**TRƯỜNG ĐẠI HỌC CẦN THƠ**

**TRƯỜNG SƯ PHẠM**

**KHOA SƯ PHẠM TOÁN VÀ TIN HỌC**

**—oOo—**

**LUẬN VĂN TỐT NGHIỆP**

**ĐỀ TÀI:**

# BÀI TOÁN VỊ TRÍ 1-MEDIAN TRÊN ĐỒ THỊ CÂY

*Giảng viên hướng dẫn*

**PGS.TS. Nguyễn Văn A**

*Sinh viên thực hiện*

**Nguyễn Thị B**

**MSSV: B250XXXX**

**Lớp: SP Toán học - K50**

*Cần Thơ, tháng XX, năm 20XX*

# Mục lục

**Lời cảm ơn** ........ **iv**

**Lời cam đoan** ........ **v**

**Lý do chọn đề tài** ........ **vi**

**Danh mục các ký hiệu / từ viết tắt** ........ **ix**

**Danh mục các hình** ........ **x**

**Danh mục các bảng** ........ **xi**

**1. Kiến thức liên quan** ........ **2**

**1.1. Lý thuyết đồ thị** ........ **2**

1.1.1. Khái niệm và các dạng đồ thị ........ 2

1.1.2. Đồ thị con ........ 7

1.1.3. Bậc của đỉnh ........ 8

1.1.4. Đường đi và chu trình ........ 9

1.1.5. Đồ thị cây ........ 10

1.1.6. Tính lồi của hàm khoảng cách trên cây ........ 11

**2. Cách gõ Typst** ........ **14**

**2.1. Định dạng văn bản** ........ **14**

2.1.1. Định dạng chữ ........ 14

2.1.2. Định dạng list ........ 14

2.1.3. Căn giữa ........ 15

2.1.4. Cách ẩn một đoạn không dùng nữa ........ 15

2.1.5. Đề mục ........ 15

**2.2. Lập trình Typst** ........ **15**

2.2.1. Biến ........ 15

2.2.2. Hàm ........................................................................................................ 16

2.2.3. Data ........................................................................................................ 16

**2.3. Bảng và hình ảnh ........................................................................................ 16**

2.3.1. Bảng ........................................................................................................ 16

2.3.2. Hình ảnh ................................................................................................... 17

**2.4. Định dạng Toán ............................................................................................ 17**

2.4.1. Công thức toán ........................................................................................... 17

2.4.2. Định lý ...................................................................................................... 17

2.4.3. Vẽ đồ thị ................................................................................................... 18

2.4.4. Trích dẫn bài báo ........................................................................................ 19

**Kết luận ............................................................................................................ 20**

**Tài liệu tham khảo ............................................................................................ 21**

# Lời cảm ơn

Để hoàn thành luận văn này, tôi đã nhận được rất nhiều sự giúp đỡ.

Trước tiên, tôi xin gửi lời tri ân chân thành đến Thầy XXX. Thầy đã tận tình chỉ dẫn, định hướng và chia sẻ những kiến thức quý giá, giúp tôi vượt qua những khó khăn trong suốt quá trình thực hiện đề tài.

Bên cạnh đó, tôi không thể không nhắc đến sự động viên và ủng hộ từ gia đình, bạn bè, và những người thân yêu. Họ đã luôn ở bên cạnh, chia sẻ niềm vui, cổ vũ tinh thần và tiếp thêm sức mạnh cho tôi trong hành trình học tập và nghiên cứu. Xin gửi lời cảm ơn trân trọng đến tất cả!

*Cần Thơ, ngày … tháng … năm 2024*

**Nguyễn Thị B**

# Lời cam đoan


# Lời cam đoan


Tôi tên Nguyễn Thị B, tôi xin cam đoan luận văn này là công trình nghiên cứu khoa học thực sự của bản thân tôi dưới sự hướng dẫn của PGS.TS Nguyễn Văn A.

Tất cả thông tin tham khảo trong luận văn được thu thập từ các nguồn đáng tin cậy, đã qua kiểm chứng và công bố rộng rãi, đồng thời được tôi trích dẫn nguồn gốc rõ ràng trong phần Tài liệu tham khảo. Các kết quả nghiên cứu trình bày trong luận văn là do chính tôi thực hiện một cách nghiêm túc, trung thực và không trùng lặp với bất kỳ đề tài nào đã được công bố trước đây.

Tôi cam kết bằng danh dự và uy tín cá nhân về tính xác thực của lời tuyên bố này.

*Cần Thơ, ngày ... tháng ... năm 2024*

| **Cán bộ hướng dẫn** | **Sinh viên thực hiện** |
|---|---|
| | |
| **PGS.TS. Nguyễn Văn A** | **Nguyễn Thị B** |

# Lý do chọn đề tài

## a. Lý do chọn đề tài

Bài toán vị trí (Location problems) là một lớp bài toán quan trọng trong Vận trù học (Operation Research) và được nghiên cứu một cách rộng rãi, độc giả có thể tham khảo thêm từ các tài liệu như (Marianov & Eiselt 2024) hoặc (Laporte et al. 2019). Đáng chú ý trong số đó là bài toán vị trí trung vị (1-median) bởi tính ứng dụng thực tiễn cao của nó. Trong bài toán này, mục tiêu là xác định một điểm trên đồ thị sao cho tổng khoảng cách có trọng số từ mọi đỉnh đến điểm đó là nhỏ nhất. Vị trí 1-median có thể được dùng để xây dựng các cơ sở quan trọng như các kho hàng, bệnh viện, trường học hoặc các trung tâm dịch vụ công cộng, nhằm tối thiểu hóa thời gian di chuyển của người dân. Một ví dụ cụ thể trong lĩnh vực logistics là *bài toán kho đến trạm phân phối* (warehouse-to-lockers), được nghiên cứu bởi (Espejo & Marin 2023). Trong mô hình này, nhà kho cần được đặt tại vị trí 1-median trên mạng lưới đồ thị để giảm thiểu tổng chi phí vận chuyển đến các trạm phân phối. Mỗi trạm phân phối có sức chứa xác định để đáp ứng nhu cầu khách hàng, và chi phí vận chuyển từ nhà kho đến từng trạm được tính dựa trên khoảng cách và quy mô nhu cầu.

