CHƯƠNG 3. DÃY VÀ CHUỖI SỐ

3.1 Dãy

Cho dãy số $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Ta có: dãy hội tụ nếu $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L < \infty$, ngược lại ta nói dãy phân kỳ ($\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$, hoặc không tồn tại).

$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$: Tổng riêng phần thứ n của dãy.

Ví dụ 1: Tính

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+1}$; b) $\lim\limits_{n\to\infty} \cos\dfrac{n\pi}{6}$; c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sin n\pi$.

Định lý 1: Cho f là một hàm và $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *là dãy sao cho* $a_n = f(n), \forall n \in Z^+$. *Khi đó: nếu* $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L$ *thì* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$.

Ví dụ 2: Tính a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln n}{n}$; b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$.

Định lý 2: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} a_{2n-1} = L$.

Định lý 3: Cho hai dãy $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ và $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sao cho $a_n \le b_n, \forall n$. Khi đó, nếu $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = M$, và $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = N$, *thì* $N \le M$.

Định lý 4(Squeeze theorem): Cho các dãy $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, và $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ sao cho $a_n \le b_n \le c_n, \forall n$. Khi đó, nếu $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{x\to\infty} c_n = L$ *thì* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = L.$.

Hệ quả: Nếu $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$ thì $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Vì dụ 3: Tính

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{(-1)^n}{n}\right|$; b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!}{n^n}$.

3.2. Chuỗi số

Cho dãy số $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Ta gọi $S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$ là tổng riêng phần thứ n của dãy, và đại lượng $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i = \lim_{n\to\infty} S_n$ được gọi là chuỗi số. Ta có $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ nếu $\{S_n\}$ hội tụ, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ phân kỳ nếu $\{S_n\}$ phân kỳ.

3.2.1. Chuỗi hình học

Cho chuỗi hình học $\sum_{n=1}^{\infty} a.r^{n-1}$, $a \neq 0$, với $a_1 = a$, $a_n = ar^{n-1}$, r là công bội. Ta có

- $S_n = \begin{cases} \dfrac{a(1-r^n)}{1-r}, & r \neq 1; \\ na, & r = 1. \end{cases}$
- $\sum_{n=1}^{\infty} a.r^{n-1}$ hội tụ và có tổng $S = \lim_{n\to\infty} S_n = \dfrac{a}{1-r}$ nếu $|r| < 1$, phân kỳ nếu $|r| \geq 1$.

Ví dụ 4: xét tính hội tụ, phân kỳ của các chuỗi số sau, tính tổng trong trường hợp chuỗi hội tụ

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1}$; c) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{2n} 3^{-n}$; d) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$.

e) $\frac{1}{\sqrt{11}} + \frac{1}{\sqrt{33}} + \frac{1}{\sqrt{99}} + \frac{1}{\sqrt{297}} + \cdots$; *f)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1} + 3^{n+1}}{5^n}$.

Ví dụ 5: Tìm miền hội tụ của các chuỗi hàm sau (HD: dung chuỗi hình học)

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2x-1}{3}\right)^{n-2}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1} + 2^n + 2^{n+1}}{(x+1)^n}$.

3.2.2. Chuỗi có số hạng tách được

Ví dụ 6: Xét tính hội tụ, phân kỳ của các chuỗi số sau, tính tổng trong trường hợp chuỗi hội tụ

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$.

3.2.2. Phương pháp xét tỷ số (The ratio test)

Định lý 5: Cho chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, *giả sử* $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L$. *Ta có:*

- *Nếu* $0 \le L < 1$ *thì chuỗi hội tụ;*
- *Nếu* $1 < L \le \infty$ *thì chuỗi phân kỳ.*

Lưu ý: Trường hợp $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$ hoặc không tồn tại thì phương pháp này không cho kết luận được.

Ví dụ 7: Xét tính hội tụ, phân kỳ của các chuỗi số sau

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^3}{3^n}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}$.

3.2.3. Phương pháp xét căn (The root test)

Định lý 6: Cho chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, *giả sử* $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = L$. *Ta có:*

- *Nếu* $0 \le L < 1$ *thì chuỗi hội tụ;*
- *Nếu* $1 < L \le \infty$ *thì chuỗi phân kỳ.*

Lưu ý: Trường hợp $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = 1$ hoặc không tồn tại thì phương pháp này không cho kết luận được.

