Chapter 3

Tích phân và ứng dụng

3.1 Nguyên hàm - Antiderivative

3.1.1 Định nghĩa

Hàm số F được gọi là nguyên hàm của hàm f trên khoảng I nếu $F'(x) = f(x), \forall x \in I$

3.1.2 Định lí

Nếu F là một nguyên hàm của f thì nguyên hàm tổng quát của f có dạng $F(x) + C$, với C là hằng số.

Example 3.1.1

1. Tìm nguyên hàm F của hàm số $f(x) = 3x^2 + 1$, biết $F(2) = -1$
2. Tìm nguyên hàm F của hàm số $f(x) = \sqrt[3]{x}$, biết $F(8) = 3$
3. Tìm hàm số $f(x)$ biết $f''(x) = 12x^2 + 6x - 4$, và $f(0) = 4, f(1) = 1$

3.1.3 Tích phân bất định - Indefinite Integral

Tập hợp tất cả các nguyên hàm của f được goi là tích phân bất định và ký hiệu: $\int f(x)dx$

3.1.4 Một số các nguyên hàm cơ bản

$\int adx = ax + C, a \in \mathbb{R}$	
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$\int (ax+b)^n dx = \frac{1}{a}\frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1} + C$
$\int \frac{1}{x}dx = ln\|x\| + C$	$\int \frac{1}{ax+b}dx = \frac{1}{a}ln\|ax+b\| + C$
$\int \frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{x} + C$	$\int \frac{1}{(ax+b)^2}dx = -\frac{1}{a}\frac{1}{ax+b} + C$
$\int e^x dx = e^x + C$	$\int e^{ax+b}dx = \frac{1}{a}e^{ax+b} + C$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{lna} + C$	$\int a^{\alpha x+b}dx = \frac{a^{\alpha x+b}}{\alpha lna} + C$
$\int sinxdx = -cosx + C$	$\int sin(ax+b)dx = -\frac{1}{a}cos(ax+b) + C$
$\int cosxdx = sinx + C$	$\int cos(ax+b)dx = \frac{1}{a}sin(ax+b) + C$
$\int \frac{dx}{cos^2x} = tanx + C$	$\int \frac{dx}{cos^2(ax+b)} = \frac{1}{a}tan(ax+b) + C$
$\int \frac{dx}{sin^2x} = -cotx + C$	$\int \frac{dx}{sin^2(ax+b)} = -\frac{1}{a}cot(ax+b) + C$
$\int \frac{dx}{1+x^2} = arctanx + C$	$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}arctan\frac{x}{a} + C$
$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = arcsinx + C$	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = arcsin\frac{x}{a} + C$
$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}ln\left\|\frac{a+x}{a-x}\right\| + C$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}} = ln\left\|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right\| + C$
$\int af(x)dx = a\int f(x)dx$	$\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

Example 3.1.2

Tính các tích phân bất định sau:

1. $\int (x^3 - 3x^2 + 1)\, dx$
2. $\int (3sin3x - 2cos2x)\, dx$
3. $\int \left(x\sqrt{x} + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}\right) dx$
4. $\int \frac{y\sqrt{y}+\sqrt{t}}{y^2}dy$
5. $\int \left(e^{-3t} + \frac{1}{(3t+4)^3}\right) dt$
6. $\int \frac{x^2}{1+x^2}dx$
7. $\int \frac{1}{3+x^2}dx$

8. $\int \frac{1}{2+3x^2} dx$
9. $\int \frac{1}{\sqrt{2-x^2}} dx$
10. $\int \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}} dx$
11. $\int \frac{1}{\sqrt{5-3x^2}} dx$

3.2 Bài toán tính diện tích

Một số bài toán tính diện tích

- Tính diện tích hình phẳng R nằm trên trục Ox dưới đường $y = f(x) = 1 - x^2$ và giữa $x = 0$ và $x = 1$.

- Khoảng xác định $[a; b]$ của hàm số f có thể được chia thành n khoảng con, có độ dài bằng nhau

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

- Chiều cao của mỗi hình chữ nhật có thể được tính bằng giá trị của f tại một điểm tùy ý nào đó trong mỗi khoảng con.
- Tổng như vậy có dạng:

$$f(c_1)\Delta x + f(c_2)\Delta x + \ldots + f(c_n)\Delta x$$

- Chú ý: tổng này vẫn chưa phải là giá trị chính xác của diện tích cần tìm.

3.3 Định nghĩa tích phân xác định - Definite Integral

- Tổng quát, xét hàm số f xác định trên khoảng $[a; b]$.
- Chia $[a; b]$ thành khoảng (không nhất thiết có độ dài bằng nhau) bằng cách chọn $n - 1$ điểm

$\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ nằm trong kooảng $[a; b]$ thỏa

$$a < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < b$$

- Để tiện lợi , đặt $a = x_0$ và $b = x_n$
- Tập hợp $P = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ gọi là một phân hoạch (partition) của khoảng $[a; b]$.

Đặt $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ (nếu các khoảng chia đều nhau thì $\Delta x_k = \frac{b-a}{n}$, với mọi k.

3.3.1 Định nghĩa tích phân

Định nghĩa Cho hàm số $f(x)$ xác định trên khoảng $[a; b]$.
Ta nói, J là tích phân xác định của $f(x)$ trên $[a; b]$ nếu J là giới hạn của tổng Riemann $S_P = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k$ khi $\parallel P \parallel \to 0$ theo nghĩa
Với mọi $\epsilon > 0$, tồn tại $\delta > 0$ sao cho với mọi phân hoạch P của $[a; b]$ thỏa $\parallel P \parallel < \delta$ và với mọi sự lựa chọn $c_k \in [x_{k-1}; x_k]$, ta có

$$|S_P - J| = \left| \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k - J \right| < \epsilon \tag{3.1}$$

Tích phân xác định J của $f(x)$ trên $[a; b]$ được ký hiệu là

$$\int_a^b f(x)dx \tag{3.2}$$

Tích phân xác định chỉ phụ thuộc vào hàm số, không phụ thuộc vào cách gọi tên biến số. Tức là:

$$\int_a^b f(x)dx = J = \int_a^b f(t)dt = J = \int_a^b f(u)du = \ldots$$

- Nếu kiều kiện trong định nghĩa trên được thỏa mãn thì tổng Riemann **hội tụ** về tích phân xác định $J = \int_a^b f(x)dx$ và hàm $f(x)$ là khả tích trên $[a; b]$.

Khi đó ta có thể viết

$$\lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k = J = \int_a^b f(x)dx \tag{3.3}$$

3.3.2 Tính khả tích của hàm liên tục

- Không phải mọi hàm số đều khả tích.
Ví dụ hàm số $f(x) = \begin{cases} 1, & \textit{nếu } x \textit{ hữu tỉ} \\ 0, & \textit{nếu } x \textit{ vô tỉ} \end{cases}$ là hàm không khả tích.
- Hàm số $f(x)$ được gọi là có bước nhảy (jump discontinuity) tại c nếu giới hạn trái và phải khi $x \to c$ để tồn tại hữu hạn nhưng khác nhau.
- **Định lý tính khả tích của hàm liên tục:** Nếu hàm số f liên tục trên $[a;b]$ hoặc nếu f chỉ có hữu hạn bước nhảy trên $[a;b]$ thì $\int_a^b f(x)dx$ tồn tại và khả tích trên $[a;b]$

3.3.3 Một số tích chất

1. $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
2. $\displaystyle\int_a^a f(x)dx = 0$
3. $\displaystyle\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$, k là hằng số
4. $\displaystyle\int_a^b (f(x) \pm g(x))\,dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$
5. $\displaystyle\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$

3.4 Công thức Newton - Leibnitz

- Nếu $f(t)$ khả tích trên $[a;b]$ thì $\forall x \in [a;b]$, ta đặt

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

3.4.1 Định lý:

Nếu $f(x)$ liên tục trên $[a;b]$ thì $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ liên tục trên $[a;b]$, khả vi trên $(a;b)$ và