Tuy nhiên, trong thực tế, hàng hóa và chi phí vận chuyển không phải lúc nào cũng cố định. Chúng thường biến động dưới ảnh hưởng của nhiều yếu tố khách quan. Chẳng hạn, lượng hàng hóa tại các trạm phân phối có thể thay đổi do điều kiện thời tiết, mùa vụ, hoặc tình hình tài chính của người dân trong khu vực. Sự dao động này tại các trạm phân phối không chỉ ảnh hưởng đến nhu cầu hàng hóa mà còn tác động trực tiếp đến vị trí tối ưu của kho chứa. Điều này cho thấy tính ổn định của vị trí 1-median có thể bị tác động bởi các yếu tố bên ngoài.

Để nghiên cứu tính ổn định của kho hàng nói riêng và vị trí 1-median nói chung, *bán kính ổn định* là một công cụ đặc biệt hữu ích. Bán kính ổn định đo lường mức độ nhiễu tối đa của các tham số trong mô hình, trong khi vẫn đảm bảo rằng vị trí tối ưu ban đầu vẫn còn giữ tính tối ưu trong phạm vi nhiễu đó. …

Do đó, trong luận văn này, tôi sẽ tập trung nghiên cứu sâu về …

## b. Mục đích nghiên cứu

Mục đích nghiên cứu của luận văn này là định nghĩa được …., nghiên cứu … và đồng thời tìm ra giải thuật ….

## c. Đối tượng nghiên cứu

- Nghiên cứu lý thuyết đồ thị.
- Nghiên cứu bài toán vị trí 1-median.
- Nghiên cứu một số bài toán ngược: bài toán inverse 1-median, reverse 1-median, upgrading 1-median.

## d. Phạm vi nghiên cứu

- Bài toán vị trí.
- Đồ thị cây.
- Các lớp bài toán ngược.
- Bán kính ổn định.

## e. Phương pháp nghiên cứu

- Tổng hợp tài liệu: Lý thuyết đồ thị, bài toán vị trí, các bài toán ngược trên đồ thị và một số bài toán liên quan.

- Nghiên cứu lý thuyết: Ước lượng cận dưới bán kính ổn định của điểm 1-median trên cây.
- Nghiên cứu thuật toán: Thuật toán tổ hợp, phân tích độ phức tạp tính toán.

## f. Nội dung chính của luận văn

- Chương 1: Kiến thức chuẩn bị.
- Chương 2: ….

## g. Kết quả đạt được

Luận văn đã thành công trong việc ….

Kết quả của luận văn được trình bày trong bài báo khoa học đã gửi và đang được phản biện bởi tạp chí ….

# Danh mục các ký hiệu / từ viết tắt

| | |
|---|---|
| $G$ | Đồ thị tổng quát |
| $V$ | Tập hợp tất cả các đỉnh trên đồ thị |
| $E$ | Tập hợp tất cả các cạnh trên đồ thị |
| $T$ | Đồ thị cây |
| $N(x_0)$ | Tập hợp tất cả các đỉnh liền kề $x_0$ |
| $T_u$ | Cây lấy gốc tại $u$ |
| $\mathbb{1}_{T_u}$ | Vecto có phần tử thứ $i$ bằng 1 nếu $v_i$ thuộc cây $T_u$ |
| $\langle a, b\rangle$ | Tích vô hướng giữa hai vecto $a$ và $b$ |
| $R(w)$ | Bán kính ổn định ứng với trọng số $w$ |
| $\underline{R}(w)$ | Cận dưới bán kính ổn định ứng với trọng số $w$ |
| USR | Bài toán nâng cấp bán kính ổn định (Upgrading Stability Radius) |
| PUSR | Bài toán tham số hóa của USR (Parametric USR) |

# Danh mục các hình

**Hình** 1: Hình biểu diễn của đồ thị ........................................ 3

**Hình** 2: Đồ thị có hướng ........................................ 4

**Hình** 3: Đồ thị có trọng số đỉnh và độ dài cạnh ........................................ 4

**Hình** 4: Đồ thị liên thông ........................................ 5

**Hình** 5: Đồ thị không liên thông ........................................ 5

**Hình** 6: Đỉnh và cạnh liên thuộc nhau ........................................ 5

**Hình** 7: Hai cạnh liền kề nhau ........................................ 6

**Hình** 8: Đồ thị với các cạnh bội ........................................ 6

**Hình** 9: Đồ thị cảm sinh ........................................ 8

**Hình** 10: Đồ thị với các bậc khác nhau ........................................ 9

**Hình** 11: Đồ thị cây ........................................ 10

**Hình** 12: Đồ thị vòng chứa bốn điểm ........................................ 11

**Hình** 13: Hình biểu diễn của đồ thị ........................................ 18

**Hình** 14: Hình biểu diễn của đồ thị hàm số ........................................ 19

# Danh mục các bảng

**Hình** 1: Hình biểu diễn của đồ thị ........ 3

**Hình** 2: Đồ thị có hướng ........ 4

**Hình** 3: Đồ thị có trọng số đỉnh và độ dài cạnh ........ 4

**Hình** 4: Đồ thị liên thông ........ 5

**Hình** 5: Đồ thị không liên thông ........ 5

**Hình** 6: Đỉnh và cạnh liên thuộc nhau ........ 5

**Hình** 7: Hai cạnh liền kề nhau ........ 6

**Hình** 8: Đồ thị với các cạnh bội ........ 6

**Hình** 9: Đồ thị cảm sinh ........ 8

**Hình** 10: Đồ thị với các bậc khác nhau ........ 9

**Hình** 11: Đồ thị cây ........ 10

**Hình** 12: Đồ thị vòng chứa bốn điểm ........ 11

**Hình** 13: Hình biểu diễn của đồ thị ........ 18

**Hình** 14: Hình biểu diễn của đồ thị hàm số ........ 19

# 1. Kiến thức liên quan

## 1.1. Lý thuyết đồ thị

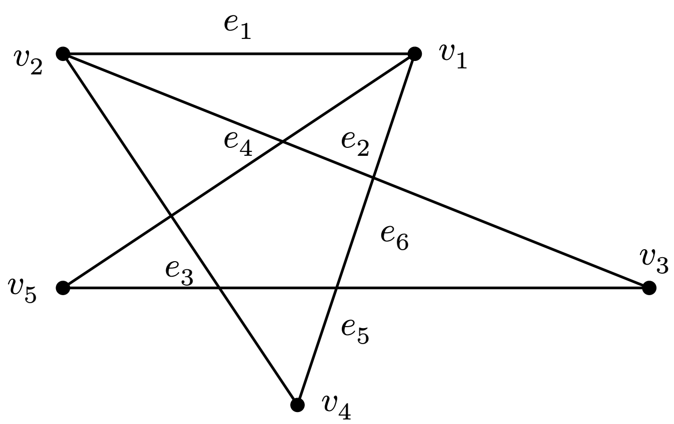
### 1.1.1. Khái niệm và các dạng đồ thị

Trong thực tế, việc biểu diễn các đối tượng và mối quan hệ giữa chúng đóng vai trò quan trọng trong nhiều lĩnh vực khác nhau. Chẳng hạn, trong mạng xã hội, để nghiên cứu mối quan hệ giữa các cá nhân, chúng ta cần một công cụ có thể mô hình hóa các kết nối này một cách trực quan và hiệu quả. Tương tự, trong mạng lưới giao thông, việc mô phỏng mối liên hệ giữa các điểm đến và các tuyến đường giúp tối ưu hóa hành trình di chuyển, từ đó tiết kiệm thời gian và chi phí. Khi đó, *đồ thị* trở thành một công cụ hữu ích để giải quyết nhu cầu này. Vậy, đồ thị là gì?

