

HỌC VIỆN CÔNG NGHỆ BƯU CHÍNH VIỄN THÔNG
KHOA CÔNG NGHỆ THÔNG TIN I

—o0o—



ĐỒ ÁN TỐT NGHIỆP ĐẠI HỌC

**MỘT THUẬT TOÁN HIỆU QUẢ DỰA TRÊN CẠNH
ĐỂ TỐI ƯU LỀ PHÂN LOẠI TRONG MẶT PHẪNG**

Giảng Viên Hướng Dẫn:	TS. Nguyễn Kiều Linh
Sinh viên thực hiện:	Nguyễn Văn A
Mã sinh viên:	BXXDCCNYYY
Lớp:	DXHTTTY
Niên khóa:	20xx-20xx
Hệ đào tạo:	Đại học chính quy

Hà Nội, 12/2023

HỌC VIỆN CÔNG NGHỆ BƯU CHÍNH VIỄN THÔNG
KHOA CÔNG NGHỆ THÔNG TIN I

—o0o—



ĐỒ ÁN TỐT NGHIỆP ĐẠI HỌC

**MỘT THUẬT TOÁN HIỆU QUẢ DỰA TRÊN CẠNH
ĐỂ TỐI ƯU LỀ PHÂN LOẠI TRONG MẶT PHẪNG**

Giảng Viên Hướng Dẫn:	TS. Nguyễn Kiều Linh
Sinh viên thực hiện:	Nguyễn Văn A
Mã sinh viên:	BXXDCCNYYY
Lớp:	DXHTTTY
Niên khóa:	20xx-20xx
Hệ đào tạo:	Đại học chính quy

Hà Nội, 12/2023

Mục lục

Danh sách hình vẽ	iv
Danh sách bảng	v
Danh sách các ký hiệu và chữ viết tắt	vi
Mở đầu	1
1 Giới thiệu bài toán phát hiện, định hướng và đóng gói đối tượng	3
1.1 Giới thiệu	3
1.2 Xây dựng tập bao lồi đầu tiên	4
1.3 Deformable convolution	5
1.4 Thuật toán Jarvis March	6
1.5 định nghĩa CIoU	8
1.6 loss	8
1.7 Convex Hull Adaptation	9
1.7.1 Xây dựng tập các bao lồi	9
1.7.2 Convex hull set segmentation strategy	10
2]	12
2.0.1 Outer convex approximation	12
2.1 Sơ lược về	13
3 Ứng dụng	15
3.1 Thặng dư bậc hai và ứng dụng	15
3.1.1 Phương trình đồng dư bậc hai.....	15

4 Một số kết quả tính toán	17
Kết luận	19
Tài liệu tham khảo	20

LỜI CẢM ƠN

Đây là mục tùy chọn

.....

Hà Nội, tháng năm 20....

Sinh viên

Nguyễn Văn A

Danh sách hình vẽ

1.1	Minh hoạ vấn đề. (Bên trên) Khi sử dụng cách biểu diễn dạng hộp, các đối tượng có hướng phân bố dày đặc gây ra hiện tượng đặc trưng răng cưa tại các vùng giao của trường tiếp nhận giữa các đối tượng. (Bên dưới) Với cách biểu diễn bao lồi, phương pháp CFA xử lý tốt các đặc trưng nằm trên lưới tích chập thông thường của các đối tượng có hướng phân bố không đều, giải quyết hiện tượng răng cưa đặc trưng hiệu quả	4
1.2	so sánh biểu diễn hộp có hướng (bên trên) so với biểu diễn bao lồi (ở dưới)	5
1.3	so sánh tích chập thông thường và tích chập deformable	6
1.4	a) lấy mẫu tích chập với 9 điểm lấy mẫu. b) để có tích chập biến dạng, thêm độ dịch chuyển vào mỗi điểm lấy mẫu (mũi tên xanh). c) phép biến đổi tỷ lệ. d) phép quay	6
1.5	quá trình thực hiện tích chập deformable	7
1.6	mô tả các bước thực hiện thuật toán Jarvis March	7
1.7	xây dựng tập các bao lồi để biểu diễn các đối tượng, đặc biệt với những đối tượng phân bố dày đặc	9
1.8	Phân chia tập bao lồi theo hướng dẫn của nguyên tắc nhất quán độ dốc	10
2.1	Quy trình tự động nhận dạng biển số xe.	13

Danh sách bảng

4.1	Thời gian chạy tính bao lỗi dưới (đơn vị: giây).	18
-----	--	----

Danh mục các ký hiệu và chữ viết tắt

$\text{conv}(D)$	bao lồi của tập hợp D
$\partial(\text{conv}(D))$	biên của bao lồi $\text{conv}(D)$
$\text{CH}(D)$	tập các hình tròn cực biên của tập D
V_C	tập đỉnh của bao lồi $\text{conv}(C)$
$[p, q]$	đoạn thẳng nối p với q
pq	đường thẳng đi qua p và q
.....

Mở đầu

Trong nhiều thập kỷ, chúng ta đã chứng kiến quá trình phát triển đáng kể của bài toán nhận diện đối tượng. Đóng góp vào sự phát triển này chính là việc sử dụng mạng học sâu kết hợp với đa dạng các cách biểu diễn đặc trưng, các database có kích thước lớn hơn, và việc đào tạo trước các mô hình để tiết kiệm thời gian và chi phí. Tuy nhiên, phần lớn các bộ phát hiện đối tượng đều gặp phải vấn đề khi biểu diễn các đối tượng quan sát từ trên xuống, có hướng tùy ý, hoặc các đối tượng có bố cục khác nhau trong quá trình đào tạo. Vấn đề trở nên nghiêm trọng hơn khi các đối tượng phân bố dày đặc, gây ra hiện tượng răng cưa ở các vùng giao nhau của trường tiếp nhận.

