Contents

Chapter 1

Hàm số, giới hạn và liên tục

1.1 Giới hạn dãy số

1.1.1 Dãy số thực, sự hội tụ của dãy số thực

1. Định nghĩa 1:
   - Một dãy số thực (gọi tắc là dãy số) là một ánh xạ $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{R}$ cho tương ứng $f(n) = x_n \in \mathbb{R}$.
   Ký hiệu: $\{x_n\}, n = 1, 2, \ldots$.
   Trong đó, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ được gọi là các số hạng, x_n được gọi là số hạng tổng quát.

   Example 1.1.1

   - Dãy số $\{x_1 = 1; x_2\frac{1}{2}, \ldots, x_n = \frac{1}{n}\}$ là dãy được cho dưới dạng liệt kê.
   - Dãy số x_n, $x_n = 2^n$ là dãy được cho dưới dạng tổng quát.
   - Dãy số $\{x_n\}$, $x_n = \frac{x_{n-1} - x_{n-2}}{x_{n+1}}, x_0 = 3$ là dãy được cho dưới dạng hồi qui.

2. *Định nghĩa 2:*
   - Dãy số $\{x_n\}$ được gọi là tăng (hay giảm) nếu $x_n \leq x_{n+1}$ (hay $x_n \geq x_{n+1}$).
   - Một dãy số tăng (hay giảm) được gọi là dãy đơn điệu.

   Example 1.1.2

   - Dãy số $\{x_n\}, x_n = -\frac{n}{n+1}$ là dãy tăng;
   - Dãy số $\{x_n\}, x_n = \frac{n}{n+1}$ là dãy giảm;
   - Dãy số $\{x_n\}, x_n = (-1)^n$ là dãy không đơn điệu.

3. *Định nghĩa 3:*
   - Dãy số $\{x_n\}$ được gọi là bị chặn trên nếu tồn tại $M \in \mathbb{Z}$ sao cho $x_n \leq M, \forall n \in \mathbb{Z}^+$
   - Dãy số $\{x_n\}$ được gọi là bị chặn dưới nếu tồn tại $m \in \mathbb{Z}$ sao cho $x_n \geq m, \forall n \in \mathbb{Z}^+$
   - Dãy số $\{x_n\}$ được gọi là bị chặn nếu dãy bị chặn trên và bị chặn dưới.

   Example 1.1.3

   - Dãy số $\{x_n\}, x_n = -\frac{1}{n^2}$ bị chặn trên bởi 0.
   - Dãy số $\{x_n\}, x_n = -\frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}$ bị chặn dưới bởi $\frac{1}{2}$
   - Dãy số $\{x_n\}, x_n = sinn$ là dãy số bị chặn.
   - Dãy sóo $\{x_n\}, x_n = (n)^{n+1}$ là dãy không bị chặn trên và cũng không bị chặn dưới.

4. *Định nghĩa 4:*
   - Số a được gọi là giới hạn của dãy số $\{x_n\}$ nếu:

$$\forall \epsilon > 0, N \in \mathbb{R} : \forall n \in N \Rightarrow |x_n - a| < \epsilon \tag{1.1}$$

   Ký hiệu

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a$$

   hay

$$x_n \to a$$

   - Dãy số $\{x_n\}$ có $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$ nếu

$$\forall m \in \mathbb{R}, N \in \mathbb{R} : \forall n \in N \Rightarrow x_n < m \tag{1.2}$$

   - Dãy số $\{x_n\}$ có $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ nếu

$$\forall M \in \mathbb{R}, N \in \mathbb{R} : \forall n \in N \Rightarrow x_n > M \tag{1.3}$$

   - Nếu dãy số $\{x_n\}$ có $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \in \mathbb{R}$ (hữu hạn) thì ta nói dãy hội tụ, ngược lại là dãy phân kì.

1.1.2 Các tính chất của dãy số hội tụ

1. *Định lý 1:*
   - Nếu dãy số hội tụ thì giới hạn của nó là duy nhất;
   - Nếu dãy số hội tụ thì bị chặn;
   - Nếu dãy số tăng và bị chặn trên thì dãy hội tụ;
   - Nếu dãy số giảm và bị chặn dưới thì dãy hội tụ.

2. *Định lý 2:*
   Cho hai dãy số hội tụ $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ và $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$; $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$.
   Khi đó:

$$\lim_{n\to\infty} kx_n = ka \tag{1.4}$$

$$\lim_{n\to\infty} (x_n + y_n) = a + b \tag{1.5}$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n y_n = ab \tag{1.6}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b} \tag{1.7}$$

3. *Định lý 3:*
   - Cho hai dãy số $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ thỏa $x_n \le y_n$, $\forall n \ge N$
   Nếu $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$; $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$ thì $a \le b$
   - Cho ba dãy số $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ thỏa $x_n \le y_n \le z_n$, $\forall n \ge N$.
   Nếu $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$ thì $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$.

