Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет ИТМО

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

Интегрирование

Отчёт по лабораторной работе №4

Выполнил: Чан Дык Зюи

Группа: P32202

Преподаватель: Ольга Вячеславовна Перл

Санкт Петербург, 2023

1. ОПИСАНИЕ ВЫПОЛЬНЕННЫХ МЕТОДОВ

Метод Полинома Лагранжа:

При глобальной интерполяции на всем интервале $[a,b]$ строится единый многочлен. Одной из форм записи интерполяционного многочлена для глобальной интерполяции является многочлен Лагранжа:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \cdot l_i(x) \qquad (3.11)$$

где $l_i(x)$ – базисные многочлены степени *n*:

$$l_i(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)} \qquad (3.12)$$

То есть многочлен Лагранжа можно записать в виде:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \cdot \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \qquad (3.13)$$

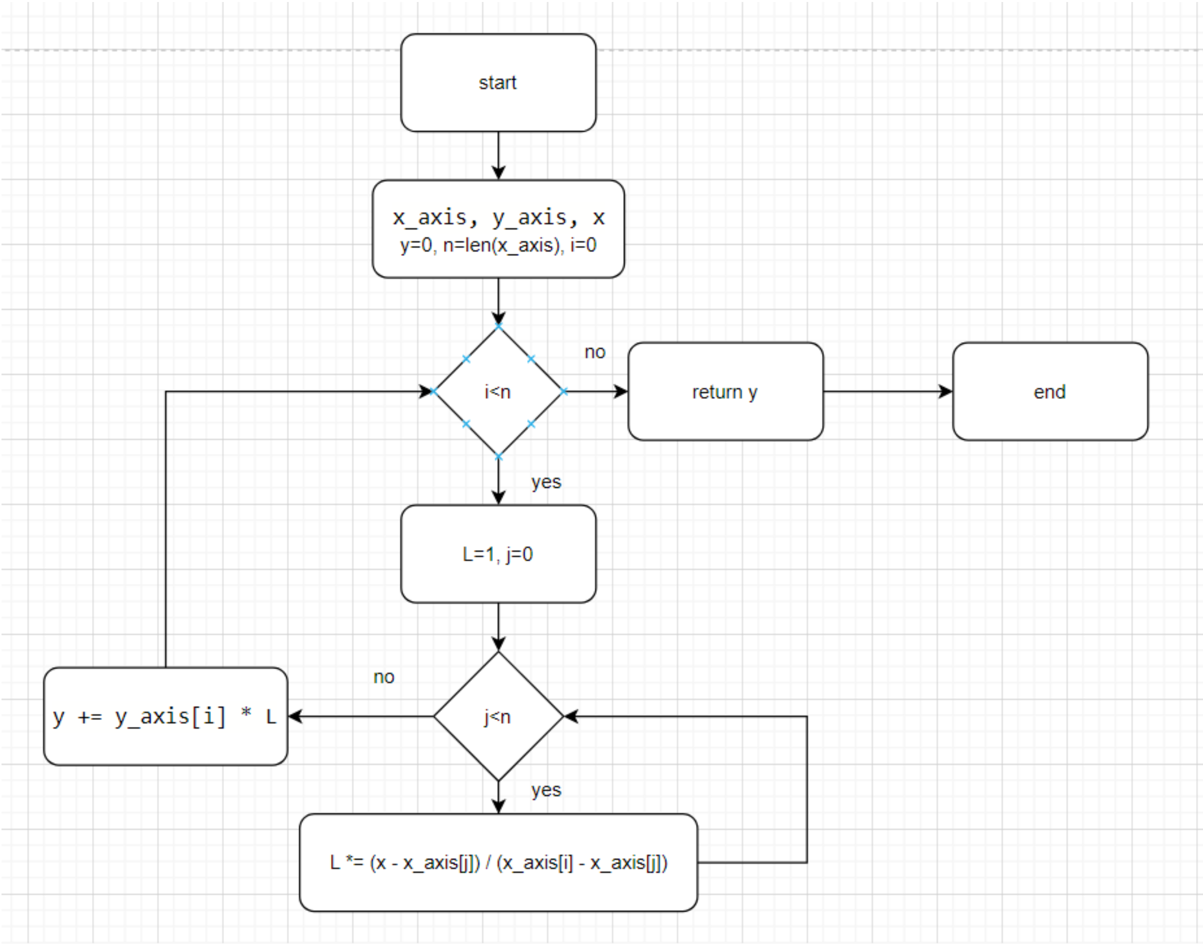
Многочлен $l_i(x)$ удовлетворяет условию $l_i(x_j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$. Это условие означает, что многочлен равен нулю при каждом x_j кроме x_i, то есть $x_0, x_1, \ldots x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots x_n$ – корни этого многочлена. Таким образом, степень многочлена $L_n(x)$ равна *n* и при $x \neq x_i$ обращаются в ноль все слагаемые суммы, кроме слагаемого с номером $i = j$, равного y_i.