Một trong những giải pháp để phát hiện đối tượng có hướng, đó là sử dụng phương pháp làm giàu đặc trưng/mở neo, cung cấp nhiều hơn các đặc trưng để đào tạo các bộ phát hiện. Giải pháp này tuy nhiên lại gây ra sự phức tạp trong tính toán, dễ gây ra sai sót. Một giải pháp khác là định nghĩa bộ biến đổi RoI, áp dụng phép biến đổi không gian RoIs trong khi tiếp tục học các tham số dưới sự giám sát của hộp bao có hướng. Các bộ biến đổi này được cho là linh hoạt, nhạy bén, hoạt động mượt mà, cho phép trường tiếp nhận thích nghi với các đối tượng có hướng. Tuy nhiên, vấn đề về cách điều chỉnh lưới đặc trưng cho đối tượng có bố cục bất kỳ vẫn chưa được giải quyết. Đây chính là nguyên nhân gây ra hiện tượng feature aliasing, xảy ra khi các đối tượng phân bố dày đặc trong khung hình.

Do đó, ta đề xuất một cách tiếp cận khác: sử dụng phương pháp điều chỉnh các đặc trưng bằng bao lồi(convex-hull) dành cho các đối tượng có hướng và phân bố dày đặc. Mục tiêu để điều chỉnh các đặc trưng nằm trong lưới tích chập thông thường với các đối tượng có bố cục phân bố không đều. Ta xây dựng bộ

cục đối tượng thành một bao lồi, có lợi thế hơn so với sử dụng bố cục hình chữ nhật, giúp bao phủ toàn bộ đối tượng nhưng giảm thiểu tối đa diện tích vùng nền của đối tượng. Mỗi bao lồi là tập hợp các điểm đặc trưng định nghĩa đường biên của đối tượng, biểu thị tỷ lệ Convex Intersection over Union để các định vị trí đối tượng. Bên trong bao lồi, các đặc trưng khác nhau biểu thị cho sự xuất hiện của các đối tượng được phân loại khác nhau.

Mục tiêu của đề án là tìm hiểu, nghiên cứu phương pháp phát hiện đối tượng dày đặc có hướng, cụ thể là nghiên cứu phương pháp BeyondBoundingBox dành cho vấn đề trên. Ngoài ra, đề án còn tìm hiểu thuật toán phát hiện bao lồi mới, thay thế vào phương pháp trên, kiểm nghiệm và đo lường độ hiệu quả của thuật toán mới này.

Trong đề án em sẽ tập trung trình bày một số nội dung chính như sau:

Chương 1: Giới thiệu bài toán phát hiện, định hướng và đóng gói đối tượng: Nội dung chương 1 sẽ khái quát các vấn đề và phương pháp nhận dạng đối tượng, trình bày về các phương pháp liên quan, nguyên lý và cách thức triển khai, giới thiệu sử dụng thuật toán bao lồi xấp xỉ để thực hiện bài toán.

Chương 2: Trình bày thuật toán bao lồi xấp xỉ: Nội dung của chương 2 sẽ giới thiệu thuật toán, lý thuyết và triển khai thuật toán bằng code C++

Chương 3: Thực nghiệm và kết quả: Nội dung của chương 3 Áp dụng bao lồi xấp xỉ cho bài toán phát hiện, định hướng và đóng gói đối tượng, cách thức triển khai bộ phát hiện, cách thức thay thế thuật toán.

Chương 4: Tổng kết: Tổng kết bài toán, tóm tắt những kết quả đã đạt được và còn chưa đạt được. Từ đó đề xuất mục tiêu hướng tới cũng như hướng nghiên cứu, phát triển tiếp theo.

Chương 1

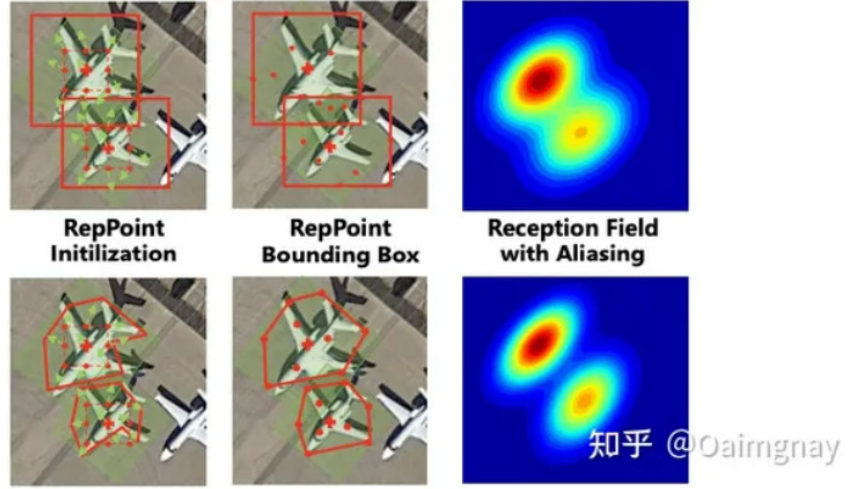
Giới thiệu bài toán phát hiện, định hướng và đóng gói đối tượng

Chương 1 đặt vấn đề về bài toán phát hiện đối tượng, trình bày lý thuyết về phương pháp BeyondBoundingBox.

1.1 Giới thiệu

Việc định vị và phát hiện đối tượng dày đặc vẫn còn là một vấn đề thách thức do vấn đề đặc trưng răng cưa (feature aliasing). Các giải pháp đã được sử dụng: làm giàu các đặc trưng (enhance features) và sử dụng anchors. Nhược điểm của các phương pháp này: làm cho cấu trúc mạng trở nên phức tạp hơn, tăng thời gian training và inference. Một phương pháp khác là sử dụng RoI transformer, nhưng phương pháp này không thích ứng tốt với các đối tượng có hướng bất kỳ, đặc biệt đối với các đối tượng mục tiêu xuất hiện dày đặc.

tác giả đề xuất phương pháp thích ứng bao lồi (CFA). CFA được dựa trên phương pháp biểu diễn bằng bao lồi, định nghĩa linh hoạt một tập điểm các đặc trưng, giới hạn phạm vi của mục tiêu bởi chỉ số CIoU. CFA đạt được sự phân bổ đặc trưng tối ưu nhờ vào việc xây dựng tập bao lồi và phân chia động thành các bao lồi âm và bao lồi dương. CFA cũng xem xét về sự chồng chéo nhau của bao lồi dự đoán và bao lồi thực tế, tiến hành phạt các bao lồi được chia sẻ bởi nhiều đối tượng, giảm thiểu hiện tượng răng cưa đặc trưng, đạt được sự thích ứng đặc trưng tối ưu. Nó cũng đạt được kết quả tốt nhất khi thử nghiệm trên tập dữ liệu DOTA và SKUR110KR.