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$$

Example 3.4.1

Dùng định lý trên, tính $\frac{dy}{dx}$, biết

1. $y = \int_a^x \left(1+t^3\right) dt$
2. $y = \int_1^{x^2} cos(1+t^2)dt$
3. $y = \int_{1+3x^2}^4 e^{sint}dt$

3.4.2 Công thức Newton - Leibnitz

Nếu $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và $F(x)$ là một nguyên hàm tùy ý của $f(x)$ thì

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a) \tag{3.4}$$

Example 3.4.2

Tính các tích phân:

1. $I_1 = \int_1^2 \left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{x^2}\right) dx$
2. $I_2 = \int_2^4 \left(x^3 + 4x + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx$
3. $I_3 = \int_1^3 \frac{dx}{(50x-3)^3}$
4. $I_4 = \int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{8x-2}}$
5. $I_5 = \int_1^2 e^{3-4x}dx$
6. $I_5 = \int_1^2 \left(\frac{3}{2}\sqrt{y} - \frac{4}{y^2}\right) dy$

3.5 Phương pháp tính tích phân

3.5.1 Phương pháp đổi biến

1. **Định lí:** Nếu hàm $u = g(x)$ khả vi mà giá trị thuộc khoảng I và nếu $f(x)$ liên tục trên I thì

$$\int f\left(g(x)\right) g'(x)dx = \int f(u)du \tag{3.5}$$

Example 3.5.1

Tính các tích phân sau:

(a) $I_1 = \int (3x^2+4)^5 xdx$

(b) $I_2 = \int (2x^2-4x)^2(x-1)dx$

(c) $I_3 = \int \frac{(x^2-1)dx}{(x^3-3x)^3}$

(d) $I_4 = \int \frac{x^2}{e^{x^3}}dx$

(f) $I_5 = \int \frac{tdt}{\sqrt[3]{t^2+1}}$

(g) $I_5 = \int \frac{dx}{x\sqrt{3-ln^2x}}$

(h) $I_5 = \int \frac{dx}{x(x^3+3)}$

2. **Định lí:** Nếu g' liên tục trên $[a;b]$ và f liên tục trên miền giá trị của $u = g(x)$ thì

$$\int_a^b f(g(x))\, g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du \tag{3.6}$$

Example 3.5.2

Tính các tích phân sau:

(a) $I_1 = \displaystyle\int_{-1}^{1} x^2\sqrt{x^3+1}dx$

(b) $I_2 = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{cos\theta}{sin^3\theta}d\theta$

(c) $I_3 = \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} tanxdx$

(d) $I_4 = \displaystyle\int_{1}^{e^{\sqrt{3}}} \frac{dt}{t(1+ln^2t)}$

3. **Tích phân của hàm đối xứng - Symmetric function** - Cho hàm số $f(x)$ xác định trên khoảng đối xứng $[-a;a]$.
- Hàm f được gọi là hàm số chẵn nếu $f(-x) = f(x), \forall x \in [-a;a]$
- Hàm f được gọi là hàm số lẻ nếu $f(-x) = -f(x), \forall x \in [-a;a]$
- *Định lí:* Cho f liên tục trên khoảng $[-a;a]$ thì
- Nếu f là hàm *chẵn* thì

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx \tag{3.7}$$

- Nếu f là hàm lẻ thì

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0 \tag{3.8}$$

3.5.2 Tích phân từng phần - Integration by part

1. **Tích phân từng phần cho tích phân bất định**

(a) **Tích phân dạng:** $\displaystyle\int \textit{đa thức}\,(e^x; sinx; cosx)\,dx$

Đặt $\begin{cases} u = \textit{đa thức} \\ dv = e^x; sinx; cosxdx \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} du = (\textit{đa thức})'dx \\ v = \textit{Nguyên hàm} \end{array}$

(b) **Tích phân dạng:** $\displaystyle\int \textit{đa thức}\,(lnx; arcsinx; arctanx)\,dx$

Đặt $\begin{cases} u = (lnx; arcsinx; arctanx) \\ dv = \textit{đa thức}\ dx \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} du = \textit{đạo hàm}\ dx \\ v = \textit{Nguyên hàm} \end{array}$

Ta có:

$$\int udv = uv - \int vdu \tag{3.9}$$

Example 3.5.3

Tính các tích phân sau:

(a) $I_1 = \displaystyle\int (2x+1)e^x dx$

(b) $I_2 = \displaystyle\int xlnxdx$

(c) $I_3 = \displaystyle\int xcos2xdx$

(d) $I_4 = \displaystyle\int arctanxdx$

2. **Tích phân từng phần cho tích phân xác định**

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)\big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx \tag{3.10}$$

$$\int_a^b udv = uv\big|_a^b - \int_a^b vdu \tag{3.11}$$

Example 3.5.4

(a) $I_1 = \displaystyle\int_1^2 x^2 e^{-x} dx$

(b) $I_2 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\qquad x)sin3xdx$

(c) $I_3 = \displaystyle\int_0^{1/2} arcsinxdx$

3.5.3 Tích phân dạng hữu tỷ:

1. Tích phân dạng $I = \displaystyle\int \frac{\alpha x + \beta}{(ax+b)^2} dx$

   Cách giải: Biến đổi $I = \displaystyle\int \left(\frac{p}{ax+b} + \frac{q}{(ax+b)^2} \right) dx$

   Example 3.5.5 *Tính các tích phân sau:*

   (a) $\displaystyle\int \frac{3}{4x} dx$

   (b) $\displaystyle\int \frac{2}{1-3x} dx$

   (c) $\displaystyle\int \frac{1}{9+x^2} dx$

   (d) $\displaystyle\int \frac{-1}{2+3x^2} dx$

   (e) $\displaystyle\int \frac{2}{x^2+2x+5} dx$

   (f) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-x+3} dx$

   (g) $\displaystyle\int \frac{1}{3x^2+7x+10} dx$

2. Tích phân dạng: $\displaystyle\int \frac{\alpha x + \beta}{ax^2+bx+c} dx$ (Mẫu số vô nghiệm): Yêu cầu biến đổi tử số thành đạo hàm của mẫu (nhớ xử lí hết x vào trong đạo hàm), tách thành 2 tích phân và biến đổi mẫu số về dạng $X^2 + D$

   Example 3.5.6 *Tính các tích phân sau:*

   (a) $\displaystyle\int \frac{x-3}{x^2+10} dx$

   (b) $\displaystyle\int \frac{4-5x}{x^2+x+7} dx$

   (c) $\displaystyle\int \frac{2x+1}{4x^2-4x+5} dx$

3. Tích phân dạng: $\displaystyle\int \frac{\alpha x + \beta}{ax^2+bx+c} dx$, (Mẫu số có nghiệm).

   - Yêu cầu tách mẫu số thành nhân tử.

     Chú ý: $\boxed{ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2),}$ với x_1, x_2 là 2 nghiệm của đa thức.

