

HỌC VIỆN CÔNG NGHỆ BƯU CHÍNH VIỄN THÔNG  
KHOA CÔNG NGHỆ THÔNG TIN I

—o0o—



**ĐỒ ÁN TỐT NGHIỆP ĐẠI HỌC**

**BAO LỖI XẤP XỈ VÀ ỨNG DỤNG TRONG VIỆC PHÁT  
HIỆN ĐỊNH HƯỚNG VÀ ĐÓNG GÓI ĐỐI TƯỢNG**

Giảng Viên Hướng Dẫn:	TS. Nguyễn Kiều Linh
Sinh viên thực hiện:	Trần Xuân Độ
Mã sinh viên:	B19DCCN183
Lớp:	D19CNPM04
Niên khóa:	2019-2023
Hệ đào tạo:	Đại học chính quy

Hà Nội, 12/2023

HỌC VIỆN CÔNG NGHỆ BƯU CHÍNH VIỄN THÔNG  
KHOA CÔNG NGHỆ THÔNG TIN I

—o0o—



**ĐỒ ÁN TỐT NGHIỆP ĐẠI HỌC**

**BAO LỒI XẤP XỈ VÀ ỨNG TRONG VIỆC PHÁT HIỆN  
ĐỊNH HƯỚNG VÀ ĐÓNG GÓI ĐỐI TƯỢNG.**

<b>Giảng Viên Hướng Dẫn:</b>	TS. Nguyễn Kiều Linh
<b>Sinh viên thực hiện:</b>	Trần Xuân Độ
<b>Mã sinh viên:</b>	B19DCCN183
<b>Lớp:</b>	D19CNPM04
<b>Niên khóa:</b>	2019-2023
<b>Hệ đào tạo:</b>	Đại học chính quy

Hà Nội, 12/2023

# Mục lục

Danh sách hình vẽ	iv
Danh sách bảng	vi
Danh sách các ký hiệu và chữ viết tắt	vii
Mở đầu	1
<b>1 Giới thiệu bài toán phát hiện, định hướng và đóng gói đối tượng</b>	<b>3</b>
1.1 Giới thiệu . . . . .	3
1.2 Xây dựng tập bao lồi đầu tiên . . . . .	4
1.3 Tích chập biến dạng . . . . .	6
1.4 Thuật toán Jarvis March . . . . .	7
1.5 Định nghĩa công thức Convex Intersection over Union (CIoU) . .	9
1.6 Hàm mất mát . . . . .	9
1.7 Thích ứng bao lồi . . . . .	10
1.7.1 Xây dựng tập các bao lồi . . . . .	10
1.7.2 Chiến lược phân đoạn tập các bao lồi . . . . .	11
<b>2 Thuật toán tính bao lồi xấp xỉ</b>	<b>14</b>
2.1 Outer convex approximation . . . . .	14
2.2 Inner convex approximation . . . . .	22
<b>3 Thực nghiệm và kết quả</b>	<b>28</b>
3.1 Khởi tạo môi trường chạy . . . . .	28
3.2 Tập dữ liệu DOTA . . . . .	31

3.2.1	Các bước thực hiện . . . . .	33
4	Một số kết quả tính toán	62
	Kết luận	64
	Tài liệu tham khảo	65

## LỜI CẢM ƠN

Chân thành cảm ơn cô giáo Nguyễn Kiều Linh, người đã đóng góp không ngừng sức mạnh và sự hiểu biết chuyên sâu, giúp tôi hoàn thành đồ án một cách thành công. Những lời hướng dẫn và sự chia sẻ của cô không chỉ giúp tôi giải quyết các vấn đề khó khăn mà còn mở rộng tầm nhìn và kiến thức của tôi trong lĩnh vực công nghệ thông tin.

Tôi cũng muốn bày tỏ lòng biết ơn đặc biệt đến tác giả của các thư viện code MMROTATE và tác giả bài báo BeyoundBoundingBox, người đã chia sẻ những lời khuyên quý báu qua email. Điều này thực sự là một nguồn động viên lớn, giúp tôi áp dụng những kỹ thuật và giải pháp hiệu quả vào dự án của mình.

Cảm ơn anh Linh, đồng nghiệp tại công ty ESC, vì sự hỗ trợ tận tâm và việc cho mượn máy làm việc. Sự thuận tiện này thực sự đã giúp tôi tiếp cận công nghệ và dữ liệu cần thiết một cách dễ dàng và hiệu quả.

Cuối cùng, xin gửi lời tri ân đến bạn bè, những người đã động viên và hỗ trợ tôi trong suốt quá trình thực hiện đồ án. Sự đoàn kết và tình bạn này thực sự là nguồn động viên mạnh mẽ, giúp tôi vượt qua mọi khó khăn. Cảm ơn mọi người vì tất cả!

*Hà Nội, tháng 11 năm 2023*

Sinh viên

Trần Xuân Độ

# Danh sách hình vẽ

1.1	Minh hoạ vấn đề. (Bên trên) Khi sử dụng cách biểu diễn dạng hộp, các đối tượng có hướng phân bố dày đặc gây ra hiện tượng đặc trưng răng cưa tại các vùng giao của trường tiếp nhận giữa các đối tượng. (Bên dưới) Với cách biểu diễn bao lồi, phương pháp CFA xử lý tốt các đặc trưng nằm trên lưới tích chập thông thường của các đối tượng có hướng phân bố không đều, giải quyết hiện tượng răng cưa đặc trưng hiệu quả . . . . .	4
1.2	Biểu đồ luồng quy trình thực hiện của bộ phát hiện CFA. . . . .	5
1.3	So sánh biểu diễn hộp có hướng (bên trên) so với biểu diễn bao lồi (ở dưới). . . . .	5
1.4	So sánh tích chập thông thường và tích chập biến dạng. . . . .	6
1.5	a) lấy mẫu tích chập với 9 điểm lấy mẫu. b) để có tích chập biến dạng, thêm độ dịch chuyển vào mỗi điểm lấy mẫu (mũi tên xanh). c) phép biến đổi tỷ lệ. d) phép quay . . . . .	7
1.6	Quá trình thực hiện tích chập biến dạng. . . . .	7
1.7	mô tả các bước thực hiện thuật toán Jarvis March . . . . .	8
1.8	xây dựng tập các bao lồi để biểu diễn các đối tượng, đặc biệt với những đối tượng phân bố dày đặc . . . . .	11
1.9	Phân chia tập bao lồi theo hướng dẫn của nguyên tắc nhất quán độ dốc. . . . .	12
2.1	$X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ with $\text{conv}X = \text{conv}\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ and $m = 10$ . . . . .	19
2.2	16-sided frame polygon $\mathcal{P}^\circ$ of $n$ random points. . . . .	19
2.3	Tỷ lệ thời gian chạy của thuật toán 2–3 và số điểm $n$ của $X$ . . . . .	22

2.4	Tỷ lệ thời gian chạy của thuật toán 4 với số điểm $n$ của $X$ . . . . .	26
3.1	Minh hoạ kết quả hình ảnh output của thư viện Mmrotate. . . . .	31
3.2	Minh hoạ nhãn hộp bao có hướng của tập dữ liệu DOTA. . . . .	33

# Danh sách bảng

2.1	Số cạnh và số bước 3 lặp lại của từng giải thuật Outer Convex Approximation . . . . .	20
2.2	Số cạnh của đa giác lồi xấp xỉ $\mathcal{P}^{\text{outer}}$ được trả về bởi thuật toán 1–2 và số lần thực hiện của bước 3 khi $X$ gồm $n$ điểm ngẫu nhiên trong khung 16 cạnh đa giác $\mathcal{P}^\diamond$ thể hiện trong hình 2.2. . . . .	21
2.3	Số cạnh trung bình của đa giác lồi xấp xỉ lồi trong $\mathcal{P}^{\text{inner}}$ Trả về bởi thuật toán 4 và số lần thực hiện trung bình của bước 2 khi $X$ gồm $n$ điểm ngẫu nhiên trong đa giác có khung 16 cạnh $\mathcal{P}^\diamond$ và được hiển thị trong hình 2.2. . . . .	26
2.4	Thời gian chạy trung bình $T_{\text{Alg.4}}$ thuật toán 4 khi $X$ gồm $n$ điểm ngẫu nhiên được trình bày trong bảng 2.3 phải được tạo ra trong đa giác có khung 16 cạnh $\mathcal{P}^\diamond$ hiển thị trong hình 2.2. . . . .	27
4.1	Thời gian chạy tính bao lồi dưới (đơn vị: giây). . . . .	63



## Danh mục các ký hiệu và chữ viết tắt

CFA	Convex-hull Feature Adaptation
CIoU	Convex Intersection over Union
RoI	Region of Interest transformer
FPN	Feature Pyramid Network
Conv	Convolution
DCN	Deformable Convolution Network
CCW	Counter Clock Wise
<i>loc</i>	localization
<i>cls</i>	classification
FL	Focal Loss
CUDNN	CUDA Deep Neural Network
CUDA	Compute Unified Device Architecture

# Mở đầu

Trong nhiều thập kỷ, chúng ta đã chứng kiến quá trình phát triển đáng kể của bài toán nhận diện đối tượng. Đóng góp vào sự phát triển này chính là việc sử dụng mạng học sâu kết hợp với đa dạng các cách biểu diễn đặc trưng, các database có kích thước lớn hơn, và việc đào tạo trước các mô hình để tiết kiệm thời gian và chi phí. Tuy nhiên, phần lớn các bộ phát hiện đối tượng đều gặp phải vấn đề khi biểu diễn các đối tượng quan sát từ trên xuống, có hướng tùy ý, hoặc các đối tượng có bố cục khác nhau trong quá trình đào tạo. Vấn đề trở nên nghiêm trọng hơn khi các đối tượng phân bố dày đặc, gây ra hiện tượng răng cưa ở các vùng giao nhau của trường tiếp nhận.

Một trong những giải pháp để phát hiện đối tượng có hướng, đó là sử dụng phương pháp làm giàu đặc trưng/mở neo, cung cấp nhiều hơn các đặc trưng để đào tạo các bộ phát hiện. Giải pháp này tuy nhiên lại gây ra sự phức tạp trong tính toán, dễ gây ra sai sót. Một giải pháp khác là định nghĩa bộ biến đổi RoI, áp dụng phép biến đổi không gian RoIs trong khi tiếp tục học các tham số dưới sự giám sát của hộp bao có hướng. Các bộ biến đổi này được cho là linh hoạt, nhạy bén, hoạt động mượt mà, cho phép trường tiếp nhận thích nghi với các đối tượng có hướng. Tuy nhiên, vấn đề về cách điều chỉnh lưới đặc trưng cho đối tượng có bố cục bất kỳ vẫn chưa được giải quyết. Đây chính là nguyên nhân gây ra hiện tượng feature aliasing, xảy ra khi các đối tượng phân bố dày đặc trong khung hình.

Do đó, ta đề xuất một cách tiếp cận khác: sử dụng phương pháp điều chỉnh các đặc trưng bằng bao lồi (convex-hull) dành cho các đối tượng có hướng và phân bố dày đặc. Mục tiêu để điều chỉnh các đặc trưng nằm trong lưới tích chập thông thường với các đối tượng có bố cục phân bố không đều. Ta xây dựng bộ

cục đối tượng thành một bao lồi, có lợi thế hơn so với sử dụng bố cục hình chữ nhật, giúp bao phủ toàn bộ đối tượng nhưng giảm thiểu tối đa diện tích vùng nền của đối tượng. Mỗi bao lồi là tập hợp các điểm đặc trưng định nghĩa đường biên của đối tượng, biểu thị tỷ lệ Convex Intersection over Union (CIoU) để các định vị trí đối tượng. Bên trong bao lồi, các đặc trưng khác nhau biểu thị cho sự xuất hiện của các đối tượng được phân loại khác nhau.

Mục tiêu của đề án là tìm hiểu, nghiên cứu phương pháp phát hiện đối tượng dày đặc có hướng, cụ thể là nghiên cứu phương pháp BeyondBoundingBox dành cho vấn đề trên. Ngoài ra, đề án còn tìm hiểu thuật toán phát hiện bao lồi mới, thay thế vào phương pháp trên, kiểm nghiệm và đo lường độ hiệu quả của thuật toán mới này.

Trong đề án em sẽ tập trung trình bày một số nội dung chính như sau:

**Chương 1: Giới thiệu bài toán phát hiện, định hướng và đóng gói đối tượng:** Nội dung chương 1 sẽ khái quát các vấn đề và phương pháp nhận dạng đối tượng, trình bày về các phương pháp liên quan, nguyên lý và cách thức triển khai, giới thiệu sử dụng thuật toán bao lồi xấp xỉ để thực hiện bài toán.

**Chương 2: Trình bày thuật toán bao lồi xấp xỉ:** Nội dung của chương 2 sẽ giới thiệu thuật toán, lý thuyết và triển khai thuật toán bằng code C++

**Chương 3: Thực nghiệm và kết quả:** Nội dung của chương 3 Áp dụng bao lồi xấp xỉ cho bài toán phát hiện, định hướng và đóng gói đối tượng, cách thức triển khai bộ phát hiện, cách thức thay thế thuật toán.

**Chương 4: Tổng kết:** Tổng kết bài toán, tóm tắt những kết quả đã đạt được và còn chưa đạt được. Từ đó đề xuất mục tiêu hướng tới cũng như hướng nghiên cứu, phát triển tiếp theo.

# Chương 1

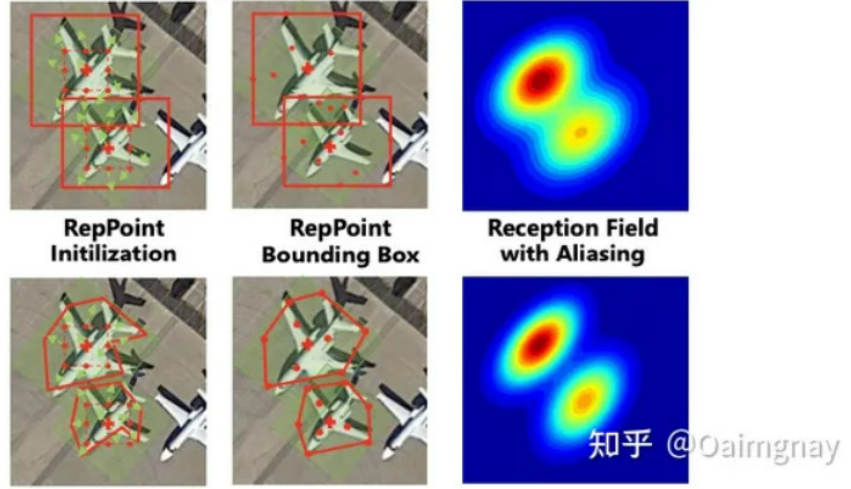
## Giới thiệu bài toán phát hiện, định hướng và đóng gói đối tượng

Chương 1 đặt vấn đề về bài toán phát hiện đối tượng, trình bày lý thuyết về phương pháp BeyondBoundingBox.

### 1.1 Giới thiệu

Trong bài toán phát hiện đối tượng, việc định vị và phát hiện đối tượng dày đặc vẫn còn là một vấn đề thách thức do vấn đề đặc trưng răng cưa (feature aliasing), tức là các pi. Có các giải pháp đã được sử dụng: làm giàu các đặc trưng (enhance features) và sử dụng anchors. Nhược điểm của các phương pháp này: làm cho cấu trúc mạng trở nên phức tạp hơn, tăng thời gian huấn luyện (training) và suy luận (inference). Một phương pháp khác đó là sử dụng biến đổi RoI, nhưng phương pháp này không thích ứng tốt với các đối tượng có hướng bất kỳ, đặc biệt đối với các đối tượng xuất hiện dày đặc trong hình ảnh.

Để giải quyết các vấn đề trên, một phương pháp đã được đưa ra: phương pháp thích ứng bao lồi (convex-hull feature adaptation-CFA). CFA được thực hiện dựa trên phương pháp biểu diễn bao lồi, định nghĩa một tập các điểm đặc trưng, giới hạn phạm vi của đối tượng mục tiêu sử dụng chỉ số CIoU. CFA đạt được sự phân bố đặc trưng tối ưu nhờ vào việc xây dựng tập bao lồi và phân chia linh hoạt các bao lồi thành các bao lồi âm và bao lồi dương. CFA cũng xem xét sự chồng chéo nhau giữa bao lồi dự đoán và bao lồi thực tế, phạt các bao lồi được dùng chung bởi nhiều đối tượng, giảm thiểu hiện tượng đặc trưng răng



Hình 1.1: Minh hoạ vấn đề. (Bên trên) Khi sử dụng cách biểu diễn dạng hộp, các đối tượng có hướng phân bố dày đặc gây ra hiện tượng đặc trưng răng cưa tại các vùng giao của trường tiếp nhận giữa các đối tượng. (Bên dưới) Với cách biểu diễn bao lồi, phương pháp CFA xử lý tốt các đặc trưng nằm trên lưới tích chập thông thường của các đối tượng có hướng phân bố không đều, giải quyết hiện tượng răng cưa đặc trưng hiệu quả

cưa (feature aliasing), đạt được sự thích ứng đặc trưng tối ưu. Nó cũng đạt được kết quả tốt nhất khi thử nghiệm trên tập dữ liệu DOTA và SKUR110KR.

