Bài toán 1-median

Trong phần này, ta sẽ xem xét bài toán 1-median. Bài toán này là một bài toán tối ưu trong lý thuyết vị trí, với ứng dụng thực tiễn rộng rãi trong nhiều ngành khác nhau. Trong quy hoạch đô thị, bài toán này được sử dụng để chọn vị trí đặt các dịch vụ công cộng như bệnh viện, trường học, hoặc trạm xăng sao cho tổng khoảng cách di chuyển của người dân đến các địa điểm này là nhỏ nhất. Tương tự, trong quản lý chất thải, bài toán 1-median giúp tìm vị trí đặt nhà máy xử lý hoặc bãi rác nhằm tối ưu hóa chi phí vận chuyển rác từ các khu vực dân cư đến nơi xử lý, giảm thiểu chi phí và thời gian vận chuyển.

Bài toán 1-median trên đồ thị tổng quát

Cho đồ thị $G = (V, E)$, với mỗi cạnh và mỗi đỉnh được gán một trọng số tương ứng, gọi là trọng số cạnh và trọng số đỉnh. Ta đặt w_i là trọng số của đỉnh v_i và giả sử tất cả các đỉnh đều có trọng số dương. Mục tiêu của bài toán này là tìm vị trí của một điểm (gọi là 1-median) sao cho tổng khoảng cách từ điểm đó đến các điểm khác trên đồ thị là nhỏ nhất. Hay nói cách khác, ta cần phải tìm một điểm $x \in G$ sao cho

$$f(x) = \sum_{v_i \in V} w_i d(v_i, x)$$

nhỏ nhất

Thuật toán tìm điểm 1-median trên đồ thị tổng quát được trình bày bởi Nickel. Thuật toán gồm các bước sau:

1. Xác định khoảng cách gần nhất giữa các cặp đỉnh trong G. Ký hiệu là $d\left(v_i, v_j\right)$
2. Tính giá trị của $f(v_i), \forall v_i \in V$
3. Tìm $opt = \min\{f(v_i) \mid v_i \in V\}$
4. Trả về $(x^*) = \{v_i \mid f(v_i) = opt\}$ là các điểm 1-median của G.

Để hiểu rõ hơn về cách hoạt động của thuật toán, ta sẽ xem xét ví dụ dưới đây. Với trọng số đỉnh đã được cho trong hình vẽ, nhiệm vụ tiếp theo là tính toán khoảng cách giữa các cặp đỉnh trong đồ thị G.

$$d(u, v) = 4, d(z, v) = 6, d(t, v) = 10, d(z, u) = 3, d(t, u) = 6, d(t, z) = 3$$

Tiếp theo, ta sẽ tính giá trị hàm mục tiêu như ở (0)

$$f(v) = 2.4 + 6.4 + 10.1 = 42$$

$$f(u) = 3.4 + 4.3 + 1.6 = 30$$

$$f(z) = 3.6 + 2.3 + 1.3 = 27$$

$$f(t) = 3.10 + 6.2 + 3.4 = 54$$

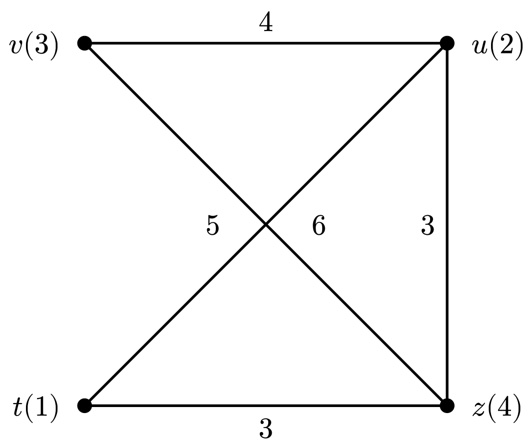


Figure 1: Đồ thị có trọng số với đỉnh z là median

Vì $f(z) < f(u) < f(v) < f(t)$, nên z là điểm 1-median cần tìm.

Tiếp theo, ta sẽ nghiên cứu bài toán 1-median trên một loại đồ thị đơn giản hơn, đó là đồ thị cây. Trên cấu trúc đồ thị này,

[Remark by LE:

- Đề cập định lý điểm tối ưu đạt tại đỉnh của đồ thị.

]

Bài toán 1-median trên đồ thị cây

[Remark by LE:

- Chứng minh tính chất hàm median trên cây là convex.

]

Điều kiện tối ưu của 1-median trên đồ thị cây

Cho đồ thị cây $T(V, E)$. Đặt $u_i \in N(x_0)$ là tập hợp những đỉnh liền kề với x_0. Gọi T_u là cây con của T được lấy gốc tại đỉnh u.