Hình 1.1: Minh hoạ vấn đề. (Bên trên) Khi sử dụng cách biểu diễn dạng hộp, các đối tượng có hướng phân bố dày đặc gây ra hiện tượng răng cưa tại các vùng giao của trường tiếp nhận giữa các đối tượng. (Bên dưới) Với cách biểu diễn bao lồi, phương pháp CFA xử lý tốt các đặc trưng nằm trên lưới tích chập thông thường của các đối tượng có hướng phân bố không đều, giải quyết hiện tượng răng cưa đặc trưng hiệu quả

Phương pháp thực hiện CFA được chia làm 2 giai đoạn:

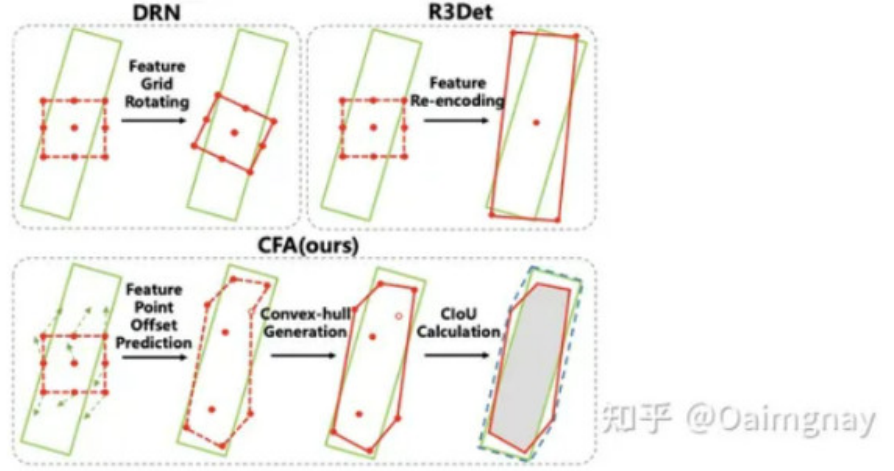
- Giai đoạn 1: tạo tập bao lồi và ước lượng sơ bộ bố cục bao lồi
- Giai đoạn 2: chỉnh sửa bao lồi để phù hợp với các đối tượng phân bố dày đặc

1.2 Xây dựng tập bao lồi đầu tiên

Việc biểu diễn bằng khung hình chữ nhật do bao lồi sinh ra làm giảm khả năng biểu diễn đối tượng. Tác giả vì thế đã đề xuất biểu diễn phạm vi của đối tượng mục tiêu bằng bao lồi. Mỗi bao lồi là một tập hợp các điểm thoả mãn công thức:

$$C_i = \{(x_i^k, y_i^k)\}_{i=1 \dots K}$$

với k là chỉ số của các điểm đặc trưng, $K = 9$ tương ứng với 9 điểm khởi tạo của bao lồi.



Hình 1.2: so sánh biểu diễn hộp có hướng (bên trên) so với biểu diễn bao lồi (ở dưới)

Việc đào tạo được xem như là quá trình dự đoán độ lệch, trong khi hệ số CIoU được tối đa hoá để đạt được so khớp tối ưu. Đây là phương pháp sử dụng phép toán tích chập để dự đoán độ lệch: $(\Delta x_i^k, \Delta y_i^k)$ với từng điểm đặc trưng, sau trả về một bản đồ phần bù đặc trưng $O \in R^{H \times W \times 2K}$:

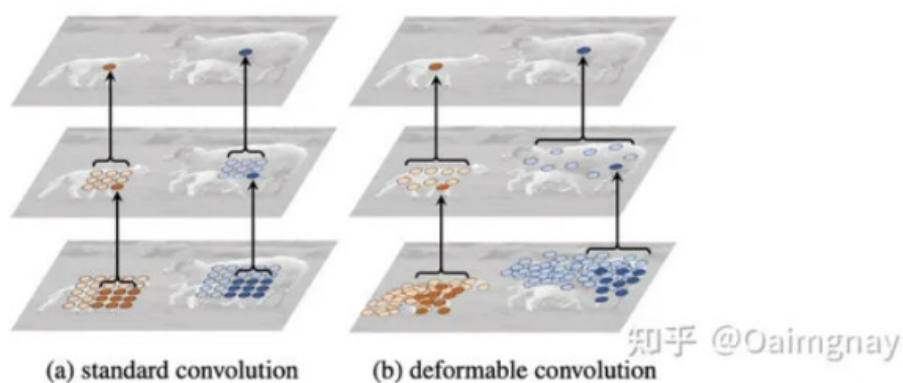
$$\hat{C}_i(\theta) \leftarrow \left\{ (x_i^k + \Delta x_i^k(\theta), y_i^k + \Delta y_i^k(\theta)) \right\}_i^{k=1 \dots K}$$

Việc dự đoán offset sẽ thực hiện theo công thức trên.

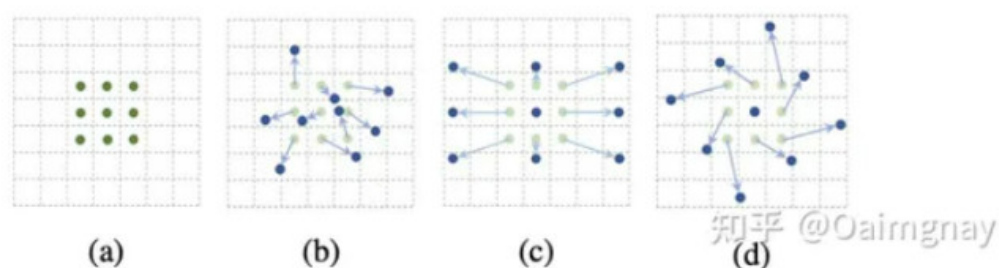
1.3 Deformable convolution

Deformable convolution được định nghĩa là vị trí của một tích chập bị biến dạng, không giống tích chập truyền thống là dạng $N \times N$ trên một lưới. Ưu điểm của việc này là trích xuất được các đặc trưng mong muốn một cách chính xác hơn (tích chập truyền thống chỉ có thể trích xuất được các đặc trưng của khung hình chữ nhật). Tích chập deformable thêm vào phần bù cho mỗi điểm lấy mẫu tích chập.