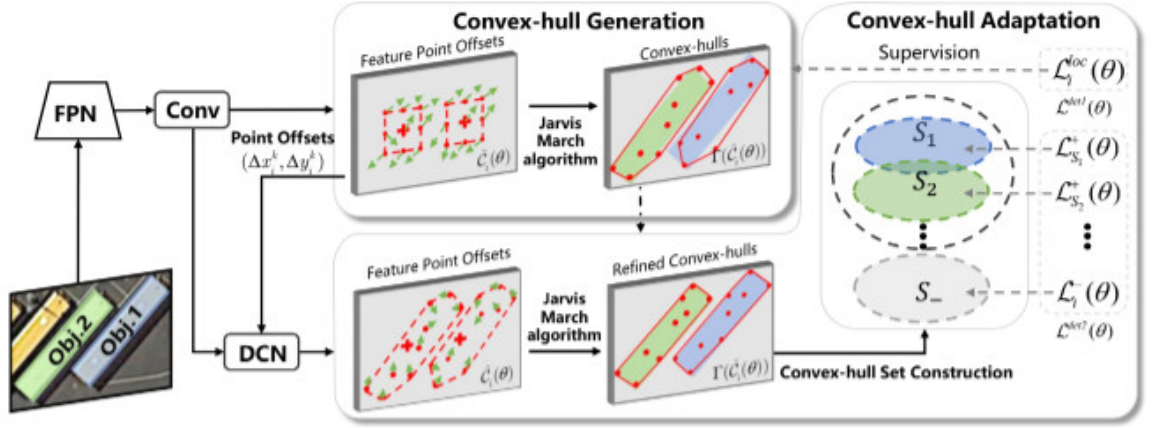
Phương pháp CFA được chia làm 2 giai đoạn thực hiện:

- Giai đoạn 1: tạo tập bao lồi và ước lượng sơ bộ bố cục của bao lồi.
- Giai đoạn 2: chỉnh sửa bao lồi sao cho phù hợp với các đối tượng phân bố dày đặc.

## 1.2 Xây dựng tập bao lồi đầu tiên

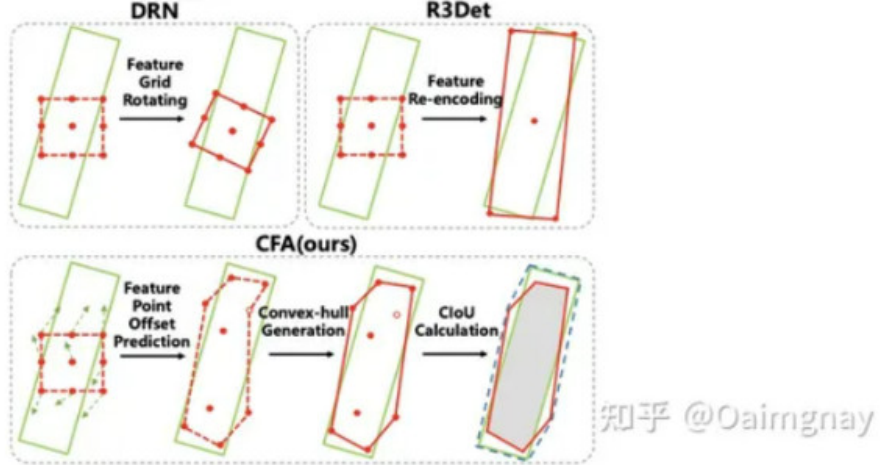
Việc biểu diễn bằng khung hình chữ nhật do bao lồi sinh ra làm giảm khả năng biểu diễn đối tượng. Vì thế phương pháp CFA đã đề xuất biểu diễn phạm vi của đối tượng bằng bao lồi. Mỗi bao lồi là một tập hợp các điểm thoả mãn công thức:

$$C_i = \{(x_i^k, y_i^k)\}_{i=1 \dots K} \quad (1.1)$$



Hình 1.2: Biểu đồ luồng quy trình thực hiện của bộ phát hiện CFA.

Trong đó:  $C_i$  là bao lồi thứ  $i$ ,  $(x_i^k, y_i^k)$  là điểm nằm trên bao lồi thứ  $k$ ,  $k$  là chỉ số của điểm đặc trưng,  $K = 9$  tương ứng với 9 điểm được khởi tạo của bao lồi.



Hình 1.3: So sánh biểu diễn hộp có hướng (bên trên) so với biểu diễn bao lồi (ở dưới).

Việc huấn luyện có thể xem như là quá trình dự đoán độ lệch (offset), trong khi hệ số CIoU cần được tối đa hoá để đạt được so khớp tối ưu nhất. Đây là phương pháp sử dụng phép toán tích chập để dự đoán độ lệch:  $(\Delta x_i^k, \Delta y_i^k)$  với từng điểm đặc trưng, sau trả về một bản đồ độ bù cho các đặc trưng  $O \in$

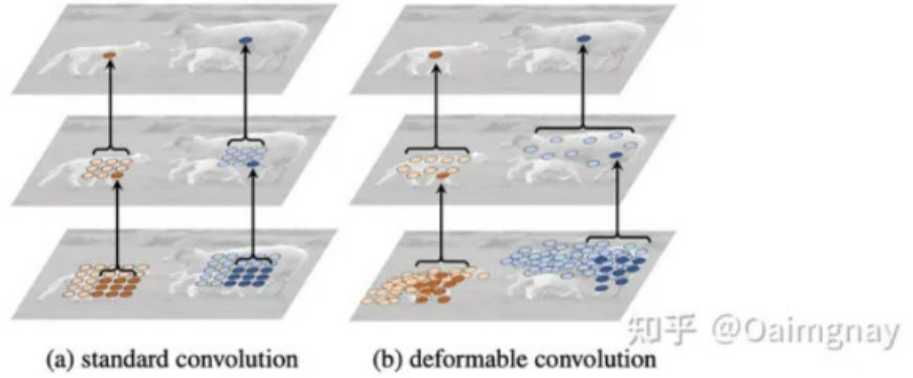
$R^{H \times W \times W}$  ( $H, W, C$  lần lượt tương ứng với chiều dài, chiều rộng và số lượng kênh của bản đồ đặc trưng):

$$\hat{C}_i(\theta) \leftarrow \left\{ \left( x_i^k + \Delta x_i^k(\theta), y_i^k + \Delta y_i^k(\theta) \right) \right\}_i^{k=1 \dots K} \quad (1.2)$$

Trong đó:  $\theta$  biểu thị là các tham số của mạng. Việc dự đoán offset sẽ thực hiện theo công thức trên.

### 1.3 Tích chập biến dạng

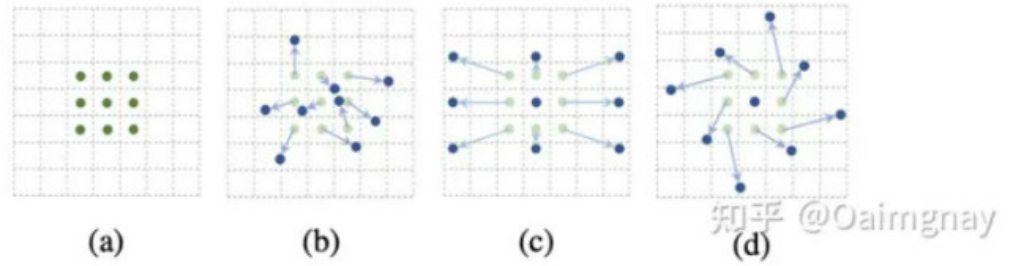
Tích chập biến dạng (Deformable convolution - DCN) là dạng tích chập mà vị trí thực hiện tích chập bị biến dạng, không giống tích chập truyền thống là dạng lưới  $N \times N$ . Ưu điểm của phương pháp này giúp trích xuất các đặc trưng mong muốn được chính xác hơn, lấy mẫu được ở những vị trí đa dạng hơn (Phương pháp tích chập truyền thống chỉ có thể trích xuất các đặc trưng trên một khung hình chữ nhật). (Hình 1.4)



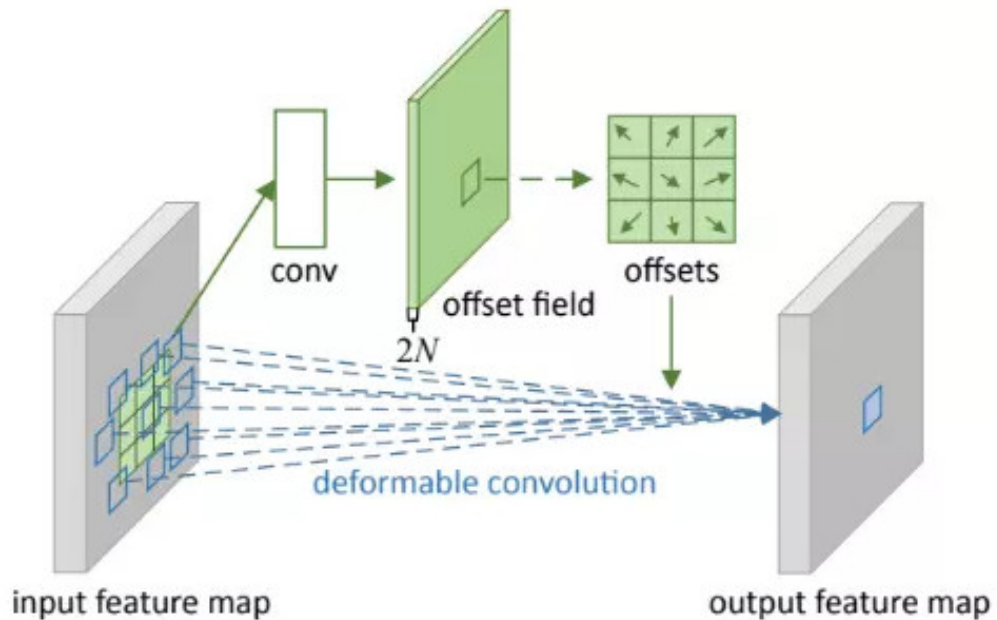
Hình 1.4: So sánh tích chập thông thường và tích chập biến dạng.

Phương pháp tích chập biến dạng thực ra là thêm phần bù cho các điểm tích chập lấy mẫu. (Hình 1.5)

Cho đầu vào là một bản đồ đặc trưng, giả sử phương pháp tích chập là  $3 \times 3$ . Để học được phần bù, định nghĩa một lớp tích chập  $3 \times 3$  khác, chiều của đầu ra là kích thước của bản đồ đặc trưng ban đầu, số kênh  $= 2N$ . (Hình 1.6) Tiếp theo thực



Hình 1.5: a) lấy mẫu tích chập với 9 điểm lấy mẫu. b) để có tích chập biến dạng, thêm độ dịch chuyển vào mỗi điểm lấy mẫu (mũi tên xanh). c) phép biến đổi tỷ lệ. d) phép quay



Hình 1.6: Quá trình thực hiện tích chập biến dạng.

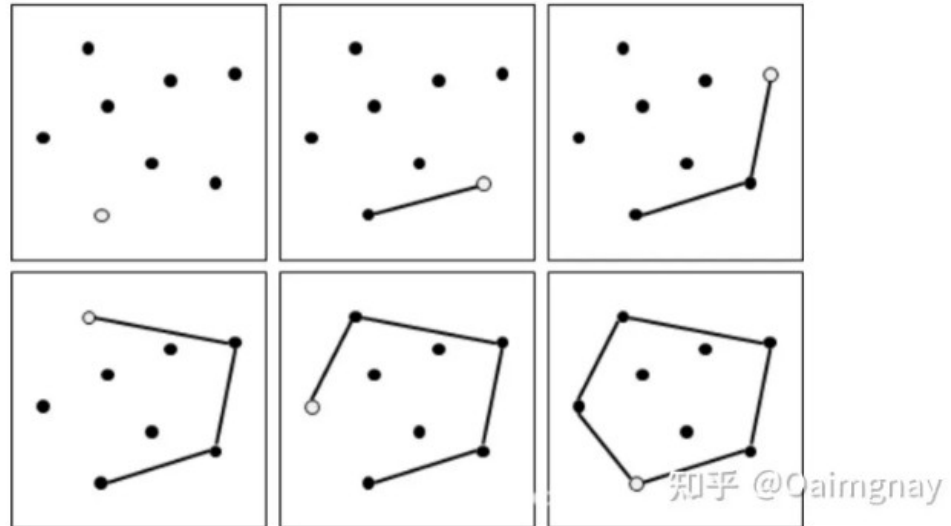
hiện tích chập biến dạng, dựa trên độ bù của các phần đã được tính trước đó, sau đó thực hiện phép tích chập như thông thường.

## 1.4 Thuật toán Jarvis March

Sau khi học được phần bù, việc hoàn thành cập nhật các điểm đặc trưng của bao lồi được thực hiện bởi thuật toán Jarvis March, bao lồi nhỏ nhất phù hợp



với điều kiện sẽ được tạo ra sau mỗi vòng lặp.



Hình 1.7: mô tả các bước thực hiện thuật toán Jarvis March

Tóm tắt các bước thực hiện thuật toán Jarvis March:

- Bước 1: Chọn điểm xuất phát là  $v_1$  nằm trên đường biên. Tìm điểm  $v_2$  tiếp theo sao cho mọi điểm khác trong tập hợp nằm ở phía bên trái đoạn thẳng nối  $v_1$  và  $v_2$ .
- Bước 2: Tìm điểm  $v_3$  tiếp theo trong tập các điểm còn lại, sao cho  $v_1, v_2, v_3$  thỏa mãn góc ngược chiều kim đồng hồ (Counter Clock Wise - CCW). Điều này có nghĩa là  $v_3$  nằm ở bên trái đoạn thẳng nối  $v_1$  và  $v_2$ . Nếu điều kiện này được đáp ứng, tức là  $v_3$  là 1 điểm nằm ở ngoại vi hơn.
- Bước 3: Nếu điều kiện bước trên thỏa mãn, ghi đè giá trị của  $v_3$  lên  $v_2$ . Gán giá trị của  $v_3$  cho  $v_2$ , tức  $v_2 = v_3$ . Quay lại bước 2 để tìm điểm ngoại vi tiếp theo.
- Bước 4: Lặp lại bước 3 cho đến khi tất cả các điểm đã được duyệt qua, tức là tìm thấy điểm ngoại vi tiếp theo được tìm thấy. Quá trình này tạo ra một chuỗi các điểm trên đường biên của bao lồi.

- Bước 5: Ghi đè giá trị của v2 lên v1. Sau khi tìm thấy điểm ngoại vi tiếp theo, gán giá trị của v2 lên v1, tức  $v1 = v2$ .
- Bước 6: Lặp lại bước 2 cho đến khi điểm tiếp theo trả về chính là điểm xuất phát. Quá trình này sẽ tiếp tục cho đến khi ta quay trở lại điểm xuất phát ban đầu, hoàn thành toàn bộ quá trình tìm bao lồi.

## 1.5 Định nghĩa công thức Convex Intersection over Union (CIoU)

Dựa vào mỗi bao lồi dự đoán, có thể tính toán được hàm mất mát vị trí và phân lớp của một đối tượng. Công thức CIoU giữa bao lồi dự đoán thứ  $i$ :  $C_i(\theta)$  và hộp bao thật sự  $\mathcal{B}_j$  của đối tượng thứ  $j$  được tính như sau:

$$\text{CIoU}(C_i(\theta), \mathcal{B}_j) = \frac{|C_i(\theta) \cap \mathcal{B}_j|}{|C_i(\theta) \cup \mathcal{B}_j|} - \frac{|\mathcal{R}_j \setminus (C_i(\theta) \cup \mathcal{B}_j)|}{|\mathcal{R}_j|} \quad (1.3)$$

Trong đó:  $\mathcal{R}_j$  là hợp của hai đa giác, tức là đa giác nhỏ nhất có thể bao quanh  $C_i(\theta)$  và  $\mathcal{B}_j$ .