   - Sau đó tách

   $$\boxed{\frac{\alpha x + \beta}{ax^2+bx+c} = \frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2}}$$

   - Dùng đồng nhất thức tìm A, B

Example 3.5.7 *Tính các tích phân sau:*

(a) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-16}$

(b) $\displaystyle\int \frac{3x+2}{2x^2+3x-5}dx$

(c) $\displaystyle\int \frac{5-4x}{7x^2+x-8}dx$

4. Tích phân dạng tổng quát: $\displaystyle\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$.

- Nếu bậc tử lớn hơn hoặc bằng bậc mẫu thì chia đa thức;
- Tách mẫu số thành các đa thức bậc nhất và bậc 2 vô nghiệm;
- Phân tích biểu thức trong dấu tích phân thành các phân thức tối giản. Ví dụ:

$$\frac{1}{(x-\alpha)^3(a_1x^2+b_1x+c_1)^2} = \frac{A}{x-\alpha}+\frac{B}{(x-\alpha)^2}+\frac{C}{(x-\alpha)^3}+\frac{Ex+F}{a_1x^2+b_1x+c_1}+\frac{Gx+H}{(a_1x^2+b_1x+c_1)^2}$$

Example 3.5.8 *Tính các tích phân sau:*

(a) $\displaystyle\int \frac{x^2-3}{x^3-7x+6}dx$

(b) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2(x-1)}$

(c) $\displaystyle\int \frac{x^2+4x+4}{x(x-1)^2}dx$

(e) $\displaystyle\int \frac{3x-2}{x^3-8}dx$

(f) $\displaystyle\int \frac{x^2+4x}{x^3+5x^2+17x+13}dx$

(g) $\displaystyle\int \frac{x^4}{x^3+1}dx$

3.5.4 Tích phân hàm lượng giác:

1. Tích phân dạng: $\displaystyle\int R(sinx, cosx)dx$

   (a) Nếu $R(-sinx, cosx) = -R(sinx, cosx)$, tức là bậc của sin lẻ, thì đặt $t = cosx$

   (b) Nếu $R(sinx, -cosx) = -R(sinx, cosx)$, tức là bậc của cosin lẻ, thì đặt $t = sinx$

   (c) Nếu $R(-sinx, -cosx) = -R(sinx, cosx)$, tức là bậc của sin và cosin chẵn, thì đặt $t = tanx$ hoặc hạ bậc.

(d) Nếu
$$R(sinx, cosx) = \frac{1}{asinx + bcosx + c}$$
thì đặt $t = tan\frac{x}{2}$.
Chú ý: $sinx = \frac{2t}{1+t^2}, cosx = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

Example 3.5.9 *Tính*

(a) $\int sin^3 2x cos^2 x dx$

(b) $\int \frac{dx}{4sinx + 3cosx + 5}$

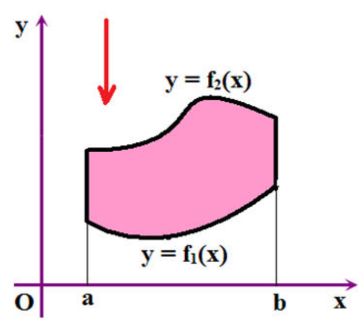
(c) $\int \frac{dx}{sin^2 x + sin2x - cos^2 x}$

3.6 Một số ứng dụng của tích phân xác định

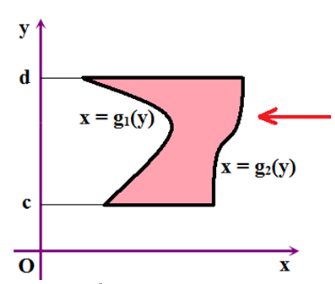
3.6.1 Tính diện tích S của hình phẳng

1. **Biên của hình phẳng trong tọa độ Descartes**

(a) Biên của hình phẳng cho bởi phương trình tổng quát:



$$S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]\, dx \tag{3.12}$$



$$S = \int_c^d [g_2(x) - g_1(x)]\, dx \tag{3.13}$$

Cách khác:
$$S = \int_a^b |f_1(x) - f_2(x)|\, dx \tag{3.14}$$

Example 3.6.1

Tính diện tích hình phẳng S giới hạn bởi các đường $y = x^2$ và $y = x^4$

Example 3.6.2

Tính diện tích hình phẳng S giới hạn bởi các đường $y = e^x - 1$; $y = e^{2x} - 3$ và $x = 0$

Example 3.6.3

Tính diện tích hình phẳng S giới hạn bởi $y = |x^2 - 4|x| + 3|$ và trục hoành

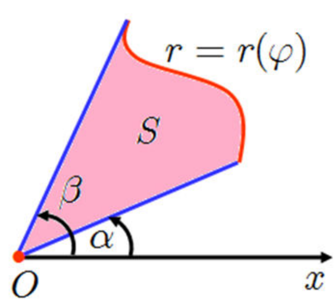
(b) **Biên của hình phẳng cho bởi phương trình tham số:**
Hình phẳng giới hạn bởi đường cong có phương trình $x = x(t); y = y(t)$, với $t \in [a; b]$ thì

$$S = \int_a^b |y(t)x'(t)|\, dt \tag{3.15}$$

Example 3.6.4

Tính diện tích hình elip S: $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} \leq 1$

(c) Diện tích hình quạt cong trong tọa độ cực:
Diện tích hình quạt cong S có biên được cho trong tọa độ cực giới hạn bởi $r = r(\varphi)$, với $\varphi \in [\alpha; \beta]$



Được xác định bởi:

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)d\varphi \tag{3.16}$$

Example 3.6.5

Tính diện tích hình quạt cong S được giới hạn bởi: $r = 2cos4\varphi$, $\varphi \in \left[0; \frac{\pi}{8}\right]$

Example 3.6.6

Tính diện tích hình quạt cong S giới hạn bởi: $y = 0; y = \sqrt{3}x; x^2 + y^2 = 2x$

Chú ý: Công thức đổi biến trong tọa độ cực:

$$x = rcos\varphi; y = rsin\varphi \tag{3.17}$$

Example 3.6.7

Tính diện tích hình quạt cong S được giới hạn bởi: $x = 0; y = x; x^2 + y^2 + 2y = 0$

2. **Tính độ dài l của đường cong:**

(a) **Đường cong có phương trình tổng quát:** Cho cung $l_{\overset{\frown}{AB}}$ có phươn trình $y = f(x)$, $x \in [a; b]$ thì độ dài đường cong l được xác định bởi:

$$l_{\overset{\frown}{AB}} = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}dx \tag{3.18}$$

Example 3.6.8

Tính độ dài l của cung $y = ln(cosx)$, với $x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$

(b) **Đường cong có phương trình tham số:** Cho cung $\overset{\frown}{AB}$ có phương trình tham số: $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, với $t \in [\alpha; \beta]$ thì độ dài cung $\overset{\frown}{AB}$ được xác định bởi:

$$l_{\overset{\frown}{AB}} = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}dt \tag{3.19}$$

Example 3.6.9

Tính độ dài l của cung C có $\begin{cases} x = \sqrt{t^2+1} \\ y = ln\left(t + \sqrt{t^2+1}\right) \end{cases}$, với $t \in [0; 1$

(c) **Đường cong có phương trình trong tọa độ cực**

Cho cung $\overset{\frown}{AB}$ có phương trình trong tọa độ cực là: $r = r(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha; \beta]$ thì

$$l_{\overset{\frown}{AB}} = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[r(\varphi)]^2 + [r'(\varphi)]^2}d\varphi \tag{3.20}$$

Example 3.6.10

Tính độ dài của cung $r = a\,(1 + cos\varphi)$, $\varphi \in [0; \pi]$

3. **Tính thể tích vật thể tròn xoay**

   (a) **Vật thể xoay quanh** Ox
   Thể tích V của vật thể do miền phẳng S giới hạn bởi $y = f(x); y = 0; x = a; x = b$ quay quanh Ox được xác định bởi:

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2\,dx \tag{3.21}$$

Example 3.6.11

Tính thể tích vật thể V do hình phẳng S giới hạn bởi $y = \sqrt{lnx}, y = 0, x = 1, x = e$ quay quanh Ox.