Trong toán học, đồ thị $G$ được định nghĩa như sau:

Một đồ thị (graph) $G$ là một bộ ba $(V(G), E(G), \psi_G)$ bao gồm một tập khác rỗng $V(G)$ các đỉnh (vertices) của $G$, một tập $E(G)$ các cạnh (edges) của $G$, và một hàm liên thuộc (incidence function) $\psi_G$ đặt tương ứng mỗi cạnh với một cặp đỉnh. Nếu $e$ là một cạnh và $u, v$ là hai đỉnh sao cho $\psi_G(e) = uv$ thì ta nói $e$ nối $u$ và $v$; các đỉnh $u$ và $v$ được gọi là các điểm đầu mút của $e$.

Để dễ dàng hình dung, ta xét ví dụ sau: Cho đồ thị $G = (V(G), E(G), \psi_G)$ với $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}, E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$ và $\psi_G$ được xác định bởi $\psi_G(e_1) = v_1v_2, \psi_G(e_2) = v_2v_3, \psi_G(e_3) = v_2v_4, \psi_G(e_4) = v_1v_5, \psi_G(e_5) = v_3v_5, \psi_G(e_6) = v_1v_4$. Hình bên dưới là một biểu diễn hình học của đồ thị $G$.



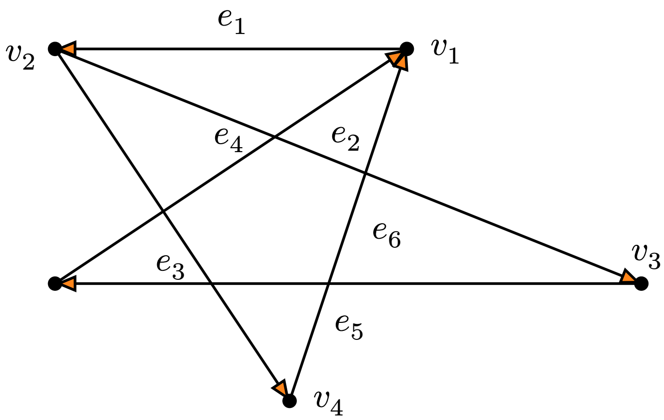

**Hình** 1: Hình biểu diễn của đồ thị

Lấy ví dụ trong thực tế:

- Trong mạng xã hội, đồ thị có thể được sử dụng để mô tả mối quan hệ bạn bè giữa các cá nhân. Mỗi đỉnh của đồ thị đại diện cho một cá nhân, và nếu hai người là bạn bè, mối quan hệ đó được biểu diễn bằng một cạnh nối hai đỉnh tương ứng.
- Trong lĩnh vực giao thông, các thành phố có thể được biểu diễn bởi các đỉnh, trong khi các cạnh là các tuyến đường nối giữa chúng.

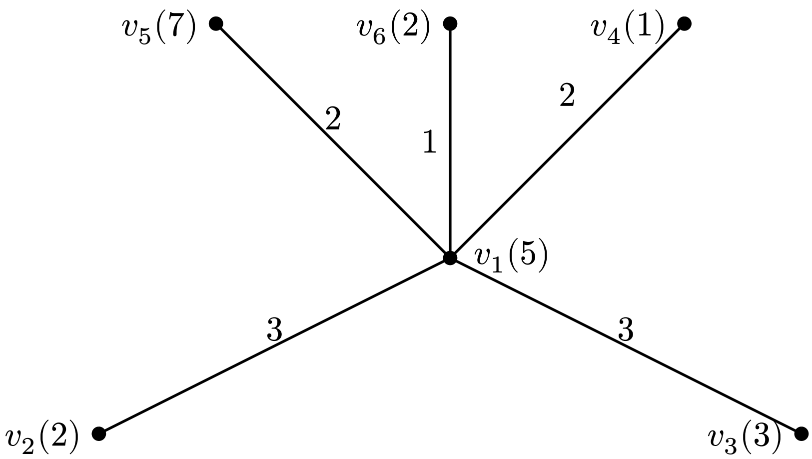
Tiếp theo, ta sẽ xét các dạng đồ thị thường gặp.

1. *Đồ thị vô hướng (undirected graph)* là một loại đồ thị trong đó các cạnh không có hướng ($\psi_G(e) = uv = vu$). Điều này có nghĩa là nếu có một cạnh nối hai đỉnh $u$ và $v$ thì cạnh này có thể được đi từ $u$ đến $v$ và ngược lại có thể đi từ $v$ đến $u$ . Nói cách khác, mối quan hệ giữa các đỉnh là hai chiều và không có sự phân biệt về hướng.
2. *Đồ thị có hướng (directed graph)* là một loại đồ thị trong đó mỗi cạnh có hướng ($\psi_G(e_1) = uv \neq \psi_G(e_2) = vu$). Điều này có nghĩa là mỗi cạnh được biểu diễn bởi một cặp đỉnh có thứ tự, chỉ định hướng đi từ đỉnh đầu đến đỉnh cuối. Trong đồ thị có hướng, nếu có cạnh từ đỉnh $u$ đến đỉnh $v$ thì không nhất thiết phải có cạnh từ đỉnh $v$ đến đỉnh $u$.