4. *Một số kết quả giới hạn cần nhớ*

   (a) $\lim\limits_{n\to\infty} k = k$

(b) $\lim_{n\to\infty} x_n = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = \infty$

(c) $\lim_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} |x_n| = |a|$

(d) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1, (a > 0)$

(e) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0, (a > 0)$

(f) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\alpha^n} = 0, \alpha > 0$

1.2 Giới thiệu về hàm số - Function

1.2.1 Định nghĩa

Một hàm số f là một quy tắc cho tương ứng mỗi $x \in D$ một phần tử duy nhất $y = f(x) \in E$.

+ Thông thường D, E là các tập số.

+ Tập D gọi là tập xác định của f

+ $f(x)$ gọi là giá trị của hàm f tại x.

+ Miền giá trị của f là tập tất cả các giá trị của $f(x)$ khi x thay đổi khắp D.

+ x gọi là biến độc lập

+ y gọi là biến phụ thuộc.

+ Đồ thị của hàm số f trên miền D là tập các điểm trong mặt phẳng thỏa $\{(x; f(x)) : x \in D\}$

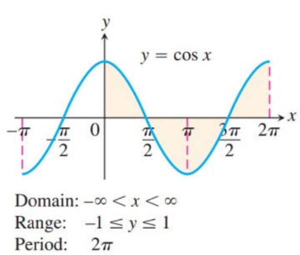
Example 1.2.1

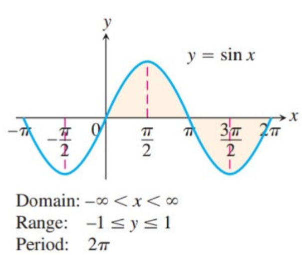
Cho hàm số $y = f(x) = 2x - 3$

1.3 Các hàm số sơ cấp cơ bản

1.3.1 Hàm lượng giác - Trigonometric function:

Ta có các hàm số lượng giác $sinx, cosx, tanx, cotx$





$$sin\theta = \frac{y}{r}; cos\theta = \frac{x}{r}; tan\theta = \frac{y}{x}; cot\theta = \frac{x}{y}$$

1.3.2 Hàm đa thức - Polynomial

Cho hàm số $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, với n là số nguyên không âm và $a_i, i = \overline{0; n}$ là các hằng số cho trước.

Example 1.3.1

Hàm số $f(x) = 2x^4 - x^2 + 10$

1.3.3 Hàm lũy thừa - Power function

Hàm lũy thừa có dạng $f(x) = x^\alpha$, với α là hằng số.

Example 1.3.2

Hàm số $f(x) = x^4$ hay $f(x) = x^3$

1.3.4 Hàm hữu tỉ - Rational function

Hàm hữu tỉ có dạng $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, với $P(x); Q(x)$ là các đa thức.

Example 1.3.3

Hàm số $f(x) = \frac{x}{x^2+2x-4}$

1.3.5 Hàm đại số - Algebraic function

Hàm số $f(x)$ được gọi là hàm đại số nếu nó được xây dựng từ các toán tử đại số (cộng, trừ, nhân, chia và lấy căn) trên đa thức.

Example 1.3.4

Hàm số $f(x) = x + \sqrt{x+5}$

1.3.6 Hàm mũ - Exponential function

Hàm mũ là hàm số có dạng $f(x) = a^x$, với a là cơ số và là số dương. - Hàm mũ có tập xác định là $\mathbb{R}$ và miền giá trị là $(0; +\infty)$ - Nếu $a > 1$ thì hàm mũ tăng; - Nếu $a < 1$ thì hàm mũ giảm.

Example 1.3.5

Hàm mũ $f(x) = 3^x$ hoặc $f(x) = 0.7^x$

1.3.7 Hàm lô - ga - rít - Logarithmic function

Hàm logarit là hàm số có dạng $f(x) = log_a x$, với cơ số a là hằng số dương, $a \neq 1$ (hàm ngược của hàm mũ).
- Hàm logarit có miền xác định là $(0; \infty)$ và miền giá trị là $\mathbb{R}$
- Nếu cơ số $a > 1$ thì hàm logarit tăng;
- Nếu cơ số $a < 1$ thì hàm logarit giảm;

Example 1.3.6

Hàm số $y = log_2(x-3)$ hay $y = lnx$

Example 1.3.7

Phân loại các hàm số sau:

1. $f(x) = \frac{x^{-3x-1}}{x+4}$
2. $g(t) = t^4 + 4t^3 - 6$
3. $h(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{x^2-4}$
4. $u(x) = 4^x$
5. $v(x) = x^4$

1.4 Giới hạn hàm số, hàm số liên tục

1.4.1 Định nghĩa giới hạn hàm số - Limit

- Cho $x_0 \in (a;b)$ và hàm số $f(x)$ xác định trên $(a;b)$ có thể ngoại trừ tại chính điểm x_0
- Nếu $f(x)$ có thể gần tùy ý về giá trị L, với mọi x gần x_0 nhưng vẫn khác x_0 thì ta nói $f(x)$ có giới hạn là L khi x tiến về x_0, ký hiệu:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \tag{1.8}$$