## 1.6 Hàm mất mát

Theo công thức 1.3, hàm mất mát vị trí CIoU được định nghĩa là:

$$\mathcal{L}_i^{loc}(\theta) = 1 - \text{CIoU}(C_i(\theta), \mathcal{B}_j) \quad (1.4)$$

Cho  $f_i^k(\theta)$  là đặc trưng của điểm thứ  $k$ , bao lồi đặc trưng  $f_i(\theta)$  được tính bởi tổng có trọng số của tất cả các điểm đặc trưng trên bao lồi dự đoán  $C_i(\theta)$ , tức là bằng công thức:  $f_i(\theta) = \sum_k m w_i^k \cdot f_i^k(\theta)$ , trong đó,  $w_i^k$  biểu thị các trọng số đặc trưng có thể học được từ tích chập biến dạng (DCN). Dựa vào bao lồi đặc trưng, điểm dự đoán  $S_i(\theta)$  của bao lồi dự đoán  $C_i(\theta)$  được tính bởi phép tích chập, hàm mất mát phân loại của bao lồi dự đoán  $C_i(\theta)$  tương ứng với  $B_j$  được định nghĩa là:

$$\mathcal{L}_i^{cls}(\theta) = \text{FL}(S_i(\theta), Y_j) \quad (1.5)$$

ở đây  $Y_j$  biểu thị là nhãn nhị phân thật sự (ground-truth) và  $FL()$  ở đây là hàm mất mát Focal (Focal loss). Kết quả có được là hàm mất mát dành cho bao lỗi dương:

$$\mathcal{L}_i^+(\theta) = \mathcal{L}_i^{cls}(\mathcal{S}_i(\theta), Y_j) + \lambda \mathcal{L}_i^{loc}(\mathcal{C}_i(\theta), \mathcal{B}_j) \quad (1.6)$$

Hàm mất mát 1.6 là tổng của hàm mất mát vị trí 1.4 và hàm mất mát phân loại 1.5. Hàm mất mát dành cho bao lỗi âm là:

$$\mathcal{L}_i^-(\theta) = \mathcal{L}_i^{cls}(\mathcal{S}_i(\theta), Y_j) \quad (1.7)$$

Ngoài ra, trong quá trình huấn luyện (Hình 1.2), vì các bao lỗi được ban đầu chỉ được sinh ra bằng cách tối ưu CIOU, một hàm loss cần được định nghĩa cho việc giám sát:

$$\mathcal{L}^{\det 1}(\theta) = \frac{1}{J} \sum_i \mathbb{I}_{(x_i, y_i)} \mathcal{L}_i^{loc}(\theta) \quad (1.8)$$

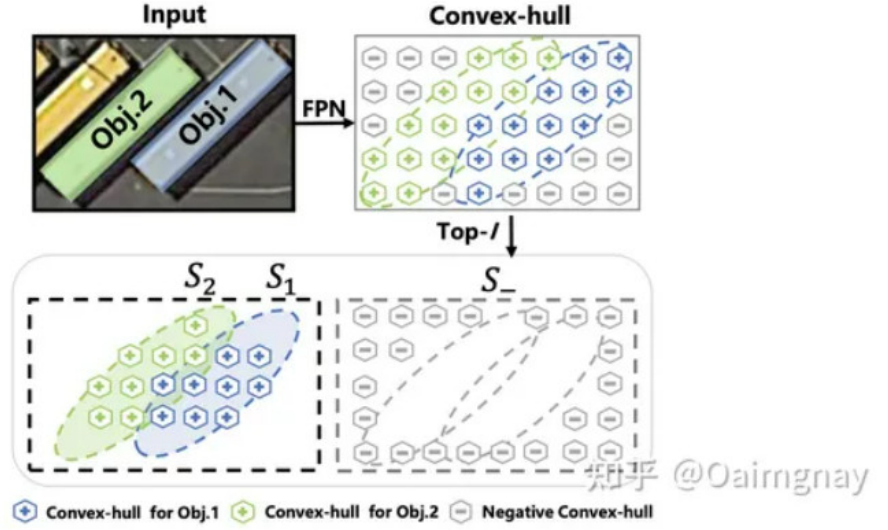
Nhìn chung, trong giai đoạn đầu tiên của việc sinh bao lỗi, hàm mất mát  $\mathcal{L}^{\det 1}$  bên trên là hàm cần được quan tâm. Trong giai đoạn 2, hai hàm mất mát phân lớp (1.7 và 1.6) sẽ được sử dụng để phân loại bao lỗi

## 1.7 Thích ứng bao lỗi

Phương pháp biểu diễn bằng bao lỗi giúp định vị đối tượng ở bất kỳ hình dạng nào, tuy nhiên vẫn có một vấn đề, làm thế nào để định vị một cách chính xác các đối tượng dày đặc, đặc biệt là các đối tượng có đặc trưng răng cưa. Vì vậy bộ phát hiện CFA đã đề xuất một phương pháp thích ứng mới để tinh chỉnh các bao lỗi sinh ra ở giai đoạn 1 để đạt được vị trí chính xác hơn và phân lớp hiệu quả hơn.

### 1.7.1 Xây dựng tập các bao lỗi

Bộ phát hiện cho xây dựng một tập các bao lỗi với mỗi đối tượng, để một đối tượng mục tiêu có thể khớp với nhiều bao lỗi phù hợp để cùng nhau tối ưu các đặc trưng của các đối tượng dày đặc.



Hình 1.8: xây dựng tập các bao lồi để biểu diễn các đối tượng, đặc biệt với những đối tượng phân bố dày đặc

Với mỗi mục tiêu, ý tưởng xây dựng tập bao lồi tương ứng là: theo như hệ số CIoU giữa bao lồi dự đoán và bao lồi thực tế, chọn  $I$  bao lồi đứng đầu là ứng cử viên cho bao lồi dương để xây dựng tập các bao lồi. Ngoài ra cũng có thể xây dựng tập bao lồi sử dụng ngưỡng CIoU xác định bằng thực nghiệm. Các bao lồi còn lại không thuộc vào bất kỳ tập bao lồi nào sẽ được gộp lại thành tập bao lồi âm  $S$ .

$$\mathcal{L}_{S_j}^+(\theta) = \frac{1}{|S_j|} \sum_{i \in S_j} \omega_i \mathcal{L}_i^+(\theta) \quad (1.9)$$

Khi nhiều đối tượng tập hợp lại cùng nhau, không phải tất cả các bao lồi nằm trong tập bao lồi đều phù hợp với đối tượng, và các bao lồi có đặc trưng rằng cửa sẽ phải được phân loại thành tập các bao lồi âm. Cùng thời điểm đó, các bao lồi được chia sẻ bởi nhiều đối tượng phải phải có độ tin cậy thấp hơn.

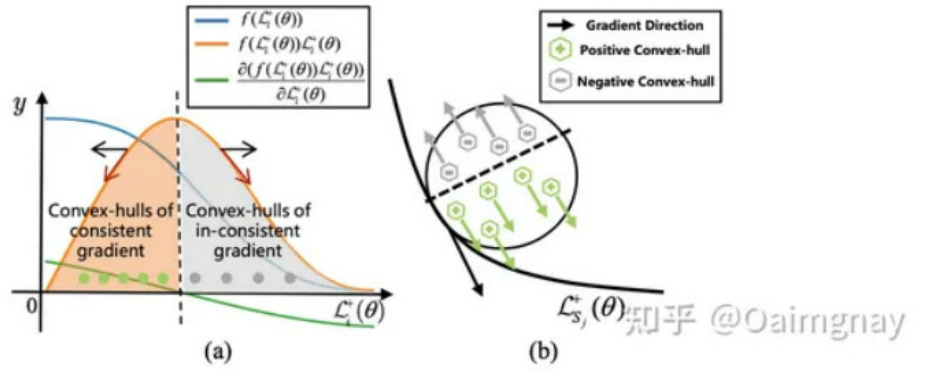
### 1.7.2 Chiến lược phân đoạn tập các bao lồi

Để giải quyết vấn đề đặc trưng rằng cửa ở các đối tượng dày đặc, bộ phát hiện CFA đề xuất chiến lược phân đoạn tập các bao lồi để đánh giá động các mẫu bao lồi âm và mẫu dương, chuyển đổi trọng số  $\omega_i$  thành  $f(L_i^+(\theta))$ . Sau khi

thay thế, được công thức sau:

$$\mathcal{L}_{s_j}^+(\theta) = \frac{1}{|S_j|} \sum_{i \in S_j} f(\mathcal{L}_i^+(\theta)) \mathcal{L}_i^+(\theta) \quad (1.10)$$

Trong đó:  $f$  là hàm lỗi đơn điệu giảm phân phối Gaussian:  $f(x) = 1.0 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$ , có nghĩa là giá trị mất càng nhỏ, độ tin cậy càng cao.



Hình 1.9: Phân chia tập bao lỗi theo hướng dẫn của nguyên tắc nhất quán độ dốc.

Nguyên tắc phân chia tập bao lỗi là nguyên tắc nhất quán độ dốc. Bằng cách lấy đạo hàm của công thức công thức 1.10, ta có được:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{s_j}^+(\theta)}{\partial \theta} = \frac{1}{|S_j|} \sum_{i \in S_j} \frac{\partial (f(\mathcal{L}_i^+(\theta)) \mathcal{L}_i^+(\theta))}{\partial \mathcal{L}_i^+(\theta)} \frac{\partial \mathcal{L}_i^+(\theta)}{\partial \theta} \quad (1.11)$$

Tiêu chí để thực hiện phân đoạn tập các bao lỗi là: đạo hàm của mỗi một bao lỗi dương  $\frac{\partial \mathcal{L}_i^+(\theta)}{\partial \theta}$  yêu cầu đạo hàm của toàn bộ tập bao lỗi  $\frac{\partial \mathcal{L}_{s_j}^+(\theta)}{\partial \theta}$  là nhất quán. Điều này có nghĩa là: bao lỗi nào có độ dốc không nhất quán được xem là bao lỗi âm, tức là những bao lỗi này sẽ dẫn đến hiện tượng răng cưa đặc trưng. Xem xét công thức 1.11, nếu  $\frac{\partial (f(\mathcal{L}_i^+(\theta)) \mathcal{L}_i^+(\theta))}{\partial \mathcal{L}_i^+(\theta)}$  mang giá trị dương, thì bao lỗi  $\mathcal{L}_i$  được xếp là bao lỗi dương, hoặc ngược lại bao lỗi sẽ là âm. Xem xét hình 1.9, khi sắp xếp các giá trị mất mát  $\frac{\partial \mathcal{L}_i^+(\theta)}{\partial \theta}$  theo thứ tự tăng dần,  $f(\mathcal{L}_i^+(\theta)) \mathcal{L}_i^+(\theta)$  (đường màu cam) là một hàm lỗi hướng lên với một cực trị duy nhất, trong khi đường  $\frac{\partial (f(\mathcal{L}_i^+(\theta)) \mathcal{L}_i^+(\theta))}{\partial \mathcal{L}_i^+(\theta)}$  (màu xanh lục) chia các bao lỗi thành tập các bao lỗi dương  $S_j$  và tập bao lỗi âm  $S_-$ .

Cùng thời điểm đó, để xử lý đặc trưng răng cưa, tác giả cũng giới thiệu hệ số chống đặc trưng răng cưa:

$$p_i = \gamma \frac{\text{CIoU}(\mathcal{C}_i, \mathcal{B}_j)}{\sum_{m=1}^M \text{CIoU}(\mathcal{C}_i, \mathcal{B}_j)} \quad (1.12)$$

Hệ số này thể hiện mức độ mà một đối tượng thuộc về một đối tượng duy nhất, khi nó chồng lên M đối tượng khác.  $\gamma$  là hệ số chống đặc trưng răng cưa. Hàm mất mát được cập nhật thành:

$$\mathcal{L}_{s_j}^+(\theta) = \frac{1}{|S_j|} \sum_{i \in S_j} p_i f(\mathcal{L}_i^+(\theta)) \mathcal{L}_i^+(\theta) \quad (1.13)$$

Giai đoạn 2 của quá trình tối ưu được điều khiển bởi hàm mất mát trên tập bao lỗi, hàm này được xác định bằng cách kết hợp hàm mất mát phân loại và hàm mất mát vị trí:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{\text{det}2}(\theta) = & \frac{1}{J} \sum_{j=1}^J \frac{1}{|S_j|} \sum_{i \in S_j} p_i f(\mathcal{L}_i^+(\theta)) \mathcal{L}_i^+(\theta) \\ & + \frac{1}{|S_-|} \sum_{i \in S_-} \mathcal{L}_i^-(\theta) \end{aligned} \quad (1.14)$$

Hàm mất mát này xem xét sự tương ứng về đặc trưng của nhiều đối tượng, tiến hành phạt các bao lỗi được chia sẻ bởi nhiều đối tượng, và giảm thiểu đặc trưng răng cưa để đạt được thích ứng đặc trưng tối ưu. Cuối cùng hàm mất mát của toàn bộ bộ phát hiện CFA là:

$$L^{\text{det}1}(\theta) + L^{\text{det}2}(\theta) \quad (1.15)$$

## Chương 2

# Thuật toán tính bao lồi xấp xỉ

Thuật toán tìm bao lồi xấp xỉ nhận đầu vào là một tập các điểm ngẫu nhiên, đầu ra trả về 1 tập điểm biểu diễn một bao lồi bao quanh tất cả các điểm còn lại. Với ngưỡng  $\delta$  tùy chỉnh, sẽ cho ra được dạng bao lồi khác nhau. Lưu ý, đây là thuật toán mới còn chưa được công bố rộng rãi.

### 2.1 Outer convex approximation

Cho:

$$X := \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset \mathbb{R}^2 \quad (2.1)$$

Giả sử không mất tính tổng quát rằng

$$x_1, x_2, \dots, x_n \text{ không cùng nằm trên cùng một đường thẳng.} \quad (2.2)$$

Ta viết tất cả các vector thành dạng vector hàng, những vector này sẽ có chuyển vị của chúng được ký hiệu bởi chỉ số trên  $T$ , và sử dụng chỉ số trên để chỉ định các thành phần của chúng, ví dụ:  $x = (x^1, x^2) \in \mathbb{R}^2$ . Cho  $x, x' \in \mathbb{R}^2$ , chúng ta có:

$$\begin{aligned} [x, x'] &:= \{(1 - \lambda)x + \lambda x' \mid \lambda \in [0, 1]\} \\ (x, x') &:= \{(1 - \lambda)x + \lambda x' \mid \lambda \in (0, 1)\} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Cho  $X$  thỏa mãn (2.1) - (2.2) và  $\delta \geq 0$ , trong phần này em muốn tìm một bao lồi xấp xỉ của  $X$ , nghĩa là:

$$\text{Một đa giác lồi } \mathcal{P}^{outer} \text{ thỏa mãn bao lồi } X \subset \mathcal{P}^{outer} \quad (2.4)$$

sao cho

$$\text{dist}_H(\text{conv } X, \mathcal{P}^{outer}) \leq \delta \quad (2.5)$$

$\mathcal{P}^{outer}$  được xác định bởi:

$$\mathcal{P}^{outer} := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid dx^T \leq \beta_d \text{ với tất cả } d \in D\} \quad (2.6)$$

Trong đó  $D \subset \mathbb{R}^k$  biểu thị tập các hướng tối đa và  $\beta_d \in \mathbb{R}$  biểu thị ngưỡng tương ứng với hướng  $d \in D$ . Với  $D$  cho trước,  $\mathcal{P}^{outer}$  là bao lồi xấp xỉ phù hợp nhất chứa  $X$  nếu:

$$\beta_d := \max_{x \in X} dx^T \text{ với tất cả } d \in D \quad (2.7)$$

Cho  $P$  là tập các đỉnh của  $\mathcal{P}^{outer}$ . Ta bắt đầu quá trình xác định bao lồi xấp xỉ ngoài với hình chữ nhật nhỏ nhất có chứa  $X$ , tập  $X$  này có chứa cạnh song song với trục tọa độ. Theo công thức (2.5) - (2.6), hình chữ nhật  $\mathcal{P}^{outer}$  được xác định bởi:

$$D := \{(1, 0), (0, 1), (-1, 0), (0, -1)\} \quad (2.8)$$

và:

$$\begin{aligned} \beta_{(1,0)} &:= \max \{x^1 \mid (x^1, x^2) \in X\}, \\ \beta_{(0,1)} &:= \max \{x^2 \mid (x^1, x^2) \in X\}, \\ \beta_{(-1,0)} &:= \max \{-x^1 \mid (x^1, x^2) \in X\}, \\ \beta_{(0,-1)} &:= \max \{-x^2 \mid (x^1, x^2) \in X\}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Theo công thức (2.2) ta có:

$$\beta_{(-1,0)} < \beta_{(1,0)} \quad \text{và} \quad \beta_{(0,-1)} < \beta_{(0,1)}$$

Vì vậy,  $\mathcal{P}^{outer}$  là một hình chữ nhật phù hợp với 4 đỉnh phân biệt, có tập đỉnh là:

$$P := \{r_1, r_2, r_3, r_4\} \quad (2.10)$$

Trong đó:

$$\begin{aligned} r_1 &:= (\beta_{(1,0)}, \beta_{(0,1)}), \\ r_2 &:= (\beta_{(-1,0)}, \beta_{(0,1)}), \\ r_3 &:= (\beta_{(-1,0)}, \beta_{(0,-1)}), \\ r_4 &:= (\beta_{(1,0)}, \beta_{(0,-1)}). \end{aligned} \quad (2.11)$$



Trong các bước xấp xỉ tiếp theo, việc xây dựng đa giác  $P^{outer}$  lần lượt được cải thiện như sau:

Với 1 đỉnh  $p \in P$ , cho  $p^- \in P$  và  $p^+ \in P$  lần lượt là

điểm liền trước ngược chiều kim đồng hồ và điểm liền sau của  $p \in P$ . (2.12)

Ta có công thức sau:

$$\begin{aligned} d_p^T &:= \|p^+ - p^-\|^{-1} R(p^+ - p^-)^T, \\ \beta_{d_p} &:= \max\{d_p x^T \mid x \in X\}, \end{aligned} \quad (2.13)$$

Trong đó:

$$R := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

là ma trận xoay chiều theo hướng kim đồng hồ với góc xoay  $\pi/2$ . Vì  $R$  là ma trận xoay, ta có:

$$\|d_p\| = \|p^+ - p^-\|^{-1} \|(p^+ - p^-)R^T\| = \|p^+ - p^-\|^{-1} \|p^+ - p^-\| = 1. \quad (2.15)$$

Sẽ có hai trường hợp xảy ra khi ta thêm các ràng buộc tuyến tính sau đây vào định nghĩa của  $P^{outer}$  trong công thức (2.6):

$$d_p x^T \leq \beta_{d_p}. \quad (2.16)$$

Đầu tiên, nếu:

$$\beta_{d_p} = d_p p^+ \quad (2.17)$$

thì công thức (2.15) không tạo thêm đỉnh mới nhưng sẽ thêm 2 cạnh mới  $[p^-, p^+]$  của  $\mathcal{P}^{outer}$ . Cho  $d_{[p^-, p]}$  và  $d_{[p, p^+]}$  biểu thị 2 hướng cực đại từ  $D$ , định nghĩa hai cạnh  $[p^-, p]$  và  $[p, p^+]$  của  $\mathcal{P}^{outer}$ . Sau đó  $d_{[p^-, p]}$  and  $d_{[p, p^+]}$  sẽ trở nên vô dụng. Vì vậy, trong khi thêm  $d_p$  vào tập  $D$  cần phải loại bỏ  $d_{[p^-, p]}$  và  $d_{[p, p^+]}$  và  $p$  trong  $P$ , nghĩa là:

$$\begin{aligned} D &:= (D \cup \{d_p\}) \setminus \{d_{[p^-, p]}, d_{[p, p^+]}\}, \\ P &:= P \setminus \{p\}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Thứ hai, nếu

$$\beta_{d_p} > d_p p^+ \quad (2.19)$$

và:

$$d_p p^T - \beta_{d_p} > \delta \quad (2.20)$$

thì ràng buộc mới (2.16) tạo ra hai đỉnh mới của  $\mathcal{P}^{\text{outer}}$  có tên  $\hat{p}^-$  và  $\hat{p}^+$  sẽ được tính như sau:

$$\begin{aligned}\lambda_p &:= (\beta_{d_p} - d_p p^{-T}) / (d_p p^T - d_p p^{-T}) \in (0, 1), \\ \hat{p}^- &:= (1 - \lambda_p) p^{-T} + \lambda_p p^T, \\ \hat{p}^+ &:= (1 - \lambda_p) p^{+T} + \lambda_p p^T.\end{aligned}\tag{2.21}$$

Do đó, ta sẽ cộng  $d_p$  vào  $D$  và thay  $p \in P$  bằng  $\hat{p}^-$  và  $\hat{p}^+$ .

$$\begin{aligned}D &:= D \cup \{d_p\}, \\ P &:= (P \setminus \{p\}) \cup \{\hat{p}^-, \hat{p}^+\}.\end{aligned}\tag{2.22}$$

Quy trình xấp xỉ được mô tả trong thuật toán sau, trong đó  $P_{\text{doubt}}$  biểu thị tập hợp các đỉnh vẫn cần được kiểm tra.

