HỌC VIỆN CÔNG NGHỆ BƯU CHÍNH VIỄN THÔNG

KHOA CÔNG NGHỆ THÔNG TIN I

———————o0o———————

ĐỒ ÁN TỐT NGHIỆP ĐẠI HỌC

MỘT THUẬT TOÁN HIỆU QUẢ DỰA TRÊN CẠNH ĐỂ TỐI ƯU LỀ PHÂN LOẠI TRONG MẶT PHẲNG

Giảng Viên Hướng Dẫn:	**TS. Nguyễn Kiều Linh**
Sinh viên thực hiện:	**Nguyễn Văn A**
Mã sinh viên:	**BXXDCCNYYY**
Lớp:	**DXHTTTY**
Niên khóa:	**20xx-20xx**
Hệ đào tạo:	**Đại học chính quy**

Hà Nội, 12/2023

HỌC VIỆN CÔNG NGHỆ BƯU CHÍNH VIỄN THÔNG

KHOA CÔNG NGHỆ THÔNG TIN I

o0o

ĐỒ ÁN TỐT NGHIỆP ĐẠI HỌC

BAO LỒI XẤP XỈ VÀ ỨNG TRONG VIỆC PHÁT HIỆN ĐỊNH HƯỚNG VÀ ĐÓNG GÓI ĐỐI TƯỢNG.

Giảng Viên Hướng Dẫn:	TS. Nguyễn Kiều Linh
Sinh viên thực hiện:	Trần Xuân Độ
Mã sinh viên:	B19DCCN183
Lớp:	D19CNPM04
Niên khóa:	2019-2023
Hệ đào tạo:	Đại học chính quy

Hà Nội, 12/2023

Mục lục

LỜI CẢM ƠN

Đây là mục tùy chọn

....

Hà Nội, tháng .... năm 20....

Sinh viên

Nguyễn Văn A

Danh sách hình vẽ

Danh sách bảng

Danh mục các ký hiệu và chữ viết tắt

conv(D)	bao lồi của tập hợp D
$\partial(\mathrm{conv}(D))$	biên của bao lồi conv(D)
CH(D)	tập các hình tròn cực biên của tập D
V_C	tập đỉnh của bao lồi conv(C)
$[p, q]$	đoạn thẳng nối p với q
pq	đường thẳng đi qua p và q
....	....

Mở đầu

Trong nhiều thập kỷ, chúng ta đã chứng kiến quá trình phát triển đáng kể của bài toán nhận diện đối tượng. Đóng góp vào sự phát triển này chính là việc sử dụng mạng học sâu kết hợp với đa dạng các cách biểu diễn đặc trưng, các database có kích thước lớn hơn, và việc đào tạo trước các mô hình để tiết kiệm thời gian và chi phí. Tuy nhiên, phần lớn các bộ phát hiện đối tượng đều gặp phải vấn đề khi biểu diễn các đối tượng quan sát từ trên xuống, có hướng tuỳ ý, hoặc các đối tượng có bố cục khác nhau trong quá trình đào tạo. Vấn đề trở nên nghiêm trọng hơn khi các đối tượng phân bố dày dặc, gây ra hiện tượng răng cưa ở các vùng giao nhau của trường tiếp nhận.

Một trong những giải pháp để phát hiện đối tượng có hướng, đó là sử dụng phương pháp làm giàu đặc trưng/mỏ neo, cung cấp nhiều hơn các đặc trưng để đào tạo các bộ phát hiện. Giải pháp này tuy nhiên lại gây ra sự phức tạp trong tính toán, dễ gây ra sai sót. Một giải pháp khác là định nghĩa bộ biến đổi RoI, áp dụng phép biến đổi không gian RoIs trong khi tiếp tục học các tham số dưới sự giám sát của hộp bao có hướng. Các bộ biến đổi này được cho là linh hoạt, nhạy bén, hoạt động mượt mà, cho phép trường tiếp nhận thích nghi với các đối tượng có hướng. Tuy nhiên, vấn đề về cách điều chỉnh lưới đặc trưng cho đối tượng có bố cục bất kỳ vẫn chưa được giải quyết. Đây chính là nguyên nhân gây ra hiện tượng feature aliasing, xảy ra khi các đối tượng phân bổ dày đặc trong khung hình.

Do đó, ta đề xuất một cách tiếp cận khác: sử dụng phương pháp điều chỉnh các đặc trưng bằng bao lồi(convex-hull) dành cho các đối tượng có hướng và phân bố dày đặc. Mục tiêu để điều chỉnh các đặc trưng nằm trong lưới tích chập thông thường với các đối tượng có bố cục phân bố không đều. Ta xây dựng bố cục đối tượng thành một bao lồi, có lợi thế hơn so với sử dụng bố cục hình chữ nhật, giúp bao phủ toàn bộ đối tượng nhưng giảm thiểu tối đa diện tích vùng nền của đối tượng. Mỗi bao lồi là tập hợp các điểm đặc trưng định nghĩa đường biên của đối tượng, biểu thị tỷ lệ Convex Intersection over Union để các định vị trí đối tượng. Bên trong bao lồi, các đặc trưng khác nhau biểu thị cho sự xuất hiện của các đối tượng được phân loại khác nhau.

Mục tiêu của đồ án là tìm hiểu, nghiên cứu phương pháp phát hiện đối tượng dày đặc có hướng, cụ thể là nghiên cứu phương pháp BeyoundBoundingBox dành cho vấn đề trên. Ngoài ra, đồ án còn tìm hiểu thuật toán phát hiện bao lồi mới, thay thế vào phương pháp trên, kiểm nghiệm và đo lường độ hiệu quả của thuật toán mới này.

Trong đồ án em sẽ tập trung trình bày một số nội dung chính như sau:

Chương 1: Giới thiệu bài toán phát hiện, định hướng và đóng gói đối tượng: Nội dung chương 1 sẽ khái quát các vấn đề và phương pháp nhận dạng đối tượng, trình bày về các phương pháp liên quan, nguyên lý và cách thức triển khai, giới thiệu sử dụng thuật toán bao lồi xấp xỉ để thực hiện bài toán.