Ví dụ 8: Xét tính hội tụ, phân kỳ của các chuỗi số sau

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+3}{3n+2}\right)^n$; b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{3^{1+3n}}$.

3.2.4. Chuỗi lũy thừa

Cho chuỗi lũy thừa (CLT) $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ **. Ta có**

Định lý 7(Định lý hội tụ): Cho CLT $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$, khi đó $\exists 0 \le R \le \infty$ sao cho

- Chuỗi hội tụ nếu $|x-a| < R$;
- Chuỗi phân kỳ nếu $|x-a| > R$.

Lưu ý:

- Trường hợp $x = a \pm R$ là không kết luận được;
- R được gọi là bán kính hội tụ của CLT và
- $(x-a; x+a)$ được gọi là miền hội tụ của CLT.

Định lý 8(Định lý hội tụ 2): Cho CLT $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, khi đó xảy ra một trong 3 khả năng sau

i. Chuỗi hội tụ trên $\mathbb{R}$ (bán kính hội tụ R = ∞).
ii. Chuỗi chỉ hội tụ tại x = 0 (bán kính hội tụ R = 0).
iii. Tồn tại số R > 0 sao cho: chuỗi hội tụ nếu |x| < R, phân kỳ nếu |x| > R.

Lưu ý: trường hợp $x = \pm R$ là không kết luận được.

Ví dụ 9: (trang 18)

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$ hội tụ nếu |x| < 1, phân kỳ nếu |x| > 1 (xét tỷ số).

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n}$ hội tụ nếu |x| < 2 (Dùng chuỗi hình học).

c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ hội tụ trên R (xét tỷ số).

d) $\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n$ tại x = 0 duy nhất (xét tỷ số).

3.2.4.1. Tìm bán kính hội tụ

PP xét tỷ số: Giả sử $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| . |x-a|$, và $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = L$, ta có: chuỗi hội tụ nếu $L|x-a| < 1$, phân kỳ nếu $L|x-a| > 1$, và $R = L^{-1}$.

PP xét căn: Giả sử $\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{|c_n|} . |x-a|$, và $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{c_n} = L$, ta có: chuỗi hội tụ nếu $L|x-a| < 1$, phân kỳ nếu $L|x-a| > 1$, và $R = L^{-1}$.

Lưu ý: Nếu L = 0 thì $R = \infty$ và L = ∞ nếu R = 0. Hai PP chỉ áp dụng được trong các trườn hợp $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|$ và $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{c_n}$ tồn tại.

Ví dụ 10: Tìm bán kính hội tụ của các CLT sau(Trang 21)

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x-5)^n}{n^2}$ ĐS: R = ½.

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 (x-3)^{n+1}}{5^n}$ ĐS: R = 5.

c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{2n-1}(2x+1)^n}{n!}$ ĐS: R = ∞.

d) $\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n^n}\left(\frac{1}{2}x-1\right)^n$ ĐS: R = 0.

3.2.4.2. Chuỗi đại diện

Do tính chất của chuỗi hình học $\frac{a}{1-r}=\sum_{n=1}^{\infty}ar^n$ nếu |r| < 1, ta có:

a) $\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{x}{1-x},\ |x|<1.$

b) $\frac{1}{1+x^2}=\frac{1}{1-(-x^2)}=\sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$, |x| < 1.

c) $\frac{x^3}{x+2}=\frac{\frac{x^3}{2}}{1-\left(-\frac{x}{2}\right)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^3}{2}\left(\frac{-x}{2}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{n+3}}{2^{n+1}}$.

d)Tìm CLT đại diện cho $\frac{1}{1-x}$ tại -1

$$\frac{1}{1-x}=\frac{1}{2-(1+x)}=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{x+1}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{x+1}{2}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}\left(x+1\right)^n,\ |x+1|<2.$$

e)Tìm CLT đại diện cho $\frac{1}{x^2+3x+2}$ tại 0

$$\frac{1}{x^2+3x+2}=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)(-1)^n x^n,$$

với $R=\min\{1,2\}=1$.

