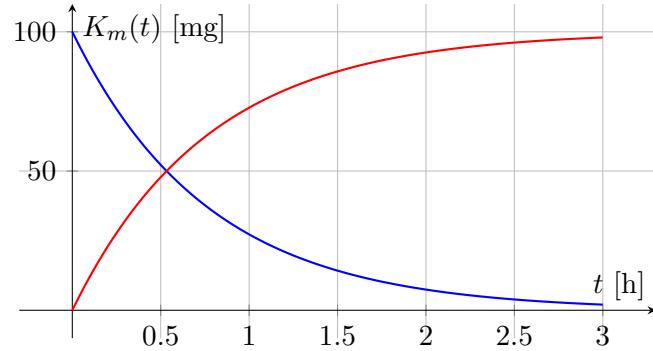
Die lineare Abhängigkeit von $K_m(t)$ zu der oral eingenommenen Dosis D [mg] besteht zum Zeitpunkt $t = 0$. Denn $e^C = D$ weil $K_m(0) = e^C = D =$ die nicht absorbierte Menge zu Zeitpunkt $t = 0$. Über die Gesamtzeit $t \rightarrow \infty$ wird die komplette Dosis D absorbiert.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} K_m(t) = D \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-t} = 0[\text{mg}]$$

Die Gesamtkoffeinprazens im Magen-Darm-Trakt beträgt $\frac{D}{\lambda_a}$ [mg · h]. Je nach Konsumform variiert die Absorptionskonstante λ_a wodurch die insgesamte Verweildauer des Koffeins im Magen antiproportional beeinflusst wird.

$$\begin{aligned} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b K_m(t) dt &= D \lim_{b \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{\lambda_a} e^{-\lambda_a t} \right]_0^b \\ &= \frac{D}{\lambda_a} \lim_{b \rightarrow \infty} (1 - e^{-\lambda_a b}) = \frac{D}{\lambda_a} [\text{mg} \cdot \text{h}] \end{aligned}$$

Koffeinabnahme im Magen-Darm-Trakt (blau) und Koffeinzunahme im Blutkreislauf (Rot) $K_M(t)$ (Blau), $D - K_m(t)$ (Rot) mit $D=100$ mg, $\lambda_a = 1.3h^{-1}$



Die Abbildung zeigt die zeitliche Entwicklung der Koffeinmenge im Magen-Darm-Trakt und im Blutkreislauf (ohne Eliminierung) nach der oralen Einnahme einer einzelnen Dosis von 100 mg Koffein. Zum Zeitpunkt $t = 0$ befindet sich die gesamte Dosis im Magen-Darm-Trakt. Die Absorption erfolgt anschließend nach dem Prinzip der First-Order-Absorption, d.h. die Menge des Koffeins nimmt abhängig von der Absorptionskonstante λ_a exponentiell ab.

4. First-Order-Elimination

Das im Blutkreislauf vorhandene Koffein wird durch die Leber und Nieren abgebaut (eliminiert). Die Eliminierung folgt derselben Struktur wie die Absorption. Betrachtet wird der Eliminierungsmechanismus der Koffeinmenge im zentralen Kompartiment (Blutkreislauf). $K_b(t)$ stellt die Koffeinmenge im Blut dar. Der Zufluss in das zentrale Kompartiment durch Absorption wird zunächst vernachlässigt. Absorption und Eliminierung werden vorerst getrennt betrachtet. Nach der First-Order-Elimination ist die Eliminierungsrate proportional zur aktuellen Menge im Kompartiment und hängt nur vom momentanen Zustand ab. Die Eliminierungskonstante ist das Pendant zur Absorptionskonstante. Sie variiert auch von Mensch zu Mensch und beträgt ungefähr 0,17/h.