Chương 2: Trình bày thuật toán bao lồi xấp xỉ: Nội dung của chương 2 sẽ giới thiệu thuật toán, lý thuyết và triển khai thuật toán bằng code C++

Chương 3: Thực nghiệm và kết quả: Nội dung của chương 3 Áp dụng bao lồi xấp xỉ cho bài toán phát hiện, định hướng và đóng gói đối tượng, cách thức triển khai bộ phát hiện, cách thức thay thế thuật toán.

Chương 4: Tổng kết: Tổng kết bài toán, tóm tắt những kết quả đã đạt được và còn chưa đạt được. Từ đó đề xuất mục tiêu hướng tới cũng như hướng nghiên cứu, phát triển tiếp theo.

Chương 1

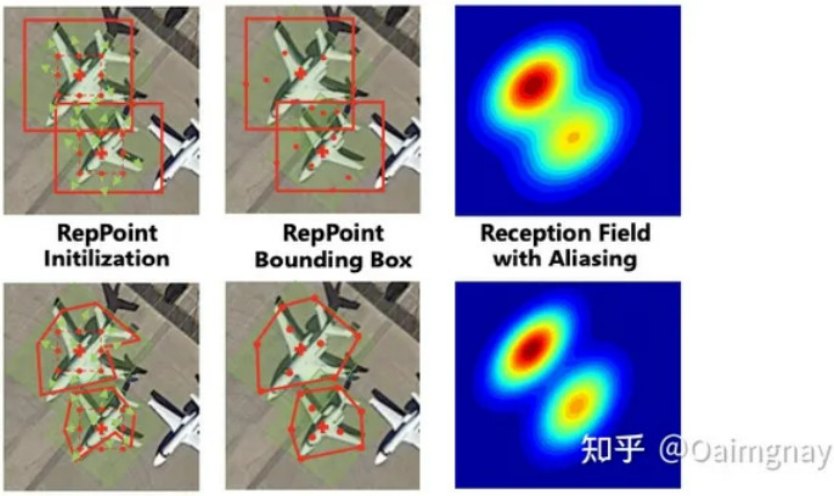
Giới thiệu bài toán phát hiện, định hướng và đóng gói đối tượng

Chương 1 đặt vấn đề về bài toán phát hiện đối tượng, trình bày lý thuyết về phương pháp BeyoundBoundingBox.

1.1 Giới thiệu

Trong bài toán phát hiện đối tượng, việc định vị và phát hiện đối tượng dày đặc vẫn còn là một vấn đề thách thức do vấn đề đặc trưng răng cưa (feature aliasing). Có các giải pháp đã được sử dụng: làm giàu các đặc trưng (enhance features) và sử dụng anchors. Nhược điểm của các phương pháp này: làm cho cấu trúc mạng trở nên phức tạp hơn, tăng thời gian huấn luyện (training) và suy luận (inference). Một phương pháp khác đó là sử dụng biến đổi RoI, nhưng phương pháp này không thích ứng tốt với các đối tượng có hướng bất kỳ, đặc biệt đối với các đối tượng xuất hiện dày đặc trong hình ảnh.

Để giải quyết các vấn đề trên, một phương pháp đã được đưa ra: phương pháp thích ứng bao lồi (convex-hull feature adaptation-CFA). CFA được thực hiện dựa trên phương pháp biểu diễn bao lồi, định nghĩa một tập các điểm đặc trưng, giới hạn phạm vi của đối tượng mục tiêu sử dụng chỉ số CIoU. CFA đạt được sự phân bổ đặc trưng tối ưu nhờ vào việc xây dựng tập bao lồi và phân chia linh hoạt các bao lồi thành các bao lồi âm và bao lồi dương. CFA cũng xem xét sự chồng chéo nhau giữa bao lồi dự đoán và bao lồi thực tế, phạt các bao lồi được dùng chung bởi nhiều đối tượng, giảm thiểu hiện tượng đặc trưng răng



Hình 1.1: Minh hoạ vấn đề. (Bên trên) Khi sử dụng cách biểu diễn dạng hộp, các đối tượng có hướng phân bố dày đặc gây ra hiện tượng đặc trưng răng cưa tại các vùng giao của trường tiếp nhận giữa các đối tượng. (Bên dưới) Với cách biểu diễn bao lồi, phương pháp CFA xử lý tốt các đặc trưng nằm trên lưới tích chập thông thường của các đối tượng có hướng phân bố không đều, giải quyết hiện tượng răng cưa đặc trưng hiệu quả

cưa (feature aliasing), đạt được sự thích ứng đặc trưng tối ưu. Nó cũng đạt được kết quả tốt nhất khi thử nghiệm trên tập dữ liệu DOTA và SKUR110KR.

Phương pháp CFA được chia làm 2 giai đoạn thực hiện:

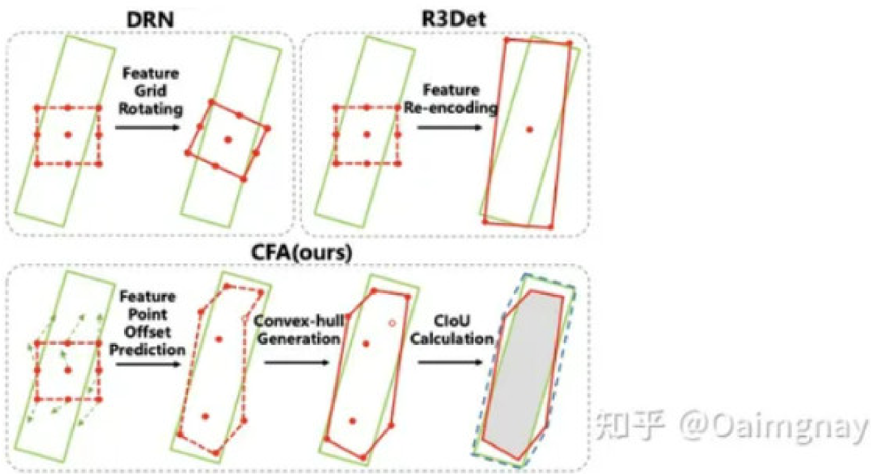
- Giai đoạn 1: tạo tập bao lồi và ước lượng sơ bộ bố cục của bao lồi.
- Giai đoạn 2: chỉnh sửa bao lồi sao cho phù hợp với các đối tượng phân bổ dày đặc.

