

ÔN TẬP

1. Tính giới hạn hàm số: dùng một số công thức cơ bản, quy tắc L'Hospital.
2. Xét tính liên tục của hàm số.
3. Tính đạo hàm riêng cấp 1, 2; vi phân toàn phần cấp 1, 2 của hàm số $z = f(x,y)$.
4. Tìm cực trị tự do và cực trị có điều kiện của hàm hai biến.
5. Tính tích phân bất định và tích phân xác định: PP đổi biến số 1, 2; phương pháp tích phân từng phần; tích phân hàm hữu tỷ.
6. Khảo sát tính hội tụ của chuỗi số: Tiêu chuẩn so sánh 1, 2; tiêu chuẩn D'Alembert; tiêu chuẩn Cauchy; tiêu chuẩn Leibnitz; điều kiện cần để chuỗi hội tụ.

Bài tập

1/. Tính các giới hạn sau:

$$\begin{array}{lll}
 \text{a. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}; & \text{b. } \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\cot^2 x}; & \text{c. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{e^x - x - 1}; \\
 \text{d. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x - \sin x}; & & \\
 \text{e. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + x \cos x}{\sin x \cos x}; & \text{f. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - x \cos x}{\sin^2 3x}; & \text{g. } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1 - x^3}{x^2 + 7x} \right)^5; \\
 \text{h. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(1 - \cos x)}{1 - \cos x}; & & \\
 \text{i. } \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[3]{\frac{x^2 - 5x}{x^3 + x - 2}}; & \text{j. } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[5]{x}}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[5]{x}}; & \text{k. } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x} - 5x + 3}{2x + \sqrt[3]{x^2} - 4}.
 \end{array}$$

2/. Xét tính liên tục của hàm số

a) Tìm các giá trị của x mà tại đó hàm số liên tục

$$\text{i) } f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x - 6}{x - 3}, & x \neq 3; \\ 5, & x = 3. \end{cases}$$

$$\text{ii) } g(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4}, & x \neq \pm 2; \\ 3, & x = 2; \\ 4, & x = -2. \end{cases}$$

b) Xác định giá trị của c để hàm số sau liên tục tại $x = 0$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{9x - 3 \sin x}{x^2}, & x \neq 0; \\ c, & x = 0. \end{cases}$$

c) Xác định giá trị $g(3)$ để hàm số liên tục tại $x = 3$

$$g(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}.$$

d) xác định a, b để hàm số liên tục với mọi x

$$\text{i) } f(x) = \begin{cases} -2, & x \leq -1; \\ ax - b, & -1 < x < 1; \\ b, & x \geq 1. \end{cases}$$

$$\text{ii) } f(x) = \begin{cases} ax + 2b, & x \leq 0; \\ x^2 + 3a - b, & 0 < x \leq 2; \\ 3x - 5, & x > 2. \end{cases}$$

3/. a) Cho hàm số $f(x, y) = xe^y + 1$. Tính các đạo hàm riêng cấp 1 và cấp 2 của hàm số.

b) Cho hàm số $z = xe^y + ye^x + 1$. Tính $dz(1, 1)$.

c) Cho hàm số $f(x, y) = 4^{xy}$. Tính $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$.

4/. a) Tìm cực trị (địa phương) của hàm số

$$\text{i) } z = x^2 + xy + y^2 - x - y; \quad \text{ii) } z = x^2 - 2x + 4y^2 - 8y + 9;$$

$$\text{iii) } f(x, y) = x^3y + 12x^2 - 8y; \quad \text{iv) } f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 2;$$

$$\text{v) } f(x, y) = (1 + xy)(x + y); \quad \text{vi) } f(x, y) = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2.$$

b) Tìm cực trị hàm số

$$\text{i) } z = x^2 + y^2 \text{ thỏa điều kiện } x + 3y - 1 = 0.$$

$$\text{ii) } z = 4 - x^2 - y^2 \text{ thỏa điều kiện } 2x + y - 10 = 0.$$

$$\text{iii) } z = x^2 + y \text{ thỏa điều kiện } x^2 + y^2 = 1.$$

$$\text{iv) } z = x^2 + y^2 \text{ thỏa điều kiện } \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1.$$

$$\text{v) } z = x^2 e^y \text{ thỏa điều kiện } x^2 + y^2 = 3.$$

5/. Tính các tích phân sau:

- a) $I = \int x^2 \sin x^3 dx$; b) $I = \int 7x^2 \sin x dx$; c) $\int \frac{(2x+1)^2}{x} dx$;
- d) $\int \frac{x^2 dx}{(1+x)^8}$; e) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$; f) $\int \frac{e^{2x} dx}{e^x + 1}$; g) $\int x^3 e^{-x} dx$;
- h) $\int x^2 \cos x dx$; i) $\int e^{ax} \sin bx dx$; j) $\int x^3 e^{-x^2} dx$;
- k) $I = \int \sin(\ln x) dx$; $J = \int \cos(\ln x) dx$.
- m) $\int \frac{x^2 dx}{x^3 + 5x^2 + 8x + 4}$; n) $\int \frac{x^5 + 3x^3 + 4x}{x^4 + 3x^2 + 2} dx$;
- o) $\int \frac{x^2 + 1}{x^4 + x^2 + 1} dx$; p) $\int \frac{x^2 + 2}{x^4 + x^2 + 1} dx$.

6/. Tính các tích phân sau:

- a) $I = \int_1^2 \frac{x+3}{2x^2 + 3x + 1} dx$; b) $\int_e^{e^2} \frac{dx}{x \ln \sqrt{x}}$; c) $\int_0^1 \frac{dx}{4x^2 + 4x + 5}$; d) $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x \sin x}{\cos^2 x} dx$;
- e) $\int_{-2}^2 \frac{x^2 \tan 2x dx}{1+x^4}$; f) $\int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos 2x} dx$; g) $\int_0^\pi \frac{x \sin x dx}{1 + \cos^2 x}$.

7/. Khảo sát sự hội tụ của các chuỗi số sau

- a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{n(n+1)(n+3)}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2019^n}{3+2020^n}$; c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$; d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{2020^n}$;
- e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$; f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2019^n}{2020^n}$