Выражение (3.11) применимо как для равноотстоящих, так и для не равноотстоящих узлов. Погрешность интерполяции методом Лагранжа зависит от свойств функции $f(x)$, от расположения узлов интерполяции и точки *x*. Полином Лагранжа имеет малую погрешность при небольших значениях *n* (*n*<20). При больших *n* погрешность начинает расти, что свидетельствует о том, что метод Лагранжа не сходится (то есть его погрешность не убывает с ростом *n*).

Многочлен Лагранжа в явном виде содержит значения функций в узлах интерполяции, поэтому он удобен, когда значения функций меняются, а узлы интерполяции неизменны. Число арифметических операции, необходимых для построения многочлена Лагранжа, пропорционально n^2 и является наименьшим для всех форм записи. К недостаткам этой формы записи можно отнести то, что с изменением числа узлов приходится все вычисления проводить заново.

Кусочно-линейная и кусочно-квадратичная локальные интерполяции являются частными случаями интерполяции многочленом Лагранжа.

2. БЛОК СХЕМ



3. ЛИСТИНГИ

```
#
# Complete the 'interpolate_by_lagrange' function below.
#
# The function is expected to return a DOUBLE.
# The function accepts following parameters:
#  1. DOUBLE_ARRAY x_axis
#  2. DOUBLE_ARRAY y_axis
#  3. DOUBLE x
#
```

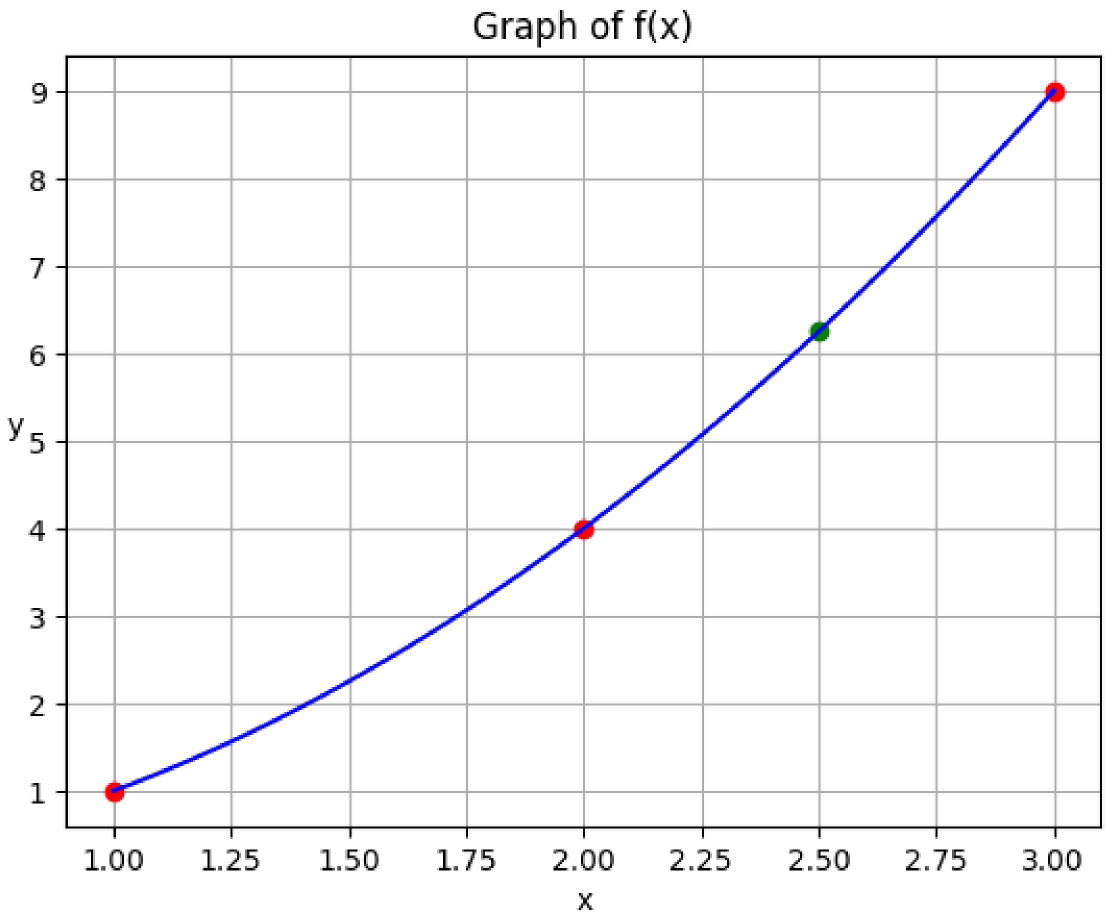
```python
def interpolate_by_lagrange(x_axis, y_axis, x):
    n = len(x_axis)
    y = 0
    for i in range(n):
        L = 1
        for j in range(n):
            if j != i:
                L *= (x - x_axis[j]) / (x_axis[i] - x_axis[j])
        y += y_axis[i] * L
    return y
```