1.2 Xây dựng tập bao lồi

Việc biểu diễn bằng khung hình chữ nhật do bao lồi sinh ra làm giảm khả năng biểu diễn đối tượng. Vì thế phương pháp CFA đã đề xuất biểu diễn phạm vi của đối tượng bằng bao lồi. Mỗi bao lồi là một tập hợp các điểm thoả mãn công thức:

$$C_i = \left\{ \left(x_i^k, y_i^k \right) \right\}_i^{k=1...K}$$

Trong đó: C_i là bao lồi thứ i, $\left(x_i^k, y_i^k\right)$ là điểm nằm trên bao lồi thứ k, k là chỉ số của điểm đặc trưng, $K = 9$ tương ứng với 9 điểm được khởi tạo của bao lồi.



Hình 1.2: So sánh biểu diễn hộp có hướng (bên trên) so với biểu diễn bao lồi (ở dưới).

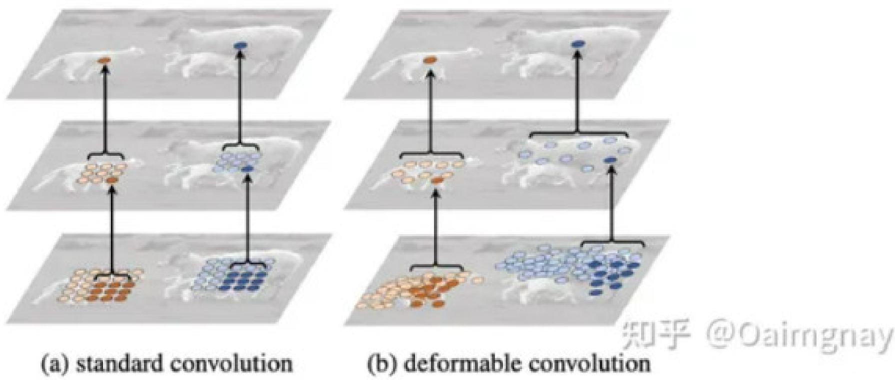
Việc huấn luyện có thể xem như là quá trình dự đoán độ lệch (offset), trong khi hệ số CIoU cần được tối đa hoá để đạt được so khớp tối ưu nhất. Đây là phương pháp sử dụng phép toán tích chập để dự đoán độ lệch: $\left(\Delta x_i^k, \Delta y_i^k\right)$ với từng điểm đặc trưng, sau trả về một bản đồ độ bù cho các đặc trưng $O \in R^{H\times W\times W}$ $(H, W, C$ lần lượt tương ứng với chiều dài, chiều rộng và số lượng kênh của bản đồ đặc trưng):

$$\hat{C}_i(\theta) \leftarrow \left\{\left(x_i^k + \Delta x_i^k(\theta), y_i^k + \Delta y_i^k(\theta)\right)\right\}_i^{k=1\ldots K}$$

Trong đó: θ biểu thị là các tham số của mạng. Việc dự đoán offset sẽ thực hiện theo công thức trên.

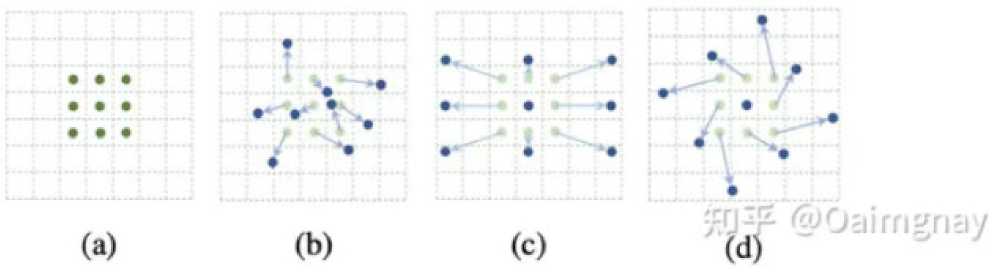
1.3 Tích chập biến dạng

Tích chập biến dạng (Deformable convolution) là dạng tích chập mà vị trí thực hiện tích chập bị biến dạng, không giống tích chập truyền thống là dạng lưới NxN. Ưu điểm của phương pháp này giúp trích xuất các đặc trưng mong muốn được chính xác hơn, lấy mẫu được ở những vị trí đa dạng hơn (Phép tích chập truyền thống chỉ có thể trích xuất các đặc trưng trên một khung hình chữ nhật).(Hình 1.3)



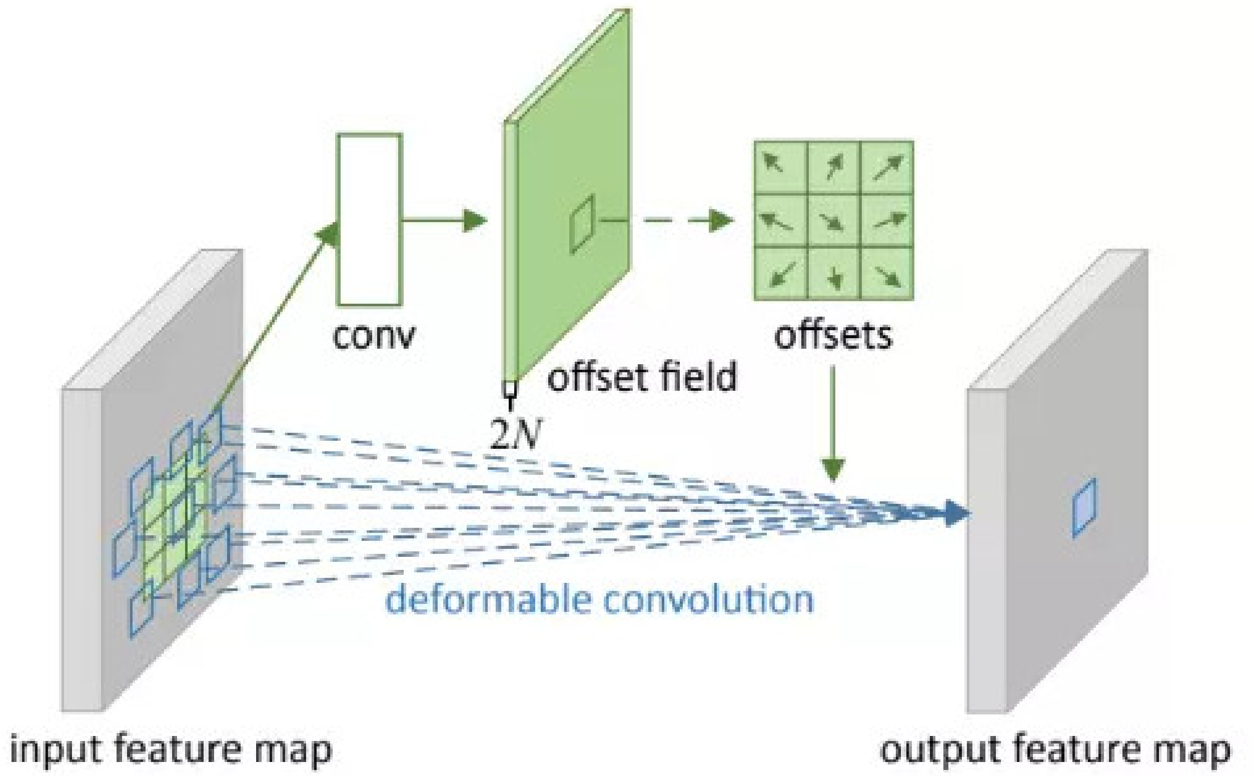
Hình 1.3: So sánh tích chập thông thường và tích chập biến dạng.