3.2.4.3. Khai triển Taylor và khai triển Maclaurin

- Khai triển Tayor của hàm số f(x) tại a

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}\left(x-a\right)^n.$$

- Khai triển Maclaurin của hàm số f(x)

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

Ví dụ 11: Viết khai triển Maclaurin của hàm số(trang 25,26)

a) $\frac{1}{1-x}$;		b) $\frac{x^3}{x+2}$;		c) e^x;		d)Sinx;

e)Cosx.(Đạo hàm của Sinx)

Ví dụ 11: Viết khai triển Taylor của hàm số e^{2x-1} tại x = 1.

3.2.5. Xét tính phân kỳ

1)Định lý 10: (Điều kiện cần để chuỗi hội tụ) Nếu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *hội tụ thì* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Hệ quả: Nếu $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ *(hoặc không tồn tại) thì* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *phân kỳ.*

Ví dụ:

a) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{5n^2+4} = \frac{1}{5} \neq 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{5n^2+4}$ hội tụ.

b) $\lim_{n\to\infty} ar^{n-1} = \begin{cases} 0, & |r|<1, \\ nr, & r=1 \\ does\,not\,exist, & otherwise. \end{cases}$, suy ra $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ phân kỳ nếu $|r| \geq 1$.

c) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{4n+1}} = 0 \Rightarrow$ có phân kỳ hay không là không kết luận được. Tuy nhiên có thể dùng định lý chặn như sau:

$$\frac{1}{\sqrt{4^n+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{4n}} = \frac{1}{2^n}\text{, mà } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \text{ hội tụ nên } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4^n+1}} \text{ hội tụ.}$$

2)Định lý 11 (Định lý so sánh 1): Cho hai chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *và* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *sao cho* $0 \leq a_n \leq b_n, \forall n$ (hoặc $\forall n \geq N$). Khi đó:

- $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *hội tụ suy ra* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *hội tụ,*
- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *phân kỳ suy ra* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *phân kỳ.*

Ví dụ: $\frac{5}{2^n+4n+2} \leq \frac{5}{2^n}, \forall n. Mà \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{2^n}$ hội tụ $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{2^n+4n+2}$ hội tụ.

3) Định lý 12 (Định lý so sánh 2): Cho hai chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *và* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *là hai chuỗi số dương.*

Khi đó:

a) Giả sử $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c > 0$. *Khi đó:* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *hội tụ* $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *hội tụ,*

b) Giả sử $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$. *Khi đó:*

- $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *hội tụ* $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *hội tụ,*
- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *phân kỳ* $\Rightarrow$*suy ra* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *phân kỳ.*

c) Giả sử $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$. *Khi đó:*

- $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *phân kỳ* $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *phân kỳ,*
- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *hội tụ* $\Rightarrow$*suy ra* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *hội tụ.*

Ví dụ: xét sự hội tụ phân kỳ(slide 66,67 trang 33,34)

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+3n}{\sqrt{5+n^5}}$, b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^2}$, c) $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sin\frac{1}{n}\right)$, d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n^2}$.

4)Hội tụ tuyệt đối

Định lý: $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *hội tụ* $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *hội tụ.*

(Hệ quả: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *phân kỳ* $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *phân kỳ).*

Ví dụ: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ *hội tụ, suy ra* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ *hội tụ.*

Định nghĩa:

- Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ được gọi là hội tụ tuyệt đối nếu $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ hội tụ.
- Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ được gọi là hội tụ có điều kiện nếu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ, nhưng $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ phân kỳ.

Lưu ý: Chuỗi hội tụ tuyệt đối thì hội tụ(hội tụ tuyệt đối mạnh hơn).

Ví dụ: a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ hội tụ tuyệt đối nên hội tụ.

b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ hội tụ có điều kiện (nhưng không hội tụ).

c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{n^2}$ hội tụ tuyệt đối nên hội tụ.

CM: $\left|\frac{\cos n}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2}, \forall n$, vì $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ hội tụ(Chuỗi p)$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\cos n}{n^2}\right|$ hội tụ$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{n^2}$ hội tụ.

Ví dụ: Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$ hội tụ tuyệt đối nếu |p| >1, phân kỳ nếu $|p| \le 0$, và hội tụ có điều kiện nếu $0 < p \le 1$.

Ví dụ: (slide 75,76 trang 38)

a)Cho $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Tính $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$.

b) Tính $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

Xem trang 39.