Xét một input feature map, giả sử phép tích chập ban đầu là 3×3 . Để tính được offset, cần xác định 1 lớp tích chập khác, có kích thước output bằng với kích thước của feature map input, $\text{channel} = 2N$. Phép tích chập biến dạng có



Hình 1.3: so sánh tích chập thông thường và tích chập deformable



Hình 1.4: a) lấy mẫu tích chập với 9 điểm lấy mẫu. b) để có tích chập biến dạng, thêm độ dịch chuyển vào mỗi điểm lấy mẫu (mũi tên xanh). c) phép biến đổi tỷ lệ. d) phép quay

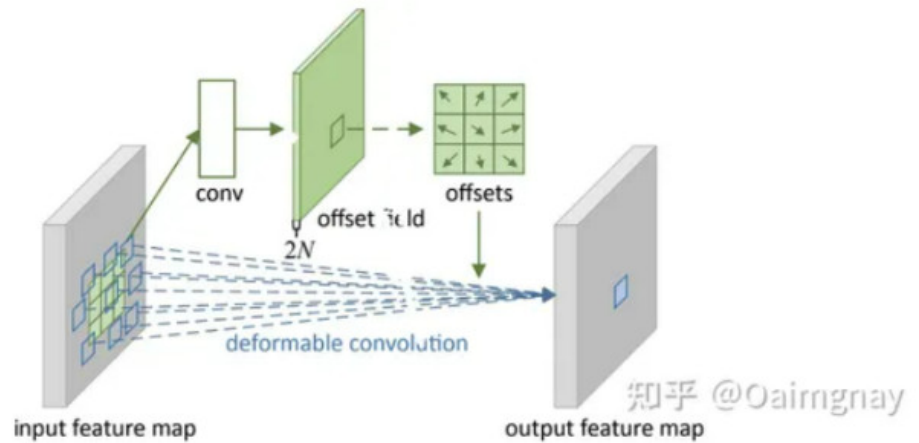
thể xem là bước biểu diễn đầu tiên của phép tính nội suy dựa trên offset sinh ra bởi cách trên, sau đó thực hiện biểu diễn tích chập thông thường.

1.4 Thuật toán Jarvis March

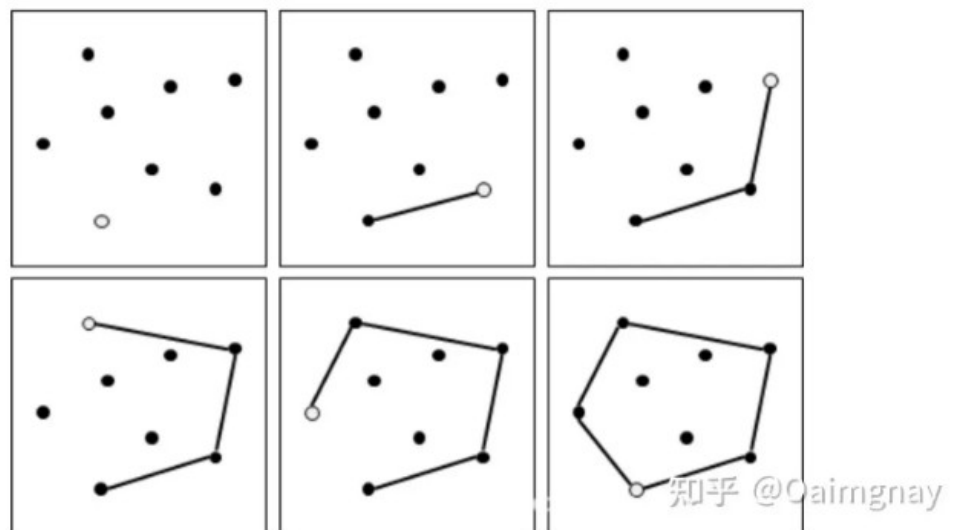
Sau khi biết được offset, việc cập nhật các điểm đặc trưng của bao lồi được thực hiện bởi thuật toán Jarvis March, bao lồi nhỏ nhất phù hợp với điều kiện sẽ được sinh ra sau mỗi vòng lặp.

Tóm tắt các bước thực hiện thuật toán Jarvis March:

- Đầu tiên, xác định tổng điểm trên biên v_1 và điểm tiếp theo v_2



Hình 1.5: quá trình thực hiện tích chập deformable



Hình 1.6: mô tả các bước thực hiện thuật toán Jarvis March

- Tìm điểm tiếp theo v_3 trong tập điểm sao cho v_1, v_3, v_2 thoả mãn Counter Clock Wise (CCW)
- nếu thoả mãn thì v_3 là 1 điểm ngoại vi tiếp theo
- lặp lại bước 3 cho đến khi tất cả các điểm đã được duyệt qua, tức là tìm thấy điểm ngoài cùng nhất

- ghi đè $v1 = v2$
- lặp lại bước 2 cho đến khi điểm tiếp theo trả về chính là điểm xuất phát

1.5 định nghĩa CIoU

chỉ số i trong bao lồi $C_i(\theta)$ và chỉ số j là giá trị thật của đối tượng B_j , CIoU được xác định như sau:

$$\text{CIoU}(C_i(\theta), B_j) = \frac{|C_i(\theta) \cap B_j|}{|C_i(\theta) \cup B_j|} - \frac{|\mathcal{R}_j \setminus (C_i(\theta) \cup B_j)|}{|\mathcal{R}_j|}$$