Phép tích chập biến dạng thực ra là thêm phần bù cho các điểm tích chập lấy mẫu. (Hình 1.4)



Hình 1.4: a) lấy mẫu tích chập với 9 điểm lấy mẫu. b) để có tích chập biến dạng, thêm độ dịch chuyển vào mỗi điểm lấy mẫu (mũi tên xanh). c) phép biến đổi tỷ lệ. d) phép quay

Cho một đầu vào là một bản đồ đặc trưng, giả sử toán tử gốc của phép tích chập là 3x3, định nghĩa một lớp tích chập 3x3 khác, và chiều của đầu ra là kích thước của bản đồ đặc trưng ban đầu, số kênh = $2N$.



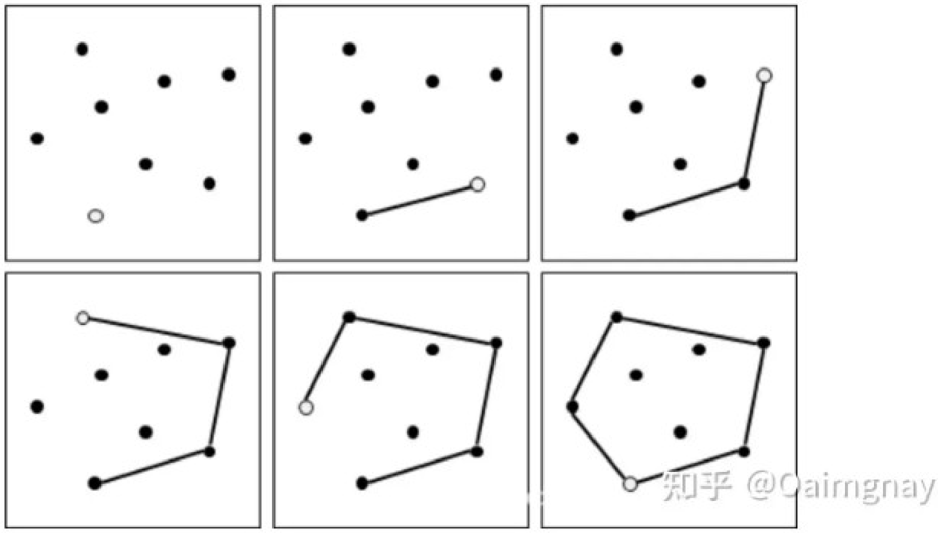
Hình 1.5: Quá trình thực hiện tích chập biến dạng.

1.4 Thuật toán Jarvis March

Sau khi biết được offset, việc cập nhật các điểm đặc trưng của bao lồi được thực hiện bởi thuật toán Jarvis March, bao lồi nhỏ nhất phù hợp với điều kiện sẽ được sinh ra sau mỗi vòng lặp.

Tóm tắt các bước thực hiện thuật toán Jarvis March:

- Đầu tiên, xác định tổng điểm trên biên v1 và điểm tiếp theo v2
- Tìm điểm tiếp theo v3 trong tập điểm sao cho v1, v3, v2 thoả mãn Counter Clock Wise (CCW)
- nếu thoả mãn thì v3 là 1 điểm ngoại vi tiếp theo
- lặp lại bước 3 cho đến khi tất cả các điểm đã được duyệt qua, tức là tìm thấy điểm ngoài cùng nhất



Hình 1.6: mô tả các bước thực hiện thuật toán Jarvis March

- ghi đè v1 = v2
- lặp lại bước 2 cho đến khi điểm tiếp theo trả về chính là điểm xuất phát

1.5 đinh nghĩa CIoU

chỉ số i trong bao lồi $C_i(\theta)$ và chỉ số j là giá trị thật của đối tượng B_j, CIoU được xác định như sau:

$$\mathrm{CIoU}\left(\mathcal{C}_i(\theta), \mathcal{B}_j\right) = \frac{|\mathcal{C}_i(\theta) \cap \mathcal{B}_j|}{|\mathcal{C}_i(\theta) \cup \mathcal{B}_j|} - \frac{|\mathcal{R}_j \backslash (\mathcal{C}_i(\theta) \cup \mathcal{B}_j)|}{|\mathcal{R}_j|}$$

1.6 loss

công thức chưa xác định tên:

$$\mathcal{L}_i^{loc}(\theta) = 1 - \mathrm{CIoU}\left(\mathcal{C}_i(\theta), \mathcal{B}_j\right)$$

công thức chưa xác định tên:

$$\mathcal{L}_i^{cls}(\theta) = \mathrm{FL}\left(S_i(\theta), Y_j\right)$$

hàm phân loại loss cuối cùng cho bao lồi dương là:

$$\mathcal{L}_i^{+}(\theta) = \mathcal{L}_i^{cls}\left(\mathcal{S}_i(\theta), Y_j\right) + \lambda \mathcal{L}_i^{loc}\left(\mathcal{C}_i(\theta), \mathcal{B}_j\right)$$

hàm phân loại loss cuối cùng dành cho bao lồi âm là:

$$\mathcal{L}_i^{-}(\theta) = \mathcal{L}_i^{cls}\left(\mathcal{S}_i(\theta), Y_j\right)$$