Định lý 0.1 (Điều kiện tối ưu của 1-median trên cây): Một điểm x_0 là điểm 1-median của cây T khi và chỉ khi

$$w\left(T_{u_i}\right) \leq \frac{w(T)}{2}, \qquad \forall u_i \in N(x_0)$$

Định lý 1: Điều kiện tối ưu của 1-median trên cây

Chứng minh: Định lý này gồm hai chiều, ta bắt đầu với chiều đầu tiên.

Giả sử x_0 là điểm 1-median. Ta cần chứng minh (0) .

Trước tiên, ta đặt $\deg(x_0) = k$. Khi đó, nếu xóa bỏ x_0, ta được k cây con với gốc lần lượt là $T_{u_1}, T_{u_2}, ..., T_{u_k}$, trong đó $u_i \in N(x_0), i = 1, ..., k$.

Ta lại có x_0 là một điểm 1-median, nghĩa là giá trị $f(x_0)$ nhỏ nhất. Nói cách khác:

$$f(u_i) - f(x_0) \geq 0 \forall u_i \in N(x_0)$$

Khi đó,

$$f(u_1) - f(x_0) \geq 0$$

Hơn nữa,

$$f(x_0) = \sum_{v_i \in V(T_{u_1})} w_i d(v_i, x_0) + \sum_{v_i \notin V(T_{u_1})} w_i d(v_i, x_0)$$

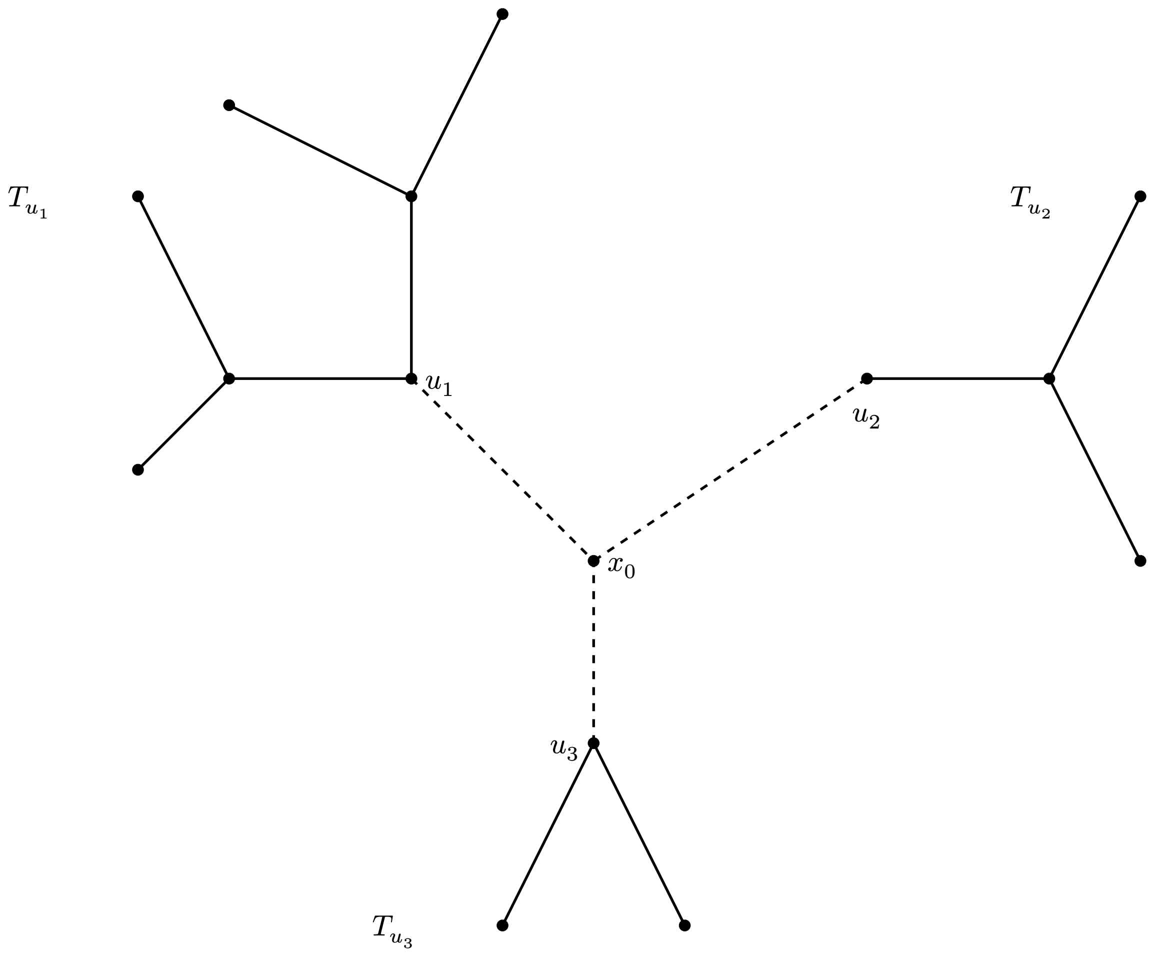
$$f(u_1) = \sum_{v_i \in V(T_{u_1})} w_i d(v_i, u_1) + \sum_{v_i \notin V(T_{u_1})} w_i d(v_i, u_1) = \sum_{v_i \in V(T_{u_1})} w_i [d(v_i, x_0) - d(u_1, x_0)] + \sum_{v_i \notin V(T_{u_1})} w_i [d(v_i, x_0) + d(u_1, x_0)] = f(x_0) + \left[\sum_{v_i \notin V(T_{u_1})} w_i - \sum_{v_i \in V(T_{u_1})} w_i\right] d(u_1, x_0) = f(x_0) + \left[\sum_{v_i \in V(T)} w_i - 2 \sum_{v_i \in V(T_{u_1})} w_i\right] d(u_1, x_0)$$