- Nếu với mọi $\epsilon > 0$, tồn tại $\delta > 0$ sao cho với mọi x thì

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

- Nếu $f(x)$ là một hàm số sơ cấp và x_0 thuộc miền xác định của nó thì

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Example 1.4.1

Tính $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x+1}{x^2+4}$

Example 1.4.2

Tính các giới hạn sau:

1. $\lim\limits_{x \to -2} \sqrt{3x^3 - 1}$
2. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2+2x-15}{x^{-9}}$
3. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+25}-5}{x^2}$

1.4.2 Định nghĩa hàm số liên tục - Continuous

- Cho hàm số $f(x)$ xác định trên đoạn $[a; b]$
- Nếu $c \in (a; b)$ thì ta nói c là điểm trong;
- Nếu $x_0 = a$ hoặc $x_0 = b$ thì ta nói x_0 là điểm biên.
- *Hàm số $f(x)$ được gọi là liên tục tại điểm trong c của khoảng xác định nếu*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \tag{1.9}$$

- *Hàm số $f(x)$ được gọi là liên tục tại điểm bên phải a của khoảng xác định nếu*

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a) \tag{1.10}$$

- *Hàm số $f(x)$ được gọi là liên tục tại điểm bên trái b của khoảng xác định nếu*

$$\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b) \tag{1.11}$$

- Nếu $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = L$ thì $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$
- Nếu $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ thì $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ không tồn tại
- Hàm $f(x)$ không liên tục tại x_0 thì ta nói $f(x)$ gián đoạn tại x_0.
- *Hàm số sẽ gián đoạn tại x_0 nếu thỏa 1 trong 3 điều kiện sau:*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0) \tag{1.12}$$

Khi đó, $x = x_0$ được gọi là điểm gián đoạn loai 1 bỏ được.
Hoặc

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \neq \tag{1.13}$$

Khi đó, điểm x_0 được gọi là điểm nhảy của hàm số.
Bước nhảy được xác định bởi:

$$\left| \lim_{x \to x_0^-} f(x) - \lim_{x \to x_0^+} f(x) \right|$$

Hoặc
Hàm số không xác định tại đâu thì gián đoạn tại đó. Khi đó, điểm gián đoạn này được gọi là điểm gián đoạn loại 2.
- Hàm số được gọi là liên tục trên một khoảng nếu nó liên tục tạ mọi điểm thuộc khoảng đó
- Hàm số sơ cấp liên tục trên mọi khoảng xác định của nó.

Example 1.4.3

Xét tính liên tục của các hàm số sau:

1. $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & khi\ x \neq 1 \\ 2, & khi\ x = 1 \end{cases}$ tại $x = 1$

2. $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-2}{x-\sqrt{2}} & khi\ x \neq \sqrt{2} \\ 2, & khi\ x = \sqrt{2} \end{cases}$ tại $x = \sqrt{2}$

3. $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-3x+2}{x^2-1} & khi\ x \cancel{<} > 1 \\ 1/2(-3x+2) & khi\ x \leq 1 \end{cases}$ tại $x = 1$

4. $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-8x+15}{9-x^2} & khi\ x < 3 \\ -1 & khi\ x = 3 \\ \frac{x^2-6x+9}{x-3}, & khi\ x > 3 \end{cases}$ tại $x = 3$

5. $f(x) = \frac{1}{x}$ tại $x = 0$

1.4.3 Giới hạn liên quan vô cùng

1. **Giới hạn tại vô cùng**
   - Hàm số $f(x)$ được gọi là có giới hạn bằng L khi $x \to \infty$, viết: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L$ nếu với mọi $\epsilon > 0$ đều tồn tại M sao cho với mọi $x > M$ thì $|f(x) - L| < \epsilon$
   - Hàm số $f(x)$ được gọi là có giới hạn bằng L khi $x \to -\infty$, viết: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = L$ nếu với mọi $\epsilon > 0$ đều tồn tại N sao cho với mọi $x < N$ thì $|f(x) - L| < \epsilon$
   - Một số giới hạn thường gặp:
   $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ hay $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$, với $n \in \mathbb{N}$
   - Các giới hạn $\lim\limits_{x\to\pm\infty} sinx$; $\lim\limits_{x\to\pm\infty} cosx$; $\lim\limits_{x\to\pm\infty} tanx$; $\lim\limits_{x\to\pm\infty} cotx$ đều không tồn tại.