Ngoài ra, trong quá trình huấn luyện, vì bao lồi ban đầu chỉ được sinh ra bằng cách tối ưu hoá CIoU, một hàm loss cần được định nghĩa để giám sát:

$$\mathcal{L}^{\det 1}(\theta) = \tfrac{1}{J} \sum_i \mathbb{I}_{(x_i, y_i)} \mathcal{L}_i^{loc}(\theta)$$

Nhìn chung, trong giai đoạn đầu tiên của việc sinh bao lồi, sử dụng $L^{\det 1}$ như trên. Trong giai đoạn 2, hai hàm loss sẽ được sử dụng để phân loại bao lồi

1.7 Convex Hull Adaptation

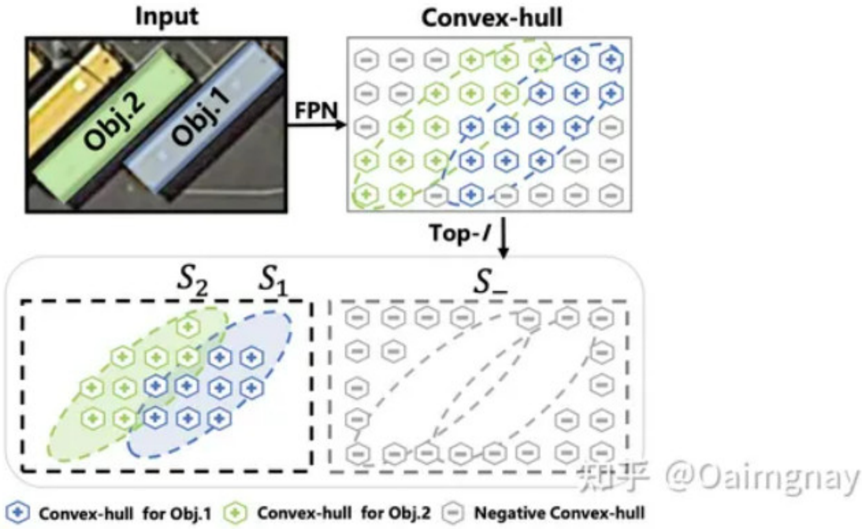
Phương pháp biểu diễn bằng bao lồi giúp định vị đối tượng mục tiêu ở bất kỳ hình dạng nào, tuy nhiên vẫn còn đó một vấn đề, đó là làm thế nào để định vị một cách chính xác các đối tượng mục tiêu dày đặc, đặc biệt là các đối tượng mục tiêu có đặc trưng răng cưa. Tác giả đề xuất một phương pháp thích ứng mới để tinh chỉnh hơn nữa bao lồi đầu tiên được sinh ra ở giai đoạn 1 để đạt được vị trí chính xác hơn và phân lớp hiệu quả hơn.

1.7.1 Xây dựng tập các bao lồi

Tác giả xây dựng một tập các bao lồi tương ứng với mỗi đối tượng mục tiêu, để một đối tượng mục tiêu có thể khớp với nhiều bao lồi phù hợp để cùng nhau tối ưu các đặc trưng của các đối tượng phân bổ dày đặc.

với mỗi đối tượng mục tiêu, ý tưởng xây dựng tập các bao lồi tương ứng là: theo như hệ số CIoU giữa bao lồi dự đoán và bao lồi thực tế, chọn I bao lồi đứng đầu được xác định bởi CIoU. Các bao lồi còn lại không thuộc vào bất kỳ tập bao lồi nào sẽ được gộp lại vào tập bao lồi âm S.

$$\mathcal{L}_{S_j}^{+}(\theta) = \tfrac{1}{|S_j|} \sum_{i \in S_j} \omega_i \mathcal{L}_i^{+}(\theta)$$



Hình 1.7: xây dựng tập các bao lồi để biểu diễn các đối tượng, đặc biệt với những đối tượng phân bổ dày đặc

Khi nhiều đối tượng tụ tập cùng nhau, không phải tất cả bao lồi trong một tập các bao lồi đều phù hợp với đối tượng, và các bao lồi phục vụ đặc trưng răng cưa sẽ phải được phân lớp là tập bao lồi âm. Cùng thời điểm đó, các bao lồi được chia sẻ bởi nhiều đối tượng phải có độ tin cậy thấp hơn.

1.7.2 Convex hull set segmentation strategy

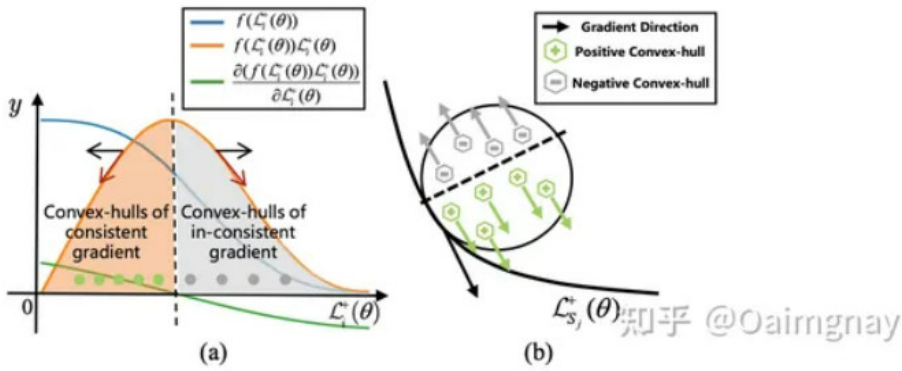
Để giải quyết vấn đề đặc trưng răng cưa ở các đối tượng phân bố dày đặc, tác giả đề xuất chiến lược phân đoạn tập bao lồi để đánh giá các mẫu âm và mẫu dương, thay đổi ω_i được định nghĩa là $f\left(L_i^+(\theta)\right)$, sau khi thay thế, có công thức sau:

$$\mathcal{L}_{s_j}^+(\theta) = \frac{1}{|S_j|}\sum_{i\in S_j} f\left(\mathcal{L}_i^+(\theta)\right)\mathcal{L}_i^+(\theta)$$

f là hàm lỗi đơn điệu giảm phân phối Gaussian, có nghĩa là giá trị loss càng nhỏ, độ tin cậy càng cao.