1.6 loss

công thức chưa xác định tên:

$$\mathcal{L}_i^{\text{loc}}(\theta) = 1 - \text{CIoU}(C_i(\theta), B_j)$$

công thức chưa xác định tên:

$$\mathcal{L}_i^{\text{cls}}(\theta) = \text{FL}(S_i(\theta), Y_j)$$

hàm phân loại loss cuối cùng cho bao lồi dương là:

$$\mathcal{L}_i^+(\theta) = \mathcal{L}_i^{\text{cls}}(S_i(\theta), Y_j) + \lambda \mathcal{L}_i^{\text{loc}}(C_i(\theta), B_j)$$

hàm phân loại loss cuối cùng dành cho bao lồi âm là:

$$\mathcal{L}_i^-(\theta) = \mathcal{L}_i^{\text{cls}}(S_i(\theta), Y_j)$$

Ngoài ra, trong quá trình huấn luyện, vì bao lồi ban đầu chỉ được sinh ra bằng cách tối ưu hoá CIoU, một hàm loss cần được định nghĩa để giám sát:

$$\mathcal{L}^{\text{det } 1}(\theta) = \frac{1}{J} \sum_i \mathbb{I}_{(x_i, y_i)} \mathcal{L}_i^{\text{loc}}(\theta)$$

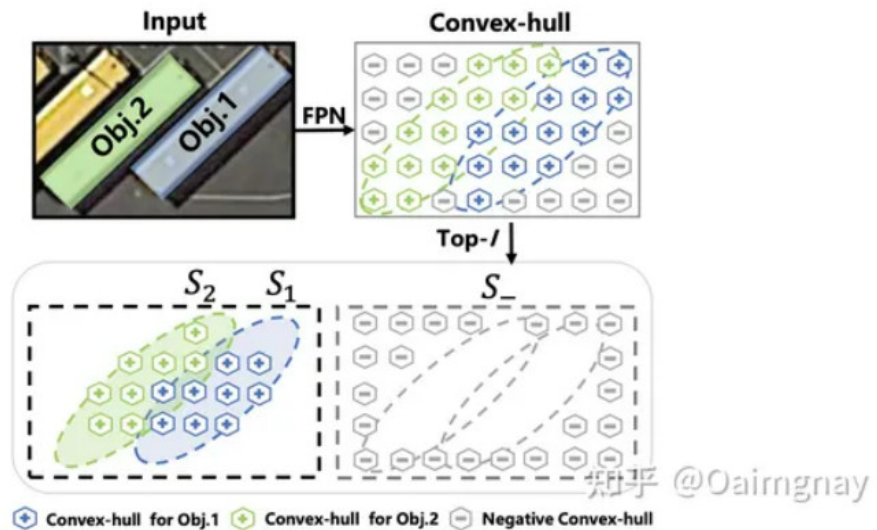
Nhìn chung, trong giai đoạn đầu tiên của việc sinh bao lồi, sử dụng $\mathcal{L}^{\text{det } 1}$ như trên. Trong giai đoạn 2, hai hàm loss sẽ được sử dụng để phân loại bao lồi

1.7 Convex Hull Adaptation

Phương pháp biểu diễn bằng bao lồi giúp định vị đối tượng mục tiêu ở bất kỳ hình dạng nào, tuy nhiên vẫn còn đó một vấn đề, đó là làm thế nào để định vị một cách chính xác các đối tượng mục tiêu dày đặc, đặc biệt là các đối tượng mục tiêu có đặc trưng răng cưa. Tác giả đề xuất một phương pháp thích ứng mới để tinh chỉnh hơn nữa bao lồi đầu tiên được sinh ra ở giai đoạn 1 để đạt được vị trí chính xác hơn và phân lớp hiệu quả hơn.

1.7.1 Xây dựng tập các bao lồi

Tác giả xây dựng một tập các bao lồi tương ứng với mỗi đối tượng mục tiêu, để một đối tượng mục tiêu có thể khớp với nhiều bao lồi phù hợp để cùng nhau tối ưu các đặc trưng của các đối tượng phân bố dày đặc.



Hình 1.7: xây dựng tập các bao lồi để biểu diễn các đối tượng, đặc biệt với những đối tượng phân bố dày đặc

với mỗi đối tượng mục tiêu, ý tưởng xây dựng tập các bao lồi tương ứng là: theo như hệ số CIoU giữa bao lồi dự đoán và bao lồi thực tế, chọn I bao lồi đứng đầu được xác định bởi CIoU. Các bao lồi còn lại không thuộc vào bất kỳ tập bao lồi nào sẽ được gộp lại vào tập bao lồi âm S .

$$\mathcal{L}_{S_j}^+(\theta) = \frac{1}{|S_j|} \sum_{i \in S_j} \omega_i \mathcal{L}_i^+(\theta)$$

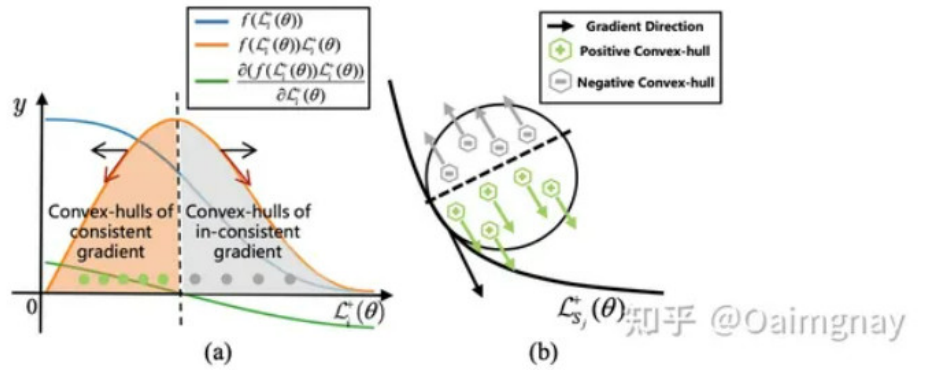
Khi nhiều đối tượng tụ tập cùng nhau, không phải tất cả bao lỗi trong một tập các bao lỗi đều phù hợp với đối tượng, và các bao lỗi phục vụ đặc trưng rằng cửa sẽ phải được phân lớp là tập bao lỗi âm. Cùng thời điểm đó, các bao lỗi được chia sẻ bởi nhiều đối tượng phải có độ tin cậy thấp hơn.