Dies entspricht einer Halbwertszeit von ungefähr 4 Stunden. Beide Prozesse laufen aufgrund der Grundannahme des First-Order-Models identisch ab. Genau wie bei der First-Order-Absorption lässt sich nach der First-Order-Elimination eine Differentialgleichung $\frac{dK_b}{dt} = -\lambda_e K_b$ aufstellen. Die Lösung ist bis auf die Vertauschung von der Absorptionskonstante λ_m mit der Eliminierungskonstante λ_e sowie der Anfangsmenge D im Magen-Darm-Trakt mit der Anfangsmenge B_0 im Blutkreislauf identisch:

$$K_b(t) = B_0 \cdot e^{-\lambda_e t} [\text{mg}]$$

Das impliziert, dass auch die Eliminierung exponentiell erfolgt. Die Halbwertszeit $T_{1/2}$ des Koffeins im Blut ist antiproportional zur Eliminierungskonstante und beträgt ca. 4-7 Stunden. Diese ergibt sich aus:

$$K_b(T_{1/2}) = \frac{1}{2}B_0 = B_0 \cdot e^{-\lambda_e T_{1/2}} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = e^{-\lambda_e T_{1/2}} \Leftrightarrow \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\lambda_e T_{1/2} \Leftrightarrow T_{1/2} = \frac{\ln(2)}{\lambda_e} [\text{h}]$$

5. Kombination von First-Order-Absorption und First-Order-Elimination

Durch die Kombination von First-Order-Absorption und First-Order-Elimination lässt sich der komplette Zusammenhang von Absorption und Eliminierung modellieren. Durch die Kombination lässt sich die Gesamtkoffeinmenge im Blut darstellen. Absorption und Eliminierung verlaufen simultan.

Nach der Massenbilanz gilt in jedem Kompartiment, dass die Mengenveränderung eines beliebigen Kompartiments der Differenz von Zufluss und Abfluss entspricht. Für das zentrale Kompartiment (den Blutkreislauf) ist die Änderung der Koffeinmenge im Blut gleich der aus dem Magen absorbierten Menge pro Zeit minus der pro Zeit eliminierten Menge.

$$\frac{d(\text{Menge eines beliebigen Kompartiments})}{dt} = \text{Zufluss} - \text{Abfluss}$$

Zufluss (Absorptionsrate) ist die negative momentane Änderungsrate der Koffeinmenge im Magen-Darm-Trakt. Schließlich ist die negative Änderung der Abnahme der Koffeinmenge im Magen-Darm-Trakt gleich der Zunahme des Koffeins im Blutkreislauf.

Der Abfluss (Eliminierungrate) ist proportional zur aktuell im Blut vorhandenen Koffeinmenge. Dementsprechend gilt diese lineare inhomogene Differentialgleichung:

$$\frac{dK_b}{dt} = \lambda_a \cdot K_m(t) - \lambda_e \cdot K_b(t) \frac{[\text{mg}]}{[\text{h}]}$$

Um die Differentialgleichung zu lösen, wird mit dem Integrationsfaktor $e^{\int \lambda_e dt}$ multipliziert. Damit kann die linke Seite als Ableitung eines Produktes umgeschrieben werden.

$$\begin{aligned}
e^{\lambda_e t} \left(\frac{dK_b}{dt} + \lambda_e K_b(t) \right) &= \lambda_a D e^{\lambda_e t} e^{\lambda_a t} = \lambda_a D e^{t(\lambda_e - \lambda_a)} \\
\Leftrightarrow \frac{d}{dt} [e^{\lambda_e t} K_b(t)] &= \lambda_a D e^{t(\lambda_e - \lambda_a)} \\
\Leftrightarrow \int \frac{d}{dt} [e^{\lambda_e t} K_b(t)] &= \int \lambda_a D e^{t(\lambda_e - \lambda_a)} \Leftrightarrow e^{\lambda_e t} K_b(t) = \frac{\lambda_a D}{\lambda_e - \lambda_a} e^{-\lambda_a t} + C e^{-\lambda_e t} [mg]
\end{aligned}$$

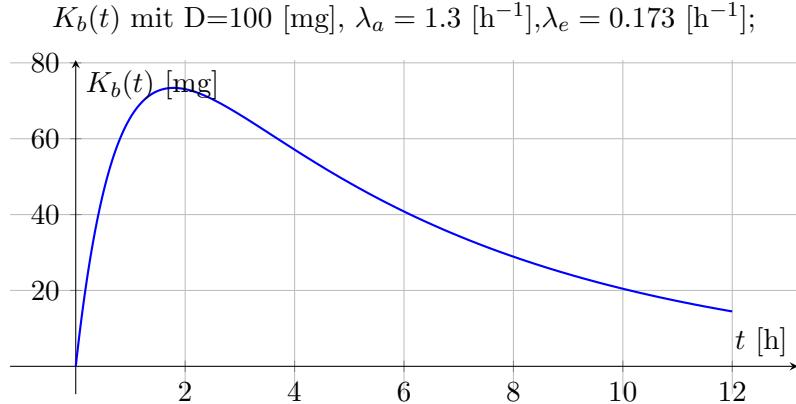
Da der Konsument zu Zeitpunkt $t = 0$ noch kein Koffein im Blut hat $K_b(0) = 0$ [mg], kann die Integrationskonstante C bestimmt werden.