Nguyên tắc phân chia tập bao lồi là gradient consistency. Bằng cách dẫn xuất công thức trên, ta có được:

$$\frac{\partial\mathcal{L}_{s_j}^+(\theta)}{\partial\theta} = \frac{1}{|S_j|}\sum_{i\in S_j}\frac{\partial\left(f\left(\mathcal{L}_i^+(\theta)\right)\mathcal{L}_i^+(\theta)\right)}{\partial\mathcal{L}_i^+(\theta)}\frac{\partial\mathcal{L}_i^+(\theta)}{\partial\theta}$$



Hình 1.8: Phân chia tập bao lồi theo hướng dẫn của nguyên tắc nhất quán độ dốc

Tiêu chí để thực hiện phân đoạn bao lồi là: đạo hàm của mỗi bao lồi dương $\frac{\partial L_i^+(\theta)}{\partial \theta}$. Điều này muốn nói là: bao lồi có dấu đạo hàm không nhất quán được xem là bao lồi âm, điều này sẽ dẫn đến hiện tượng răng cưa đặc trưng, được phản ánh trong công thức toán học là: $\frac{\partial\left(f\left(L_i^+(\theta)\right)L_i^+(\theta)\right)}{\partial L_i^+(\theta)}$ là dương, bao lồi C_i là dương, nếu không bao lồi sẽ là âm. Xem xét hình 1.8a, khi sắp xếp $\frac{\partial L_i^+(\theta)}{\partial \theta}$ theo thứ tự tăng dần, $f\left(\partial L_i^+(\theta)\right) L_i^+(\theta)$ là một hàm lồi hướng lên với một cực trị duy nhất. Hàm liên tục $\frac{\partial\left(f\left(L_i^+(\theta)\right)L_i^+(\theta)\right)}{\partial L_i^+(\theta)}$ có một điểm không duy nhất, tập bao lồi được chia thành tập các bao lồi dương S_j bởi điểm 0 này, và tập bao lồi âm S- Cùng lúc đó, để đối phó với hiện tượng đặc trưng răng cưa, tác giả cũng giới thiệu một hệ số chống đặc trưng răng cưa:

$$\mathcal{L}_{s_j}^+(\theta) = \frac{1}{|S_j|} \sum_{i \in S_j} p_i f\left(\mathcal{L}_i^+(\theta)\right) \mathcal{L}_i^+(\theta)$$

giai đoạn thứ 2 của quá trình tối ưu được điều khiển bởi hàm loss trên tập convex hull, cùng nhau được định nghĩa bởi phân lớp và định vị đối tượng:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{\det 2}(\theta) = & \frac{1}{J}\sum_{j=1}^{J}\frac{1}{|S_j|}\sum_{i\in S_j} p_i f\left(\mathcal{L}_i^+(\theta)\right)\mathcal{L}_i^+(\theta) \\ & + \frac{1}{|S_-|}\sum_{i\in S_-}\mathcal{L}_i^-(\theta)\end{aligned}$$

Hàm loss này xem xét tự tương ứng về đặc trưng của nhiều đối tượng,, phạt các bao lồi được chia sẻ bởi nhiều đối tượng, và giảm thiểu đặc trưng răng cưa để đạt được thích ứng đặc trưng tối ưu. Cuối cùng hàm loss của bộ phát hiện CFA toàn bộ là:

$$L^{\det 1}(\theta) + L^{\det 2}(\theta)$$

Chương 2

Thuật toán tính bao lồi xấp xỉ

giới thiệu chung về thuật toán, cách dùng, có bao nhiêu loại thuật toán

2.1 Outer convex approximation

Cho:

$$X := \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subset \mathbb{R}^2$$

Giả sử không mất tính tổng quát rằng

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \text{ không cùng nằm trên cùng một đường thẳng}$$

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n \equiv 0 \pmod{m} \tag{2.1}$$

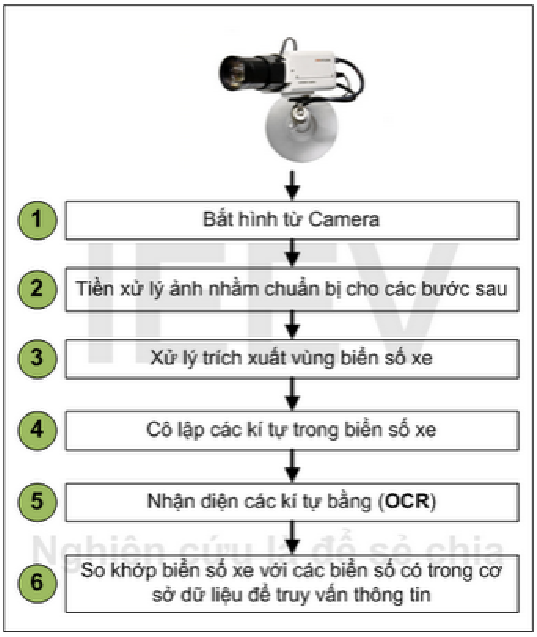
Ta viết tất cả các vector dưới dạng vector hàng, có ma trận chuyển vị được ký hiệu bởi chỉ số trên I, và sử dụng chỉ số phía trên để chỉ định các thành phần, ví dụ $x = \left(x^1, x^2\right) \in \mathbb{R}^2$, biểu thị như sau: $\left[x, x^2\right]$

===

Trong các thuật toán tìm bao lồi thì thuật toán Quickhull [7, 8] được biết đến là một thuật toán hiệu quả có độ phức tạp tính toán trung bình là $O(n \log n)$ nhưng trong trường hợp xấu nhất thì độ phức tạp là $O(n^2)$, trong đó n là số điểm của tập điểm đầu vào của thuật toán. Độ phức tạp của thuật toán Quickhull tương tự như thuật toán Quicksort - một thuật toán sắp xếp hiệu quả dựa trên việc phân chia mảng dữ liệu thành các nhóm phần tử nhỏ hơn và thuật toán này chạy trong thực tế nhanh hơn rất nhiều so với trường hợp xấu nhất. Để giải thích cho điều này, V. Damerow và C. Sohler đã đánh giá thành công số điểm cực biên của một tập hợp theo nghĩa Smoothed analysis [6]. Từ đó có thể đánh giá độ phức tạp tính toán của thuật toán Quickhulll theo nghĩa này trong hai trường hợp là:

- Nhiễu ngẫu nhiên của tập điểm được chọn từ phân bố chuẩn $N(0,\delta)$: $\mathrm{O}\left(n\left(\frac{1}{\delta}\right)^2 \log^2 n\right)$.
- Nhiễu ngẫu nhiên được chọn từ phân bố đều trong hình vuông kích thước 2ϵ: $\mathrm{O}\left(n\left(\frac{n\log n}{\epsilon}\right)^{2/3}\right)$.