Example 3.6.12

Tính V do elip: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2}$ quay quanh Ox

   (b) **Vật thể xoay quanh** Oy
   Thể tích V của vật thể do miền phẳng S giới hạn bởi $x = g(y); x = 0; y = c; y = d$ quay quanh Oy được xác định bởi:

$$V = \pi \int_c^d [g(y)]^2\,dy \tag{3.22}$$

Example 3.6.13

Tính thể tích V do hình phẳng S giới hạn bởi $y = 2x - x^2; y = 0$ quay quanh Oy
Chú ý: Thể tích vật thể do miền phẳng S giới hạn bởi $y = f(x); y = 0; x = a; x = b$ quay quanh Oy còn được tính theo công thức:

$$V = 2\pi \int_a^b xf(x)dx \tag{3.23}$$

Example 3.6.14

Tính lại ví dụ (3...) bằng cách dùng (3.25)

4. **Tính diện tích vật thể tròn xoay**

   (a) **Tính diện tích vật thể tròn xoay quay quanh** Ox
   Diện tích mặt tròn xoay S do đường cong $y = f(x)$, $a \le x \le b$, quay quanh trục Ox được xác định bởi:

$$S = 2\pi \int_a^b |f(x)|\,\sqrt{1 + [f'(x)]^2}dx \tag{3.24}$$

Example 3.6.15

Tính diện tích mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$

(b) **Tính diện tích vật thể tròn xoay quay quanh Oy**
Diện tích mặt tròn xoay S do đường cong $y = f(y)$, $c \leq y \leq d$, quay quanh trục Oy được xác định bởi:

$$S = 2\pi \int_c^d |f(y)| \sqrt{1 + [f'(y)]^2} dy \tag{3.25}$$

Example 3.6.16

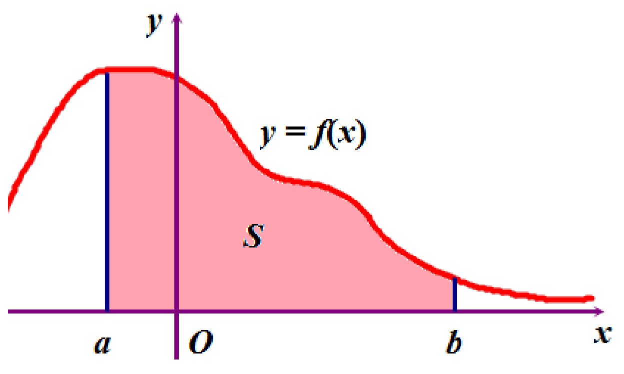
Tính diện tích mặt tròn xoay do đường cong $y = x^2$, $0 \leq x \leq 1$ xoay quanh Oy

3.7 Tích phân suy rộng

Cho hàm số $f(x) \geq 0, \forall x \in [a, +\infty], (b \to +\infty)$. Khi đó, diện tích S có thể tính được cũng có thể không tính được. Trong trường hợp tính được hữu hạn thì:

$$\boxed{S = \int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)dx} \tag{3.26}$$

Hình dạng đồ thị:



3.7.1 Tích phân suy rộng loại 1:

1. Định nghĩa: - Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $[a; +\infty)$, khả tích trên mọi đoạn $[a, b](a < b)$, khả tihcs trên mọi đoạn $[a, b](a < b)$

   - Giới hạn (nếu có) của $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ khi $b \to +\infty$ được gọi là tích phân suy rộng loại 1 của $f(x)$ trên $[a, +\infty]$ Ta có:

$$\boxed{\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)dx} \tag{3.27}$$

   - Định nghĩa tương tự, ta có:

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a \to -\infty} \int_a^b f(x)dx \tag{3.28}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^c f(x)dx + \int_c^{+\infty} f(x)dx \tag{3.29}$$

   - Nếu giới hạn trên tồn tại thì ta nói tích phân hội tụ, ngược lại là tích phân phân kỳ.

Example 3.7.1

Khảo sát sự hội tụ của các tích phân sau:

(a) $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{2+x^2}dx$

(b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{1} \frac{1}{2+x^2}dx$

(c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2+x^2}dx$

(d) $\displaystyle\int_{3}^{+\infty} \frac{x}{2+3x^4}dx$

(f) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} xe^{-x}dx$

(g) $\displaystyle\int_{-\infty}^{2} xe^{x}dx$

(h) $\displaystyle\int_{e}^{+\infty} \frac{lnx}{x}dx$

2. Các tiêu chuẩn hội tụ

   (a) Tiêu chuẩn 1:

   Nếu $0 \leq f(x) \leq g(x), \forall x \in [a; +\infty)$ và $\displaystyle\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ thì $\displaystyle\int_{a}^{+\infty} g(x)dx$

   (b) Tiêu chuẩn 2:

   Nếu $\displaystyle\int_{a}^{+\infty} |f(x)|dx$ hội tụ thì $\displaystyle\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$ (ngược lại không đúng)

3.7.2 Tích phân suy rộng loại 2:

1. Định nghĩa:

   - Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $[a, b)$ và không xác định tại b, khả tích trên mọi đoạn $[a, b-\epsilon], (\epsilon > 0)$

   - Giới hạn (nếu có) của $\displaystyle\int_{a}^{c} f(x)dx$ khi $c \to b^-$ được gọi là tích phân suy rộng loại 2 của $f(x)$ trên $[a, b)$

   Ký hiệu:

$$\boxed{\int_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{c \to b^-} \int_{a}^{c} f(x)dx} \tag{3.30}$$

Tích phân suy rộng tại b
- Định nghĩa tương tự, nếu hàm số $f(x)$ không xác định tại a thì

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \lim_{c\to a^+}\int_c^b f(x)dx} \tag{3.31}$$

Tích phân suy rộng tại a.
- Định nghĩa tương tự, nếu hàm số $f(x)$ không xác định tại a và tại b thì

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx, \forall c \in (a,b)} \tag{3.32}$$

Tích phân suy rộng tại a và b.
- Nếu các giới hạn trên tồn tại hữu hạn thì ta nói tích phân hội tụ, ngược lại là tích phân phân kì.

Example 3.7.2

Khảo sát sự hội tụ của các tích phân sau:

(a) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}} \frac{1}{2-x^2}dx$

(b) $\displaystyle\int_{-\sqrt{2}}^{0} \frac{1}{2-x^2}dx$

(c) $\displaystyle\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \frac{1}{2-x^2}dx$

(d) $\displaystyle\int_{\frac{1}{6}}^{\frac{1}{3}} \frac{3}{\sqrt{1-9x^2}}dx$

(e) $\displaystyle\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt[3]{ln^2x}}$

(f) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x^2-x}dx$

2. Các tiêu chuẩn hội tụ
   Các tiêu chuẩn hội tụ như tích phân suy rộng loại 1.
   Chú ý: Nếu $f(x) \sim g(x)(x \to b)$ thì $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ và $\displaystyle\int_a^b g(x)dx$ có cùng tính chất (với b là cận suy rộng).

Chapter 4

Hàm nhiều biến

Hàm nhiều biến là một ánh xạ

$$f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \tag{4.1}$$

xác định bởi $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D \to z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}$.
D gọi là miền xác định của hàm số f.
x_i gọi là các biến số độc lập.

4.1 Miền xác định của hàm số

Ta qui ước, MXĐ của hàm số nhiều biến $z = f(M)$ (nếu không nói gì thêm) là tập hợp tất cả các điểm M sao cho $f(M)$ có nghĩa.

Example 4.1.1 *Tìm MXĐ của các hàm số sau:*

1. $z = \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$
2. $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$
3. $z = ln(x + y - 1)$

4.2 Giới hạn của hàm nhiều biến

Các khái niệm sau đây được phát biểu cho hàm 2 biến và chúng cũng được mở rộng cho hàm nhiều biến khác).
Cho dãy điểm $M_n(x_n, y_n)$ và điểm $M_0(x_0, y_0)$ trong $\mathbb{R}^2$.
Khi đó, ta nói M_n dần tới M_0 (viết $M_n \to M_0$) khi $n \to \infty$
nếu $\lim\limits_{n\to\infty} d(M_n, M_0) = 0$ hay $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = x_0$
Cho hàm số u = f(M) = f(x, y) xác định trong lân cận V nào đó của điểm M_0 (có thể trừ M_0).
Ta nói hàm số f(M) có giới hạn l khi $M \to M_0$ nếu với mọi dãy điểm $M_n(x_n, y_n) \in V \setminus \{M_0\}$ sao cho
$\lim\limits_{n\to\infty} M_n(x_n, y_n) = M_0$ thì $\lim\limits_{n\to\infty} f(M_n) = l$.
Ta viết: $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = l$ hay $\lim\limits_{M\to M_0} f(M) = l$

Ghi chú: Các định lý về tổng, tích, thương của hàm số một biến số cũng đúng cho hàm số nhiều biến số.