1.7.2 Convex hull set segmentation strategy

Để giải quyết vấn đề đặc trưng rằng cửa ở các đối tượng phân bố dày đặc, tác giả đề xuất chiến lược phân đoạn tập bao lỗi để đánh giá các mẫu âm và mẫu dương, thay đổi ω_i được định nghĩa là $f(\mathcal{L}_i^+(\theta))$, sau khi thay thế, có công thức sau:

$$\mathcal{L}_{s_j}^+(\theta) = \frac{1}{|S_j|} \sum_{i \in S_j} f(\mathcal{L}_i^+(\theta)) \mathcal{L}_i^+(\theta)$$

f là hàm lỗi đơn điệu giảm phân phối Gaussian, có nghĩa là giá trị loss càng nhỏ, độ tin cậy càng cao.



Hình 1.8: Phân chia tập bao lỗi theo hướng dẫn của nguyên tắc nhất quán độ dốc

Nguyên tắc phân chia tập bao lỗi là gradient consistency. Bằng cách dẫn xuất công thức trên, ta có được:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{s_j}^+(\theta)}{\partial \theta} = \frac{1}{|S_j|} \sum_{i \in S_j} \frac{\partial(f(\mathcal{L}_i^+(\theta))\mathcal{L}_i^+(\theta))}{\partial \mathcal{L}_i^+(\theta)} \frac{\partial \mathcal{L}_i^+(\theta)}{\partial \theta}$$

Tiêu chí để thực hiện phân đoạn bao lỗi là: đạo hàm của mỗi bao lỗi dương $\frac{\partial \mathcal{L}_i^+(\theta)}{\partial \theta}$. Điều này muốn nói là: bao lỗi có dấu đạo hàm không nhất quán được

xem là bao lỗi âm, điều này sẽ dẫn đến hiện tượng răng cưa đặc trưng, được phản ánh trong công thức toán học là: $\frac{\partial(f(L_i^+(\theta))L_i^+(\theta))}{\partial L_i^+(\theta)}$ là dương, bao lỗi C_i là dương, nếu không bao lỗi sẽ là âm. Xem xét hình 1.8a, khi sắp xếp $\frac{\partial L_i^+(\theta)}{\partial \theta}$ theo thứ tự tăng dần, $f(\partial L_i^+(\theta))L_i^+(\theta)$ là một hàm lỗi hướng lên với một cực trị duy nhất. Hàm liên tục $\frac{\partial(f(L_i^+(\theta))L_i^+(\theta))}{\partial L_i^+(\theta)}$ có một điểm không duy nhất, tập bao lỗi được chia thành tập các bao lỗi dương S_j bởi điểm 0 này, và tập bao lỗi âm S_- . Cùng lúc đó, để đối phó với hiện tượng đặc trưng răng cưa, tác giả cũng giới thiệu một hệ số chống đặc trưng răng cưa:

$$\mathcal{L}_{s_j}^+(\theta) = \frac{1}{|S_j|} \sum_{i \in S_j} p_i f(\mathcal{L}_i^+(\theta)) \mathcal{L}_i^+(\theta)$$

giai đoạn thứ 2 của quá trình tối ưu được điều khiển bởi hàm loss trên tập convex hull, cùng nhau được định nghĩa bởi phân lớp và định vị đối tượng:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{\det 2}(\theta) = & \frac{1}{J} \sum_{j=1}^J \frac{1}{|S_j|} \sum_{i \in S_j} p_i f(\mathcal{L}_i^+(\theta)) \mathcal{L}_i^+(\theta) \\ & + \frac{1}{|S_-|} \sum_{i \in S_-} \mathcal{L}_i^-(\theta) \end{aligned}$$

Hàm loss này xem xét tự tương ứng về đặc trưng của nhiều đối tượng, phạt các bao lỗi được chia sẻ bởi nhiều đối tượng, và giảm thiểu đặc trưng răng cưa để đạt được thích ứng đặc trưng tối ưu. Cuối cùng hàm loss của bộ phát hiện CFA toàn bộ là:

$$L^{\det 1}(\theta) + L^{\det 2}(\theta)$$

Chương 2

Thuật toán tính bao lồi xấp xỉ

giới thiệu chung về thuật toán, cách dùng, có bao nhiêu loại thuật toán

2.0.1 Outer convex approximation

Trong các thuật toán tìm bao lồi thì thuật toán Quickhull [7, 8] được biết đến là một thuật toán hiệu quả có độ phức tạp tính toán trung bình là $O(n \log n)$ nhưng trong trường hợp xấu nhất thì độ phức tạp là $O(n^2)$, trong đó n là số điểm của tập điểm đầu vào của thuật toán. Độ phức tạp của thuật toán Quickhull tương tự như thuật toán Quicksort - một thuật toán sắp xếp hiệu quả dựa trên việc phân chia mảng dữ liệu thành các nhóm phần tử nhỏ hơn và thuật toán này chạy trong thực tế nhanh hơn rất nhiều so với trường hợp xấu nhất. Để giải thích cho điều này, V. Damerow và C. Sohler đã đánh giá thành công số điểm cực biên của một tập hợp theo nghĩa Smoothed analysis [6]. Từ đó có thể đánh giá độ phức tạp tính toán của thuật toán Quickhull theo nghĩa này trong hai trường hợp là:

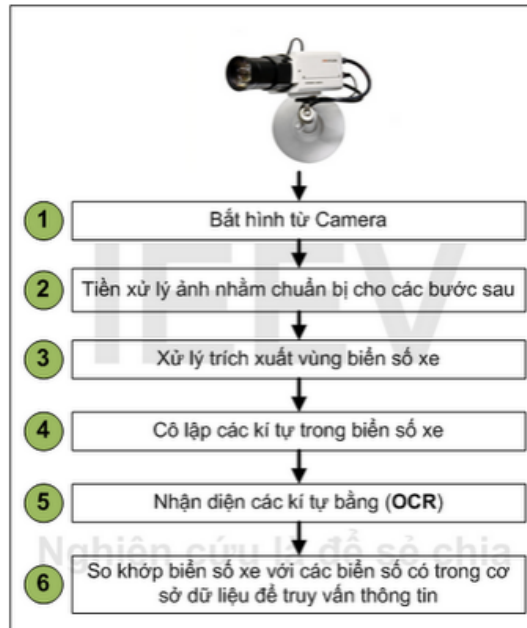
- Nhiễu ngẫu nhiên của tập điểm được chọn từ phân bố chuẩn $N(0, \delta)$:

$$O\left(n \left(\frac{1}{\delta}\right)^2 \log^2 n\right).$$
- Nhiễu ngẫu nhiên được chọn từ phân bố đều trong hình vuông kích thước 2ϵ :

$$O\left(n \left(\frac{n \log n}{\epsilon}\right)^{2/3}\right).$$

Bài toán tìm bao lồi có ứng dụng rất quan trọng trong lĩnh vực nhận dạng.