**Hình** 2: Đồ thị có hướng

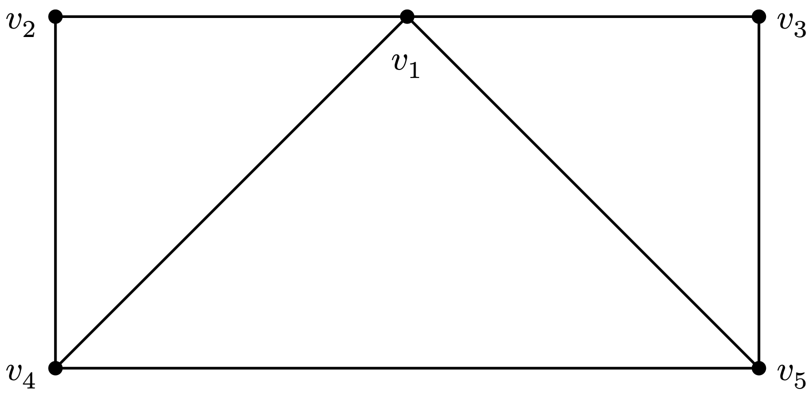
3. *Đồ thị có trọng số (weighted graph)* là loại đồ thị trong đó các đỉnh và các cạnh được gán các giá trị trọng số. Trọng số của đỉnh thường biểu thị các yếu tố như dân số, tài nguyên hoặc mức độ quan trọng của điểm đó, trong khi trọng số của cạnh thường đại diện cho khoảng cách, chi phí hoặc thời gian di chuyển giữa các điểm. Ví dụ, trong một đồ thị biểu diễn các điểm dân cư, mỗi đỉnh có thể được gán một trọng số biểu thị số lượng dân cư tại khu vực đó, còn mỗi cạnh có trọng số thể hiện khoảng cách giữa hai điểm dân cư.




**Hình** 3: Đồ thị có trọng số đỉnh và độ dài cạnh

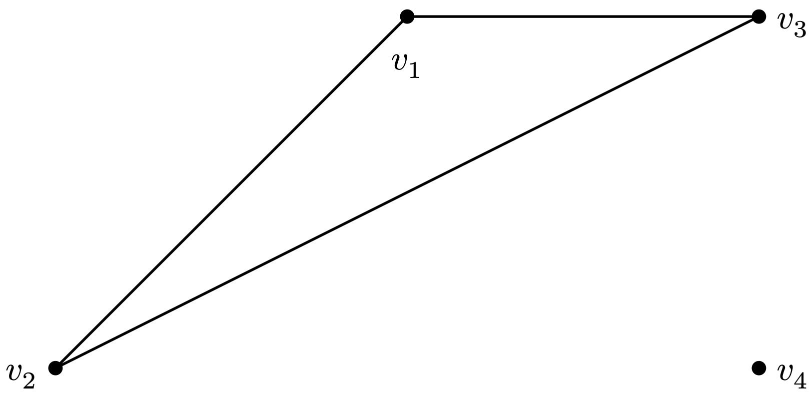
4. *Đồ thị không có trọng số (unweighted graph)* là đồ thị mà các cạnh và các đỉnh không có trọng số.

5. *Đồ thị liên thông (connected graph)* là đồ thị mà từ một đỉnh bất kỳ, ta có thể đi đến tất cả các đỉnh khác thông qua các cạnh.




**Hình** 4: Đồ thị liên thông

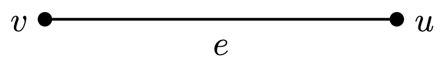
5. *Đồ thị không liên thông (disconnected graph)* là đồ thị sao cho tồn tại ít nhất một đỉnh, mà từ đỉnh đó ta không thể đi đến một số đỉnh khác. **Hình** 5 là một ví dụ của đồ thị không liên thông vì tồn tại đỉnh $v_4$ mà từ đỉnh này ta không thể đi đến các đỉnh còn lại của đồ thị.




**Hình** 5: Đồ thị không liên thông

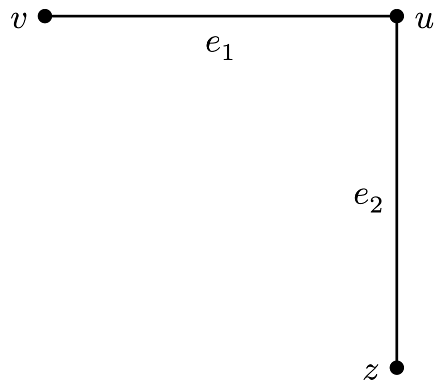
Một số khái niệm khác liên quan đến đồ thị được trình bày bên dưới.

- Nếu $u$ là một điểm đầu mút của cạnh $e$ thì ta nói $u$ và $e$ *liên thuộc (incident)* với nhau.



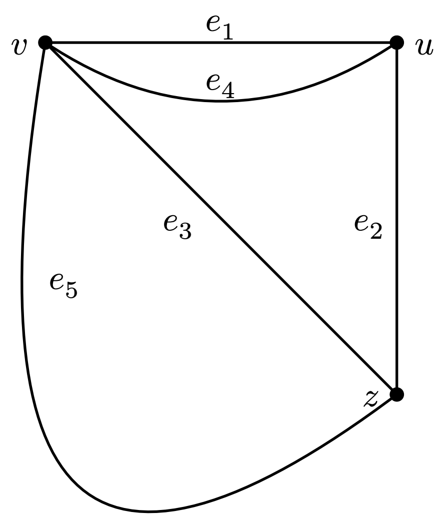

**Hình** 6: Đỉnh và cạnh liên thuộc nhau

- Hai đỉnh liên thuộc với cùng một cạnh được gọi là hai đỉnh *liền kề (adjacent)*. Trong **Hình** 6, $u$ và $v$ cùng liên thuộc cạnh $e$ nên $u$ và $v$ là hai đỉnh liền kề.
- Hai cạnh liên thuộc với cùng một đỉnh được gọi là hai cạnh *liền kề*. Trong **Hình** 7, rõ ràng ta có thể thấy $e_1$ và $e_2$ cùng liên thuộc đỉnh $u$ nên $e_1, e_2$ là hai cạnh liền kề.




**Hình** 7: Hai cạnh liền kề nhau

- Một cạnh có hai điểm đầu mút trùng nhau được gọi là một *vòng (loop)*.
- Hai hay nhiều cạnh mà có hai đầu mút giống nhau được gọi là *các cạnh song song (parallel edges)* hay còn được gọi là *các cạnh bội (multiple edges)*.