---

### Thuật toán 1

---

*Input:* Tập hữu hạn  $X \subset \mathbb{R}^2$  và tham số xấp xỉ  $\delta \geq 0$ .

*Output:* Đa giác xấp xỉ lồi  $\mathcal{P}^{\text{outer}}$  được xác định ở công thức (2.6) bởi  $D$  và  $\beta_d$  cho  $d \in D$  và tập đỉnh  $P$ .

1. Xác định  $D$ ,  $\beta_d$  với  $d \in D$ , và  $P$  theo (2.8)–(2.11).
2. Đặt  $P_{\text{doubt}} := P$ .
3. Chọn ngẫu nhiên một đỉnh  $p \in P_{\text{doubt}}$  và tham chiếu lên  $d_p$ ,  $\beta_{d_p}$  theo (2.12)–(2.14).  
Nếu (2.17) là đúng thì thay đổi  $D$ ,  $P$  như (2.18), và cập nhật

$$P_{\text{doubt}} := P_{\text{doubt}} \setminus \{p, p^-, p^+\},\tag{2.23}$$

Và đi tới bước 4.

Nếu (2.20) là đúng thì thay đổi  $D$ ,  $P$  như (2.22), cập nhật

$$P_{\text{doubt}} := (P_{\text{doubt}} \setminus \{p\}) \cup \{\hat{p}^-, \hat{p}^+\},\tag{2.24}$$

Và đi tới bước 4.

Nếu không thì,

$$P_{\text{doubt}} := P_{\text{doubt}} \setminus \{p\}.\tag{2.25}$$

4. Nếu  $P_{\text{doubt}}$  chưa rỗng thì quay lại bước 3.
  5. Trả về tập hợp các hướng cực đại  $D$  và  $\beta_d$  với  $d \in D$ , tập đỉnh  $P$  của  $\mathcal{P}^{\text{outer}}$ , và kết thúc thuật toán.
- 

Với (2.6) - (2.7), mỗi cạnh  $[p, p^+]$  của  $\mathcal{P}$  chứa ít nhất một điểm của tập  $X$ . Do đó, (2.11) suy ra:

$$\beta_{d_p} \geq d_p p^- = d_p p^+.$$

Do đó, nếu (2.17) sai thì (2.19) hiển nhiên đúng. Điều này giải thích tại sao (2.19) không cần kiểm tra cùng với (2.20) ở bước 3. Thuật toán 1 có thể nhanh chóng tạo ra một đa giác lồi xấp xỉ  $\mathcal{P}^{\text{outer}}$  với  $d_p p^T - \beta_{d_p} \leq \delta$  với tất cả  $p \in P$ . Tính chất này là cần thiết nhưng không đủ cho (2.5). Để đảm bảo (2.5), trong thuật toán tiếp theo chúng ta cũng kiểm tra xem nếu

$$\|p - x\| > \delta \text{ với mọi } x \in X_p, \quad \text{trong đó} \quad (2.26)$$

$$X_p := \{x \in X \mid d_p x^T = \beta_{d_p}\}.$$

---

### Thuật toán 2

---

*Input:* Tập hữu hạn  $X \subset \mathbb{R}^2$  và tham số xấp xỉ  $\delta \geq 0$ .

*Output:* Đa giác xấp xỉ lồi  $\mathcal{P}^{\text{outer}}$  được xác định ở công thức (2.6) bởi  $D$  và  $\beta_d$  cho  $d \in D$  và tập đỉnh  $P$ .

1. Xác định  $D, \beta_d$  với  $d \in D$ , và  $P$  theo (2.8)–(2.11).
2. Đặt  $P_{\text{doubt}} := P$ .
3. Chọn ngẫu nhiên một đỉnh  $p \in P_{\text{doubt}}$  và tham chiếu lên  $d_p, \beta_{d_p}$  theo (2.12)–(2.14).  
Nếu (2.17) là đúng thì thay đổi  $D, P$  như (2.18), và cập nhật

$$P_{\text{doubt}} := P_{\text{doubt}} \setminus \{p, p^-, p^+\}, \quad (2.27)$$

Và đi tới bước 4.

Nếu (2.20) là đúng thì thay đổi  $D, P$  như (2.22), và cập nhật

$$P_{\text{doubt}} := (P_{\text{doubt}} \setminus \{p\}) \cup \{\hat{p}^-, \hat{p}^+\}, \quad (2.28)$$

Và đi tới bước 4.

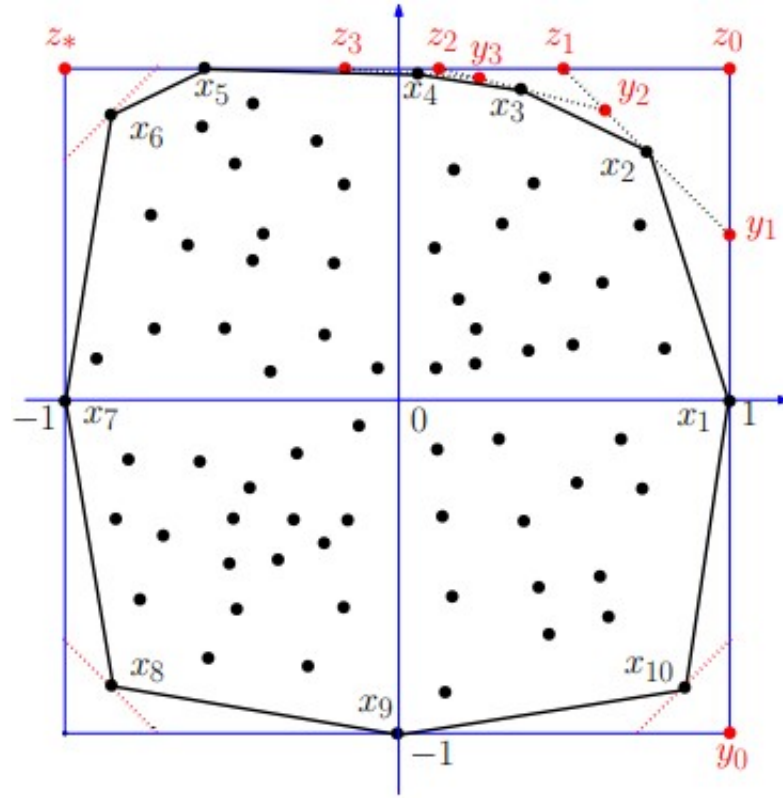
Nếu (2.26) là đúng thì thay đổi  $D, P$  như (2.22), và cập nhật  $P_{\text{doubt}}$  theo (2.28), và đi tới bước 4.

Nếu không thì cập nhật,

$$P_{\text{doubt}} := P_{\text{doubt}} \setminus \{p\}. \quad (2.29)$$

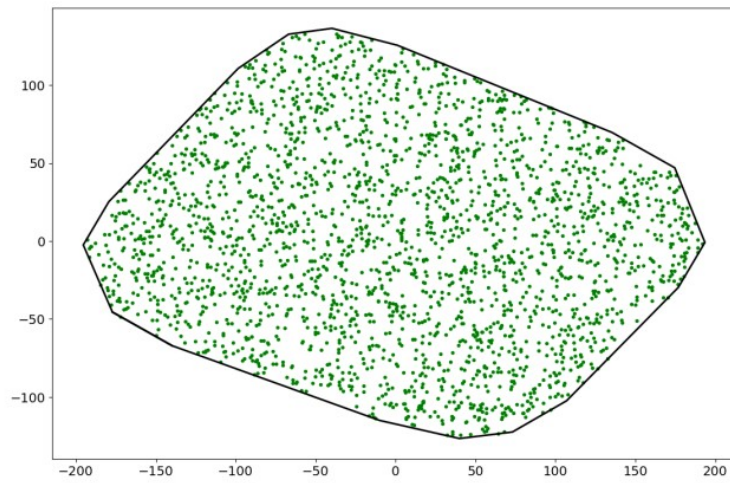
4. Nếu  $P_{\text{doubt}}$  chưa rỗng thì quay lại bước 3.
  5. Trả về tập hợp các hướng cực đại  $D$  và  $\beta_d$  với  $d \in D$ , tập đỉnh  $P$  của  $\mathcal{P}^{\text{outer}}$ , kết thúc thuật toán.
- 

Để minh họa tác dụng của thuật toán 1–2, chúng ta hãy coi  $X$  là một tập hợp  $n$  các điểm ngẫu nhiên trong đa giác khung 16 cạnh  $\mathcal{P}^\diamond$  được thể hiện trong



Hình 2.1:  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  with  $\text{conv}X = \text{conv}\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$  and  $m = 10$ .

hình 2.2.



Hình 2.2: 16-sided frame polygon  $\mathcal{P}^\diamond$  of  $n$  random points.

Bảng 2.2 cho thấy một số kết quả thử nghiệm, trong đó

- $\#_{\text{Edges@Alg.1}}$  là số cạnh của đa giác xấp xỉ lồi bao ngoài  $\mathcal{P}^{\text{outer}}$  được trả về bởi thuật toán 1,
- $\#_{\text{Edges@Alg.2}}$  là số cạnh của đa giác xấp xỉ lồi bao ngoài  $\mathcal{P}^{\text{outer}}$  được trả về bởi thuật toán 2,
- $\#_{\text{Step III@Alg.1}}$  là số lần thực hiện của bước 3 trong thuật toán 1
- $\#_{\text{Step III@Alg.2}}$  là số lần thực hiện của bước 3 trong thuật toán 2.

$\#X = n$		50	500	1000	2500	5000	7500	9000
$\delta = 70$	Edges@Alg.1	4	5	5	5	5	5	5
	Edges@Alg.2	5	5	5	5	5	5	5
	Step III@Alg.1	4	6	6	6	6	6	6
	Step III@Alg.2	6	6	6	6	6	6	6
$\delta = 10$	Edges@Alg.1	10	13	14	14	11	11	11
	Edges@Alg.2	15	23	21	28	28	36	39
	Step III@Alg.1	16	22	24	24	18	18	18
	Step III@Alg.2	40	47	44	68	58	76	86
$\delta = 1$	Edges@Alg.1	21	32	28	36	33	32	32
	Edges@Alg.2	13	26	33	45	49	53	50
	Step III@Alg.1	48	64	58	70	62	60	60
	Step III@Alg.2	48	92	108	136	166	156	160
$\delta = 0$	Edges@Alg.1	13	25	30	40	45	44	45
	Edges@Alg.2	13	25	30	40	45	44	45
	Step III@Alg.1	48	96	116	156	176	172	175
	Step III@Alg.2	48	96	116	156	176	172	175

Bảng 2.1: Số cạnh và số bước 3 lặp lại của từng giải thuật Outer Convex Approximation

*do giải thuật 3 chưa có code nên hiện tại bảng vẫn còn trống*

**LƯU Ý: (Liên quan đến bảng 2.2):**  $n$  điểm ngẫu nhiên trong bảng 2.2 phải được tạo ra trong đa giác  $\mathcal{P}^\diamond$  với khung 16 cạnh như trong hình 2.2.

Nếu số điểm  $n$  của  $X$  rất lớn thì việc tính toán  $\beta_{d_p}$  xác định trong (2.13) sẽ tốn kém, có thể giảm đáng kể như sau. Lấy bốn điểm  $q_1, q_2, q_3$ , và  $q_4$  của  $X$  nằm

#X = n		???	???	???	???	???	???	???	???	???	???	???
$\delta = ???$	#Edges@Alg. 1	???	???	???	???	???	???	???	???	???	???	???
	#Edges@Alg. 2	???	???	???	???	???	???	???	???	???	???	???
	#Step III@Alg. 1	???	???	???	???	???	???	???	???	???	???	???
	#Step III@Alg. 2	???	???	???	???	???	???	???	???	???	???	???
$\delta = ???$	#Edges@Alg. 1	???	???	???	???	???	???	???	???	???	???	???
	#Edges@Alg. 2	???	???	???	???	???	???	???	???	???	???	???
	#Step III@Alg. 1	???	???	???	???	???	???	???	???	???	???	???
	#Step III@Alg. 2	???	???	???	???	???	???	???	???	???	???	???
$\delta = ???$	#Edges@Alg. 1	???	???	???	???	???	???	???	???	???	???	???
	#Edges@Alg. 2	???	???	???	???	???	???	???	???	???	???	???
	#Step III@Alg. 1	???	???	???	???	???	???	???	???	???	???	???
	#Step III@Alg. 2	???	???	???	???	???	???	???	???	???	???	???
$\delta = 0$	#Edges@Alg. 1	???	???	???	???	???	???	???	???	???	???	???
	#Edges@Alg. 2	???	???	???	???	???	???	???	???	???	???	???
	#Step III@Alg. 1	???	???	???	???	???	???	???	???	???	???	???
	#Step III@Alg. 2	???	???	???	???	???	???	???	???	???	???	???

Bảng 2.2: Số cạnh của đa giác lồi xấp xỉ  $\mathcal{P}^{\text{outer}}$  được trả về bởi thuật toán 1–2 và số lần thực hiện của bước 3 khi  $X$  gồm  $n$  điểm ngẫu nhiên trong khung 16 cạnh đa giác  $\mathcal{P}^\circ$  thể hiện trong hình 2.2.

trên bốn cạnh của hình chữ nhật ban đầu  $\mathcal{P}^{\text{outer}}$ , tức là.

$$q_1, q_2, q_3, q_4 \in X \quad (2.30)$$

and

$$\begin{aligned} (1, 0) q_1^T &= \beta_{(1,0)}, \\ (0, 1) q_2^T &= \beta_{(0,1)}, \\ (-1, 0) q_3^T &= \beta_{(-1,0)}, \\ (0, -1) q_4^T &= \beta_{(0,-1)}. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Với  $j \in \{1, 2, 3, 4\}$  và  $q_5 := q_1$ , nếu  $q_j \neq q_{j+1}$  thì xác định

$$X_j := \{x \in X \mid \bar{d}_{[q_j, q_{j+1}]}(x - q_j)^T \geq 0\}, \quad (2.32)$$

Trong đó

$$\bar{d}_{[q_j, q_{j+1}]}^T := \|q_{j+1} - q_j\|^{-1} R(q_{j+1} - q_j)^T. \quad (2.33)$$

Trong thuật toán tiếp theo,  $X$  trong (2.12) và (2.26) được thay thế bằng  $X_j$ , tức là

$$\begin{aligned} d_p^T &:= \|p^+ - p^-\|^{-1} R(p^+ - p^-)^T, \\ \beta_{d_p} &:= \max\{d_p x^T \mid x \in X_j\}, \end{aligned} \quad (2.34)$$

và

$$\begin{aligned} \|p - x\| &> \delta \text{ với mọi } x \in X_p, \text{ trong đó} \\ X_p &:= \{x \in X_j \mid d_p x^T = \beta_{d_p}\}, \end{aligned} \quad (2.35)$$

Với  $j \in \{1, 2, 3, 4\}$ .

Bảng 2.1 và hình 2.3 cho thấy một số kết quả thử nghiệm về thời gian chạy của thuật toán 2–3 khi  $X$  bao gồm  $n$  điểm ngẫu nhiên trong đa giác khung 16 cạnh của  $\mathcal{P}^\diamond$  được hiển thị trong hình ??, trong đó

- $T_{\text{Alg. 2}}$  là thời gian chạy trung bình của thuật toán 2,
- $T_{\text{Alg. 3}}$  là thời gian chạy trung bình của thuật toán 3.

???

Hình 2.3: Tỷ lệ thời gian chạy của thuật toán 2–3 và số điểm  $n$  của  $X$ .

**LƯU Ý (liên quan đến bảng 2.1 và hình 2.3):**

- $n$  điểm ngẫu nhiên được trình bày ở bảng 2.1 phải được tạo theo phương trình xoay trong đa giác có khung 16 cạnh của  $\mathcal{P}^\diamond$  được hiển thị tổng hình 2.2.
- Chỉ có hai tỷ lệ  $T_{\text{Alg. 2}}/n$  và  $T_{\text{Alg. 3}}/n$  được trình bày trong hình 2.3.