Các ứng dụng phổ biến của nhận dạng trong thực tế là nhận dạng tiếng nói tự động, phân loại văn bản thành nhiều loại khác nhau (ví dụ những thư điện tử spam/non-spam), nhận dạng tự động các mã bưu điện viết tay trên các bao thư, hay hệ thống nhận dạng mặt người, nhận dạng biển số xe, v.v... Sau đây ta xét một ứng dụng cụ thể của bài toán tìm bao lỗi trong nhận dạng biển số xe.



Hình 2.1: Quy trình tự động nhận dạng biển số xe.

2.1 Sơ lược về

Định nghĩa 2.1.1. Phương trình đồng dư đại số bậc n là một đồng dư thức có dạng

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n \equiv 0 \pmod{m} \quad (2.1)$$

trong đó x là ẩn, $a_i \in \mathbb{Z}$ (với $i = 1, 2, \dots, n$) và $a_0 \not\equiv 0 \pmod{m}$.

Chú ý 2.1.2. (i) Giải phương trình (2.1) là tìm tất cả các giá trị nguyên của x thỏa mãn đồng dư thức (2.1). Nếu $x = x_0$ thỏa mãn phương trình (2.1) thì mọi số $x \equiv x_0 \pmod{m}$ đều thỏa mãn (2.1); trong trường hợp này tập hợp $\{x \in \mathbb{Z} \mid x \equiv x_0 \pmod{m}\}$ được gọi là một *ng nghiệm* của phương trình đồng dư (2.1), kí hiệu là $\overline{x_0}$ hoặc $x \equiv x_0 \pmod{m}$.

(ii) Số nghiệm của phương trình (2.1) là số các phần tử trong một hệ thặng dư đầy đủ theo modulo m mà thỏa mãn (2.1).

(iii) Hai phương trình đồng dư được gọi là tương đương nếu tập hợp các số nguyên thỏa mãn các phương trình đó là trùng nhau.

Ví dụ 2.1.3. Xét phương trình $x^2 \equiv 1 \pmod{5}$.

Giải. Ta thấy trong các số 0, 1, 2, 3, 4 của hệ thặng dư không âm bé nhất theo modulo 5, có hai số 1 và 4 thỏa mãn phương trình đã cho. Vậy phương trình có hai nghiệm là $x \equiv 1 \pmod{5}$ và $x \equiv 4 \pmod{5}$. \square

Ví dụ 2.1.4. Giải phương trình đồng dư $x^4 + 7x + 4 \equiv 0 \pmod{9}$.

Giải. Dễ thấy phương trình $x^4 + 7x + 4 \equiv 0 \pmod{3}$ có nghiệm là $x \equiv 1 \pmod{3}$ (hay $x = 3t + 1$ với $t \in \mathbb{Z}$). Thay x vào phương trình cần giải và bỏ đi những số hạng chia hết cho 9 ta được

$$\begin{aligned} 6t + 3 &\equiv 0 \pmod{9} \\ \Leftrightarrow 2t + 1 &\equiv 0 \pmod{3} \\ \Leftrightarrow t &\equiv 1 \pmod{3} \\ \Leftrightarrow t &= 3k + 1. \end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = 3(3k + 1) + 1$ hay $x \equiv 4 \pmod{9}$. \square

Định nghĩa 2.1.5. Phương trình đồng dư $ax \equiv b \pmod{m}$ được gọi là *phương trình đồng dư tuyến tính* với a, b, m là các số nguyên đã biết. Khi đó $x \equiv x_0 \pmod{m}$ là một nghiệm của phương trình khi và chỉ khi $ax_0 \equiv b \pmod{m}$.

Chương 3

Ứng dụng

Chương này trình bày định nghĩa và các tính chất của thặng dư bậc hai: cách tính thặng dư bằng định nghĩa, cách tính thặng dư thông qua ký hiệu Legendre, cách tính thông qua luật thuận nghịch bậc hai. Sau đó ứng dụng thặng dư bậc hai và luật thuận nghịch bậc hai để tính toán và giải một số bài toán chứng minh, tìm căn nguyên thủy, kiểm tra tính nguyên tố.

3.1 Thặng dư bậc hai và ứng dụng

Thặng dư bậc hai đóng vai trò rất quan trọng trong lý thuyết số. Chẳng hạn, thuật toán phân tích số nguyên ra thừa số nguyên tố. Ngoài ra thặng dư bậc hai cũng ứng dụng lớn trong mật mã cũng như trong các giao thức mã hóa.... Ở đây ta xét ứng dụng liên quan đến giải phương trình đồng dư bậc hai trong lý thuyết và thực hành.

3.1.1 Phương trình đồng dư bậc hai.....

Xét phương trình đồng dư bậc hai theo modulo nguyên tố (theo tài liệu [?]).

$$Ax^2 + Bx + C \equiv 0 \pmod{p}, \quad (3.1)$$

trong đó p nguyên tố lẻ và $A, B, C \in \mathbb{Z}$ với $p \nmid A$. (Nếu $p \mid A$ thì quay về phương trình tuyến tính). Vì p nguyên tố lẻ và $p \nmid A$, nên $p \nmid 4A$. Ta nhân hai vế của phương trình với $4A$ ta được

$$4A(Ax^2 + Bx + C) \equiv 0 \pmod{p}. \quad (3.2)$$

Nhưng ta có

$$\begin{aligned} 4A(Ax^2 + Bx + C) &= 4A^2x^2 + 4ABx + 4AC \\ &= (2Ax + B)^2 - (B^2 - 4AC). \end{aligned}$$

Do đó đồng dư thức (3.2) được viết lại thành

$$(2Ax + B)^2 \equiv (B^2 - 4AC) \pmod{p}$$

nó có dạng

$$y^2 \equiv a \pmod{p} \tag{3.3}$$

trong đó $y = 2Ax + B$ và $a = B^2 - 4AC$.