**Hình** 8: Đồ thị với các cạnh bội

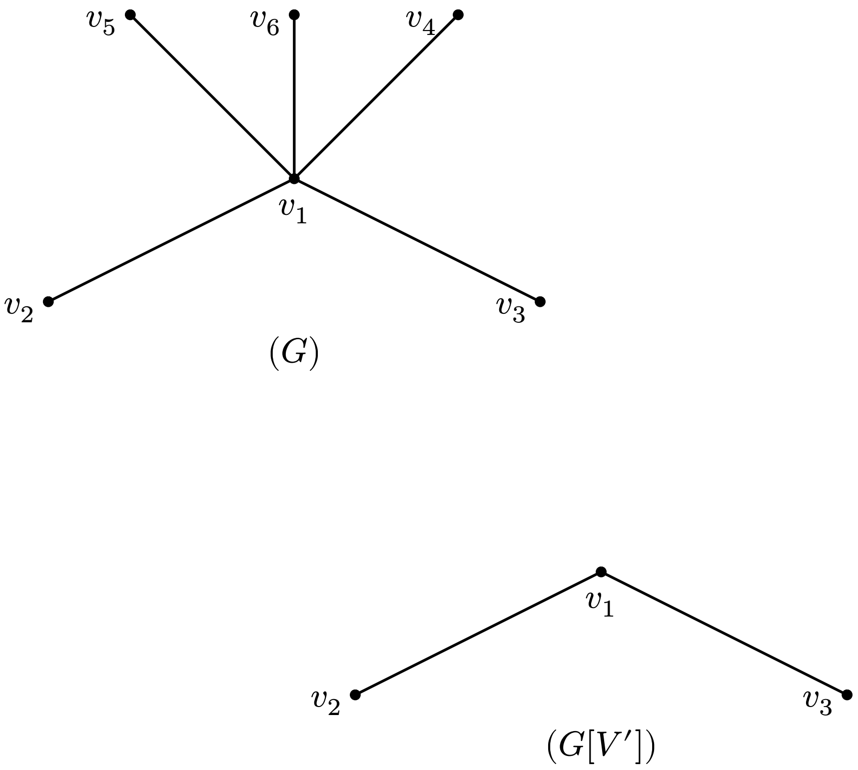
- *Đồ thị hữu hạn (finite graph)* là đồ thị có cả tập hợp cạnh và tập hợp đỉnh đều hữu hạn. Các hình được đề cập bên trên đều là đồ thị hữu hạn.
- *Đơn đồ thị (simple graph)* là một đồ thị không có vòng và không có cạnh song song. **Hình** 3 là một ví dụ của đơn đồ thị.
- *Đồ thị tầm thường (trivial graph)* là đồ thị chỉ có một đỉnh và không có cạnh.
- *Đồ thị rỗng (empty graph)* là đồ thị không có đỉnh và không có cạnh.

**1.1.2. Đồ thị con**

*Đồ thị con (subgraph)* là đồ thị được xây dựng từ một phần của đồ thị lớn hơn. Cụ thể, $H$ là một đồ thị con của $G$ nếu $V(H) \subseteq V(G)$, $E(H) \subseteq E(G)$ và $\psi_H$ là giới hạn của $\psi_G$ trên $E(H)$. Ký hiệu: $H \subseteq G$.

Có nhiều loại đồ thị con như:

- *Đồ thị con thực sự (proper subgraph)*: $H \subseteq G$ nhưng $H \neq G$. Khi đó, ta ký hiệu $H \subset G$.
- *Đồ thị con bao trùm (spanning subgraph)*: $V(H) = V(G)$.
- *Đồ thị con cảm sinh (induced subgraph)* là một loại đồ thị con đặc biệt được xây dựng từ một tập hợp con của các đỉnh trong đồ thị gốc, cùng với tất cả các cạnh mà các đỉnh này nối với nhau trong đồ thị gốc. Đồ thị con của $G$ cảm sinh bởi $V'$ được ký hiệu $G[V']$. Để hiểu rõ hơn về định nghĩa đồ thị con cảm sinh, ta xét ví dụ sau: Cho đồ thị $G$ như hình bên dưới, $V' = \{v_1, v_2, v_3\}$, khi đó đồ thị con của $G$ cảm sinh bởi $V'$ được xác định như sau:

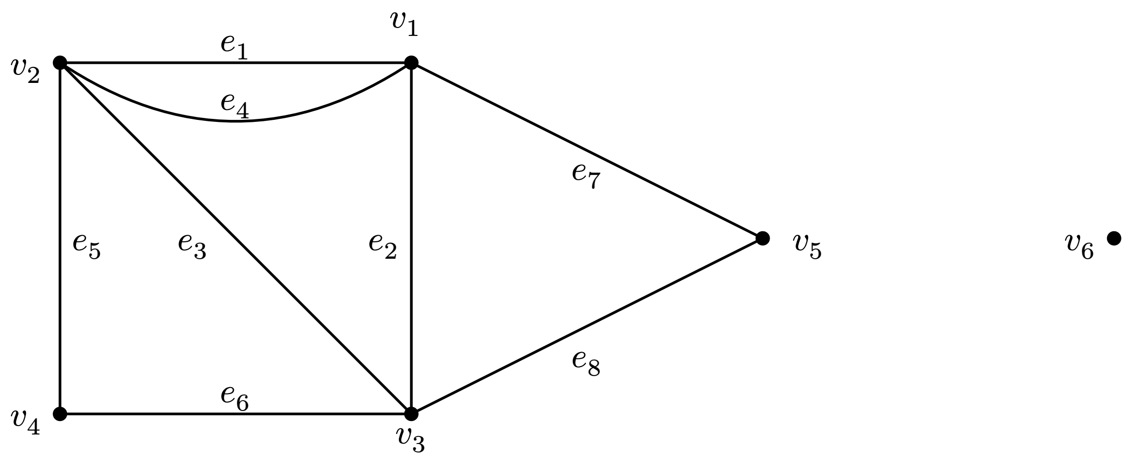



**Hình** 9: Đồ thị cảm sinh

### 1.1.3. Bậc của đỉnh

*Bậc (degree)* của đỉnh $v$ trong $G$ là số cạnh của $G$ liên thuộc với $v$. Ký hiệu: $d(v)$. Lưu ý rằng, mỗi vòng được tính là hai cạnh.

Bậc của một đỉnh trong đồ thị mang nhiều ý nghĩa quan trọng trong thực tế. Ví dụ, trong mạng xã hội, bậc của một đỉnh biểu thị số lượng bạn bè mà một cá nhân có. Các đỉnh có bậc cao thường đại diện cho những cá nhân có tầm ảnh hưởng lớn, bởi họ duy trì nhiều kết nối và tương tác với các thành viên khác. Điều này giúp đánh giá mức độ quan trọng hoặc vai trò trung tâm của một cá nhân trong cộng đồng.