   Example 1.4.4

   Tính các giới hạn sau:

   (a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2-2x+1}{x^2-1}$

   (b) $\lim\limits_{x\to\infty} sin\dfrac{1}{x}$

2. **Giới hạn bằng vô cùng**
   - Hàm số $f(x)$ được gọi là có giới hạn bằng vô cùng khi $x \to x_0$, viết: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$ nếu với mọi $B > 0$ đều tồn tại $\delta > 0$ sao cho với mọi x thỏa $0 < |x - x_0| < \delta$ thì $f(x) > B$
   - Hàm số $f(x)$ được gọi là có giới hạn bằng âm vô cùng khi $x \to x_0$, viết: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$ nếu với mọi $B > 0$ đều tồn tại $\delta > 0$ sao cho với mọi x thỏa $0 < |x - x_0| < \delta$ thì $f(x) < -B$
   - Định nghĩa tương tự cho $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$ và $\lim\limits_{x\to a^\pm} f(x) = -\infty$
   - Một số phép toán khi tính với vô cùng ($k \in \mathbb{R}$)

$a + \pm\infty = \pm\infty$	$(\pm\infty) + (\pm\infty) = \pm\infty$
$a \times (\pm\infty) = \pm\infty$ nếu $a > 0$	$a \times (\pm\infty) = \mp\infty$ nếu $a < 0$
$\infty \times (\pm\infty) = \pm\infty$	$(-\infty) \times (\pm\infty) = \mp\infty$
$\frac{a}{\pm\infty} = 0$	
$ln(+\infty) = +\infty$	$ln(0^+) = -\infty$
$a^{+\infty} = +\infty$ nếu $a > 1$	$a^{+\infty} = 0$ nếu $0 < a < 1$
$a^{-\infty} = 0$ nếu $a > 1$	$a^{-\infty} = +\infty$ nếu $0 < a < 1$
$tan\left(\frac{\pi}{2}\right) = +\infty$	$tan\left(\frac{-\pi}{2}\right) = -\infty$
$arctan(+\infty) = \frac{\pi}{2}$	$arctan(-\infty) = \frac{-\pi}{2}$

- Các biểu thức dạng $\infty - \infty$; $0 \times \infty$; $\frac{\infty}{\infty}$; $\frac{0}{0}$; 0^0; ∞^∞ hay 1^∞ là các dạng vô định.

Example 1.4.5

Tính các giới hạn sau:

1. $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{1}{1-x}$
2. $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{1+1}{1-x}$
3. $\lim\limits_{x \to 0^-} e^{\frac{1}{x}}$
4. $\lim\limits_{x \to 0} e^{\frac{1}{x^2}}$
5. $\lim\limits_{x \to 0} ln\left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right)$
6. $\lim\limits_{x \to \infty} ln\dfrac{x}{x^2+1}$

1.5 Vô cùng bé (VCB)

1.5.1 Định nghĩa:

Hàm số $f(x)$ được gọi là tương đương nếu

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = 0} \tag{1.14}$$

Example 1.5.1 $\lim\limits_{x \to 0} sinx = 0$

nên $sinx$ được gọi là vô cùng bé khi $x \to 0$ - Nếu $f_1(x), f_2(x)$ là hai VCB khi $x \to x_0$ thì $f_1(x) \pm f_2(x); f_1(x) \cdot f_2(x)$ cũng là các VCB khi $x \to x_0$.

1.5.2 So sánh các VCB

1. **Bậc của các VCB** Giải sử $\alpha(x), \beta(x)$ là các VCB khi $x \to x_0$ thì:

   (a) Nếu $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$ thì $\alpha(x)$là VCB bậc cao hơn $\beta(x)$

   (b) Nếu $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \infty$ thì $\alpha(x)$là VCB bậc thấp hơn $\beta(x)$

   (c) Nếu $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = A(A \neq 0; \neq \infty)$ thì $\alpha(x)$ và $\beta(x)$ là hai VCB cùng bậc.

   Example 1.5.2 *So sánh bậc của các VCB khi* $x \to 0$

   (a) $1 - cosx$ *và* x

(b) $sin4x$ *và* $4x$

(c) $tanx$ *và* x^2

2. **VCB tương đương** Giả sử $\alpha(x), \beta(x)$ là các VCB khi $x \to x_0$.
Ta nó, chúng là hai VCB khi $x \to x_0$ tương đương nhau nếu:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1 \tag{1.15}$$

Ký hiệu $\alpha(x) \sim \beta(x)$
Một số VCB tương đương cần nhớ, khi $x \to x_0$

$sinx \sim x$	$sinax \sim ax$
$tanx \sim x$	$tanax \sim ax$
$arcsinx \sim x$	$arcsinax \sim ax$
$arctanx \sim x$	$arctanax \sim ax$
$1 - cosx \sim \frac{1}{2}x^2$	$1 - cosax \sim \frac{1}{2}(ax)^2$
$ln(1+x) \sim x$	$ln(1+ax) \sim ax$
$e^x - 1 \sim x$	$e^{ax} - 1 \sim ax$
$a^x - 1 \sim xlna$	
$(1+x)^p - 1 \sim px$	$\sqrt[n]{1+x} - 1 \sim \frac{x}{n}$

1.5.3 Định lý:

Nếu $\alpha(x), \beta(x)$ là hai VCB khi $x \to x_0$ và $\alpha(x) \sim \alpha_1(x)$; $\beta(x) \sim \beta_1(x)$ khi $x \to x_0$ thì:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)} \tag{1.16}$$

1.5.4 Quy tắc ngắt bỏ các VCB bậc cao

Nếu $\alpha(x), \beta(x)$ là hai VCB khi $x \to x_0$ và $\beta(x)$ bậc cao hơn $\alpha(x)$ thì khi $x \to x_0$, ta có:

$$\alpha(x) + \beta(x) \sim \alpha(x) \tag{1.17}$$

Example 1.5.3 *Tính các giới hạn sau:*

(a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{sin2x + arssin^2x - arctan^3x}{3x}$

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - cosx + 2sinx - sin^3x - x^2 + 3x^4}{\boxed{tan^x - 6sin^x} + x - 5x^3}$

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{sin5x}{ln(1 + 4x}$

(d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{lncosx}{\sqrt[4]{1 + x^2} - 1}$

(e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1 + sinx - arcsin^2 2x} - 1}{sin4x}$

(f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{sin\sqrt[3]{x} \cdot ln(1 - sin3x)}{(arctan\sqrt{x})^2 \left(3^{5\sqrt[3]{x}} - 1\right)}$

Example 1.5.4 *Tính các giới hạn sau:*

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - sinx}{1 - cosx}$

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{ln(1 + x) - x}{1 - cosx}$

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{sinx - tanx}{x^3}$

Chapter 2

Đạo hàm và ứng dụng

2.1 Định nghĩa đạo hàm - Derivative

Cho $x_0 \in (a; b)$ và hàm số $f(x)$ xác định trên khoảng $(a; b)$. Ta nói, đạo hàm của hàm $f(x)$ tại x_0 là giá trị

$$f'(x_0) = \lim_{h \to x_0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \tag{2.1}$$

(Nếu giới hạn này tồn tại)

- Nếu $f(x)$ có đạo hàm tại x_0 thì ta nói f khả vi (Differentiable) tại x_0

- Ta có thể nói $f'(x)$ là hàm số theo x, xác định bởi:

$$f'(x) = \lim_{h \to x_0} \frac{f(x + h) - f(x_0)}{h} \tag{2.2}$$

- Nếu hàm số này có đạo hàm thì đạo hàm của nó gọi là đạo hàm cấp hai của f, ký hiệu $f"(x)$

- Tổng quát, nếu f có đạo hàm cấp n, ký hiệu $f^{(n)}$, thì đạo hàm cấp $n + 1$ được địn nghĩa bởi: $f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}\right)'(x)$

- Đạo hàm của $f(x)$, còn được kí hiệu bởi:

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx} f \tag{2.3}$$

- Ta có thể kí hiệu đạo hàm của f tại $x = a$ bởi:

$$f'(a) = f'(x)|_{x=a} = \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=a} = \left.\frac{d}{dx} f(x)\right|_{x=a} \tag{2.4}$$

- Các đạo hàm cấp cao cũng được kí hiệu bởi:

$$f''(x) = \frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{d^2}{dx^2} f \tag{2.5}$$

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^{(n)} f}{dx^n} = \frac{d^{(n)}}{dx^n} f \tag{2.6}$$

2.1.1 Derivative Formulas - Các công thức tính đạo hàm

$c' = 0$	
$(x^n)' = nx^{n-1}$	$(u^n)' = nu^{n-1}u'$
$\left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{-1}{x^2}$	$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$
$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$\left(e^x\right)' = e^x$	$\left(e^u\right)' = e^u.u'$
$\left(a^x\right)' = a^x.lna$	$\left(a^u\right)' = a^u.lna.u'$
$\left(lnx\right)' = \frac{1}{x}$	$\left(lnu\right)' = \frac{u'}{u}$
$\left(log_a x\right)' = \frac{1}{x.lna}$	$\left(log_a u\right)' = \frac{u'}{u.lna}$
$\left(sinx\right)' = cosx$	$\left(sinu\right)' = cosu.u'$
$\left(cosx\right)' = -sinx$	$\left(cosu\right)' = -sinu.u'$
$\left(tanx\right)' = 1 + tan^2x = \frac{1}{cos^2x}$	$\left(tanu\right)' = \left(1 + tan^2u\right)u' = \frac{u'}{cos^2u}$
$\left(cotx\right)' = -\left(1 + cot^2x\right) = -\frac{1}{sin^2x}$	$\left(cotu\right)' = -\left(1 + cot^2u\right)u' = -\frac{u'}{sin^2u}$
$\left(arcsinx\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\left(arcsinu\right)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$\left(arccosx\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\left(arccosu\right)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$\left(arctanx\right)' = \frac{1}{1+x^2}$	$\left(arctanu\right)' = \frac{u'}{1+u^2}$
$\left(arccotx\right)' = -\frac{1}{1+x^2}$	$\left(arccotu\right)' = -\frac{u'}{1+u^2}$
$\left(a.u\right)' = a.u'$	$\left(u \pm v\right)' = u' \pm v'$
$\left(uv\right)' = u'v + v'u$	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-v'u}{v^2}$