Example 4.2.1

Tìm giới hạn của các hàm số sau:

1. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} \dfrac{x-1}{x^2+y^2}$
2. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{1+x^2+y^2}{y^2}(1-cosy)$
3. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$
4. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2+y^2}{x^4+y^4}$
5. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$
6. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2x^2y}{x^4+y^2}$

Example 4.2.2

1. Xét tính liên tục của hàm số sau tại điểm (0, 0):

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

2. Cho hàm số

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1+x^2+y^2}{y^2}(1-cosy) & (x,y) \neq (0,0) \\ -\frac{1}{2} & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   Xét tính liên tục của hàm số tại (0, 0).

3. Cho hàm số

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ a & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   Xác định a để hàm số liên tục tại (0, 0)?

4.3 Đạo hàm và vi phân

4.3.1 Đạo hàm riêng

Định nghĩa: Cho hàm số $u = f(x,y)$ xác định trong D, $M_0 = (x_0, y_0) \in D$.
Đạo hàm riêng theo biến x của hàm f(x, y) tại điểm M_0 là giới hạn (nếu có)

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} \tag{4.2}$$

Kí hiệu: $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ hay $f'_x(x_0, y_0)$ hay $\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0)$.
Tương tự ta có đạo hàm riêng theo biến y, kí hiệu $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ hay $f'_y(x_0, y_0)$ hay $\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0)$.
Chú ý: Khi tính đạo hàm riêng của một hàm số theo 1 biến nào đó ta chỉ việc xem hàm số chỉ phụ thuộc vào biến đó, các biến số khác coi như không đổi, rồi áp dụng quy tắc tính đạo hàm theo 1 biến.

Example 4.3.1

Tính các ĐHR cấp 1 của các hàm sau:

1. $z = f(x, y) = y^2 sin\frac{x}{y}$
2. $z = f(x, y) = \sqrt{x^2 - y^2}$
3. $z = arcsin\frac{y-1}{x}$
4. $z = f(x, y) = ln(ysinx + e^{cosy})$
5. $z = ye^{sin^2 x} + xsiny$
6. $z = f(x, y) = \frac{1}{y-x^2}$
7. $z = \sqrt{xlny}$
8. $z = \sqrt{y - x}ln(y + x)$
9. $u = f(x, y, z) = e^{xyz}$
10. $u = f(x, y, z) = cos(x + 3y - z)$

4.3.2 Vi phân toàn phần

- Cho hàm số $u = f(x, y)$ xác định trong $D, M_0 = (x_0, x_0), M = (x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \in D$. Khi đó: $\Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$ được gọi là số gia toàn phần của hàm f(x, y) tại M_0 nếu $\Delta f = A\Delta x + B\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y$,
trong đó: A, B những chỉ số chỉ phụ thuộc x_0, y_0
α, β dần tới 0 khi $M \to M_0$
- Khi $\Delta x, \Delta y \to 0$ thì hàm f(x, y) khả vi tại M_0.

$$A\Delta x + B\Delta y \tag{4.3}$$

gọi là vi phân toàn phần của f(x, y) tại M_0.
- Ký hiệu df hay du.
- Nếu x, y là các biến số độc lập thì $dx = \Delta x, dy = \Delta y$.
Chú ý:
- Hàm số được gọi là khả vi trong miền D nếu nó khả vi tại mọi điểm của D.
- Nếu hàm số khả vi tại M_0 thì hàm số liên tục tại M_0.
Định lí
Nếu hàm số $u = f(x, y)$ có ĐHR ở lân cận $M_0(x_0, y_0)$ và các ĐHR đó liên tục tại M_0 và

$$\boxed{df = f'_x dx + f'_y dy} \tag{4.4}$$

Example 4.3.2

Tính vi phân toàn phần của các hàm số sau:

1. $f(x,y) = x^3 + y^4$
2. $f(x,y) = y^2 sin\frac{x}{y}$
3. $f(x,y) = sin(x^2 + y^2)$
4. $f(x,y) = lntan\frac{y}{x}$
5. $f(x,y) = e^{\frac{x}{y}} + e^{\frac{y}{x}}$
6. $f(x,y) = e^x(cosy + xsiny)$
7. $f(x,y) = arctan\frac{x+y}{x-y}$
8. $f(x,y,z) = xe^y + ye^z + ze^x$
9. $f(x,y,z) = x^{y^2 z}$

4.3.3 Dùng vi phân toàn phần cấp 1, tính giá trị gần đúng

Từ định nghĩa ta thấy rằng vi phân toàn phần df chỉ khác số gia toàn phần Δf một VCB bậc cao hơn $\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$. Do đó, khi Δx và Δy có trị tuyệt đối khá bé, ta có thể xem $\Delta f = df$, tức là

$$\boxed{f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y} \tag{4.5}$$

Example 4.3.3

Dùng vi phân tính gần đúng các số sau:

1. $\sqrt[3]{(1.02)^2 + (0.005)^2}$
2. $ln(\sqrt[3]{1.03} + \sqrt[4]{0.98} - 1)$
3. $\sqrt{9.(1.95)^2 + (8.1)^2}$
4. $arctan\frac{1.02}{0.95}$
5. $(\sqrt{99} - \sqrt[3]{124})^3$
6. $\sqrt{sin^2 1.55 + 8e^{0.015}}$

4.3.4 Đạo hàm của hàm hợp

Cho hàm số $z = f(u,v)$ xác định trong D và $u = u(x,y), v = v(x,y)$ xác định trong D. Khi đó $z = f(u = u(x,y), v(x,y))$ là hàm hợp của x, y qua các biến số trung gian là u và v.

Định lý:

Nếu các ĐHR f'_u, f'_v liên tục trong D, u'_x, u'_y, v'_x, v'_y liên tục trong D thì tồn tại f'_x, f'_y, tức là

$$f'_x = f'_u u'_x + f'_v v'_x \tag{4.6}$$

$$f'_y = f'_u u'_y + f'_v v'_y \tag{4.7}$$

* Ma trận $J = \begin{pmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{pmatrix}$ gọi là ma trận Jacobi.

Định thức của ma trận này gọi là định thức Jacobi của u, v đối với x, y, kí hiệu $\frac{D(u,v)}{D(x,y)}$

Example 4.3.4

Tính ĐHR của hàm số hợp sau:

1. $f(u,v) = e^u lnv$ với $u = xy, v = x^2 + y^2$

2. $f(u,v) = e^{u^2-2v^2}$, với $u = cosx, v = \sqrt{x^2+y^2}$
3. $f(u,v) = ln(u^2+v^2)$, với $u = xy, v = \frac{x}{y}$
4. $f(u,v) = x^2lny$, với $x = \frac{u}{v}, y = 3u-2v$

4.3.5 Vi phân toàn phần của hàm hợp:

Nếu giả thiết thêm u'_x, u'_y, v'_x, v'_y, liên tục thì

$$df = f'_x dx + f'_y dy \tag{4.8}$$

- Nếu hàm $z = f(x,y)$ và $x = x(t), y = y(t)$ thì

$$f'_t = f'_x x'_t + f'_y y'_t \tag{4.9}$$

Example 4.3.5

Tính vi phân toàn phần của hàm số sau:

1. $f(x,y) = x\sqrt{1+y^2}$ với $x = te^{2t}, y = e^{-t}$
2. $f(x,y) = xe^{\frac{x}{y}}$, với $x = cost, y = e^{2t}$

4.3.6 Đạo hàm và vi phân cấp cao

Cho hàm số $u = f(x,y)$ có các ĐHR cấp $1 f'_x, f'_y$. Các ĐHR của f'_x, f'_y được gọi là ĐHR cấp 2. Kí hiệu

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

Hoặc

$$f''_{x^2} = (f'_x)'_x, \quad f''_{y^2} = \left(f'_y\right)'_y, \quad f''_{xy} = (f'_x)'_y, \quad f''_{yx} = \left(f'_y\right)'_x$$

Định lí Schwarz

Nếu trong một lân cận U nào đó của điểm $M_0(x_0, y_0)$, hàm số $z = f(x,y)$ có các đạo hàm riêng f''_{xy}, f''_{yx} và nếu các đạo hàm ấy liên tục tại M_0 thì

$$f''_{xy}(M_0) = f''_{yx}(M_0) \tag{4.10}$$

ĐHR của các ĐHR cấp 2 được gọi là ĐHR cấp 3.