**Hình** 10: Đồ thị với các bậc khác nhau

Trong **Hình 10**, ta có thể tính được bậc của các đỉnh như sau:

$d(v_1) = 4, d(v_2) = 4, d(v_3) = 4, d(v_4) = 2, d(v_5) = 2$ và $d(v_6) = 0$.

Định lý sau đây thể hiện mối liên hệ giữa tổng bậc và số cạnh của đồ thị.

**Định lý 1.1**: Tổng bậc của tất cả các đỉnh trong một đồ thị bằng hai lần số cạnh của đồ thị đó.

### 1.1.4. Đường đi và chu trình

*Đường đi (walk)* trong $G$ là một dãy khác rỗng hữu hạn gồm các đỉnh và các cạnh xen kẽ nhau. Nếu các cạnh của đường đi đôi một khác nhau thì đường đi đó được gọi là *đường đi đơn (trail)*. Trong khi đó, nếu các đỉnh của đường đi đôi một khác nhau thì được gọi là *đường đi sơ cấp (path)*.

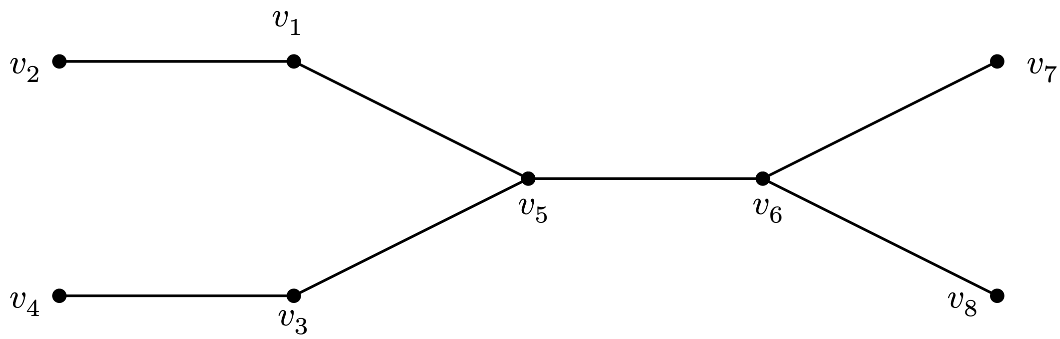
*Chu trình (closed walk)* là một đường đi có đỉnh đầu và đỉnh cuối trùng nhau. *Chu trình đơn (closed trail)* là một chu trình có các cạnh đôi một khác nhau. *Chu trình sơ cấp (cycle)* là một chu trình đơn có các đỉnh đôi một khác nhau ngoại trừ đỉnh đầu và đỉnh cuối.

Đối với đồ thị có trọng số, *độ dài đường đi (length)* bằng tổng trọng số cạnh của đường đi đó.

Trong phần tiếp theo, chúng ta sẽ đi sâu vào nghiên cứu đồ thị cây - một loại đồ thị đơn giản và có nhiều ứng dụng trong thực tế.

### 1.1.5. Đồ thị cây

*Đồ thị cây $T$ (tree graph)* là đồ thị liên thông và không chứa chu trình sơ cấp.




**Hình** 11: Đồ thị cây

Đồ thị cây có những đặc điểm nổi bật sau:

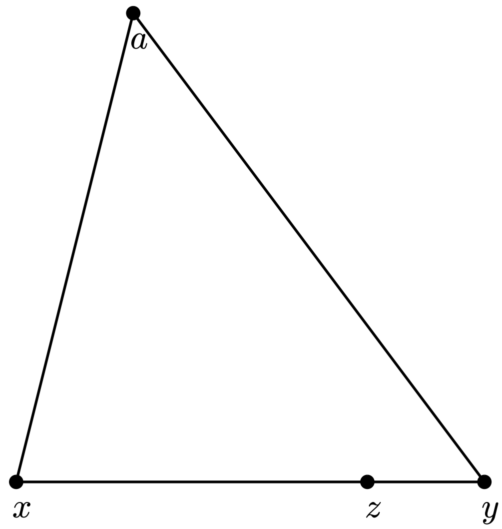
- Nếu $T$ là đồ thị cây có $n$ đỉnh thì luôn có đúng $n-1$ cạnh.
- Trong một cây, hai đỉnh bất kỳ được nối với nhau bằng một đường đi sơ cấp duy nhất.
- Mỗi cây với mỗi đỉnh $n \geq 2$ thì có ít nhất hai đỉnh bậc một. Những đỉnh bậc một này thường được gọi là *lá*, và chúng đóng vai trò quan trọng trong việc xác định cấu trúc và tính chất của cây.

Tiếp theo, ta sẽ xem xét một bổ đề quan trọng sau:

**Bổ đề 1.2**: Với hai điểm $x$ và $y$ gọi $P(x, y)$ là đường đi nối $x$ và $y$. Đặt $a, x, y$ và $z$ là bốn điểm phân biệt nằm trên cây $T$ sao cho $z \in P(x, y)$ thì $z \in P(a, x)$ hoặc $z \in P(a, y)$

*Chứng minh*: Theo giả thiết, ta có $z \in P(x, y)$. Ta giả sử $z \notin P(a, x)$ và $z \notin P(a, y)$ (như hình vẽ) (vẽ hình minh họa). Bởi vì đường đi kết nối $x$ và $y$ đi qua

$a$ nhưng không chứa $z$, trong khi đó đường đi $P(x, y)$ chứa $z$. Vì vậy, tồn tại hai con đường nối $x$ và $y$ và điều này mâu thuẫn với tính chất của đồ thị cây.□




**Hình** 12: Đồ thị vòng chứa bốn điểm

### 1.1.6. Tính lồi của hàm khoảng cách trên cây

Mặc dù đồ thị cây là một loại đồ thị đơn giản, nhưng nó sở hữu nhiều tính chất đẹp và thú vị. Một trong những tính chất nổi bật là tính lồi của hàm khoảng cách được phát biểu bởi (Dearing et al. 1976). Tính chất này đóng vai trò đặc biệt quan trọng trong các bài toán vị trí trên đồ thị cây.

Trước tiên ta nhắc lại về hàm lồi trên đồ thị cây. Cho hàm số $f$ liên tục trên đồ thị cây $T$.

**Định nghĩa 1.3**: Hàm $f$ liên tục trên đồ thị $T$ được gọi là *lồi* nếu với mọi đường đi $P(a, b)$, $a, b \in T$, và với mọi $\lambda \in [0, 1]$, ta có

$$f(x_\lambda) \leq \lambda f(a) + (1 - \lambda) f(b).$$

trong đó $x_\lambda \in P(a, b)$ sao cho $d(a, x_\lambda) = \lambda d(a, b)$.