5)Chuỗi p (p-Series)

Định lý: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ hội tụ nếu p >1, phân kỳ nếu $p \le 1$.

Ví dụ:a) $\frac{\ln n}{n} \ge \frac{1}{n}, \forall n \ge 3$, mà $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ phân kỳ (chuỗi p), suy ra $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n}$ phân kỳ.

b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^2}$ hội tụ ? (slide 63 trang 32)

c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n - 1}$ **d)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2+3n}{\sqrt{5+n^5}}$

6)Chuỗi đan dấu(Alternating series)

Tiêu chuẩn Leibniz: Cho chuỗi đan dầu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Ta có: nếu $\lim_{n\to\infty} a_n = 0, và \{|a_n|\}$ là chuỗi giảm thì $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ.

Ví dụ: (Trang 35)

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ hội tụ, b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n^2}{n^3+1}$ hội tụ.

Comparison Test

In Exercises 1–8, use the Comparison Test to determine if each series converges or diverges.

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 30}$

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n - 1}{n^4 + 2}$

3. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n} - 1}$

4. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n + 2}{n^2 - n}$

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n}{n^{3/2}}$

6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n3^n}$

7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n + 4}{n^4 + 4}}$

8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n} + 1}{\sqrt{n^2 + 3}}$

Limit Comparison Test

In Exercises 9–16, use the Limit Comparison Test to determine if each series converges or diverges.

9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n - 2}{n^3 - n^2 + 3}$

   (*Hint:* Limit Comparison with $\sum_{n=1}^{\infty} (1/n^2)$)

10. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n + 1}{n^2 + 2}}$

    (*Hint:* Limit Comparison with $\sum_{n=1}^{\infty} (1/\sqrt{n})$)

11. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n + 1)}{(n^2 + 1)(n - 1)}$

12. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3 + 4^n}$

13. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{\sqrt{n}\, 4^n}$

14. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n + 3}{5n + 4}\right)^n$

15. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$

    (*Hint:* Limit Comparison with $\sum_{n=2}^{\infty} (1/n)$)

16. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$

    (*Hint:* Limit Comparison with $\sum_{n=1}^{\infty} (1/n^2)$)

Determining Convergence or Divergence

Which of the series in Exercises 17–54 converge, and which diverge? Use any method, and give reasons for your answers.

17. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{n} + \sqrt[3]{n}}$ **18.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n + \sqrt{n}}$ **19.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{2^n}$

20. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \cos n}{n^2}$ **21.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{3n - 1}$ **22.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + 1}{n^2\sqrt{n}}$

23. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10n + 1}{n(n + 1)(n + 2)}$ **24.** $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{5n^3 - 3n}{n^2(n - 2)(n^2 + 5)}$

25. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n + 1}\right)^n$ **26.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3 + 2}}$ **27.** $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{\ln(\ln n)}$

28. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln n)^2}{n^3}$ **29.** $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}\ln n}$ **30.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln n)^2}{n^{3/2}}$

31. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + \ln n}$ **32.** $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln(n + 1)}{n + 1}$ **33.** $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n^2 - 1}}$

34. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2 + 1}$ **35.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - n}{n2^n}$ **36.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + 2^n}{n^2 2^n}$

37. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{n-1} + 1}$ **38.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1} + 1}{3^n}$ **39.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + 1}{n^2 + 3n} \cdot \frac{1}{5n}$

40. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{3^n + 4^n}$ **41.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n - n}{n2^n}$ **42.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}\, e^n}$

43. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!}$

(*Hint:* First show that $(1/n!) \le (1/n(n - 1))$ for $n \ge 2$.)

44. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n - 1)!}{(n + 2)!}$ **45.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n}$ **46.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \tan\frac{1}{n}$

47. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tan^{-1} n}{n^{1.1}}$ **48.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sec^{-1} n}{n^{1.3}}$ **49.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\coth n}{n^2}$

50. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tanh n}{n^2}$ **51.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$ **52.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{n^2}$

53. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + 2 + 3 + \cdots + n}$ **54.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2}$

Using the Ratio Test

In Exercises 1–8, use the Ratio Test to determine if each series converges absolutely or diverges.