$$K_b(0) = 0 = \frac{\lambda_a D}{\lambda_e - \lambda_a} \cdot 1 + C \cdot 1 \rightarrow C = -\frac{\lambda_a D}{\lambda_e - \lambda_a} [mg]$$

Schließlich gilt also, dass die Koffeinmenge im Blut

$$K_b(t) = \frac{\lambda_a D}{\lambda_e - \lambda_a} (e^{-\lambda_a t} - e^{-\lambda_e t}) [mg]$$

entspricht. Die Koffeinmenge im Blut wächst mit der Absorptionsrate $e^{-\lambda_a t}$ und sinkt mit der Eliminierungsrate $e^{-\lambda_e t}$.



Die Blutkoffeinkonzentration steigt zuerst exponentiell durch die Absorption. Bis der Höhepunkt der Koffeinkonzentration im Blut erreicht ist. Der Höhepunkt der Koffeinkonzentration im Blut liegt bei $\frac{\lambda_a D}{\lambda_e - \lambda_a} (e^{-\lambda_a^2 t D} - e^{-\lambda_e \lambda_a D})$, der Zeitpunkt des Höhepunktes kann jedoch nur approximiert werden und liegt in diesem Fall bei ungefähr 1,76 [h]. Danach fällt die Blutkoffeinkonzentration exponentiell. Je mehr Koffein im Blut ist, desto schneller wird dieses Eliminiert.

$$\begin{aligned}
K'_b(t) &= \frac{\lambda_a D}{\lambda_e - \lambda_a} (\lambda_e e^{-\lambda_e t} - \lambda_a e^{-\lambda_a t}) \\
K'_b(0) &= \frac{\lambda_a D}{\lambda_e - \lambda_a} (\lambda_e - \lambda_a) = \lambda_a D \frac{[\text{mg}]}{[\text{h}]} \\
K_b(\lambda_a D) &= \frac{\lambda_a D}{\lambda_e - \lambda_a} (e^{-\lambda_a^2 t D} - e^{-\lambda_e \lambda_a D}) [\text{mg}]
\end{aligned}$$

Die gesamte kumulierte Präsenz des Koffeins beschreibt die Gesamtbelastung des Koffeins und beträgt $\frac{D}{\lambda_e} [\text{mg} \cdot \text{h}]$.

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b R_b(t) dt = \frac{\lambda_a D}{\lambda_e - \lambda_a} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-\lambda_a t} - e^{-\lambda_e t} dt = \\ \frac{\lambda_a D}{\lambda_e - \lambda_a} \left(\frac{1}{\lambda_a} - \frac{1}{\lambda_e} \right) = \frac{\lambda_a D \cdot (\lambda_e - \lambda_a)}{(\lambda_e - \lambda_a) \cdot \lambda_e \lambda_a} = \frac{D}{\lambda_e} [\text{mg} \cdot \text{h}]$$

D.h. die gesamte Koffeinverweildauer im Blut hängt nur von der eingenommenen Dosis und der individuellen Eliminierungskonstante ab. Die Absorption beeinflusst nur, wann das Koffein im Blut ankommt.