Xét điểm $a$ cố định thuộc $T$. Ta chứng minh hàm khoảng cách từ một điểm $x$ bất kỳ đến một điểm cố định $a$, $d(x, a)$, là hàm lồi trên đồ thị cây.

**Định lý 1.4**: Hàm khoảng cách $x \mapsto d(x,a)$ là lồi với mọi $a \in T$ khi và chỉ khi $T$ là đồ thị cây.

*Chứng minh*: Ta sẽ tiến hành chứng minh hai chiều.

Giả sử, $T$ là đồ thị cây. Chọn $y, z$ bất kỳ nằm trên cây $T$, $0 < \lambda < 1$ và $x \in P(z,x)$ thỏa $d(z,x) = \lambda d(z,y)$. Để chứng minh $d(x,a)$ là hàm lồi, ta cần chứng minh $d(x,a) \leq \lambda d(y,a) + (1-\lambda)d(z,a)$ hoặc ta có thể chứng minh bất đẳng thức sau:

$$d(x,a)d(y,z) \leq d(x,z)d(y,a) + d(x,y)d(z,a)$$

Vì $x \in P(y,z)$ nên theo Bổ đề 1.2, ta có $x \in P(y,a)$ hoặc $x \in P(z,a)$.

Mặt khác, ta có $d(y,z) = d(y,x) + d(x,z)$ do $x \in P(y,z)$, nên

$$d(x,a)d(y,z) = d(x,a)d(y,x) + d(x,a)d(x,z)$$

Giả sử, $x \in P(z,a)$ ta có:

$$d(x,a) = d(z,a) - d(z,x)$$

Hơn nữa, theo bất đẳng thức tam giác ta có,

$$d(x,a) \leq d(a,y) + d(y,x)$$

Thay (0) và (0) vào (0) ta được (0) .

Trường hợp $x \in P(y,a)$ cũng được chứng minh tương tự.

Ta chứng minh chiều ngược lại bằng phản chứng. Giả sử $x \mapsto d(x,a)$ là hàm lồi trên tập các điểm thuộc đồ thị $T$ và giả sử rằng $T$ không phải là cây. Nói cách khác, tồn tại một chu trình $C$ của $T$ có độ dài ngắn nhất, giả sử là $l > 0$, trong tất cả các chu trình của $T$. Bởi vì $C$ là một chu trình ngắn nhất trong $T$, nên ta có thể chọn $x, y, z$ và $a$ trong $C$ sao cho $d(a,x) = d(y,z) = \frac{l}{2}$, $d(a,y) = d(x,y) = d(z,a) = d(x,z) = \frac{l}{4}$ và $d(x,z) = \frac{1}{2}d(y,z)$. Khi đó

$d(x,a) = \frac{l}{2} > \frac{1}{2}d(y,a) + \frac{1}{2}d(z,a) = \frac{l}{4}$, điều này mâu thuẫn với giả thiết $d(x,a)$ là hàm lồi. Vậy $T$ là đồ thị cây. $\square$

# 2. Cách gõ Typst

## 2.1. Định dạng văn bản

### 2.1.1. Định dạng chữ

- **In đậm**
- *In đậm*
- Tô vàng
- Tô xanh
- Gạch dưới
- Gạch trên
- ~~Gạch bỏ~~
- Đóng khung
- Đóng khung rộng
- Đổi font chữ
- Đổi size chữ

### 2.1.2. Định dạng list

- Để tạo list không thứ tự, dùng dấu trừ -
  - mục a
  - mục b
  - mục c
- Để tạo list có thứ tự, dùng +
  1. mục 1
  2. mục 2
  3. mục 3

#### 2.1.3. Căn giữa

Dùng hàm `#align(center)`. Ví dụ:

Nội dung căn trái

Nội dung căn giữa

Nội dung căn phải

#### 2.1.4. Cách ẩn một đoạn không dùng nữa

Ví dụ câu sau sẽ không hiện trên pdf

#### 2.1.5. Đề mục

Ta tạo đề mục bằng dấu =

Số lượng dấu = sẽ là cấp của đề mục đó. Ví dụ

- Cấp 1 =
- Cấp 2 =
- Cấp 3 ===

Chú ý, hạn chế các đề mục từ cấp 4 trở lên.

### 2.2. Lập trình Typst

#### 2.2.1. Biến

Typst là một ngôn ngữ lập trình để soạn thảo văn bản. Như vậy Typst cũng là một ngôn ngữ lập trình.

Ví dụ sau tính tổng của hai số a và b và in nó ra file pdf.

```
#let a  = 5
#let b  = 7
#let c  = a + b
Ta có $a + b = #c$
```

Nhập đoạn code trên vào ta có kết quả

Ta có $a + b = 12$

- Chế độ bình thường của Typst là văn bản
- Chế độ code được bật lên bằng dấu #

#### 2.2.2. Hàm

Ta định nghĩa hàm trong typst như sau

Khi đó $3 + 4 = 7$

Khi hàm số được tính toán phức tạp ta đặt đoạn code trong dấu `{}`

Khi đó $4! = 24$

#### 2.2.3. Data

Data trong Typst có các dạng chính

- Số
- Chữ
- Boolean `true, false`

Data tổng hợp trong Typst có hai dạng chính

- List `#let a = (1,2,3,4,5)`
- Dictionary `#let john = (age: 18, name: "john", sex: "men")`
- Cách truy cập phần tử của list: Phần tử thứ hai của list a có giá trị bằng 2 (do đếm từ 0, 1, 2,….)
- Cách truy cập phần tử của dictionary: Tuổi của John là 18

### 2.3. Bảng và hình ảnh

#### 2.3.1. Bảng

| **Cột 1** | **Cột 2** | **Cột 3** |
|---|---|---|
| Dòng 1 | Dòng 1 | Dòng 1 |
| Dòng 2 | Dòng 2 | Dòng 2 |

Muốn cho bảng vào giữa, ta đặt bảng trong hàm `#align(center)`

| **Cột 1** | **Cột 2** | **Cột 3** |
|---|---|---|
| Dòng 1 | Dòng 1 | Dòng 1 |
| Dòng 2 | Dòng 2 | Dòng 2 |

