Bài toán Upgrading 1-median

Trong mục này, ta sẽ xem xét một lớp bài toán khác được gọi là bài toán nâng cấp.

Giả sử một thành phố có mạng lưới các con đường nối liền các quận với nhau, với một bến xe buýt trung tâm đặt tại quận A - vị trí được chọn làm điểm trung chuyển tối ưu để người dân dễ dàng di chuyển tới các khu vực khác. Tuy nhiên, theo thời gian, khi dân số tăng lên và lưu lượng giao thông trở nên quá tải, việc di chuyển từ các quận tới quận A ngày càng mất nhiều thời gian, gây ra tình trạng tắc nghẽn và phiền toái.

Trong bối cảnh đó, thành phố đối mặt với thách thức lớn: ngân sách hạn chế không cho phép xây dựng lại hoàn toàn mạng lưới đường sá hay thay đổi vị trí của bến xe buýt trung tâm. Do vậy, giải pháp khả thi nhất là nâng cấp một số tuyến đường hiện có - có thể là mở rộng đường, nâng cao chất lượng cơ sở hạ tầng hoặc giảm tải giao thông ở những tuyến trọng điểm - nhưng vẫn phải đảm bảo không vượt quá giới hạn ngân sách.

Mục tiêu của việc nâng cấp này là làm sao giảm thiểu thời gian di chuyển trung bình của người dân từ các quận khác đến bến xe buýt tại quận A, giúp giao thông trở nên thuận tiện và hiệu quả hơn. Đây chính là một ví dụ cơ bản của bài toán nâng cấp, trong đó thành phố cố gắng tối ưu hóa hệ thống giao thông hiện tại thay vì xây dựng lại từ đầu, nhằm đạt được hiệu quả cao nhất trong giới hạn chi phí có sẵn.

Nói tóm lại, bài toán nâng cấp khác với các bài toán vị trí cổ điển. Các bài toán vị trí cổ điển vốn tập trung vào việc xác định vị trí tối ưu cho các cơ sở hạ tầng. Trong khi đó, bài toán nâng cấp tập trung vào việc điều chỉnh và nâng cấp mạng lưới cơ sở hạ tầng trong các giới hạn cho phép, nhằm tối ưu hóa kết quả trên mạng lưới đã thay đổi.

Trong phần này chúng ta sẽ tập trung vào bài toán nâng cấp hàm median tối ưu với mục tiêu là tối ưu hóa mạng lưới hiện có bằng cách điều chỉnh trọng số của các đỉnh trong một giới hạn cho phép. Quá trình nâng cấp phải đảm bảo tuân thủ các ràng buộc ngân sách tuyến tính, tức là việc phân bổ chi phí phải nằm trong mức ngân sách đã định. Chúng ta cũng sẽ trình bày lại một thuật toán có độ phức tạp $O(n^2)$ đã được **Gassner** tìm ra, giúp giải quyết hiệu quả bài toán.

Cho đồ thị $G = (V, E)$, có n đỉnh, mỗi đỉnh được gán một trọng số không âm, gọi là w_v. Gọi $f(w)$ là giá trị mục tiêu 1-median với vecto trọng số w. Mục tiêu của bài toán nâng cấp 1-median là điều chỉnh trọng số đỉnh bằng $\delta = (\delta_v)_{v \in V}$ sao cho δ thỏa mãn điều kiện ràng buộc về ngân sách B, giới hạn điều chỉnh u và đồng thời $f(w - \delta)$ nhỏ nhất.

Khi đó, bài toán nâng cấp 1-median được biểu diễn như sau:

$$\min_{\delta \in \Delta} f(w-\delta) = \min_{\delta \in \Delta} \min_{x \in V} \sum_{v \in V} (w_v - \delta_v) d(v, x) \tag{1.1}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{v \in V} c_v \delta_v \leq B \tag{1.2}$$

$$0 \leq \delta_v \leq u_v \tag{1.3}$$

Hoán đổi hai phép lấy giá trị nhỏ nhất, ta được:

$$\min_{x \in V} \min_{\delta \in \Delta} \sum_{v \in V} (w_v - \delta_v) d(v, x) \tag{2.1}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{v \in V} c_v \delta_v \leq B \tag{2.2}$$

$$0 \leq \delta_v \leq u_v \tag{2.3}$$

Khi cố định một $x \in V$ bất kỳ, ta được một bài toán reverse 1-median. Mỗi bài toán reverse 1-median là một bài toán xếp ba lô liên tục được giải trong thời gian $O(n)$ (đã được trình bày ở mục trước). Do đó bài toán (2) có thể được giải bằng cách giải n bài toán xếp ba lô liên tục và sau đó so sánh các giá trị mục tiêu cải thiện.

Định lý 0.1: Bài toán nâng cấp 1-median bằng cách thay đổi trọng số đỉnh có thể được giải trong thời gian $O(n^2)$.

Ta kết thúc mục này bằng một ví dụ minh họa sau: Cho đồ thị $G = (V, E)$ có trọng số đỉnh và cạnh như hình bên dưới. Trong đó:

v	1	2	3
c_v	1	1	1
u_v	2	2	2

với ngân sách $B = 2$.

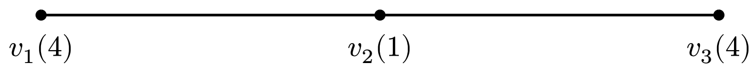

Figure 1: Đồ thị cây ví dụ cho bài toán Upgrading 1-median

Các giá trị hàm mục tiêu với trọng số ban đầu là $f(v_1) = f(v_3) = 9$ và $f(v_2) = 8$. Do đó, đỉnh v_2 là điểm 1-median.

Bây giờ, ta sẽ giải bài toán xếp ba lô liên tục khi cố định v_1. Ta thu được

$$\delta_1 = \delta_2 = 0 \tag{3}$$

và

$$\delta_3 = 2. \tag{4}$$

Vì vậy, giá trị mục tiêu ứng với trọng số mới của đỉnh v_1 là $\tilde{f}(v_1) = 5$.

Do tính đối xứng, ta cũng thu được

$$\delta_1 = 2 \tag{5}$$

và $\delta_2 = \delta_3 = 0$. Giá trị mục tiêu ứng với trọng số mới của đỉnh v_3 là $\tilde{f}(v_3) = 5$.

Cuối cùng, cố định đỉnh v_2, giải bài toán xếp ba lô liên tục ta được

$$\delta_1 = \delta_3 = 1 \tag{6}$$

và

$$\delta_2 = 0. \tag{7}$$

Do đó, giá trị mục tiêu sau khi cải thiện là $\tilde{f}(v_2) = 6$.

Vậy sau khi nâng cấp, đỉnh v_1 và v_3 có thể trở thành 1-median và giá trị mục tiêu đạt được là 5. Đồng thời, dẫn đến việc đỉnh v_2 không còn giữ được tính tối ưu của nó.