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+2}{3^n}$

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)!}{(n+1)^2}$

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{n3^{n-1}}$

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{(-4)^n}$

6. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3^{n+2}}{\ln n}$

7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2(n+2)!}{n!\,3^{2n}}$

8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n5^n}{(2n+3)\ln(n+1)}$

Using the Root Test

In Exercises 9–16, use the Root Test to determine if each series converges absolutely or diverges.

9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{(2n+5)^n}$

10. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{(3n)^n}$

11. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n+3}{3n-5}\right)^n$

12. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\ln\left(e^2 + \frac{1}{n}\right)\right)^{n+1}$

13. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-8}{(3+(1/n))^{2n}}$

14. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin^n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

15. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}$

    (*Hint:* $\lim_{n\to\infty} (1 + x/n)^n = e^x$)

16. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{1+n}}$

Determining Convergence or Divergence

In Exercises 17–44, use any method to determine if the series converges or diverges. Give reasons for your answer.

17. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\sqrt{2}}}{2^n}$

18. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^2 e^{-n}$

19. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n!(-e)^{-n}$

20. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{10^n}$

21. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{10}}{10^n}$

22. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-2}{n}\right)^n$

23. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 + (-1)^n}{1.25^n}$

24. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{3^n}$

25. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 - \frac{3}{n}\right)^n$

26. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{3n}\right)^n$

27. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^3}$

28. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\ln n)^n}{n^n}$

29. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\right)$

30. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\right)^n$

31. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n^e}$

32. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \ln n}{(-2)^n}$

33. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{n!}$

34. $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n}(n^3)$

35. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+3)!}{3!n!3^n}$

36. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n2^n(n+1)!}{3^n n!}$

37. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n+1)!}$

38. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(-n)^n}$

39. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{-n}{(\ln n)^n}$

40. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(\ln n)^{(n/2)}}$

41. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! \ln n}{n(n+2)!}$

42. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n^3 2^n}$

43. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

44. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+3)(2^n+3)}{3^n+2}$

Determining Convergence or Divergence

In Exercises 1–14, determine if the alternating series converges or diverges. Some of the series do not satisfy the conditions of the Alternating Series Test.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n}}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^{3/2}}$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n3^n}$

4. $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n} \frac{4}{(\ln n)^2}$

5. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} \frac{n}{n^2 + 1}$

6. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^2 + 5}{n^2 + 4}$

7. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^n}{n^2}$

8. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} \frac{10^n}{(n + 1)!}$

9. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{n}{10}\right)^n$

10. $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\ln n}$

11. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\ln n}{n}$

12. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$

13. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sqrt{n} + 1}{n + 1}$

14. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{3\sqrt{n + 1}}{\sqrt{n} + 1}$

Absolute and Conditional Convergence

Which of the series in Exercises 15–48 converge absolutely, whicl converge, and which diverge? Give reasons for your answers.

15. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}(0.1)^n$

16. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(0.1)^n}{n}$

17. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}$

18. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+\sqrt{n}}$

19. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{n^3+1}$

20. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n!}{2^n}$

21. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n+3}$

22. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin n}{n^2}$

23. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{3+n}{5+n}$

24. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^{n+1}}{n+5^n}$

25. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1+n}{n^2}$

26. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\sqrt[n]{10}\right)$

27. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n^2(2/3)^n$

28. $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n\ln n}$

29. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\tan^{-1}n}{n^2+1}$

30. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{n-\ln n}$

31. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{n+1}$

32. $\sum_{n=1}^{\infty}(-5)^{-n}$

33. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-100)^n}{n!}$

34. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2+2n+1}$

35. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\pi}{n\sqrt{n}}$

36. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\pi}{n}$

37. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+1)^n}{(2n)^n}$

38. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(n!)^2}{(2n)!}$

39. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n)!}{2^n n! n}$

40. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(n!)^2 3^n}{(2n+1)!}$

41. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$

42. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)$

43. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n}\right)$

44. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$

45. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \operatorname{sech} n$

46. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \operatorname{csch} n$

47. $\displaystyle\frac{1}{4}-\frac{1}{6}+\frac{1}{8}-\frac{1}{10}+\frac{1}{12}-\frac{1}{14}+\cdots$

48. $\displaystyle 1+\frac{1}{4}-\frac{1}{9}-\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\frac{1}{36}-\frac{1}{49}-\frac{1}{64}+\cdots$