=====

## 2.2 Inner convex approximation

Cho  $X$  thỏa mãn (2.1)–(2.2) và  $\delta \geq 0$ , ở đây ta sẽ tìm một xấp xỉ lồi trong  $\mathcal{P}^{\text{inner}}$  của  $X$ , tức là:

$$\mathcal{P}^{\text{inner}} := \text{conv} X', \text{ với } X' \subset X, \quad (2.37)$$

Thật vậy

$$\text{dist}_H(\text{conv} X, \mathcal{P}^{\text{inner}}) \leq \delta. \quad (2.38)$$

Ta mô tả  $\mathcal{P}^{\text{inner}}$  bởi tập  $E$  của các cạnh có hướng của nó  $[p, p^+]$ , trong đó  $p^+$  là cạnh kế tiếp ngược chiều kim đồng hồ của  $p$ , tức là:

$$E := \{[p, p^+] \mid p, p^+ \in X', [p, p^+] \text{ là một cạnh của } \mathcal{P}^{\text{inner}}\}. \quad (2.39)$$

---

**Thuật toán 3**


---

*Input:* Tập hữu hạn  $X \subset \mathbb{R}^2$  và tham số xấp xỉ  $\delta \geq 0$ .

*Output:* Đa giác xấp xỉ lồi  $\mathcal{P}^{\text{outer}}$  được xác định bởi công thức (2.6) bởi  $D$  và  $\beta_d$  cho  $d \in D$  và tập đỉnh  $P$ .

1. Xác định  $D$ ,  $\beta_d$  với  $d \in D$ ,  $r_j$  theo  $j \in \{1, 2, 3, 4\}$ , và  $P$  bởi (2.8)–(2.11).  
Cho  $j := 1$  và  $q_5 := q_1$ .
2. Nếu  $q_j = q_{j+1}$  thì đi tới bước 5.  
Nếu không thì, xác định  $X_j$  bởi (2.30)–(2.32) và tập  $P_{\text{doubt}} := \{r_j\}$ .
3. Chọn ngẫu nhiên một đỉnh  $p \in P_{\text{doubt}}$  và được xác định ở công thức  $d_p$ ,  $\beta_{d_p}$  bởi (2.12) và (2.34).

Nếu

$$\beta_{d_p} = d_p p^-$$

thì thay đổi  $D$  và  $P$  như (2.18), và cập nhật

$$P_{\text{doubt}} := P_{\text{doubt}} \setminus \{p, p^-, p^+\}$$

và đi tới bước 4.

Nếu

$$d_p p^T - \beta_{d_p} > \delta$$

thì thay đổi  $D$  và  $P$  như (2.22), và cập nhật

$$P_{\text{doubt}} := (P_{\text{doubt}} \setminus \{p\}) \cup \{\hat{p}^-, \hat{p}^+\} \quad (2.36)$$

và đi tới bước 4.

Nếu (2.35) đúng thì thay đổi  $D$ ,  $P$  như (2.22), và cập nhật  $P_{\text{doubt}}$  theo (3), và đi tới bước 4.

Nếu không thì,

$$P_{\text{doubt}} := P_{\text{doubt}} \setminus \{p\}.$$

4. Nếu  $P_{\text{doubt}}$  là khác rỗng thì chuyển sang bước 3.
  5. Nếu  $j < 4$  then  $j := j + 1$  và đi đến bước 2.
  6. Trả về tập hợp các hướng cực đại  $D$  và  $\beta_d$  với  $d \in D$ , và tập đỉnh  $P$  của  $\mathcal{P}^{\text{outer}}$ , và kết thúc thuật toán.
-



Ta bắt đầu quá trình xấp xỉ lỗi trong với tứ giác  $\bar{q}_1\bar{q}_2\bar{q}_3\bar{q}_4$ , tức là:

$$\begin{aligned} X' &:= \{\bar{q}_1, \bar{q}_2, \bar{q}_3, \bar{q}_4\}, \\ E &:= \{[\bar{q}_1, \bar{q}_2], [\bar{q}_2, \bar{q}_3], [\bar{q}_3, \bar{q}_4], [\bar{q}_4, \bar{q}_1]\}, \end{aligned} \quad (2.40)$$

Trong đó  $\bar{q}_1$ ,  $\bar{q}_2$ ,  $\bar{q}_3$ , và  $\bar{q}_4$  là duy nhất và được xác định bởi:

$$\begin{aligned} x_{\min}^1 &:= \min\{x^1 \mid (x^1, x^2) \in X\}, \\ x_{\max}^1 &:= \max\{x^1 \mid (x^1, x^2) \in X\}, \\ x_{\min}^2 &:= \min\{x^2 \mid (x^1, x^2) \in X\}, \\ x_{\max}^2 &:= \max\{x^2 \mid (x^1, x^2) \in X\} \end{aligned} \quad (2.41)$$

Và

$$\begin{aligned} X_{\min}^1 &:= \{(x^1, x^2) \in X \mid x^1 = x_{\min}^1\}, \\ X_{\max}^1 &:= \{(x^1, x^2) \in X \mid x^1 = x_{\max}^1\}, \\ X_{\min}^2 &:= \{(x^1, x^2) \in X \mid x^2 = x_{\min}^2\}, \\ X_{\max}^2 &:= \{(x^1, x^2) \in X \mid x^2 = x_{\max}^2\} \end{aligned} \quad (2.42)$$

Và

$$\begin{aligned} \bar{q}_1 &= (\bar{q}_1^1, \bar{q}_1^2) \in X_{\max}^1 \text{ thỏa mãn } \bar{q}_1^2 = \max\{x^2 \mid (x^1, x^2) \in X_{\max}^1\}, \\ \bar{q}_2 &= (\bar{q}_2^1, \bar{q}_2^2) \in X_{\max}^2 \text{ thỏa mãn } \bar{q}_2^1 = \min\{x^1 \mid (x^1, x^2) \in X_{\max}^2\}, \\ \bar{q}_3 &= (\bar{q}_3^1, \bar{q}_3^2) \in X_{\min}^1 \text{ thỏa mãn } \bar{q}_3^2 = \min\{x^2 \mid (x^1, x^2) \in X_{\min}^1\}, \\ \bar{q}_4 &= (\bar{q}_4^1, \bar{q}_4^2) \in X_{\min}^2 \text{ thỏa mãn } \bar{q}_4^1 = \max\{x^1 \mid (x^1, x^2) \in X_{\min}^2\}. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Lưu ý rằng hai trong số bốn điểm  $\bar{q}_1$ ,  $\bar{q}_2$ ,  $\bar{q}_3$ , và  $\bar{q}_4$  có thể trùng nhau, nhưng (2.2) ngụ ý rằng ít nhất ba trong số chúng khác nhau.

Trong các bước xấp xỉ sau đây, đa giác  $\mathcal{P}^{\text{inner}}$  được xây dựng và cải thiện như sau. Với bất kỳ  $[p, p^+] \in E$  ( $p \neq p^+$ ), ta xác định:

$$\begin{aligned} \bar{d}_{[p, p^+]}^T &:= \|p^+ - p\|^{-1} R(p^+ - p)^T, \\ X_{[p, p^+]} &:= \{x \in X \mid \bar{d}_{[p, p^+]}^T x^T > \bar{d}_{[p, p^+]}^T p^T\}, \end{aligned} \quad (2.44)$$

Với

$$R := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nếu  $X_{[p, p^+]} \neq \emptyset$  thì xác định

$$\begin{aligned} \beta_{[p, p^+]} &:= \max\{\bar{d}_{[p, p^+]}^T x^T \mid x \in X_{[p, p^+]}\}, \\ B_{[p, p^+]} &:= \{x \in X_{[p, p^+]} \mid \bar{d}_{[p, p^+]}^T x^T = \beta_{[p, p^+]}\}. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Nếu

$$\beta_{[p, p^+]} - \bar{d}_{[p, p^+]}^T p^T \leq \delta \quad (2.46)$$

Thì ta không cần phải mở rộng  $\mathcal{P}^{\text{inner}}$  theo hướng  $\bar{d}_{[p, p^+]}$ .

Ngược lại, nếu

$$\beta_{[p,p^+]} - \bar{d}_{[p,p^+]} p^T > \delta \quad (2.47)$$

thì lấy

$$\hat{p} \in B_{[p,p^+]} \text{ thỏa mãn } \|\hat{p} - p\| = \max\{\|x - p\| \mid x \in B_{[p,p^+]}\}, \quad (2.48)$$

Và cập nhật  $X'$  và  $B$  bởi

$$\begin{aligned} X' &:= X' \cup \{\hat{p}\}, \\ E &:= E \cup \{[p, \hat{p}], [\hat{p}, p^+]\}, \end{aligned} \quad (2.49)$$

Và xác định

$$\begin{aligned} X_{[p,\hat{p}]} &:= \{x \in X_{[p,p^+]} \mid \bar{d}_{[p,\hat{p}]} x^T > \bar{d}_{[p,\hat{p}]} p^T\}, \\ X_{[\hat{p},p^+]} &:= \{x \in X_{[p,p^+]} \mid \bar{d}_{[\hat{p},p^+]} x^T > \bar{d}_{[\hat{p},p^+]} \hat{p}^T\}. \end{aligned} \quad (2.50)$$

Lưu ý rằng ta chỉ xem xét  $x \in X_{[p,p^+]}$  trong định nghĩa này của  $X_{[p,\hat{p}]}$  và  $X_{[\hat{p},p^+]}$ , nhưng tất cả  $x \in X$  trong định nghĩa (2.44) của  $X_{[p,p^+]}$ .

Quy trình xấp xỉ được trình bày trong thuật toán sau, trong đó  $E_{\text{doubt}}$  biểu thị tập hợp các cạnh vẫn cần được kiểm tra.

---

#### Thuật toán 4

---

*Input:* Tập hữu hạn  $X \subset \mathbb{R}^2$  và tham số xấp xỉ  $\delta \geq 0$ .

*Output:* Đa giác xấp xỉ lồi trong  $\mathcal{P}^{\text{inner}}$  được mô tả bởi  $X'$  và  $E$ .

1. Xác định  $X'$  và  $E$  theo (2.40)–(2.43).  
 Với mọi  $[p, p^+] \in E$  xác định  $d_{[p,p^+]}$  và  $X_{[p,p^+]}$  theo (2.44).  
 Cho  $E_{\text{doubt}} := E$ .
2. Chọn tùy ý  $[p, p^+] \in E_{\text{doubt}}$ .  
 Nếu  $X_{[p,p^+]} = \emptyset$  thì đặt  $E_{\text{doubt}} := E_{\text{doubt}} \setminus \{[p, p^+]\}$  và đi tới bước 3.  
 Định nghĩa  $\beta_{[p,p^+]}$  và  $B_{[p,p^+]}$  theo (2.45).  
 Nếu (2.46) đúng thì đặt  $E_{\text{doubt}} := E_{\text{doubt}} \setminus \{[p, p^+]\}$  và đi tới bước 3.  
 Trường hợp còn lại, lấy  $\hat{p}$  định nghĩa theo (2.48), và cập nhật  $X'$  và  $E$  theo (2.49), và xác định  $X_{[p,\hat{p}]}$  và  $X_{[\hat{p},p^+]}$  theo (2.50), và đặt

$$E_{\text{doubt}} := (E_{\text{doubt}} \setminus \{[p, p^+]\}) \cup \{[p, \hat{p}], [\hat{p}, p^+]\}.$$

3. Nếu  $E_{\text{doubt}}$  chưa rỗng thì quay lại bước 2.
  4. Trả về  $X'$ ,  $E$ , và kết thúc thuật toán
- 

Bảng 2.3 cho thấy một số kết quả thử nghiệm, trong đó

- $\#Edges@Alg.4$  là số cạnh trung bình của đa giác xấp xỉ lỗi bao ngoài  $\mathcal{P}^{inner}$  được trả về bởi thuật toán 4,
- $\#Step II@Alg.4$  à số lần thực hiện trung bình của bước 2 của thuật toán 4.

$\#X = n$		50	500	1000	2500	5000	7500	9000
$\delta = 300$	$\#Edges@Alg.4$	6	6	6	6	5	6	6
	$\#Step II@Alg.4$	8	8	8	8	8	8	8
$\delta = 150$	$\#Edges@Alg.4$	8	8	8	8	7	8	8
	$\#Step II@Alg.4$	12	12	12	12	12	12	12
$\delta = 10$	$\#Edges@Alg.4$	11	17	16	20	18	17	17
	$\#Step II@Alg.4$	54	54	60	58	58	56	56
$\delta = 0$	$\#Edges@Alg.4$	13	25	30	40	45	44	45
	$\#Step II@Alg.4$	74	146	176	236	266	260	266

Bảng 2.3: Số cạnh trung bình của đa giác lỗi xấp xỉ lỗi trong  $\mathcal{P}^{inner}$  Trả về bởi thuật toán 4 và số lần thực hiện trung bình của bước 2 khi  $X$  gồm  $n$  điểm ngẫu nhiên trong đa giác có khung 16 cạnh  $\mathcal{P}^\diamond$  và được hiển thị trong hình 2.2.

**LƯU Ý (Liên quan đến bảng 2.3):**  $n$  điểm ngẫu nhiên được trình bày trong bảng 2.3 phải được tạo ra trong đa giác có khung 16 cạnh  $\mathcal{P}^\diamond$  và hiển thị trong hình 2.2.

Bảng 2.4 và hình 2.4 thể hiện một số kết quả thực nghiệm về thời gian chạy của thuật toán 2.2 khi  $X$  gồm  $n$  điểm ngẫu nhiên được trình bày trong bảng 2.3 phải được tạo ra trong đa giác có khung 16 cạnh  $\mathcal{P}^\diamond$  hiển thị trong hình 2.2, trong đó

$T_{Alg.4}$  là thời gian chạy trung bình của thuật toán 4.

???

Hình 2.4: Tỷ lệ thời gian chạy của thuật toán 4 với số điểm  $n$  của  $X$ .

$\#X = n$		???	???	???	???	???	???	???	???	???	???	???
$\delta = ???$	$T_{\text{Alg. 4}}$	???	???	???	???	???	???	???	???	???	???	???
	$T_{\text{Alg. 4}}/n$	???	???	???	???	???	???	???	???	???	???	???
$\delta = ???$	$T_{\text{Alg. 4}}$	???	???	???	???	???	???	???	???	???	???	???
	$T_{\text{Alg. 4}}/n$	???	???	???	???	???	???	???	???	???	???	???
$\delta = ???$	$T_{\text{Alg. 4}}$	???	???	???	???	???	???	???	???	???	???	???
	$T_{\text{Alg. 4}}/n$	???	???	???	???	???	???	???	???	???	???	???
$\delta = ???$	$T_{\text{Alg. 4}}$	???	???	???	???	???	???	???	???	???	???	???
	$T_{\text{Alg. 4}}/n$	???	???	???	???	???	???	???	???	???	???	???

Bảng 2.4: Thời gian chạy trung bình  $T_{\text{Alg. 4}}$  thuật toán 4 khi  $X$  gồm  $n$  điểm ngẫu nhiên được trình bày trong bảng 2.3 phải được tạo ra trong đa giác có khung 16 cạnh  $\mathcal{P}^\diamond$  hiển thị trong hình 2.2.

## Chương 3

# Thực nghiệm và kết quả

Chương này trình bày cách thức triển khai của đề án: khởi tạo môi trường chạy, lấy tập dữ liệu DOTA, chuyển đổi thuật toán từ mã Python sang mã C++, thay thế thuật toán mới cho thuật toán cũ, cấu hình file config để thực hiện huấn luyện, một vài kết quả số.

### 3.1 Khởi tạo môi trường chạy

Môi trường được sử dụng trong đề án là Linux, bản phân phối Ubuntu 20.04.06 LTS, sử dụng 2 máy có thông số khác nhau để chạy. Một máy laptop với GTX 1650 4GB RAM và một máy pc RTX 3060 12GB RAM. CUDA Toolkit sử dụng phiên bản 11.6, cài đặt CUDNN.

Do code trong paper BeyondBoundingBox đã không còn tương thích với phiên bản mmdcv hiện đại, tôi đã chuyển qua sử dụng thư viện Mmrotate, một thư viện mới được xây dựng vài tháng gần đây, có triển khai lại paper trên như là một bộ phát hiện mới, có tên là CFA. Thực hiện tải về các thư viện mmdcv==1.7.1, Mmdetection==2.28.2 và Mmrotate==0.3.4. Riêng 2 thư viện mmdcv và mmrotate thì clone git về và xây dựng thư viện từ nguồn (build from source) theo như tài liệu của OpenMMLab. Thư viện mmdcv đóng vai trò cung cấp các phép toán hỗ trợ ở mức thấp (sử dụng code CUDA C++ để lập trình tính toán cho card đồ họa). Thư viện mmdetection là một bộ thư viện chủ đạo (ngoài ra còn có MMYolo) của phòng nghiên cứu Openmmlab, cung cấp nền tảng để xây dựng tiếp một nhánh khác đó chính là thư viện mmrotate.

OpenMMLab là một dự án mã nguồn mở phục vụ cho nghiên cứu học thuật và ứng dụng công nghiệp, bao gồm nhiều chủ đề nghiên cứu trong lĩnh vực thị giác máy tính như: phân loại hình ảnh, phát hiện mục tiêu, phân đoạn mục tiêu, tạo hình ảnh siêu phân giải, và nhiều hơn nữa.

Từ khi được mở cửa vào năm 2018, OpenMMLab đã phát hành hơn 20 thư viện thuật toán, bao gồm hơn 250 cách triển khai thuật toán và 2000 mô hình được huấn luyện trước<sup>1</sup>. OpenMMLab đã thu hút được hơn 60,000+ người theo dõi trên GitHub, với sự tham gia của hơn 1,300 nhà phát triển cộng đồng.

OpenMMLab cung cấp các thư viện chất lượng cao để giảm khó khăn trong việc tái cài đặt thuật toán, tạo ra chuỗi công cụ triển khai hiệu quả hướng đến nhiều backend và thiết bị khác nhau<sup>2</sup>. Dựa trên PyTorch, OpenMMLab phát triển MMEEngine để cung cấp động cơ đào tạo và đánh giá phổ biến, và MMCV để cung cấp các toán tử mạng nơ-ron và biến đổi dữ liệu, phục vụ như một nền tảng cho toàn bộ dự án.