Bài toán tìm bao lồi có ứng dụng rất quan trọng trong lĩnh vực nhận dạng. Các ứng dụng phổ biến của nhận dạng trong thực tế là nhận dạng tiếng nói tự động, phân loại văn bản thành nhiều loại khác nhau (ví dụ những thư điện tử spam/non-spam), nhận dạng tự động các mã bưu điện viết tay trên các bao thư, hay hệ thống nhận dạng mặt người, nhận dạng biển số xe, v.v... Sau đây ta xét một ứng dụng cụ thể của bài toán tìm bao lồi trong nhận dạng biển số xe.



Hình 2.1: Quy trình tự động nhận dạng biển số xe.

2.2 Sơ lược về ....

Định nghĩa 2.2.1. *Phương trình đồng dư đại số bậc n* là một đồng dư thức có dạng

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n \equiv 0 \pmod{m} \tag{2.2}$$

trong đó x là ẩn, $a_i \in \mathbb{Z}$ (với $i = 1, 2, \ldots, n$) và $a_0 \not\equiv 0 \pmod{m}$.

Chú ý 2.2.2. (i) Giải phương trình (2.2) là tìm tất cả các giá trị nguyên của x thoả mãn đồng dư thức (2.2). Nếu $x = x_0$ thoả mãn phương trình (2.2) thì mọi số $x \equiv x_0 \pmod{m}$ đều thoả mãn (2.2); trong trường hợp này tập hợp $\{x \in \mathbb{Z} \mid x \equiv x_0 \pmod{m}\}$ được gọi là một *nghiệm* của phương trình đồng dư (2.2), kí hiệu là $\overline{x_0}$ hoặc $x \equiv x_0 \pmod{m}$.

(ii) Số nghiệm của phương trình (2.2) là số các phần tử trong một hệ thặng dư đầy đủ theo modulo m mà thỏa mãn (2.2).

(iii) Hai phương trình đồng dư được gọi là tương đương nếu tập hợp các số nguyên thỏa mãn các phương trình đó là trùng nhau.

Ví dụ 2.2.3. Xét phương trình $x^2 \equiv 1 \pmod{5}$.

Giải. Ta thấy trong các số 0, 1, 2, 3, 4 của hệ thặng dư không âm bé nhất theo modulo 5, có hai số 1 và 4 thỏa mãn phương trình đã cho. Vậy phương trình có hai nghiệm là $x \equiv 1 \pmod{5}$ và $x \equiv 4 \pmod{5}$. $\square$

Ví dụ 2.2.4. Giải phương trình đồng dư $x^4 + 7x + 4 \equiv 0 \pmod{9}$.

Giải. Dễ thấy phương trình $x^4 + 7x + 4 \equiv 0 \pmod{3}$ có nghiệm là $x \equiv 1 \pmod{3}$ (hay $x = 3t + 1$ với $t \in \mathbb{Z}$). Thay x vào phương trình cần giải và bỏ đi những số hạng chia hết cho 9 ta được

$$\begin{aligned} & 6t + 3 \equiv 0 \pmod{9} \\ \Leftrightarrow\ & 2t + 1 \equiv 0 \pmod{3} \\ \Leftrightarrow\ & t \equiv 1 \pmod{3} \\ \Leftrightarrow\ & t = 3k + 1. \end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = 3(3k + 1) + 1$ hay $x \equiv 4 \pmod{9}$. $\square$

Định nghĩa 2.2.5. Phương trình đồng dư $ax \equiv b \pmod{m}$ được gọi là *phương trình đồng dư tuyến tính* với a, b, m là các số nguyên đã biết. Khi đó $x \equiv x_0 \pmod{m}$ là một nghiệm của phương trình khi và chỉ khi $ax_0 \equiv b \pmod{m}$.

Chương 3

Ứng dụng ....

Chương này trình bày định nghĩa và các tính chất của thặng dư bậc hai: cách tính thặng dư bằng định nghĩa, cách tính thặng dư thông qua ký hiệu Legendre, cách tính thông qua luật thuận nghịch bậc hai. Sau đó ứng dụng thặng dư bậc hai và luật thuận nghịch bậc hai để tính toán và giải một số bài toán chứng minh, tìm căn nguyên thủy, kiểm tra tính nguyên tố.

3.1 Thặng dư bậc hai và ứng dụng

Thặng dư bậc hai đóng vai trò rất quan trọng trong lý thuyết số. Chẳng hạn, thuật toán phân tích số nguyên ra thừa số nguyên tố. Ngoài ra thặng dư bậc hai cũng ứng dụng lớn trong mật mã cũng như trong các giao thức mã hóa.... Ở đây ta xét ứng dụng liên quan đến giải phương trình đồng dư bậc hai trong lý thuyết và thực hành.