Nếu phương trình $y^2 \equiv a \pmod{p}$ có nghiệm, thì ta suy ra phương trình $2Ax + B = y$ có nghiệm x modulo p (vì $(2A, p) = 1$). Do đó phương trình (3.1) có nghiệm nếu và chỉ nếu phương trình (3.3) có nghiệm.

Ví dụ sau sẽ minh họa điều này.

Thuật toán 1 THUẬT TOÁN TÌM BAO LỒI DƯỚI $\text{conv}_L(P)$

Đầu vào: Cho $P = \{p_i = (x_i, y_i, z_i) \in \mathbb{R}^3, i = 1, \dots, n\}, n \geq 3$.

Đầu ra: Tập \mathcal{Q} tất cả các mặt dưới của $\text{conv}_L(P)$.

- 1: Tìm cạnh đầu tiên e_0 của $\text{conv}_L(P)$.
 - 2: Xét hàng đợi $\mathcal{Q} := \emptyset$ và tập $\mathcal{E}_L(P) := \emptyset$.
 - 3: Gọi **LFRes**(e, P) để nhận được một mặt dưới F_e qua e_0 . Đẩy các cạnh của F_e trừ e_0 vào trong $\mathcal{E}_L(P)$. Đẩy F_e vào trong tập \mathcal{Q} .
 - 4: **while** ($\mathcal{Q} \neq \emptyset$) **do**
 - 5: Lấy F_e từ phía trên của \mathcal{Q} .
 - 6: $T :=$ tập các cạnh F_e .
 - 7: **for each** $e \in T \cap \mathcal{E}_L(P)$ **do**
 - 8: Gọi **LFRes**(e, P) để nhận được mặt F'_e có chung cạnh e với F_e .
 Đưa vào $\mathcal{E}_L(P)$ tất cả các cạnh $e' \neq e_0$ của F'_e chưa xuất hiện trong $\mathcal{E}_L(P)$ và xoá các cạnh đã xuất hiện trong $\mathcal{E}_L(P)$. Đẩy F'_e vào \mathcal{Q} .
-

Chương 4

Một số kết quả tính toán

Trong nội dung này chúng tôi thử nghiệm số cho thuật toán trong [5] và thuật toán vừa được trình bày ở mục trước để so sánh tốc độ của chúng. Các thuật toán này được thực thi bởi chương trình C và chạy trên PC Core i5 1.6 GHz 3M với 4 GB RAM.

Dưới đây Bảng 4.1 minh họa thời gian chạy (đơn vị tính bằng giây) của thuật toán tính bao lồi dưới được giới thiệu bởi P. T. An và D. T. Giang trong [5] và Thuật toán ?? sử dụng kỹ thuật hạn chế của chúng tôi. Cột cuối cùng liệt kê tỉ lệ tăng tốc của thuật toán của chúng tôi so với thuật toán trong [5]. Dữ liệu đầu vào của các thuật toán là các tập điểm được tạo trên bề mặt một paraboloid (tất cả các điểm đều là đỉnh của bao lồi và bao lồi dưới) có dạng $P = \{p_i = (x_i, y_i, z_i) : x_i, y_i, z_i \in \mathbb{R}, z_i = x_i^2 + y_i^2, i = 1, \dots, n\} \subset \mathbb{R}^3$, trong đó tập $\{(x_i, y_i), x_i, y_i \in R, i = 1, \dots, n\}$ được chọn ngẫu nhiên từ phân bố đều trong hình vuông cỡ 200×200 .

Bảng 4.1: Thời gian chạy tính bao lồi dưới (đơn vị: giây).

Đầu vào	Thuật toán trong [5]	Thuật toán 1	Tỉ số thăng tốc
1.000	0,136	0,061	2,23
2.000	0,454	0,248	1,83
5.000	2,684	1,500	1,79
7.000	7,014	3,129	2,24
11.000	14,321	8,484	1,69
17.000	41,307	24,666	1,67
20.000	63,197	37,332	1,69
22.000	70,866	40,235	1,76
30.000	153,240	96,738	1,58
35.000	200,496	125,490	1,60

Kết luận

Trong quá trình thực tập, em đã có cơ hội làm quen một môi trường làm việc mới. Em đã tính lũy những kinh nghiệm về kiến thức trong công việc cũng như các kinh nghiệm về kỹ năng mềm.

Em được rèn luyện kỹ năng giải quyết công việc theo từng giai đoạn, cố gắng hoàn thành công việc trong thời gian cho phép, mạnh dạn trao đổi và chia sẻ kiến thức. Đồng thời cũng bồi dưỡng thêm rất nhiều kiến thức ngoài các kiến thức đã học trên trường.

Tài liệu tham khảo

Tiếng Việt

- [1] Vũ Thị Gái (2016), *Luật thuận nghịch bậc hai và điểm nguyên*, trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên.
- [2] Nguyễn Tiến Hùng (2016), *Luật thuận nghịch bậc hai và hoán vị*, trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên.
- [3] Hà Huy Khoái (1997), *Nhập môn số học thuật toán*, Nhà xuất bản Khoa học Kỹ thuật.
- [4] Lại Đức Thịnh (1977), *Giáo trình số học*, Nhà xuất bản Giáo dục.

Tiếng Anh

- [5] P. T. An and D. T. Giang (2015), “A direct method for determining the lower convex hull of a finite point set in 3D”, *Advances in Intelligent Systems and Computing, Springer, Proceedings of 3rd International Conference on Computer Science, Applied Mathematics and Applications (ICCSAMA, May 11-13, Metz, France)* **358**, pp. 15–26.
- [6] V. Damerow and C. Sohler (2004), “Extreme points under random noise”, *European Symposium on Algorithms* **3221**, pp. 264–274.
- [7] M. M. David (2002), *Computation geometry*, Department of Computer Science.
- [8] J. O’ Rourke (1998), *Computational geometry in C*, 2nd edition, Cambridge University Press, Cambridge.