OpenMMLab đã phát hành hơn 30 thư viện thị giác, đã triển khai hơn 300 thuật toán, và chứa hơn 2000 mô hình được huấn luyện trước.

MMCV là một thư viện nền tảng cho nghiên cứu thị giác máy tính cung cấp các chức năng chính như sau:

- xử lý ảnh/video
- trực quan hoá ảnh và nhãn của ảnh
- biến đổi ảnh
- các kiến trúc CNN khác nhau
- triển khai chất lượng cao của các phép tính CUDA phổ biến

MMDetection là một hộp công cụ phát hiện đối tượng chứa tập hợp các phương pháp phát hiện đối tượng phong phú, phân đoạn các thể hiện và phân đoạn toàn cảnh, cũng như các thành phần liên quan và các mô đun. Dưới đây là toàn bộ khung của framework:

- **api** cung cấp các APIs để hỗ trợ suy luận (inference)

- **structures** cung cấp các cấu trúc dữ liệu như bbox, mask, DetDataSample
- **datasets** hỗ trợ nhiều loại dataset khác nhau để phát hiện đối tượng, phân đoạn đối tượng, phân đoạn toàn cảnh
  - **transforms** cung cấp nhiều phép biến đổi làm giàu dữ liệu
  - **samplers** định nghĩa các chiến lược mẫu nạp dữ liệu khác nhau
- **models** là phần quan trọng nhất của bộ phát hiện, chứa các thành phần khác nhau của bộ phát hiện
  - **detectors** định nghĩa tất cả các lớp mô hình phát hiện
  - **data\_preprocessors** tiền xử lý dữ liệu đầu vào của mô hình
  - **backbones** chứa nhiều mạng xương sống khác nhau
  - **nexts** chứa các thành phần cổ khác nhau của bộ phát hiện
  - **dense\_heads** chứa phần đầu của bộ phát hiện thực hiện dự đoán dày đặc
  - **roi\_heads** chứa các phần đầu của bộ phát hiện dự đoán từ RoIs
  - **seg\_heads** chứa nhiều các head dành cho bài toán phân đoạn
  - **losses** chứa các hàm loss khác nhau
  - **task\_modules** cung cấp các module cho các tác vụ phát hiện cụ thể ví dụ: as
  - **layers** cung cấp một vài lớp mạng cơ bản
- **engine** là một phần của các thành phần chạy
  - **runner** cung cấp các thành phần mở rộng của MMEngine's runner
  - **schedulers** cung cấp bộ lập lịch để điều chỉnh các siêu tham số tối ưu mạng
  - **optimizers** cung cấp bộ tối ưu và lớp bao tối ưu
  - **hooks** cung cấp các phần móc kết nối của bộ chạy
- **evaluation** cung cấp các tham số khác nhau để đánh giá hiệu năng của mô hình
- **visualization** dùng để trực quan hoá các kết quả phát hiện



Hình 3.1: Minh họa kết quả hình ảnh output của thư viện Mmrotate.

## 3.2 Tập dữ liệu DOTA

Tập dữ liệu được sử dụng trong đề án chính là tập dữ liệu DOTA v1.0. Tập dữ liệu DOTA được thu thập từ nền tảng Google Earth, GF-2 và vệ tinh JL-1 được cung cấp bởi Trung tâm Trung quốc nghiên cứu dữ liệu vệ tinh và ứng dụng, và các hình ảnh trên không được cung cấp bởi CycloMedia B.V. DOTA bao gồm các ảnh RGB và các ảnh mức xám. Tất cả các ảnh đều được lưu trữ dưới định dạng png. (bổ sung trích dẫn vào đây). Tập dữ liệu DOTA có 3 phiên bản: v1.0, v1.5 và v2.0. Riêng tập dữ liệu v1.0 đã được chia sẵn các tập train, test, val.

Danh mục các đối tượng trong tập DOTA v1.0 bao gồm: *plane*, *ship*, *storage tank*, *baseball diamond*, *tennis court*, *basketball court*, *ground track field*, *harbor*,



*bridge, large vehicle, small vehicle, helicopter, roundabout, soccer ball field and swimming pool.*

Về định dạng nhãn, mỗi đối tượng được gán nhãn bởi một hộp bao có hướng (oriented bounding box - OBB), được ký hiệu là:  $(x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, x_4, y_4)$ . Trong đó  $(x_i, y_i)$  biểu thị đỉnh thứ  $i$  của OBB. Các đỉnh được sắp xếp theo chiều kim đồng hồ. Ảnh 3.2 minh họa trực quan các nhãn. Điểm màu vàng đại diện cho điểm bắt đầu, có nghĩa là: a) góc trái của máy bay, b) góc trái trên cùng của một phương tiện to, c) trung tâm của một sân bóng chày.

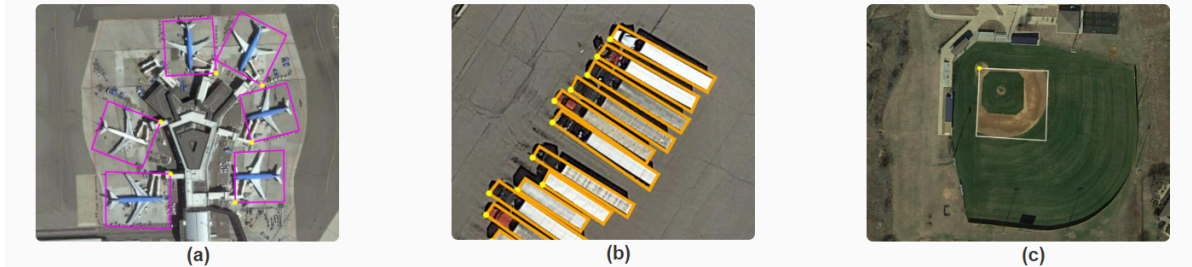
Mỗi một thể hiện trong file nhãn có thêm một danh mục (category) và độ khó (difficult) biểu thị liệu thể hiện này có khó nhận diện hay không (1 là khó, 0 là không khó). Các nhãn của một ảnh được lưu trong một file text với cùng tên file. Mỗi dòng trong file đại diện cho một thể hiện. Ví dụ:

```
x1, y1, x2, y2, x3, y3, x4, y4, category, difficult
x1, y1, x2, y2, x3, y3, x4, y4, category, difficult
...
```

Sau khi download được tập dữ liệu DOTA về máy, thực hiện tiền xử lý dữ liệu. Ở đây sử dụng bộ tool dotadevkit (dùng lệnh `pip install dotadevkit` để cài đặt). Sử dụng lệnh để chia ảnh ra với 8 process, kích thước ảnh 1024 pixels, overlaps 200. Sau khi chia ta có cây thư mục của tập dữ liệu như sau:

```
dota-dataset
├── train_split
│   ├── images
│   │   ├── P001.png
│   │   ├── P003.png
│   │   └── ...
│   ├── labelTxt
│   │   ├── P001.txt
│   │   ├── P002.txt
│   │   └── ...
│   └── images.txt
├── test
│   ├── test_info.json
│   ├── images
│   └── val_split
│       ├── images
│       ├── labelTxt
│       └── images.txt
```

Với labelTxt chứa các file annotation dạng txt của từng ảnh, images là thư mục chứa các ảnh, còn images.txt là thư mục dùng cho việc evaluate bằng dotadevkit.



Hình 3.2: Minh hoạ nhãn hộp bao có hướng của tập dữ liệu DOTA.

### 3.2.1 Các bước thực hiện

Tiếp theo thực hiện cài đặt miniconda, là một phiên bản thu gọn của Anaconda. Sau đó chạy các câu lệnh sau:

Listing 3.1: Mô tả lệnh command line

```
conda create -n mmrotate_v26_beta1 --no-default-packages \
python==3.9 -y
conda activate mmrotate_v26_beta1
conda config --add channels conda-forge
conda install pytorch==1.12.1 torchvision==0.13.1 torchaudio==0.13.1
cudatoolkit=11.6 -c pytorch -c conda-forge
cd mmcv
git checkout v1.7.1
pip install -r requirements/optional.txt
MMCV_WITH_OPS=1 pip install -e . -v
pip install mmdet==2.28.2
cd ../mmrotate
git checkout v0.3.4
pip install -v -e .
conda install packaging
conda install scipy
conda install python-dateutil
pip install future tensorboard
```

Tiếp theo cần phải thay thế code thuật toán mới vào thuật toán Jarvis. Để thay thế được ta cần phải thay thế vào thư viện mmcv, tìm đến kernel `convex_iou_kernel.cuh` để thay thế 2 hàm Jarvis và Jarvis\_and\_index. Hai

hàm này có đầu vào là một mảng các Point tên là `in_poly` đại diện cho số điểm cần tìm bao lồi, `n_poly` đại diện cho số lượng phần tử trong mảng `in_poly`. Đầu tiên thay thế bằng thuật toán Outer Convex Approximation thứ nhất. Thuật toán này có code Python như sau:

Listing 3.2: Mô tả mã nguồn Python

```
# import cac thu vien can thiet
import numpy as np
import math
import matplotlib.pyplot as plt

np.random.seed(42)

# Khoi tao N_square
N_square = 10000

k = 16
count = 0
count1 = 0
count2 = 0
count3 = 0
count4 = 0

def outer_convex_approximation(X, delta):
    # Rotation angle
    alpha = -math.pi / 2

    # Rotation Matrix
    R = np.array([[math.cos(alpha), math.sin(alpha)],
                  [-math.sin(alpha), math.cos(alpha)]])
    # print("Tap X: ", X)
    # Step I: Determine D and P
    D = [(1, 0), (0, 1), (-1, 0), (0, -1)] # khoi tao D
                                         # theo cong thuc (7)

    # cong thuc (8)
    min_x = np.min((X[:, 0]))
    max_x = np.max(X[:, 0])
    min_y = np.min((X[:, 1]))
    max_y = np.max(X[:, 1])

    # r1, r2, r3, r4 duoc dat theo
    # cong thuc (10)
    r1 = (max_x, max_y)
    r2 = (min_x, max_y)
    r3 = (min_x, min_y)
```

```

r4 = (max_x, min_y)

# Khoi tao P theo cong thuc (9)
P = np.array([r1, r2, r3, r4])

# STEP II: gan Pdoubt = P
Pdoubt = P[:]
Ptest = P[:]
global count, count4, count1, count2, count3
# Step III: lap den khi Pdoubt rong
# Dat bien count de xem so lan chay

# Neu so dinh Pdoubt > 0, tiep tuc lap
while Pdoubt.shape[0] > 0:
    count += 1
    pdoubt = Pdoubt[0] # lay gia tri pdoubt thuoc Pdoubt

# Xac dinh diem lien truoc va lien sau
# theo chieu kim dong ho cua pdoubt
pdoubt_index_idx = np.where(
    np.all(Ptest == pdoubt, axis=1))[0][0]
pdoubt_minus = Ptest[(pdoubt_index_idx - 1) % len(Ptest)]
# diem lien truoc
pdoubt_plus = Ptest[(pdoubt_index_idx + 1) % len(Ptest)]
# diem lien sau

# Xac dinh dp
dp = np.dot(R, ((pdoubt_minus - pdoubt_plus).T)) /
    np.linalg.norm(pdoubt_minus - pdoubt_plus)

# xac dinh beta_dp
beta_dp = np.max(np.dot(dp, X.T))

# kiem tra cong thuc (16)

if beta_dp == np.dot(dp, pdoubt_plus):
    count1 += 1
# Loai bo cac phan tu cua mang theo (17)
D.append(dp) # Them dp vao danh sach D

P = np.delete(P, np.where(
    np.all(P == pdoubt, axis=1))[0], axis=0)
Pdoubt = np.delete(Pdoubt, np.where(
    np.all(Pdoubt == pdoubt, axis=1))[0], axis=0)
Ptest = np.delete(Ptest, np.where(
    np.all(Ptest == pdoubt, axis=1))[0], axis=0)

```

```

# Kiem tra (18) va (19)
elif np.dot(dp, pdoubt.T) - beta_dp > delta:
    count2 += 1

# Khoi tao cong thuc (20)
lambda_p = (beta_dp - np.dot(dp, pdoubt_minus.T)) /
            (np.dot(dp, pdoubt.T)
             - np.dot(dp, pdoubt_minus.T)) # lambda_p
p_hat_minus = (1 - lambda_p) * (pdoubt_minus.T)
               + lambda_p * (pdoubt.T) # p^+
p_hat_plus = (1 - lambda_p) * (pdoubt_plus.T)
              + lambda_p * (pdoubt.T) # p^+

D.append((dp[0], dp[1])) # Them dp vao danh sach D
# tim chi so cua pdoubt trong mang Pdoubt
pdoubt_indepx = np.where(np.all(P == pdoubt, axis=1))[0][0]

# tim chi so cua pdoubt trong mang Pdoubt
pdoubt_index = np.where(np.all(Pdoubt == pdoubt, axis=1))[0][0]

# Xoa pdoubt khoi mang Pdoubt va
# them p_hat_minus va p_hat_plus
Pdoubt = np.delete(Pdoubt, pdoubt_index, axis=0)

if np.allclose(p_hat_plus, pdoubt)
    and np.allclose(p_hat_minus, pdoubt):
    count4 += 1
    ptest_index = np.where(
        np.all(Ptest == pdoubt, axis=1))[0][0]
    Ptest = np.concatenate((Ptest[:ptest_index],
                             Ptest[ptest_index + 1:], [Ptest[ptest_index]]))

    else:
    # Xoa pdoubt khoi mang P
    P = np.delete(P, pdoubt_indepx, axis=0)

    # test voi Ptest
    ptest_index = np.where(np.all(Ptest == pdoubt, axis=1))[0][0]
    Ptest = np.delete(Ptest, ptest_index, axis=0)

    if np.allclose(p_hat_plus, pdoubt_plus):
    print("1")
    else:
    P = np.insert(P, pdoubt_indepx, p_hat_plus, axis=0)
    Pdoubt = np.insert(Pdoubt, pdoubt_index, p_hat_plus, axis=0)
    Ptest = np.insert(Ptest, ptest_index, p_hat_plus, axis=0)

```

```

if np.allclose(p_hat_minus, pdoubt_minus):
    print("2")
else:
    P = np.insert(P, pdoubt_index, p_hat_minus, axis=0)
    Pdoubt = np.insert(Pdoubt, pdoubt_index, p_hat_minus, axis=0)
    Ptest = np.insert(Ptest, ptest_index, p_hat_minus, axis=0)

# cac truong hop con lai
else:
    count3 += 1
    Pdoubt = np.delete(Pdoubt, np.where(np.all(Pdoubt == pdoubt, axis=0)
    axis=0) # xoa pboubt khoi Pboubt

    ptest_index = np.where(np.all(Ptest == pdoubt, axis=1))[0]
    Ptest = np.concatenate((Ptest[:ptest_index[0]],
                             Ptest[ptest_index[0] + 1:], [Ptest[ptest_index[0]]]))

# Step V: Tra ve D va P
return D, P

# Kiem tra giai thuat voi du lieu
p1 = np.array([-130.658, -128])
p2 = np.array([-87.522, -128])
p3 = np.array([48.95, -104.547])
p4 = np.array([97.871, -89.647])
p5 = np.array([124.452, -69.508])
p6 = np.array([143.815, -35.205])
p7 = np.array([168, 62.629])
p8 = np.array([168, 96])
p9 = np.array([127.717, 128])
p10 = np.array([82.477, 128])
p11 = np.array([-61.85, 109.243])
p12 = np.array([-102.638, 98.195])
p13 = np.array([-124.269, 81.396])
p14 = np.array([-140.644, 46.529])
p15 = np.array([-168, -67.84])
p16 = np.array([-168, -99.849])

# Liet ke danh sach cac phan tu trong P
P = np.array([p1, p2, p3, p4, p5, p6, p7, p8, p9, p10,
              p11, p12, p13, p14, p15, p16, p1])

alpha = -math.pi / 2

```

```

# Ma tran xoay
R = np.array ([[math.cos(alpha), math.sin(alpha)],
               [-math.sin(alpha), math.cos(alpha)]])

# Xoay mang P
po = np.dot(P, R)

# Determine min, max of p
# cong thuc (8)
x_min = np.nanmin(po[:, 0])
x_max = np.nanmax(po[:, 0])
y_min = np.nanmin(po[:, 1])
y_max = np.nanmax(po[:, 1])

xy_min = [x_min, y_min]
xy_max = [x_max, y_max]

# Khoi tao X
X = np.random.uniform(low=xy_min, high=xy_max,
                       size=(N_square, 2))

def outside(points, a, b):
    res = np.array([])
    nx = b[1] - a[1]
    ny = a[0] - b[0]
    d = nx * a[0] + ny * a[1]
    l = nx * points[:, 0] + ny * points[:, 1]
    res = np.append(res, l - d >= 0)
    return res

# Delete the points outside the polygon to creat a test set
for j in range(k):
    X = np.delete(X, np.where(outside(X[:, :], po[j], po[j + 1])), 0)
X = X[0:50]

delta = 0.0
D, P = outer_convex_approximation(X, delta)
print("=====tap_D=====")
for i in D:
    print(i)
print("=====tap_P=====")
for i in P:
    print(i)
print("So_dinh_P: ", P.shape[0])