3.1.1 Phương trình đồng dư bậc hai..........

Xét phương trình đồng dư bậc hai theo modulo nguyên tố (theo tài liệu [?]).

$$Ax^2 + Bx + C \equiv 0 \pmod p, \tag{3.1}$$

trong đó p nguyên tố lẻ và $A, B, C \in \mathbb{Z}$ với $p \nmid A$. (Nếu $p \mid A$ thì quay về phương trình tuyến tính). Vì p nguyên tố lẻ và $p \nmid A$, nên $p \nmid 4A$. Ta nhân hai vế của phương trình với $4A$ ta được

$$4A(Ax^2 + Bx + C) \equiv 0 \pmod p. \tag{3.2}$$

Nhưng ta có

$$\begin{aligned}4A(Ax^2+Bx+C) &= 4A^2x^2+4ABx+4AC\\ &= (2Ax+B)^2-(B^2-4AC).\end{aligned}$$

Do đó đồng dư thức (3.2) được viết lại thành

$$(2Ax+B)^2 \equiv (B^2-4AC) \pmod{p}$$

nó có dạng

$$y^2 \equiv a \pmod{p} \tag{3.3}$$

trong đó $y = 2Ax + B$ và $a = B^2 - 4AC$.

Nếu phương trình $y^2 \equiv a \pmod{p}$ có nghiệm, thì ta suy ra phương trình $2Ax + B = y$ có nghiệm x modulo p (vì $(2A, p) = 1$). Do đó phương trình (3.1) có nghiệm nếu và chỉ nếu phương trình (3.3) có nghiệm.

Ví dụ sau sẽ minh họa điều này.

Thuật toán 1 THUẬT TOÁN TÌM BAO LỒI DƯỚI $\mathrm{conv}_L(P)$

Đầu vào: Cho $P = \{p_i = (x_i, y_i, z_i) \in \mathbb{R}^3,\ i = 1, \ldots, n\}, n \geq 3$.
Đầu ra: Tập $\mathcal{Q}$ tất cả các mặt dưới của $\mathrm{conv}_L(P)$.

```
Tìm cạnh đầu tiên e_0 của conv_L(P).
Xét hàng đợi Q := ∅ và tập E_L(P) := ∅.
Gọi LFRes(e, P) để nhận được một mặt dưới F_e qua e_0. Đẩy các cạnh của F_e trừ
  e_0 vào trong E_L(P). Đẩy F_e vào trong tập Q.
while (Q ≠ ∅) do
    Lấy F_e từ phía trên của Q.
        T := tập các cạnh F_e.
        for each e ∈ T ∩ E_L(P) do
            Gọi LFRes(e, P) để nhận được mặt F'_e có chung cạnh e với F_e.
            Đưa vào E_L(P) tất cả các cạnh e' ≠ e_0 của F'_e chưa xuất hiện trong
            E_L(P) và xoá các cạnh đã xuất hiện trong E_L(P). Đẩy F'_e vào Q.
```

Chương 4

Một số kết quả tính toán

Trong nội dung này chúng tôi thử nghiệm số cho thuật toán trong [5] và thuật toán vừa được trình bày ở mục trước để so sánh tốc độ của chúng. Các thuật toán này được thực thi bởi chương trình C và chạy trên PC Core i5 1.6 GHz 3M với 4 GB RAM.

Dưới đây Bảng 4.1 minh họa thời gian chạy (đơn vị tính bằng giây) của thuật toán tính bao lồi dưới được giới thiệu bởi P. T. An và D. T. Giang trong [5] và Thuật toán **??** sử dụng kỹ thuật hạn chế của chúng tôi. Cột cuối cùng liệt kê tỉ lệ tăng tốc của thuật toán của chúng tôi so với thuật toán trong [5]. Dữ liệu đầu vào của các thuật toán là các tập điểm được tạo trên bề mặt một paraboloid (tất cả các điểm đều là đỉnh của bao lồi và bao lồi dưới) có dạng $P = \{p_i = (x_i, y_i, z_i) : x_i, y_i, z_i \in \mathbb{R}, z_i = x_i^2 + y_i^2, i = 1, \ldots, n\} \subset \mathbb{R}^3$, trong đó tập $\{(x_i, y_i), x_i, y_i \in R, i = 1, \ldots, n\}$ được chọn ngẫu nhiên từ phân bố đều trong hình vuông cỡ 200×200.

Bảng 4.1: Thời gian chạy tính bao lồi dưới (đơn vị: giây).

Đầu vào	Thuật toán trong [5]	Thuật toán 1	Tỉ số thăng tốc
1.000	0,136	0,061	2,23
2.000	0,454	0,248	1,83
5.000	2,684	1,500	1,79
7.000	7,014	3,129	2,24
11.000	14,321	8,484	1,69
17.000	41,307	24,666	1,67
20.000	63,197	37,332	1,69
22.000	70,866	40,235	1,76
30.000	153,240	96,738	1,58
35.000	200,496	125,490	1,60

Kết luận

Trong quá trình thực tập, em đã có cơ hội làm quen một môi trường làm việc mới. Em đã tính lũy những kinh nghiệm về kiến thức trong công việc cũng như các kinh nghiệm về kỹ năng mềm.

Em được rèn luyện kĩ năng giải quyết công việc theo từng giai đoạn, cố gắng hoàn thành công việc trong thời gian cho phép, mạnh dạn trao đổi và chia sẻ kiến thức. Đồng thời cũng bồi dưỡng thêm rất nhiều kiến thức ngoài các kiến thức đã học trên trường.

Tài liệu tham khảo

Tiếng Việt

[1] Vũ Thị Gái (2016), *Luật thuận nghịch bậc hai và điểm nguyên*, trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên.

[2] Nguyễn Tiến Hùng (2016), *Luật thuận nghịch bậc hai và hoán vị*, trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên.

[3] Hà Huy Khoái (1997), *Nhập môn số học thuật toán*, Nhà xuất bản Khoa học Kỹ thuật.

[4] Lại Đức Thịnh (1977), *Giáo trình số học*, Nhà xuất bản Giáo dục.

Tiếng Anh

[5] P. T. An and D. T. Giang (2015), “A direct method for determining the lower convex hull of a finite point set in 3D”, Advances in Intelligent Systems and Computing, *Springer*, Proceedings of 3rd International Conference on Computer Science, Applied Mathematics and Applications (ICCSAMA, May 11-13, Metz, France) **358**, pp. 15–26.

[6] V. Damerow and C. Sohler (2004), “Extreme points under random noise”, *Eropean Symposium on Algorithms* **3221**, pp. 264–274.

[7] M. M. David (2002), *Computation geometry*, Department of Computer Science.

[8] J. O’ Rourke (1998), *Computational geometry in C*, 2nd edition, Cambridge University Press, Cambridge.