Example 4.3.6

Tính ĐHR cấp 2 của các hàm số sau:

1. $f(x,y) = x^2y^3 + x^4$
2. $f(x,y) = \sqrt{(x^2+y^2)^3}$
3. $f(x,y) = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$
4. $f(x,y) = 3^{sin(2x-3y)}$

4.3.7 Vi phân toàn phần cấp 2

Cho hàm số $z = f(x,y)$. Vi phân toàn phần cấp 2 có dạng:

$$\boxed{d^2z = f''_{x^2}dx^2 + 2f''_{xy}dxdy + f''_{y^2}dy^2} \tag{4.11}$$

Example 4.3.7

Tìm vi phân toàn phần cấp 1 và cấp 2 của các hàm số sau:

1. $z = x^2ln(x+y)$
2. $z = ln(x + \sqrt{x^2+y^2}$
3. $z = arctan\frac{y}{x}$

4.3.8 Đạo hàm theo hướng, Vector Gradien

1. **Đạo hàm theo hướng:**

   a. Cho hàm $f(x,y,z)$ xác đinh trong miền $D \subset R^3$. Qua điểm $M_0(x_0,y_0,z_0)$ vẽ một đường thẳng định hướng mà vector đơn vị là $\vec{l}$, M là một điểm nằm trên đường thẳng đó, ta có $\overrightarrow{M_0M} = \rho\vec{l}$, trong đó$\rho$ là độ dài đại số của $\overrightarrow{M_0M}$.

   b. Nếu $\rho \to 0$ (tức là $M \to M_0$) theo hướng $\vec{l}$, thì tỉ số: $\frac{\Delta f}{\rho} = \frac{f(M)-f(M_0)}{\rho}$ sẽ dần đến một giới hạn hữu hạn thì giới hạn đố được gọi là đạo hàm của hàm f theo hướng $\vec{l}$ tại điểm M_0, kí hiệu $\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}(M_0)$.

   c. Nếu $\vec{l}$ trùng với vector đơn vị $\vec{i}$ của trục Ox thì $\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}(M_0) = \frac{\partial f(x_0)}{\partial x}$.

Định lý
Nếu hàm số $u = f(x,y,z)$ khả vi tại điểm $M_0(x_0,y_0,z_0)$ thì tại điểm M_0 có đạo hàm theo mọi hướng $\vec{l}$ và

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial \vec{l}} = f'_x(M_0)cos\alpha + f'_y(M_0)cos\beta + f'_z(M_0)cos\gamma \tag{4.12}$$

trong đó $cos\alpha, cos\beta, cos\gamma$ là các thành phần của $\vec{l}$ và được xác định bằng cách: lấy thành phần tương ứng của $\overrightarrow{M_0M}$ chia độ dài của $\overrightarrow{M_0M}$.

Example 4.3.8

Cho hàm $f(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz$. Tìm đạo hàm của hàm f theo hướng $\vec{l}$ tại $M_0(1,2,3)$, biết $\vec{l}$ là vector đơn vị của $\overrightarrow{M_0M}$, với $M(2,-3,5)$

2. **Vector Gradien:** Hàm số $u(x,y,z)$ có các đạo hàm riêng tại $M_0(x_0,y_0,z_0)$, ta nói gradien của f tại M_0 là một vector, kí hiệu $\overrightarrow{gradu}(M_0)$ và được xác định như sau:

$$\boxed{\overrightarrow{gradu}(M_0) = (u'_x(M_0), u'_y(M_0), u'_z(M_0))} \tag{4.13}$$

hay viết cách khác:

$$\overrightarrow{gradu}(M_0) = u'_x(M_0)\vec{i} + u'_y(M_0)\vec{j} + u'_z(M_0)\vec{k} \tag{4.14}$$

Example 4.3.9 *Tìm* $\overrightarrow{gradf}(M_0)$ *của hàm f trong ví dụ* (4.3.8)

Example 4.3.10 *Tính* $\frac{\partial u(M_0)}{\partial \vec{l}}$ *và* $\overrightarrow{gradu}(M_0)$, *với* $u = xy^2z^3$ *tại điểm* $M_0(1,2,-3)$, *biết rằng* $\vec{l}$ *được xác định bởi* $\overrightarrow{M_0M}$, *với* $M(0,5,3)$.

Example 4.3.11 *Tính* $\frac{\partial u(A)}{\partial \vec{l}}$ *và* $\overrightarrow{gradu}(A)$, *với* $u = ln(x^2+y^2+z^2)$, $A(1,2,3)$ *và* $\vec{l}$ *được xác định bởi* $\overrightarrow{AB}, B(-3,5,1)$

Example 4.3.12 *Tính đạo hàm của hàm số* $z = x^2 - 3xy + y^3$ *tại điểm* $M(1,1)$ *theo hướng của* $\vec{v} = 4\vec{i} - 7\vec{j}$. *Tìm* $\overrightarrow{gradz}(M)$

Example 4.3.13 *Tính đạo hàm của hàm số* $u = arcsin\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$ *tại điểm* $M(1,1,1)$ *theo hướng của* $\vec{v} = -7\vec{j} + 6\vec{k}$. *Tìm* $\overrightarrow{gradu}(M)$

4.4 Công thức Taylor

Giả sử hàm số $f(x,y)$ có ĐHR đến cấp $n+1$ liên tục trong lân cận nào đó của điểm $M_0(x_0,y_0)$ và $M(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$ cũng thuộc lân cận đó thì

$$f(M) = f(M_0) + df(M_0) + \frac{1}{2!}d^2f(M_0) + \ldots + \frac{1}{n!}d^nf(M_0) + \frac{1}{(n+1)!}d^{n+1}f(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y) \tag{4.15}$$

với $(0 < \theta < 1)$ được gọi là khai triển Taylor của $f(x)$ tại điểm M_0

Example 4.4.1

1. Khai triển hàm số $f(x,y) = 2x^2 - xy - y^2 - 6x - 3y + 5$ theo công thức Taylor ở lân cận điểm $M_0(1,-2)$.
2. Khai triển hàm số $f(x,y) = y^x$ ở lân cận điểm $M_0(1,1)$ đến số hạng bậc 2.
3. Khai triển Taylor hàm số $f(x) = \frac{1}{x}$ tại 2.

4.5 Cực trị

4.5.1 Định nghĩa

Cho hàm số $u = f(x, y)$ xác định trong D, $M_0(x_0, y_0) \in D$.

+ Ta nói hàm số đạt cực trị tại M_0 nếu với mọi M thuộc lân cận nào đó của M_0, $(M \neq M_0)$ thì $f(M) - f(M_0)$ có dấu không đổi.

+ Nếu $f(M) - f(M_0) > 0$ thì f có cực tiểu

+ Nếu $f(M) - f(M_0) < 0$ thì f có cực đại

4.5.2 Định lý

Cho $f(x, y)$ liên tục cùng với các đạo hàm riêng cấp 2 tại $M(a, b)$ và lân cận của nó.

1. Giả sử
$$f_x(x, y) = f_y(x, y) = 0$$
tìm được điểm dừng M_0

2. Xét
$$H = \begin{vmatrix} f_{xx}(M_0) & f_{xy}(M_0) \\ f_{xy}(M_0) & f_{yy}(M_0) \end{vmatrix} = f_{xx}(M_0)f_{yy}(M_0) - [f_{xy}(M_0)]^2 \qquad (1.21)$$

   + Nếu $H(M_0) > 0$ và $f_{xx}(M_0) > 0$ thì hàm số đạ cực tiểu đ?a phương tại M_0
   + Nếu $H(M_0) > 0$ và $f_{xx}(M_0) < 0$ thì hàm số đạt cực đại phương tại M_0.
   + Nếu $H(M_0) < 0$ thì điểm M_0 là điểm yên ngựa của hàm số, hàm số không đạt cực trị tại M_0.
   + Nếu $H(M_0) = 0$ thì chưa kết luận đưuọc cho điểm M_0

Chú ý: Nếu $A = 0$ thì ta phải khai triển hàm số f theo công thức Taylor đến các số hạng cấp ba.