```

```

# Plotting
from scipy.spatial import ConvexHull

# Tao cac mang x, y tu tap P
x = P[:, 0]
y = P[:, 1]

# Tim bao loi cua tap diem
points = np.column_stack((x, y))
hull = ConvexHull(points)

# Lay cac diem tren bao loi
convex_points = points[hull.vertices]

# Them diem dau tien va diem cuoi cung
# vao thanh da giac hoan chinh
convex_points = np.vstack((convex_points, convex_points[0]))

# Plotting
fig, ax = plt.subplots(figsize=(8, 8))
ax.plot(X[:, 0], X[:, 1], 'r.')
ax.plot(P[:, 0], P[:, 1], 'r.')
ax.plot(convex_points[:, 0], convex_points[:, 1],
        'k-', linewidth=2)
ax.set_xlabel('X', fontsize=12)
ax.set_ylabel('Y', fontsize=12)
ax.set_title('Outer_Convex_Approximation', fontsize=14)
plt.grid(True)
plt.show()

```

Kết quả của thuật toán trên chạy được như sau:

```

=====tap D=====
(1, 0)
(0, 1)
(-1, 0)
(0, -1)
(0.7961489047057314, 0.6051007532104583)
(0.9616657625387172, 0.2742242898811617)
(0.9970047924756573, 0.07733979428839684)
(0.9997125319367726, 0.023976102447383348)
(0.9991870149267179, 0.04031512373582385)

```



(0.9992238689619551, 0.03939111189978383)  
 (0.9644107585317357, 0.2644085642112263)  
 (0.966079763964431, 0.2582438569616504)  
 (0.8253570386950088, 0.5646111570599768)  
 (0.8281780808160076, 0.5604650448118191)  
 (0.06376934956809235, 0.9979646637309673)  
 [0.167086730.9859422]  
 (-0.9549076761020365, 0.2969028967885088)  
 (-0.3704427977145033, 0.9288552813121382)  
 (-0.027620690279301655, 0.9996184759539485)  
 (-0.00775533544633372, 0.9999699269338628)  
 (-0.9248619391440728, 0.38030302854784814)  
 [-0.861089080.50845413]  
 (-0.9996753207961744, 0.025480443305911808)  
 (-0.9736272479423732, 0.22814465162295683)  
 (-0.7456221090230699, -0.6663690197900778)  
 (-0.9485403472713666, -0.3166562956871619)  
 (-0.9781544815182065, -0.2078793166379199)  
 (-0.9851213832260862, -0.17186000206773738)  
 (-0.9939783191936558, -0.10957691806651215)  
 (-0.9694661381128835, -0.2452252169995803)  
 (-0.2404163108063484, -0.9706698705009161)  
 (-0.41487577608285514, -0.9098780634896353)  
 (-0.6756181530719187, -0.7372517285430326)  
 (-0.1108120877182518, -0.993841376284728)  
 (-0.22747015261849787, -0.9737850531137338)  
 (0.6453245779421027, -0.7639084952426219)  
 (0.43292394969208786, -0.9014304486664528)  
 (0.19846709 -0.98010755)  
 (0.86030391 -0.50978151)

=====tap P=====

[104.33701733 – 84.23781101]  
 [100.4951036113.21899328]  
 [92.9544770241.42817061]  
 [25.06239458141.74974297]  
 [–32.11772958151.44000695]  
 [–111.3467922150.82554052]  
 [–119.19653859137.5316551]  
 [–126.58633802105.99503996]  
 [–119.9541284645.83389818]  
 [–81.45280839 – 106.37608469]  
 [–50.01887509 – 135.18216969]  
 [23.65812963 – 152.39266133]  
 [69.44520875 – 143.12099702]

So dinh P: 13

Thuật toán có mã Python như trên, cần phải chuyển đổi về mã CUDA C++ để thay thế thuật toán Jarvis ở trong thư viện mmcv.

Mã CUDA C++ sẽ được thay thế vào hàm Jarvis của file `cuda_iou_kernel.cuh`.

Trước tiên ta có vài hàm dùng chung như sau:

```
#define MAXN_CUSTOM 99999
#define MAXN 100
#define NMAX 512
#define NMIN -999999

__device__ const double EPS = 1E-8;

__device__ inline int sig(double d)
{ return (d > EPS) - (d < -EPS); }

struct Point {
    double x, y;
    __device__ Point() {}
    __device__ Point(double x, double y) : x(x), y(y) {}
};

//====bat dau sua code tu day=====
// Ham tinh giai thua
__device__ inline double factorial(int n) {
```

```

        if (n == 0 || n == 1) {
            return 1;
        } else {
            return n * factorial(n - 1);
        }
    }
}
// Ham tinh luy thua
__device__ inline double power(double base, int exponent) {
    double result = 1.0;
    for (int i = 0; i < exponent; ++i) {
        result *= base;
    }
    return result;
}
// Ham tinh sin theo phuong phap Taylor
__device__ inline double sin(double x) {
    int terms = 10;
    double result = 0.0;
    for (int n = 0; n < terms; ++n) {
        result += power(-1, n) *
            power(x, 2 * n + 1) / factorial(2 * n + 1);
    }
    return result;
}
__device__ inline double sqrt(double x) {
    if (x < 0) {
        return -1;
    }

    double guess = x / 2;
    double previous_guess = 0;

    while (guess != previous_guess) {
        previous_guess = guess;
        guess = (guess + x / guess) / 2;
    }

    return guess;
}
// Ham tinh cos theo phuong phap Taylor
__device__ inline double cos(double x) {
    return sqrt(1 - sin(x) * sin(x));
}
// tinh max cua hai diem
__device__ inline double f_max(double x, double y) {
    if (x > y) {

```

```

        return x;
    }
    else {
        return y;
    }
}
__device__ inline double fabs(double x) {
    if (x >= 0) {
        return x;
    }
    else {
        return -x;
    }
}

//copy phan tu tu mang nay sang mang khac
__device__ inline void copy_points(
Point* src, Point* dst, int& n_src, int& n_dst) {
    // Sao chep tung phan tu cua mang
    for (int i = 0; i < n_src; i++) {
        if (src[i].x != NMIN && src[i].y != NMIN) {
            dst[i].x = src[i].x;
            dst[i].y = src[i].y;
        }
    }
    //thay doi lai so phan tu cua mang in_poly
    n_dst = n_src;
}

__device__ inline void find_all_point(
Point *P, int n, Point p, int result[]) {
    // khoi tao mang ket qua

    for (int i = 0; i < n; i++) {
        result[i] = NMIN;
    }

    //Khoi tao bien dem
    int count = 0;

    // Duyet qua mang P
    for (int i = 0; i < n; i++) {
        // Neu phan tu P[i] khop voi phan tu can tim
        if (P[i].x == p.x && P[i].y == p.y) {

```

```

        // Them chi so cua phan tu
        // P[i] vao mang ket qua
        result[count++] = i;
    }
}

//chen Point vao Point* theo index
__device__ inline void insert_point_to_index(
    Point* P, int& n, int index, Point p) {
    // Kiem tra index hop le
    if (index < 0 || index > n) {
        return;
    }

    // Di chuyen cac phan tu sau vi tri
    // can chen len 1 vi tri
    for (int i = n; i > index; i--) {
        P[i] = P[i - 1];
    }

    // Chen phan tu vao vi tri can chen
    P[index].x = p.x;
    P[index].y = p.y;

    // Cap nhat kich thuoc cua mang
    n++;
}

//Xoa Point trong mang theo index
__device__ inline void delete_point_by_index(
    Point* P, int& n, int index) {
    // Kiem tra index co hop le
    if (index < 0 || index >= n) {
        return;
    }

    // di chuyen cac phan tu sau phan tu
    // can xoa len mot vi tri
    for (int i = index; i < n - 1; i++) {
        P[i] = P[i + 1];
    }
    P[n - 1].x = NMN;
    P[n - 1].y = NMN;
    // Cap nhat kich thuoc cua mang
    n--;
}

```

```

}

//di chuyen Point xuống cuối mảng
__device__ inline void move_point_to_end(
                                Point* P, int n, int index) {
    // Lưu trữ phần tử cần di chuyển
    Point temp = P[index];

    // Di chuyển các phần tử lên một vị trí
    for (int i = index; i < n - 1; i++) {
        P[i] = P[i + 1];
    }

    // Đặt các phần tử cần di chuyển vào vị trí cuối cùng
    P[n - 1] = temp;
}

//kiểm tra allclose của cả hai Point
__device__ inline bool allclose(
    const Point& p1, const Point& p2,
    double rtol = 1e-5, double atol = 1e-8) {
    // tính độ lệch tương đối của hai phần tử x
    double rel_diff_x = fabs(p1.x - p2.x)
        / (atol + rtol * f_max(fabs(p1.x), fabs(p2.x)));

    //tính độ lệch tương đối của hai phần tử y
    double rel_diff_y = fabs(p1.y - p2.y)
        / (atol + rtol * f_max(fabs(p1.y), fabs(p2.y)));

    // kiểm tra xem cả hai độ lệch tương đối
    // đều nhỏ hơn hoặc bằng 1
    return rel_diff_x <= 1.0 && rel_diff_y <= 1.0;
}

//xóa một Point trong mảng không dùng index
__device__ inline void delete_point(
    Point* P, int& n, Point pdoubt) {
    // Tìm chỉ số của phần tử cần xóa
    int index = -1;
    for (int i = 0; i < n; i++) {
        if (P[i].x == pdoubt.x && P[i].y == pdoubt.y) {
            index = i;
            break;
        }
    }
}

```

```

// Neu tim thay phan tu can xoa
if (index != -1) {
    // di chuyen cac phan tu con lai len tren
    for (int i = index + 1; i < n; i++) {
        P[i - 1] = P[i];
    }

    // Thay the phan tu cuoi cung nullptr
    P[n - 1].x = NMN;
    P[n - 1].y = NMN;
    //giam n di mot don vi
    n--;
}

//tim index cua Point trong mang
__device__ inline int find_index(
    Point* P, int n, Point pdoubt) {
    // Duyet qua tat ca cac phan tu cua P
    for (int i = 0; i < n; i++) {
        // Neu phan tu thu i khop voi pdoubt
        if (P[i].x == pdoubt.x && P[i].y == pdoubt.y) {
            // Tra ve chi so cua phan tu thu i
            return i;
        }
    }

    // Phan tu pdoubt khong ton tai
    return -1;
}

//cong hai ma tran cung chieu voi nhau
__device__ inline void add_two_matrix(
    double A[1][2], double B[1][2],
    int m, int n, double C[1][2]) {

    for (int i = 0; i < m; i++) {
        for (int j = 0; j < n; j++) {
            C[i][j] = 0;
        }
    }
    for (int i = 0; i < m; i++) {
        for (int j = 0; j < n; j++) {
            // Cong cac phan tu
            // tuong ung cua hai ma tran
            C[i][j] = A[i][j] + B[i][j];
        }
    }
}

```

```

    }
}

//nhân ma tran hai chieu voi mot so double
__device__ inline void multiply_matrix_with_double(
    double matrix[1][2], int n, int m,
    double scalar, double result[1][2]) {

    // thuc hien lap
    for (int i = 0; i < n; i++) {
        for (int j = 0; j < m; j++) {
            result[i][j] = matrix[i][j] * scalar;
        }
    }
}

//xoa Point trong mang
__device__ inline void deletePoint(
    Point* arr, int& n, Point p) {
    // Tim vi tri cua phan tu can xoa
    int index = 0;
    for (int i = 0; i < n; i++) {
        if (arr[i].x == p.x && arr[i].y == p.y) {
            index = i;
            break;
        }
    }

    // Di chuyen cac phan tu sau vi tri can xoa len 1 vi tri
    for (int i = index + 1; i < n; i++) {
        arr[i - 1] = arr[i];
    }

    // Gan null cho phan tu can xoa
    arr[n - 1].x = NMIN;
    arr[n - 1].y = NMIN;
    //giam so phan tu cua mang di
    n--;
}

//chuyen ma tran 2x1 ve kieu Point
__device__ inline void convert_double_to_point(
    double matrix[1][2], Point& point) {
    // Gan gia tri cho diem

```



```

        point.x = matrix[0][0];
        point.y = matrix[0][1];
    }

    //tich vo huong cua ma tran va Point
    __device__ inline double dot_product(
        double matrix[1][2], Point point) {
        // Khoi tao tich vo huong
        double dot_product = 0;
        dot_product += matrix[0][0] * point.x
            + matrix[0][1] * point.y;
        return dot_product;
    }

    //Lay ra phan tu lon nhat trong ma tran
    __device__ inline double get_max_value(
        double mul_dp_xtranspose[1][50], int rows, int n_poly) {
        // Khoi tao gia tri max
        double max_value = -DBL_MAX;
        int max_index = -1;

        // Lap qua cac phan tu cua mang
        for (int i = 0; i < rows; i++) {
            for (int j = 0; j < n_poly; j++) {
                // So sanh gia tri hien tai
                // voi gia tri max
                if (mul_dp_xtranspose[i][j] > max_value)
                {
                    max_value = mul_dp_xtranspose[i][j];
                }
            }
        }

        // Tra ve gia tri max
        return max_value;
    }

    __device__ inline void transpose_matrix(
        double A[][2], int cols, int rows, double A_transpose[][50]) {

        // Duyet qua tat ca cac phan tu cua ma tran A
        for (int i = 0; i < rows; i++) {
            for (int j = 0; j < cols; j++) {
                // Thuc hien chuyen vi ma tran
                A_transpose[j][i] = A[i][j];
            }
        }
    }

```

```

}

// Ma tran chuyen vi cua con tro double**,
// chuyen ma tran doc thanh ma tran ngang
__device__ inline void transpose_dp(
double matrix[2][1], double transposed_matrix[1][2]) {
    // Gan gia tri cho ma tran chuyen vi
    transposed_matrix[0][0] = matrix[0][0];
    transposed_matrix[0][1] = matrix[1][0];
}

//chuyen Point sang double**
__device__ inline void convert_point_to_matrix(
Point* points, int n, double X[][2]) {
    for (int i = 0; i < n; i++) {
        X[i][0] = points[i].x;
        X[i][1] = points[i].y;
    }
}

// chia ma tran cho mot so
__device__ inline void
divide_matrix_by_double_and_return_new_matrix
(double matrix[2][1], double dp[2][1],
int rows, int cols, double d) {

    for (int i = 0; i < rows; i++) {
        for (int j = 0; j < cols; j++) {
            dp[i][j] = matrix[i][j] / d;
        }
    }
}

//tinh chuan Euclid
__device__ inline double norm_2(Point p) {
    // Tinh binh phuong cua tung phan tu trong ma tran
    double x2 = p.x * p.x;
    double y2 = p.y * p.y;
    return sqrt(x2 + y2);
}

//nhan hai ma tran voi nhau
__device__ inline void multiply_matrix(
double A[2][2], double B[2][1],
double C[2][1], int m, int n, int p) {

```

```

//Khoi tao ma tran ket qua
for (int i = 0; i < m; i++) {
    for (int j = 0; j < p; j++) {
        C[i][j] = 0;
    }
}

// Nhan hai ma tran
for (int i = 0; i < m; i++) {
    for (int j = 0; j < p; j++) {
        for (int k = 0; k < n; k++) {
            C[i][j] += A[i][k] * B[k][j];
        }
    }
}
}

__device__ inline void multiply_matrix(
double A[1][2], double B[2][50],
double C[1][50], int m, int n, int p) {
    //Khoi tao ma tran ket qua

    for (int i = 0; i < m; i++) {
        for (int j = 0; j < p; j++) {
            C[i][j] = 0;
        }
    }

    // Nhan hai ma tran
    for (int i = 0; i < m; i++) {
        for (int j = 0; j < p; j++) {
            for (int k = 0; k < n; k++) {
                C[i][j] += A[i][k] * B[k][j];
            }
        }
    }
}

//tru hai diem cho nhau
__device__ inline void subtract_points(
Point p1, Point p2, Point& p3) {
    p3.x = p1.x - p2.x;
    p3.y = p1.y - p2.y;
}

__device__ inline void convert_point_to_matrix(
Point p, double matrix[2][1]) {

```

```

        matrix[0][0] = p.x;
        matrix[1][0] = p.y;
    }
    //chuyen Point sang ma tran cot
    // chi danh cho ma tran kich thuoc 1x2
    __device__ inline void
    convert_point_to_row_matrix
    (Point p, double matrix[1][2]) {
        matrix[0][0] = p.x;
        matrix[0][1] = p.y;
    }
    //Tim chi so cua Point trong mang
    __device__ inline int
    find_point_index
    (Point* Ptest, Point pdoubt) {

        int index = -1;
        for (int i = 0; i < MAXN_CUSTOM; i++) {
            if (Ptest[i].x == pdoubt.x &&
                Ptest[i].y == pdoubt.y) {
                index = i;
                break;
            }
        }
        if (index == -1) {
            return -1;
        }
        return index;
    }
}

```

//====ket thuc them ham=====

Hàm Jarvis sẽ được thay thế thành code dưới:

```

__device__ inline void Jarvis(Point* in_poly, int& n_poly) {

    //global
    double delta = 0.0;
    //Khoi tao mang xoay R
    double alpha = -M_PI / 2;
    double R[2][2];

    R[0][0] = cos(alpha);
    R[0][1] = sin(alpha);
    R[1][0] = -sin(alpha);