Thế vào (0) , ta được:

$$w\left(T_{u_1}\right) \leq \frac{w(T)}{2}$$

Chứng minh tương tự với các trường hợp còn lại. Từ đó ta được

$$w\left(T_{u_i}\right) \leq \frac{w(T)}{2} \qquad \forall u_i \in N(x_0).$$



$$\langle w, \mathbb{1}_{T_u} \rangle \leq \frac{W}{2} = \frac{\langle w, \mathbb{1}_{T_u} \rangle + \langle w, \mathbb{1}_{T \setminus T_u} \rangle}{2} \Leftrightarrow \langle w, \mathbb{1}_{T_u} \rangle \leq \langle w, \mathbb{1}_{T \setminus T_u} \rangle$$

Hệ quả 0.2: Điểm x_0 là 1-median khi và chỉ khi với mọi $u \in N(x_0)$,

$$\langle w, \mathbb{1}_{T_u} \rangle \leq \langle w, \mathbb{1}_{T \setminus T_u} \rangle$$

Định lý bên trên đóng vai trò quan trọng trong việc xác định điểm 1-median, định lý này đã được biết đến rộng rãi và được nhiều nhà nghiên cứu sử dụng trong các bài toán tối ưu liên quan đến lý thuyết vị trí. Sau đây, ta sẽ giới thiệu một thuật toán hiệu quả để tìm kiếm điểm 1-median cây đồ thị cây.

Thuật toán tuyến tính tìm 1-median trên cây được độc lập đưa ra bởi Goldman(1971).Ý tưởng cơ bản của thuật toán là "nuốt lá", tức là xóa từng lá và cộng trọng số của lá đó vào trọng số của đỉnh liền kề với nó. Quá trình tiếp diễn cho đến khi có một lá có trọng số lớn hơn phân nửa trọng số của cây T, lá này chính là điểm 1-median của cây T.

ĐẦU VÀO	Cây $T = (V, E)$, làm chiều dài l, hàm trọng số w
Bước 0	Tính $W = \sum_{v_i \in V} w_i$.
Bước 1	Chọn một lá v_k của $T = (V, E)$.
Bước 2	Nếu $V = \{v_k\}$ thì trả về: $X^* = \{v_k\}$.
Bước 3	
$w_k = W/2$	Trả về: $X^* = \{x \in v_k v_l\}$, trong đó v_l liền kề v_k.
$w_k > W/2$	Trả về: $X^* = \{v_k\}$
$w_k < W/2$	Sang Bước 4.
Bước 4	Đặt $w_l := w_l + w_k$ với v_l liền kề v_k và xét cây mới $T := T \setminus \{v_k\}$. Trở về Bước 1.
ĐẦU RA	X^* là tập hợp tất cả các điểm 1-median.

Để hiểu rõ hơn về cách hoạt động của thuật toán, chúng ta sẽ cùng phân tích qua ví dụ dưới đây.