Example 2.1.1

Tính đạo hàm của các hàm số sau:

1. $f(x) = \frac{x}{1+ln(1-x)}$
2. $f(x) = tan^6x$
3. $f(x) = x^2ar\ \ ctan2x$

4. $f(x) = ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$
5. $f(x) = \frac{1}{x^2} + \sqrt[3]{x} - (2x+1)^3$
6. $f(x) = x^x$
7. $f(x) = x^{\sqrt{x}}$
8. $f(x) = \frac{(x+1)^7(2x-1)^3}{(2-x)^2\sqrt[3]{x^2+5}}$

Example 2.1.2

Tính đạo hàm cấp 2 của các hàm số sau:

1. $f(x) = cos^2 3x$
2. $f(x) = \sqrt{x^2+1}$
3. $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$
4. $f(x) = xe^{-x}$

2.1.2 Đạo hàm của hàm ẩn

- Cho phương trình $F(x, y) = 0$. Nếu hàm số $y = y(x)$ xác định trong 1 khoảng nào đó sao cho khi thế $y(x)$ vào $(F(x, y)$ thì ta được đồng nhất thức. Khi đó, $y(x)$ được gọi là hàm số ẩn xác định bởi $F(x, y)$.
- Đạo hàm hai vế của phương trình $F(x, y) = 0$ theo x, ta được

$$F'_x + F'_y y'_x = 0 \tag{2.7}$$

Hay

$$y'_x = -\frac{F'_x}{F'_y}, F'_y \neq 0 \tag{2.8}$$

được gọi là đạo hàm của hàm số ẩn $y(x)$.
Chú ý: Khi tính F'_x thì ta xem $F(x, y)$ là hàm số theo biến x, y là hằng số.

Example 2.1.3

Cho hàm số ẩn $y(x)$ được xác định bởi: $xy - e^x + e^y = 0$. Tính $y'(x)$

Example 2.1.4

Cho hàm ẩn $y(x)$ xác định bởi: $xy - e^x + lny = 0$. Tính $y'(0)$

Example 2.1.5

Cho hàm số ẩn $y(x)$ được xác định bởi: $ln\sqrt{x^2+y^2} = arctan\frac{y}{x}$. Tính $y'(x)$
Chú ý: Ta có thể xem hàm ẩn $y(x)$ như hàm hợp $u(x)$ và thực hiện tính đạo hàm như hàm số hợp.

Example 2.1.6

Cho hàm ẩn $y(x)$ được xác định bởi: $y^3 - (x^2-2)y - 2x^4 = 0$. Tính $y"(1)$

2.2 Vi phân

2.2.1 Vi phân cấp 1:

Hàm số $y = f(x)$ được gọi là khả vi tại $x_0 \in D$ nếu $\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ có thể biểu diễn dưới dạng

$$\Delta f(x_0) = A\Delta x + \theta(\Delta x) \tag{2.9}$$

Trong đó, A là hằng số, $\theta(\Delta x)$ là một vô cùng bé khi $\Delta \to 0$ Khi đó, $A\Delta x$ được gọi là vi phân của hàm $f(x)$ tại x_0. Kí hiệu: $df(x_0)$ hay $dy(x_0)$

Ta có:

$$\boxed{df(x) = f'(x)dx \text{ hoặc } dy = y'dx} \tag{2.10}$$

2.2.2 Ứng dụng của vi phân để tính gần đúng

Ta có thể dùng vi phân cấp 1 để tính giá trị gần đúng theo công thức sau:

$$\boxed{f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x} \tag{2.11}$$

Example 2.2.1

Tính vi phân cấp 1 của hàm số $f(x) = x^2e^{2x}$ tại -1.

Example 2.2.2

Tính vi phân cấp 1 của hàm số $y = arctan(x^2 + 1)$.

Example 2.2.3

Tính vi phân cấp 1 của hàm số: $y = 3^{ln(arcsinx)}$

Example 2.2.4

Dùng vi phân cấp 1, hãy tính gần đúng giá trị $\frac{1}{\sqrt{25.5}}$

Example 2.2.5

Dùng vi phân, tính gần đúng giá trị $arcsin0.52$

2.2.3 Vi phân cấp cao:

Giả sử hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm đến cấp n thì

$$d^ny = d\left(d^{n-1}y\right) = y^{(n)}dx^n \tag{2.12}$$

được gọi là vi phân cấp n của hàm số.