4. Примеры и результат работы программы

Пример 1:

x	**y**
1	**1**
2	**4**
3	**9**

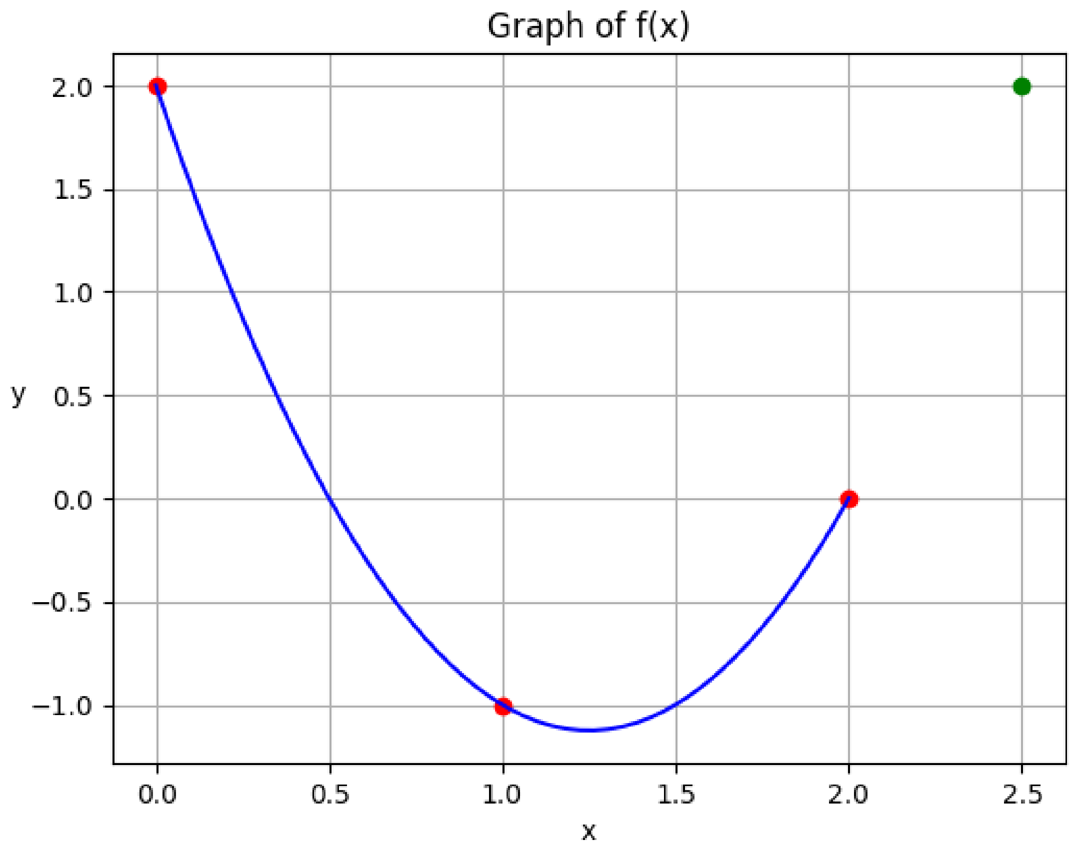
x=2,5 -> y =6,5



Пример 2:

x	y
0	**2**
1	**-1**
2	**0**
3	**-1**

x=2,5 -> y =2



5. ВЫВОД:

Я понял об интерполяционном полиноме Лагранжа следующим образом:

- Плюс:
  - Можетбытьлегко(безпостроенияновогополинома) использован, когдазначенияфункциименяютсябезизмененияаргументов.
  - Требуетсяменьшеечислоточекдляаппроксимациитакихфункцийкакпарабола.
- Минусы:
  - Требуетсястроитьполиномзановопридобавленииновыхточек.
  - Сложностьзначительновозрастаетпривозрастанииколичестваточек.
  - Шумсущественновлияетнавесьполином.