6. Einnahme mehrerer Dosen

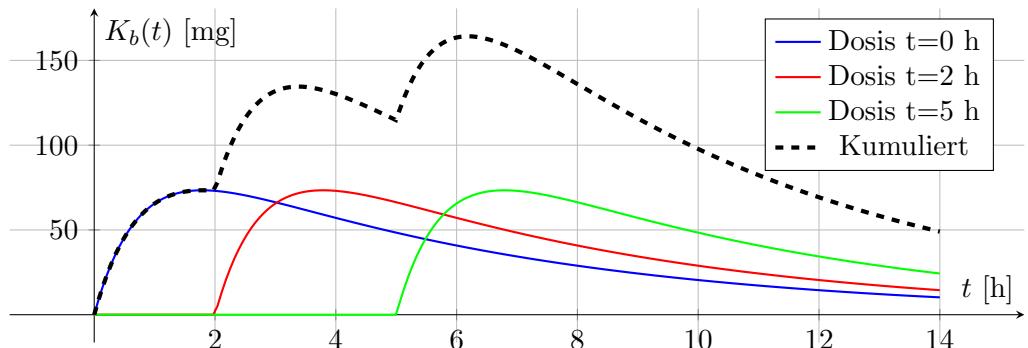
Werden mehrere Dosen Koffein zu unterschiedlichen Zeitpunkten konsumiert, so addieren sich die einzelnen Koffeinmengen im Blutkreislauf. Der Absorptions- und Eliminierungsprozess jeder Dosis kann unabhängig betrachtet werden. Für eine Gesamtkoffeinmenge im Blut werden alle K_{b_i} Koffeinmengen durch die i-te Einnahme addiert.

$$K_{b_{gesamt}}(t) = \sum_i K_{b_i}(t - t_i)$$

Durch $t - t_i$ werden die jeweiligen Dosen zum Konsumzeitpunkt auf der Zeitachse verschoben. Bei mehreren Dosen Koffein D_i zu einem bestimmten Zeitpunkt t_i beträgt die Gesamtkoffeinmenge im Blut $K_{b_{gesamt}}(t)$

$$K_{b_{gesamt}}(t) = \sum_i \frac{\lambda_a D_i}{\lambda_e - \lambda_a} (e^{-\lambda_a(t-t_i)} - e^{-\lambda_e(t-t_i)})$$

Koffeinmenge im Blut bei drei Dosen



Die Abbildung zeigt die zeitliche Entwicklung der Koffeinmenge im Blut nach drei exemplarischen Einnahmen von jeweils 100 mg Koffein zu beispielhaften Zeitpunkten von 8:00, 10:00 und 13:00 Uhr. Diese Annahme entspricht etwa dem durchschnittlichen Kaffeekonsum eines Deutschen von drei Tassen pro Tag. Die einzelnen Kurven (blau, rot und grün) stellen die Koffeinspiegel nach jeder einzelnen Dosis dar. Die schwarze

gestrichelte Kurve zeigt die kumulierte Koffeimmenge im Blut über den Tag hinweg. Es ist deutlich zu erkennen, dass der maximale Koffeingehalt im Blut etwa 6 Stunden nach der ersten Dosis erreicht wird (hier 14:00 Uhr). Selbst am späten Abend, um 22:00 Uhr, verbleibt noch eine Restmenge von etwa 50 mg Koffein im Blut, was ungefähr dem Gehalt einer halben Tasse Kaffee entspricht. Die Darstellung verdeutlicht, wie sich aufeinanderfolgende Kaffeindosen summieren und dass Koffein trotz zeitlich versetzter Einnahmen über viele Stunden im Blut akkumuliert. Dies zeigt anschaulich den Effekt von Absorption und Eliminierung nach dem One-Compartment-Model mit First-Order-Absorption und First-Order-Elimination.

7. Computersimulation des Kaffeinspiegels

Um die dynamische Entwicklung des Kaffeinspiegels individuell zu visualisieren, wurde eine Computersimulation implementiert, die auf dem in dieser Arbeit hergeleiteten One-Compartment-Model mit First-Order-Absorption und First-Order-Elimination basiert. Die Simulation erlaubt es dem Benutzer, zu beliebigen Zeitpunkten die Dosismenge und Koffeinkonzentration anzugeben. Für jeden eingegebenen Konsumzeitpunkt wird die entsprechende Dosis in das Modell eingespeist. Die Software berechnet daraufhin den Verlauf der Koffeimmenge im Blut, basierend auf dem jeweiligen Getränk. Und summiert diese, um den Gesamtkoffeingehalt im Blut über den Tag darzustellen. Die Implementierung ist als Open-Source-Projekt auf GitHub verfügbar (https://github.com/Tralex-W/caffeine_blood_level_visualisation). Sie dient als Werkzeug zur quantitativen Analyse von Kaffeinkonsummustern und erlaubt die Untersuchung verschiedener Szenarien, wie etwa gestaffelte Einnahmen mehrerer Tassen Kaffee über den Tag oder die Akkumulation von Koffein bei regelmäßigem Konsum.