Ví dụ Tìm điểm 1-median của đồ thị được cho hình như bên dưới

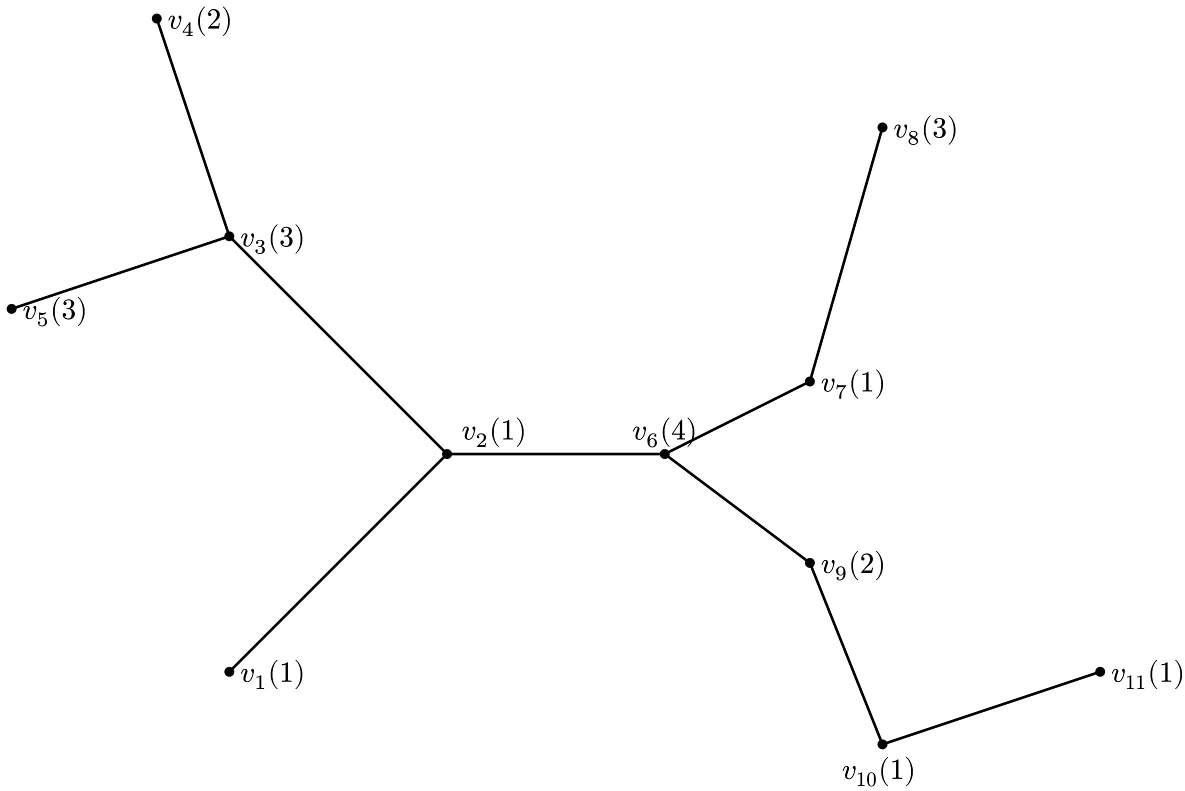


Figure 3: Đồ thị cây có trọng số đỉnh với đỉnh median v_6

Ta có $W(T) = 22$, các lá $s \coloneqq \{v_1, v_4, v_5, v_8, v_{11}\}$

Xét lá v_1, vì $w_1 = 1 < \frac{W}{2} = 11$ nên $w_2 \coloneqq w_2 + w_1 = 1 + 1 = 2$ và xét cây mới $T \coloneqq T \setminus \{v_1\}$.

Xét lá v_4, vì $w_4 = 2 < \frac{W}{2} = 11$ nên $w_3 \coloneqq w_3 + w_4 = 2 + 3 = 5$ và xét cây mới $T \coloneqq T \setminus \{v_4\}$.

Xét lá v_5, vì $w_5 = 3 < \frac{W}{2} = 11$ nên $w_3 \coloneqq w_3 + w_5 = 5 + 3 = 8$ và xét cây mới $T \coloneqq T \setminus \{v_5\}$.

Xét lá v_3, vì $w_3 = 8 < \frac{W}{2} = 11$ nên $w_2 \coloneqq w_3 + w_2 = 8 + 2 = 10$ và xét cây mới $T \coloneqq T \setminus \{v_3\}$

Xét lá v_2, vì $w_2 = 10 < \frac{W}{2} = 11$ nên $w_6 \coloneqq w_6 + w_2 = 4 + 10 = 14$ và xét cây mới $T \coloneqq T \setminus \{v_2\}$.

Xét lá v_6, vì $w_6 = 14 > \frac{W}{2} = 11$ nên trả về $X^* = \{v_6\}$.

Vậy v_6 là điểm 1-median cần tìm.