Example 4.5.1 *Tìm cực trị của hàm số sau:*

1. $f(x, y) = 4(x - y) - x^2 - y^2$
2. $z = -x^2 - y^2 + 2x + 4y + 6$
3. $z = (y - 2)lnxy$
4. $z = 2x^4 + y^4 - x^2 - 2y^2$

4.5.3 Giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số nhiều biến số trong miền đóng, bị chặn

Muốn tìm GTLN, GTNN của hàm số trong miền đóng D, ta có thể tìm những điểm tới hạn của nó trong D, tính giá trị cvcủa hàm số tại các điểm đó và so sánh chúng với những giá trị của hàm số trên biên của D.

Example 4.5.2 *Tìm GTLN, GTNN của các hàm số sau:*

1. $z = x^2 + 2xy - 4x + 8y$ trong miền D giới hạn bởi các đường thẳng $x = 0, x = 1, y = 0, y = 2$.
2. $z = x^2 + y^2 - xy + x + y$ trong miền D giới hạn bởi $x \leq 0, y \leq 0, x + y \geq 0$.
3. $z = x^2 + y^2 - xy + x + y$ trong miền D giới hạn bởi $x^2 + y^2 \leq 25$.
4. $z = e^{-(x^2+y^2)}(2x^2 + 3y^2)$ trong miền D giới hạn bởi $x^2 + y^2 \leq 1$.

4.6 Hàm ẩn, cực trị có điều kiện

4.6.1 Khái niệm hàm ẩn

Cho phương trình $F(x, y) = 0$ là hàm xác định trong tập $U \subset \mathbb{R}^2$. Nếu với mỗi giá trị $x = x_0$ trong một khoảng I nào đó, có một hay nhiều giá trị y_0 sao cho $F(x_0, y_0) = 0$, ta nói phương trình trên xác định một hay nhiêug hàm số ẩn y theo x trong khoảng I và $F(x, y(x)) = 0$.

Example 4.6.1 *Phương trình $x^2 + 2 + y = 0$ rõ ràng xác định hàm số $y = -x^2 - 2$ trên $\mathbb{R}$*

4.6.2 Đạo hàm của hàm ẩn

1. **Trường hợp hàm ẩn có một biến**
Cho hàm số $F(x, y)$ thoả các điều kiện sau:
- Xác định và liên tục trong tập mở $U \subset \mathbb{R}^2$
- $F(x_0, y_0) = 0, (x_0, y_0) \in U$
- Các đạo hàm riêng F'_x, F'_y liên tục trong U
- $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$
thì $F(x, y) = 0$ xác định một hàm số ẩn $y = f(x)$ liên tục và có đạo hàm liên tục trong khoảng nào đó và trong khoảng đó thì $F(x, f(x)) = 0$ và

$$y' = -\frac{F'_x}{F'_y} \tag{4.18}$$

Example 4.6.2 *Tính đạo hàm của các hàm ẩn xác định bởi các phương trình sau:*

(a) $x^2 + y^2 = R^2$

(b) $x^3y - y^3x = a^4$

(c) $xe^y + ye^x - e^{xy} = 0$. *Tính* y', y"

2. **Trường hợp hàm ẩn có nhiều biến**
Cho hàm số $F(x, y, z) = 0$ với các điều kiện tương tự như trong phần hàm ẩn một biến, khi đó có thể xác định hàm ẩn $z = f(x, y)$ liên tục và có các đạo hàm liên tục trong khoảng miền nào đó và $F(x, y, f(x, y)) = 0$ và

$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z} \qquad z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z} \tag{4.19}$$

Example 4.6.3

a. Cho hàm $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2$. Tính z'_x, z'_y
b. Cho hàm $x + y + z = e^z$. Tính z'_x, z'_y
c. Cho hàm $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 0$. Tính z'_x, z'_y

3. **Trường hợp hàm ẩn xác định bởi hệ**
Cho hệ $\begin{cases} F(x, y, u, v) = 0 \\ G(x, y, u, v) = 0 \end{cases}$ xác định 2 hàm ẩn $u(x, y), v(x, y)$ liên tục và có ĐHR trong miền

nào đó. Khi đó:

$$\begin{vmatrix} F'_u & F'_v \\ G'_u & G'_v \end{vmatrix} = \frac{D(F,G)}{D(u,v)} \neq 0 \tag{4.20}$$

và hệ có nghiệm duy nhất

$$u'_x = -\frac{\frac{D(F,G)}{D(x,v)}}{\frac{D(F,G)}{D(u,v)}}, v'_x = -\frac{\frac{D(F,G)}{D(u,x)}}{\frac{D(F,G)}{D(u,v)}} \tag{4.21}$$

Tương tự cho u'_y và v'_y

Example 4.6.4

Tính đạo hàm của hàm ẩn $y(x), z(x)$ xác định bởi

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ x^2+y^2+z^2=1 \end{cases}$$

4.7 Cực trị có điều kiện

4.7.1 Phương pháp tìm cực trị có điều liện

Cho hàm số $u = f(x,y)$ với điều kiện $g(x,y) = 0$. Khi đó:
Nếu M_0 là cực trị có điều kiện của hàm f thì các ĐHR cấp 1 của hàm f, g liên tục trong lân cận của M_0, $g'_x(M_0) \neq 0, g'_y(M_0) \neq 0$ và tại M_0 có

$$\begin{vmatrix} f'_x & f'_y \\ g'_x & g'_y \end{vmatrix} = 0 \tag{4.22}$$

Hay

$$\frac{f'_x}{g'_x} = \frac{f'_y}{g'_y} \tag{4.23}$$

* Để M_0 là cực trị có điều kiện thì cần xét dấu của số gia của f, tức xét dấu của

$$\Delta f = f(x_0+h; y_0+k) - f(x_0; y_0) \tag{4.24}$$

+ Nếu $\Delta f < 0$ thì M_0 là cực đại và $f_{max} = f(M_0)$
+ Nếu $\Delta f > 0$ thì M_0 là cực tiểu và $f_{min} = f(M_0)$

Example 4.7.1 *Tìm cực trị có điều kiện của hàm*

1. $f(x,y) = xy$ *với điều kiện* $x+y=1$
2. $u = x - 2y + 2z$ *với điều kiện* $x^2+y^2+z^2-1=0$

4.7.2 Tìm cực trị có điều kiện bằng phương pháp nhân tử Lagrange

Giả sử cần tìm cực trị của hàm số $z = f(x, y)$ thỏa điều kiện $\varphi(x, y) = 0$

1. Lập hàm Lagrange

$$L(x, y) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y) \tag{4.25}$$

   Trong đó, λ là hằng số và được gọi là nhân tử Lagrange

2. Giải hệ:

$$\begin{cases} L_x = 0 \\ L_y = 0 \\ \varphi(x, y) = 0 \end{cases} \tag{4.26}$$

   Tìm điểm dừng $M(x_0, y_0)$

3. Tính

$$d^2L(M) = L_{xx}(M)dx^2 + 2L_{xy}(M)dxdy + L_{yy}(M)dy^2 \tag{4.27}$$

   Trong đó, dx và dy thỏa ràng buộc:

$$\begin{cases} \varphi_x dx + \varphi_y dy = 0 \\ dx^2 + dy^2 \neq 0 \end{cases} \tag{4.28}$$