Muốn cho bảng dãn rộng bằng văn bản, ta đổi biến cột thành `(1 fr, 1 fr, 1 fr)`

| **Cột 1** | **Cột 2** | **Cột 3** |
|---|---|---|

| | | |
|---|---|---|
| Dòng 1 | Dòng 1 | Dòng 1 |
| Dòng 2 | Dòng 2 | Dòng 2 |

Muốn căn giữa nội dung, thêm biến `align` trọng hàm `#table`

| **Cột 1** | **Cột 2** | **Cột 3** |
|:---:|:---:|:---:|
| Dòng 1 | Dòng 1 | Dòng 1 |
| Dòng 2 | Dòng 2 | Dòng 2 |

#### 2.3.2. Hình ảnh

## 2.4. Định dạng Toán

#### 2.4.1. Công thức toán

- Viết công thức trên 1 dòng cùng với text, $a^2 + b^2 = c^2$
- Viết công thức trên 1 dòng riêng

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \tag{1}$$

- Cách trích dẫn phương trình
  - Cách mặc định dùng `@`, ví dụ: Xét phương trình Equation 1 và Equation 2
  - Cách mặc định dùng `#eqref()`, ví dụ: Xét phương trình (1) (equation reference) và (2)

Ta có thể viết tiếp một phương trình không đánh số thứ tự

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$$

Ta có thể tiếp tục một phương trình có đánh số thứ tự bằng hàm `#eqnum()` (equation numbering)

$$\int_a^b f''(x)dx = f'(b) - f'(a) \tag{2}$$

#### 2.4.2. Định lý

**Mệnh đề 2.1** : Trong một tam giác vuông ta có $a^2 + b^2 = c^2$.

**Định lý 2.2** : (Định lý Pytago) Trong một tam giác vuông ta có

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

*Chứng minh* : Ta cần chứng minh …. □

**Ví dụ 2.3** : Xét ví dụ sau ….

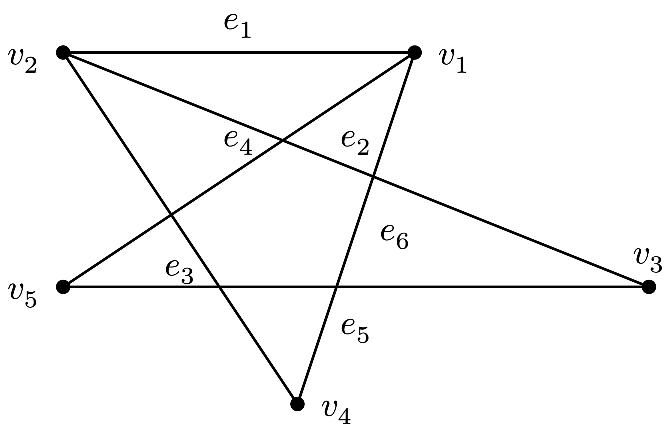
### 2.4.3. Vẽ đồ thị

Để vẽ đồ thị ta sử dụng Cetz - một thư viện của Typst: Link Cetz package.

Chú ý rằng để sử dụng thư viện Cetz (hay bất kỳ thư viện nào khác), ta cần thêm đoạn code sau vào đầu trang:

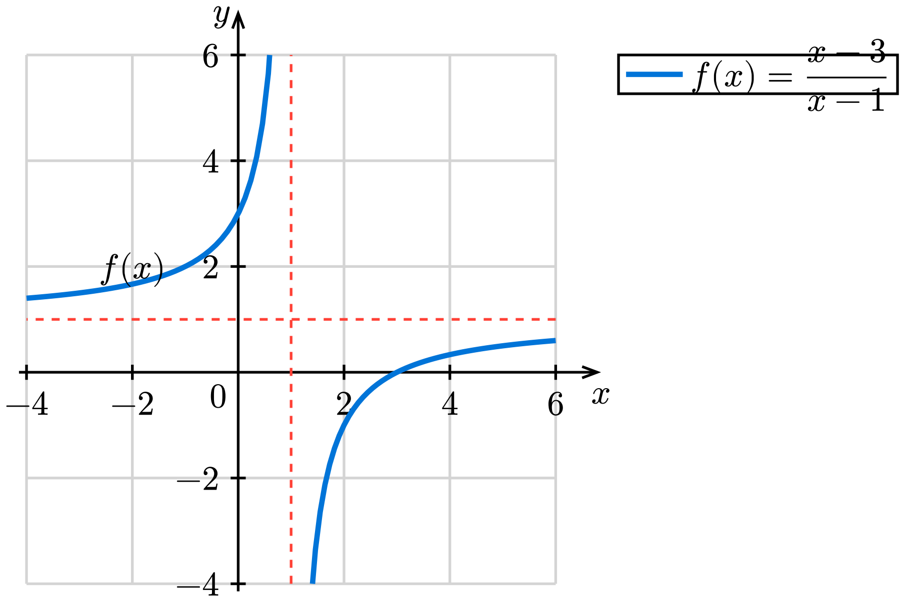
```
#import "@preview/cetz:0.1.2": canvas, plot
#import "@preview/cetz:0.1.2"
```

Ví dụ ta thực hiện vẽ một đồ thị. Chú ý lúc này dùng Cetz phiên ban `0.1.2`




**Hình** 13: Hình biểu diễn của đồ thị

Giờ ta thực hiện vẽ một đồ thị hàm số, chú ý lúc này dùng Cetz phiên ban `0.2.2`




**Hình** 14: Hình biểu diễn của đồ thị hàm số

### 2.4.4. Trích dẫn bài báo

# Kết luận

**Kết quả nghiên cứu.** Trong bài báo này, chúng tôi nghiên cứu … . Đóng góp của luận văn gồm hai phần chính:

1. Trong phần thứ nhất, chúng tôi …
2. Trong phần thứ hai, chúng tôi …

**Các hướng nghiên cứu tiếp theo trong tương lai.** Từ những kết quả nghiên cứu trên, có nhiều hướng phát triển tiềm năng trong tương lai. Hai trong số đó là:

1. Chúng tôi dự định nghiên cứu ….
2. Chúng tôi cũng dự định nghiên cứu …

# Tài liệu tham khảo


Dearing P, Francis R L, Lowe T J. 1976. Convex location problems on tree networks. *Operations Research*. 24(4):628–42

Espejo I, Marin A. 2023. The p-median problem with upgrading of transportation costs and minimum travel time allocation. *Computers & Operations Research*. 159:106354–55

Laporte G, Nickel S, Saldanha-da-Gama F. 2019. *Introduction to Location Science*. Springer

Marianov V, Eiselt H. 2024. Location theory–a selective survey. *European Journal of Operational Research*