Example 2.2.6

Tính vi phân cấp 2 của hàm số $y = ln(sinx)$

2.3 Ứng dụng của đạo hàm

2.3.1 Cực trị và giá trị lớn nhất, nhỏ nhất

1. Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất - Relative Maxima and Minima
   - Hàm số $f(x)$ đạt GTLN (hay cực đại toàn cục - Global maximum - Absolute maximum) tại điểm c thuộc miền xác định D của f nếu

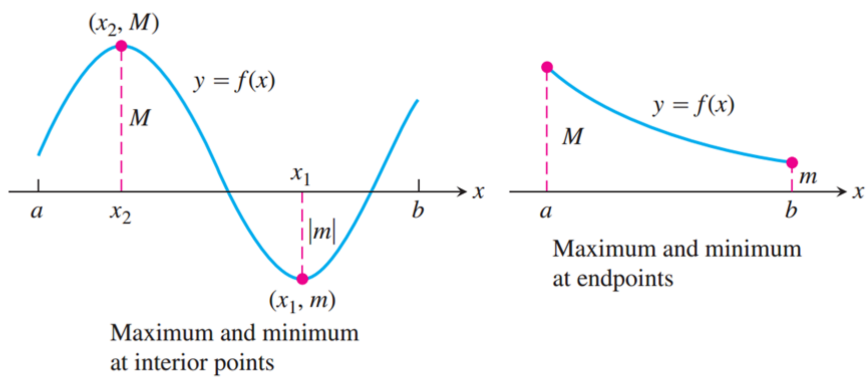
$$f(x) \leq f(c) \textit{ với mọi } x \in D$$

   - Hàm số $f(x)$ đạt GTNN (hay cực tiểu toàn cục - Global minimum - Absolute minimum) tại điểm c thuộc miền xác định D của f nếu

$$f(x) \geq f(c) \textit{ với mọi } x \in D$$

2. Định lý về GTLN, GTNN - Extreme value theorem - Nếu f liên tục trên khoảng đóng $[a;b]$ thì f đạt giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m trên khoảng đó.
   - Tức là, có hai số $x_1, x_2 \in [a;b]$ sao cho $f(x_1) = m$ và $f(x_2) = M$ sao cho:

$$m \leq f(x) \leq M \textit{ với mọi } x \in [a;b]$$



3. Cực trị địa phương Local extremum
   - Hàm số $f(x)$ đạt cực đại địa phương (Local maximun) tại điểm $c \in D$ nếu

$$\textit{có } \delta > 0 \textit{ sao cho } f(x) \leq f(c), \textit{với mọi } x \in D \cap (c - \delta; c + \delta)$$

   - Hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu địa phương (Local minimun) tại điểm $c \in D$ nếu

$$\textit{có } \delta > 0 \textit{ sao cho } f(x) \geq f(c), \textit{với mọi } x \in D \cap (c - \delta; c + \delta)$$

   - Hàm số $f(x)$ đạt cực trị địa phương (Local extrenmum) tại điểm $c \in D$ nếu nó đạt cực đại hay cực tiểu địa phương tại điểm đó.

- **Định lí Fermat:** Nếu f đạt cực trị địa phương tại điểm trong c của miền xác định và nếu $f'(c)$ tồn tại thì

$$f'(c) = 0$$

4. Các tìm GTLN, GTNN
   - Cực trị địa phương hay toàn cục của f chỉ có thể xảy ra tạo một trong các loại điểm sau đây:
     (a) Điểm trong của miền xác định và $f' = 0$.
     (b) Điểm trong của miền xác định và f' không xác định.
     (c) Điểm biên của miền xác định.
   - Các bước tìm GTLN, GTNN của hàm số trên đoạn $[a;b]$:
     (a) Tính f', giải phương trình $f' = 0$, tìm $x_0 \in [a;b]$. Điểm $M(x_0;y_0)$ được gọi là điểm tới hạn (Critical) hay điểm dừng của hàm số.
     (b) Tính giá trị của hàm số tại M và các điểm biên.
     (c) Lấy GTLN, GTNN trong các giá trị trên.

   Example 2.3.1

   Tìm GTLN; GTNN của các hàm số sau:
   (a) $f(x) = 10xln(2 - lnx)$ trên khoảng $[1; e\ ]$
   (b) $f(x) = xe^{-x^2+x}$ trên khoảng $[-2; 0]$

5. **Định lý Rolle** Cho $y = f(x)$ là hàm số liên tục trên khoảng đóng $[a;b]$ và khả vi trên khoảng mở $(a;b)$.
   Nếu $f(a) = f(b)$ thì có ít nhất một $c \in (a;b)$ sao cho $f'(c) = 0$

6. **Định lý Lagrange:**
   Cho $y = f(x)$ là hàm số liên tục trên khoảng đóng $[a;b]$ và khả vi trên khoảng mở $(a;b)$.
   Khi đó, có ít nhất một số $c \in (a;b)$ sao cho:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

   (a) Hệ quả 1: Nếu $f'(x) = 0$ với mọi $x \in (a;b)$ thì $f(x) = C$, với C là hằng số.
   (b) Hệ quả 2: Nếu $f'(x) = g'(x)$ với mọi $x \in (a;b)$ thì tồn tại hằng số C sao cho $f(x) = g(x)+C$. Tức là, $f - g$ là hàm hằng trên $(a;b)$