```

```

R[1][1] = cos(alpha);

Point D[MAXN_CUSTOM];
for (int i = 0; i < MAXN_CUSTOM; i++) {
    D[i].x = NMIN;
    D[i].y = NMIN;
}
D[0] = Point(1.0, 0.0);
D[1] = Point(0.0, 1.0);
D[2] = Point(-1.0, 0.0);
D[3] = Point(0.0, -1.0);
int D_size = 4;

// Khoi tao cac gia tri ban dau
double min_x = DBL_MAX;
double min_y = DBL_MAX;
double max_x = -DBL_MAX;
double max_y = -DBL_MAX;

for (int i = 0; i < n_poly; i++) {
    // Cap nhat gia tri nho nhat
    if (in_poly[i].x < min_x) {
        min_x = in_poly[i].x;
    }
    // Cap nhat gia tri nho nhat
    if (in_poly[i].y < min_y) {
        min_y = in_poly[i].y;
    }

    // Cap nhat gia tri lon nhat
    if (in_poly[i].x > max_x) {
        max_x = in_poly[i].x;
    }

    // Cap nhat gia tri lon nhat
    if (in_poly[i].y > max_y) {
        max_y = in_poly[i].y;
    }
}

//Khoi tao P
Point P[MAXN_CUSTOM];
for (int i = 0; i < MAXN_CUSTOM; i++) {
    P[i].x = NMIN;
    P[i].y = NMIN;
}

```

```

}
P[0] = Point( max_x, max_y );
P[1] = Point( min_x, max_y );
P[2] = Point( min_x, min_y );
P[3] = Point( max_x, min_y );

int size_P = 4;

//Khoi tao Pdoubt
Point Pdoubt[MAXN_CUSTOM];
for (int i = 0; i < MAXN_CUSTOM; i++) {
    Pdoubt[i].x = NMIN;
    Pdoubt[i].y = NMIN;
}
Pdoubt[0] = Point( max_x, max_y );
Pdoubt[1] = Point( min_x, max_y );
Pdoubt[2] = Point( min_x, min_y );
Pdoubt[3] = Point( max_x, min_y );
int size_Pdoubt = 4;

//Khoi tao Ptest
Point Ptest[MAXN_CUSTOM];
for (int i = 0; i < MAXN_CUSTOM; i++) {
    Ptest[i].x = NMIN;
    Ptest[i].y = NMIN;
}
Ptest[0] = Point( max_x, max_y );
Ptest[1] = Point( min_x, max_y );
Ptest[2] = Point( min_x, min_y );
Ptest[3] = Point( max_x, min_y );

int size_Ptest = 4;

int count = 0, count4 = 0,
count1 = 0, count2 = 0, count3 = 0;

while (size_Pdoubt > 0) {
    count += 1;
    Point pdoubt = Pdoubt[0];
    int pdoubt_index_idx
    = find_point_index(Ptest, pdoubt);
    int pdoubt_minus_index
    = (pdoubt_index_idx + size_Ptest - 1)
    % size_Ptest;
    // Lay chi so cua mang lien sau

```

```

int pdoubt_plus_index
= (pdoubt_index_idx + 1) % size_Ptest;
// Lay phan tu cua mang lien truoc
Point pdoubt_minus
= Ptest[pdoubt_minus_index];
// Lay phan tu cua mang lien sau
Point pdoubt_plus
= Ptest[pdoubt_plus_index];

Point result_sub_pminus_plus = { 0, 0 };
subtract_points(pdoubt_minus,
pdoubt_plus, result_sub_pminus_plus);

// Chuyen doi P thanh ma tran cot
double transposed_matrix[2][1];
convert_point_to_matrix(
result_sub_pminus_plus, transposed_matrix);
// Thuc hien nhan ma tran chuyen vi voi R
double result_mul_matrix[2][1];
multiply_matrix(
R, transposed_matrix,
result_mul_matrix, 2, 2, 1);

// Tinh chuan norm 2
double norm_sub_pminus_pplus
= norm_2(result_sub_pminus_plus);

// Tinh dp
double dp[2][1];
divide_matrix_by_double_and_return_new_matrix(
result_mul_matrix, dp,
2, 1, norm_sub_pminus_pplus);

// Chuyen X ve ma tran
double X[50][2];
convert_point_to_matrix(in_poly, n_poly, X);

double X_transpose[2][50];
transpose_matrix(X, 2, n_poly, X_transpose);

//dp_tranpose 1x2
double dp_transpose[1][2];
transpose_dp(dp, dp_transpose);

double mul_dp_xtranspose[1][50];
multiply_matrix(

```

```

dp_transpose, X_transpose,
mul_dp_xtranspose, 1, 2, n_poly);

//tinh Bdp
double beta_dp = get_max_value(
mul_dp_xtranspose, 1, n_poly);

//kiem tra ket qua cua
// tich vo huong
if (beta_dp == dot_product(
dp_transpose, pdoubt_plus)) {
count1 += 1;
Point dp_transpose_point = { 0,0 };
convert_double_to_point(
dp_transpose, dp_transpose_point);
D[D_size] = dp_transpose_point;
D_size++;
deletePoint(P, size_P, pdoubt);
deletePoint(Pdoubt, size_Pdoubt, pdoubt);
deletePoint(Ptest, size_Ptest, pdoubt);
}

else if (dot_product(dp_transpose, pdoubt)
- beta_dp > delta) {
count2++;
double lambda_p = (beta_dp
- dot_product(dp_transpose, pdoubt_minus))
/ (dot_product(dp_transpose, pdoubt)
- dot_product(dp_transpose, pdoubt_minus));

double pdoubt_minus_convert_to_matrix[1][2];
convert_point_to_row_matrix(
pdoubt_minus, pdoubt_minus_convert_to_matrix);

double pdoubt_convert_to_matrix[1][2];
convert_point_to_row_matrix(
pdoubt, pdoubt_convert_to_matrix);

double A[1][2];
multiply_matrix_with_double(
pdoubt_minus_convert_to_matrix,
1, 2, (1 - lambda_p), A);

double B[1][2];
multiply_matrix_with_double(

```



```

pdoubt_convert_to_matrix,
    1, 2, lambda_p, B);

double p_hat_minus[1][2];
add_two_matrix(A, B, 1, 2, p_hat_minus);

double pdoubt_plus_convert_to_matrix[1][2];
convert_point_to_row_matrix(
pdoubt_plus, pdoubt_plus_convert_to_matrix);

double C[1][2];
multiply_matrix_with_double(
pdoubt_plus_convert_to_matrix,
    1, 2, (1 - lambda_p), C);

double p_hat_plus[1][2];
add_two_matrix(C, B, 1,
    2, p_hat_plus);

Point dp_transpose_point = { 0,0 };;
convert_double_to_point(
dp_transpose, dp_transpose_point);
D[D_size] = dp_transpose_point;
D_size++;

int pdoubt_indexp = find_index(
P, size_P, pdoubt);

int pdoubt_index = find_index(
Pdoubt, size_Pdoubt, pdoubt);

delete_point(Pdoubt,
size_Pdoubt, pdoubt);
Point p_hat_minus_point = { 0,0 };;
Point p_hat_plus_point = { 0,0 };;
convert_double_to_point(
p_hat_minus, p_hat_minus_point);
convert_double_to_point(
p_hat_plus, p_hat_plus_point);
if (allclose(pdoubt,
    p_hat_minus_point) &&
    allclose(pdoubt,
        p_hat_plus_point)) {
    count4++;
    int ptest_index =
        find_point_index(Ptest, pdoubt);

```

```

        move_point_to_end(Ptest ,
        size_Ptest , ptest_index);
    }
else {
    delete_point_by_index(P, size_P, pdoubt_inexp);
    int ptest_index = find_point_index(Ptest, pdoubt);
    delete_point_by_index(Ptest, size_Ptest, ptest_index);
    Point p_hat_plus_point(0, 0);
    convert_double_to_point(p_hat_plus, p_hat_plus_point);
    if (allclose(p_hat_plus_point, pdoubt_plus)) {
        //cout << "1" << endl;
    }
else {
    Point p_hat_plus_point = { 0,0 };
    convert_double_to_point(
    p_hat_plus, p_hat_plus_point);
    insert_point_to_index(
    P, size_P, pdoubt_inexp, p_hat_plus_point);
    insert_point_to_index(
    Pdoubt, size_Pdoubt,
    pdoubt_index, p_hat_plus_point);
    insert_point_to_index(
    Ptest, size_Ptest,
    ptest_index, p_hat_plus_point);
    }
    Point p_hat_minus_point = { 0,0 };
    convert_double_to_point(
    p_hat_minus, p_hat_minus_point);
    if (allclose(p_hat_minus_point, pdoubt_minus)) {
        //cout << "2" << endl;
    }
    else {
    Point p_hat_minus_point = { 0,0 };
    convert_double_to_point(p_hat_minus, p_hat_minus_point);

    insert_point_to_index(P, size_P,
    pdoubt_inexp, p_hat_minus_point);
    insert_point_to_index(Pdoubt, size_Pdoubt,
    pdoubt_index, p_hat_minus_point);
    insert_point_to_index(Ptest, size_Ptest,
    ptest_index, p_hat_minus_point);

    }

    }
}

```

```

    }
    else {
        count3++;
        delete_point(Pdoubt, size_Pdoubt, pdoubt);
        int ptest_index[MAXN_CUSTOM];
        find_all_point(Ptest, size_Ptest, pdoubt, ptest_index);
        int first_index = ptest_index[0];
        move_point_to_end(Ptest, size_Ptest, first_index);
    }
}
copy_points(P, in_poly, size_P, n_poly);

```

Một hàm khác cần thay thế là Jarvis\_and\_index(). Hàm này tương tự hàm Jarvis, nhưng bảo toàn thứ tự của các điểm trong bao lồi khi chúng còn là một tập hợp các điểm. Ta thêm vào đoạn code này phần đầu của hàm Jarvis\_and\_index():

```

//global
int n_input = n_poly;
Point input_poly[20];
for (int i = 0; i < n_input; i++) {
    input_poly[i].x = in_poly[i].x;
    input_poly[i].y = in_poly[i].y;
}

```

Tiếp theo ta thêm đoạn code tương tự đoạn code Jarvis bên trên. Cuối cùng ta thêm đoạn code sau đây để lấy được chỉ số của các điểm nằm trên bao lồi trong tập điểm gốc:

```

for (int i = 0; i < n_poly; i++) {
    for (int j = 0; j < n_input; j++) {
        if (point_same(in_poly[i], input_poly[j])) {
            points_to_convex_ind[i] = j;
            break;
        }
    }
}
}

```

*thêm giải thích cho các hàm này*

Tiếp theo ta có file code dùng để tùy chỉnh huấn luyện. File code này được viết bằng mã Python:

```

# from mmcv import collect_env
# print(collect_env())

```

```

from mmcv import Config
from mmrotate.datasets.builder import ROTATED_DATASETS
from mmrotate.datasets.dota import DOTADataset

@ROTATED_DATASETS.register_module()
class CustomDotaDataset(DOTADataset):
    """SAR ship dataset for detection."""
    CLASSES = ('plane', 'baseball-diamond',
               'bridge', 'ground-track-field',
               'small-vehicle', 'large-vehicle',
               'ship', 'tennis-court',
               'basketball-court', 'storage-tank',
               'soccer-ball-field',
               'roundabout', 'harbor',
               'swimming-pool', 'helicopter')
    cfg = Config.fromfile('./configs/
cfa/cfa_r50_fpn_40e_dota_oc.py')
    from mmdet.apis import set_random_seed

#Modify dataset type and path
cfg.dataset_type = 'CustomDotaDataset'
cfg.data_root = 'data/dota-dataset/'

cfg.data.test.type = 'CustomDotaDataset'
cfg.data.test.data_root = 'data/dota-dataset/'
cfg.data.test.ann_file = 'test_split/test_info.json'
cfg.data.test.img_prefix = 'test/images'

cfg.data.train.type = 'CustomDotaDataset'
cfg.data.train.data_root = 'data/dota-dataset/'
cfg.data.train.ann_file = 'train_split/labelTxt'
cfg.data.train.img_prefix = 'train_split/images'

cfg.data.val.type = 'CustomDotaDataset'
cfg.data.val.data_root = 'data/dota-dataset/'
cfg.data.val.ann_file = 'val_split/labelTxt'
cfg.data.val.img_prefix = 'val_split/images'

cfg.data.samples_per_gpu = 1
cfg.data.workers_per_gpu = 1
# modify num classes of the model in box head
cfg.model.bbox_head.num_classes = 15
# We can still use the pre-trained
# RotateReppoint model though we do not need to

# cfg.load_from = 'cfa_r50_fpn_40e_dota_oc-2f387232.pth'

```

```

cfg.resume_from = './result_custom_mmcv_2/latest.pth'
# Set up working dir to save files and logs.
cfg.work_dir = './result_custom_mmcv_2'

cfg.optimizer.lr = 0.001
cfg.lr_config.warmup = None
# cfg.runner.max_epochs = 40
cfg.log_config.interval = 100

# # Change the evaluation metric
# since we use customized dataset.
cfg.evaluation.metric = 'mAP'
# # We can set the evaluation interval
# to reduce the evaluation times
cfg.evaluation.interval = 1
# # We can set the checkpoint
# saving interval to reduce the storage cost
cfg.checkpoint_config.interval = 1

# Set seed thus the results are more reproducible
cfg.seed = 0
set_random_seed(0, deterministic=False)
cfg.gpu_ids = range(1)
cfg.device='cuda'

# We can also use tensorboard to log the training process
cfg.log_config.hooks = [
    dict(type='TextLoggerHook'),
    dict(type='TensorboardLoggerHook')]

import os.path as osp
import os
import mmcv
from mmdet.datasets import build_dataset
from mmdet.models import build_detector
from mmdet.apis import train_detector

import torch
torch.cuda.empty_cache()

# Build dataset
datasets = [build_dataset(cfg.data.train)]

# Build the detector
model = build_detector(
    cfg.model, train_cfg=cfg.get('train_cfg'),
    test_cfg=cfg.get('test_cfg'))
# Add an attribute for visualization convenience

```

```
model.CLASSES = datasets[0].CLASSES
mmcv.mkdir_or_exist(osp.abspath(cfg.work_dir))
train_detector(model, datasets,
               cfg, distributed=False, validate=True)
```

## Chương 4

### Một số kết quả tính toán

Trong nội dung này chúng tôi thử nghiệm số cho thuật toán trong [5] và thuật toán vừa được trình bày ở mục trước để so sánh tốc độ của chúng. Các thuật toán này được thực thi bởi chương trình C và chạy trên PC Core i5 1.6 GHz 3M với 4 GB RAM.

Dưới đây Bảng 4.1 minh họa thời gian chạy (đơn vị tính bằng giây) của thuật toán tính bao lồi dưới được giới thiệu bởi P. T. An và D. T. Giang trong [5] và Thuật toán ?? sử dụng kỹ thuật hạn chế của chúng tôi. Cột cuối cùng liệt kê tỉ lệ tăng tốc của thuật toán của chúng tôi so với thuật toán trong [5]. Dữ liệu đầu vào của các thuật toán là các tập điểm được tạo trên bề mặt một paraboloid (tất cả các điểm đều là đỉnh của bao lồi và bao lồi dưới) có dạng  $P = \{p_i = (x_i, y_i, z_i) : x_i, y_i, z_i \in \mathbb{R}, z_i = x_i^2 + y_i^2, i = 1, \dots, n\} \subset \mathbb{R}^3$ , trong đó tập  $\{(x_i, y_i), x_i, y_i \in R, i = 1, \dots, n\}$  được chọn ngẫu nhiên từ phân bố đều trong hình vuông cỡ  $200 \times 200$ .

Bảng 4.1: Thời gian chạy tính bao lồi dưới (đơn vị: giây).

Dầu vào	Thuật toán trong [5]	Thuật toán ??	Tỉ số thắng tốc
1.000	0,136	0,061	2,23
2.000	0,454	0,248	1,83
5.000	2,684	1,500	1,79
7.000	7,014	3,129	2,24
11.000	14,321	8,484	1,69
17.000	41,307	24,666	1,67
20.000	63,197	37,332	1,69
22.000	70,866	40,235	1,76
30.000	153,240	96,738	1,58
35.000	200,496	125,490	1,60



## Kết luận

Trong quá trình làm đồ án tốt nghiệp, em đã có cơ hội được trải nghiệm chuyên ngành AI cũng như được thử sức qua các công nghệ nhận diện ảnh mới nhất. Em đã tích lũy được những kinh nghiệm về kiến thức trong công việc cũng như các kỹ năng mềm trong xử lý các công việc liên quan đến hệ điều hành linux, cách triển khai một dự án trí tuệ nhân tạo, cách tìm hiểu thông tin từ các tài liệu chính thống.

Em được rèn luyện kỹ năng giải quyết các công việc con, cách tương tác với người khác để trao đổi kiến thức, từ đó rút ngắn công sức và thời gian. Đồng thời em cũng được áp dụng lại các kiến thức đã được học từ các môn trên trường vào đồ án thực tế này.

# Tài liệu tham khảo

## Tiếng Việt

- [1] Vũ Thị Gái (2016), *Luật thuận nghịch bậc hai và điểm nguyên*, trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên.
- [2] Nguyễn Tiến Hùng (2016), *Luật thuận nghịch bậc hai và hoán vị*, trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên.
- [3] Hà Huy Khoái (1997), *Nhập môn số học thuật toán*, Nhà xuất bản Khoa học Kỹ thuật.
- [4] Lại Đức Thịnh (1977), *Giáo trình số học*, Nhà xuất bản Giáo dục.

## Tiếng Anh

- [5] P. T. An and D. T. Giang (2015), “A direct method for determining the lower convex hull of a finite point set in 3D”, *Advances in Intelligent Systems and Computing, Springer, Proceedings of 3rd International Conference on Computer Science, Applied Mathematics and Applications (ICCSAMA, May 11-13, Metz, France)* **358**, pp. 15–26.
- [6] V. Damerow and C. Sohler (2004), “Extreme points under random noise”, *European Symposium on Algorithms* **3221**, pp. 264–274.
- [7] M. M. David (2002), *Computation geometry*, Department of Computer Science.
- [8] J. O’ Rourke (1998), *Computational geometry in C*, 2nd edition, Cambridge University Press, Cambridge.