4. Kiểm tra điều kiện:

   (a) Nếu $d^2L(M) > 0$ thì hàm $f(x, y)$ đạt cực tiểu và $f_{min} = f(M)$

   (b) Nếu $d^2L(M) < 0$ thì hàm $f(x, y)$ đạt cực đại và $f_{max} = f(M)$

   (c) Nếu $d^2L(M)$ không xác định được âm hay dương theo dx, dy thì hàm không đạt cực trị tại M

Example 4.7.2 *Tìm cực trị của hàm số sau:*

1. $f(x, y) = x^2 + y^2$ *thỏa điều kiện* $x + y = 4$
2. $f(x, y) = xy$ *thỏa điều kiện ràng buộc* $x + y = 10$
3. $f(x, y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ *với điều kiện* $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{2}$
4. $f(x, y) = x + y$ *với điều kiện* $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$
5. $u = x^2 + y^2$ *với điều kiện* $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1.$

Chapter 5

Dãy số và chuỗi số

5.1 Chuỗi số

5.1.1 Định nghĩa

Cho dãy số $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$.
Biểu thức

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \tag{5.1}$$

gọi là chuỗi số.
- Các số $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ gọi là các số hạng của chuỗi số, u_n gọi là số hạng tổng quát.
- Tổng của n số hạng đầu
$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$, gọi là tổng riêng thứ n của chuỗi số
- Nếu $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ (hữu hạn) thì chuỗi (5.1) hội tụ và có tổng là S,
ta viết $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S$
- Nếu (5.1) không hội tụ thì gọi là phân kỳ.
- Hiệu $R_n = S - S_n$, gọi là phần dư thứ n của chuỗi số. Nếu chuỗi hội tụ thì $R_n \to 0$ khi $n \to \infty$

Example 5.1.1 *Xét các chuỗi sau:*

1. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}$
2. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$
3. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)}$
4. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)}$

5.1.2 Chuỗi hình học

Xét chuỗi
$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + q + q^2 + \ldots$$

1. Nếu $q \neq 1$ thì
$$S_n = 1 + q + q^2 + \ldots = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$
   (a) Nếu $|q| < 1$ thì $\lim\limits_{n\to\infty} = 0$ nên $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{1}{1-q}$

   (b) Nếu $|q| > 1$ thì $\lim\limits_{n\to\infty} = \infty$ nên $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$

2. Nếu $q = 1$ thì $S_n = n \to \infty$ nên chuỗi phân ỳ.

3. Nếu $q = -1$ thì $S_{2n} = 1; S_{2n+1} = 0$ khi $n \to \infty$. Do đó, không tồn tại $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$. Nên chuỗi phân kỳ.

Tóm lại:
$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} q^n \begin{cases} \text{hội tụ nếu } |q| < 1 \\ \text{phân kỳ nếu } |q| \geq 1 \end{cases}}$$

Example 5.1.2 *Xét sự hội tụ của chuỗi:*

1. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$

2. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 5^n$

3. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 1^n$

4. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$

5.1.3 Điều kiện cần của chuỗi hội tụ

Định lý 5.1.1

Nếu chuỗi (5.1) hội tụ thì số hạng tổng quát $u_n \to 0$ khi $n \to \infty$.
Từ định lý trên, cho ta 1 phương pháp rất tốt để chứng minh chuỗi phân kì:
$$\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$$
hoặc
$$\lim_{n\to\infty} u_n = \infty$$

Example 5.1.3 *Xét sự hội tụ của các chuỗi sau và tính tổng (nếu có):*

1. $\sum_{n=1}^{\infty} 3^{n-1}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n-1}$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+n+1}{n^2+2n+3}$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} sinn$

5.1.4 Vài tính chất của chuỗi số hội tụ:

Giả sử chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n; \sum_{n=1}^{\infty} \text{v}_n$ hội tụ và có tổng lần lượt là $S; S'$. Khi đó:

1. Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} Cu_n$, với C = const, cũng hội tụ và có tổng CS;

2. Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$ cũng hội tụ và có tổng bằng $S + S'$

Từ định lý trên, ta suy ra kết quả sau:

1. Nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ và chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \text{v}_n$ phân kỳ thì $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$ phân kỳ.

2. Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ và $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ phân kỳ thì chưa có kết luận cho chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$. Tuy nhiên, nếu $u_n \geq 0$ và $v_n \geq 0$ thì ta có chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$ phân kỳ.

Example 5.1.4 *Xét sự hội tụ của các chuỗi sau và tính tổng (nếu có):*

1. $\sum_{n=1}^{\infty} 4\left(\frac{2}{3}\right)^n$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{5^n}\right)$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 7^n}{6^n}$

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{n+1}+5^{n-1}}{3^n}$

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} sinn$

5.2 Chuỗi số dương

5.2.1 Định nghĩa

Chuỗi số dương là chuỗi nếu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n,\ u_n \geq 0, \forall n \geq 0$

Định lý 5.2.1 *Chuỗi số dương hội tụ khi và chỉ khi dãy tổng riêng* $\{S_n\}$ *bị chặn, tức là tồn tại một số* $M > 0$ *sao cho* $\forall n \geq 1$

$$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n \leq M$$

5.2.2 Các tiêu chuẩn xét sự hội tụ của chuỗi số dương

1. **Tiêu chuẩn tích phân:** Nếu hàm $f(x) \geq 0$, liên tục và đơn điệu giảm trên $[k; +\infty), k \in \mathbf{N}$ thì chuỗi $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ hội tụ khi và chỉ khi $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ.

   Dựa vào tiểu chuẩn tích phân, ta có kết quả sau:
   Chuỗi
   $$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \begin{cases} \text{hội tụ khi } p > 1 \\ \text{phân kỳ khi } p \leq 1 \end{cases}}$$

   Example 5.2.1 *Xét sự hội tụ của chuỗi:*

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$

   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$

2. **Tiêu chuẩn so sánh:**

   Định lý 5.2.2 ***Tiêu chuẩn so sánh 1:***

   Cho 2 chuỗi số dương $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \sum_{n=1}^{\infty} v_n$, trong đó $u_n \leq v_n, \forall n \geq 1$. Khi đó:

   (a) Nếu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ hội tụ thì $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ cũng hội tụ;

(b) Nếu $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ phân kỳ thì $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ cũng phân kỳ.

Example 5.2.2 *Xét sự hội tụ của các chuỗi số sau:*

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} sin \frac{1}{n}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{5^n + n}$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{lnn}{n}$

Định lý 5.2.3 *Tiêu chuẩn so sánh 2:*

Cho 2 chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \sum_{n=1}^{\infty} v_n$.
Giả sử tồn tại $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = k$, Khi đó:

(a) Nếu $0 < k < +\infty$ thì $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ và $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ;

(b) Nếu $k = 0$ thì nếu $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ hội tụ thì $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ;

(c) Nếu $k = +\infty$ thì nếu $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ thì $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ hội tụ.

Hệ quả: Nếu hai chuỗi số dương $\{u_n\}, \{v_n\}$ là những VCB tương đương (tức là: $u_n \sim v_n$ thì hai chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ và $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ cùng hội tụ hoặc cùng tương đương.

Example 5.2.3 *Xét sự hội tụ của chuỗi:*

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + n + 1}{n^4 + 1}$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} sin \frac{\pi}{2^n}$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} arcsine^{-n}$

3 **Tiêu chuẩn Cauchy**

Xét chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$

- Tính $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = k$

- Nếu $k < 1$ thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ;

- Nếu $k > 1$ thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ phân kỳ.

4 **Tiêu chuẩn D'Alembert**

Cho chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$

Xét chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$

- Tính $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = k$

- Nếu $k < 1$ thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ;

- Nếu $k > 1$ thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ phân kỳ.

Example 5.2.4 *Xét sự hội tụ của các chuỗi số sau:*

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+2n}{3n-2}\right)^n$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{3^n}$

(c) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{nlnn}$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1.3.5.7\ldots.(2n-1)}{3^n n!}$

(f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(lnn)^n}$

(g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n^2} 2^n}{(n+1)^{n^2}}$

(h) $\sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+2}\right)^{n(n-1)}$

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$