7. Sự đơn điệu của hàm số Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[a; b]$ và khả vi trên $(a; b)$.
   - Nếu $f'(x) > 0, \forall x \in (a; b)$ thì f tăng trên $[a; b]$
   - Nếu $f'(x) < 0, \forall x \in (a; b)$ thì f giảm trên $[a; b]$

2.3.2 Cực trị địa phương

- Cho c là điểm tới hạn của hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[a; b]$ và khả vi trên khoảng mở $(a; b)$ chứa c (có thể ngoại trừ tại c).
- Khi di chuyển từ trái sang phải điểm c:

(a) Nếu f' đổi dấu từ âm sang dương thì c là cực tiểu địa phương của hàm số.

(b) Nếu f' đổi dấu từ dương sang âm thì c là cực đại địa phương của hàm số.

(c) Nếu f' không đổi dấu thì c không là cực trị địa phương của hàm số.

Example 2.3.2

Tìm cực trị địa phương của các hàm số sau:

(a) $f(x) = (x^2 - 3)e^x$

(b) $f(x) = \sqrt[3]{x}(x - 4)$

2.4 Quy tắc $L'Hospital$

Các hàm số $f(x), g(x)$ khả vi và $g'(x) \neq 0$ trên một khoảng mở chứa x_0 (có thể ngoại trừ x_0). Giả sử $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$ hoặc $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \infty$ thì

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \tag{2.13}$$

2.4.1 Khử các dạng vô định

1. Dạng $\frac{0}{0}$ hoặc $\frac{\infty}{\infty}$: Dùng quy tắc $L'Hospital$ để khử.

Example 2.4.1

Tính các giới hạn sau:

(a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{lnx}{1 - x}$

(b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3x - sinx}{x}$

(c) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 4x^2 + 5x - 2}{x^3 - 5x^2 + 7x - 3}$

(d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - sinx}{x^3}$

(e) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$

(f) $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{lnx}{\sqrt{x}}$

(g) $\lim_{x\to \infty} \dfrac{e^x}{x^2}$

(h) $\lim_{x\to \infty} \dfrac{2x^3+3x^2-x}{5x^3-x+17}$

(i) $\lim_{x\to \infty} \dfrac{x^2+x+2}{x-3}$

(j) $\lim_{x\to \infty} \dfrac{x+2}{x^2-3x+2}$

2. Dạng $\infty - \infty$: Quy đồng mẫu số hoặc trục căn thức để đưa về dạng $\frac{0}{0}$ hoặc $\frac{\infty}{\infty}$

Example 2.4.2

Tính các giới hạn sau:

(a) $\lim_{x\to 1} \left(\dfrac{x}{x-1} - \dfrac{1}{lnx}\right)$

(b) $\lim_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{e^x-1}\right)$

(c) $\lim_{x\to +\infty} \left(\dfrac{1}{\sqrt{x+1}-1} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$

3. Dạng $0\times\infty$: Biến đổi $0\times\infty = \frac{\infty}{\frac{1}{0}}$ hoặc $0\times\infty = \frac{0}{\frac{1}{\infty}}$.

Example 2.4.3

Tính các giới hạn sau:

(a) $\lim_{x\to 1} (1-x)\, tan\dfrac{\pi x}{2}$

(b) $\lim_{x\to -\infty} xe^x$

(c) $\lim_{x\to +\infty} xe^{-2x}$

(d) $\lim_{x\to 0^+} xlnx$

4. Dạng 1^∞: Sử dụng một trong hai công thức:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e \tag{2.14}$$

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e \tag{2.15}$$

Example 2.4.4

Tính các giới hạn sau:

(a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x}$

(b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{5}{x}\right)^{(x-2)}$

(c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{3x-2}\right)^{(1-x)}$

(d) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+3}\right)^{2x}$

(e) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+x+1}{x^2-2}\right)^{x}$

(f) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+9}{x^2-3x}\right)^{x^2+5}$

(g) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{3x^2+x}{x^2+2}\right)^{x}$

(h) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x+4}{3x+4}\right)^{\frac{1}{x}}$

(i) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x^2-x+3}{2x+3}\right)^{\frac{-3}{x^2}}$

(j) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{5x+2}{2x^2-x+2}\right)^{\frac{1}{x^2+x}}$

5. $\boxed{\text{Dạng } 0^{\infty};\ \infty^{0};\ 0^{0};\ \infty^{\infty};\ 1^{\infty}:}$

Giả sử $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x))^{g(x)}$ có một trong các dạng trên. Khi đó:

$$\boxed{\lim_{x\to x_0}(f(x))^{g(x)} = e^{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)lnf(x)}} \tag{2.16}$$

Example 2.4.5

Tính các giới hạn sau:

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty}(e^x+x)^{\frac{1}{x}}$

(c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{tanx}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

(d) $\lim\limits_{x\to 0^+}(1+sin5x)^{cotx}$