

ÔN TẬP

1. Tính giới hạn hàm số: dùng một số công thức cơ bản, quy tắc L'Hospital.
2. Xét tính liên tục của hàm số.
3. Tính đạo hàm riêng cấp 1, 2; vi phân toàn phần cấp 1, 2 của hàm số $z = f(x, y)$.
4. Tìm cực trị tự do và cực trị có điều kiện của hàm hai biến.
5. Tính tích phân bất định và tích phân xác định: PP đổi biến số 1, 2; phương pháp tích phân từng phần; tích phân hàm hữu tỷ.
6. Khảo sát tính hội tụ của chuỗi số: Tiêu chuẩn so sánh 1, 2; tiêu chuẩn D'Alembert; tiêu chuẩn Cauchy; tiêu chuẩn Leibnitz; điều kiện cần để chuỗi hội tụ.

Bài tập

1/. Tính các giới hạn sau:

$$\begin{array}{llll}
 \text{a. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}; & \text{b. } \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\cot^2 x}; & \text{c. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{e^x - x - 1}; & \text{d. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x - \sin x}; \\
 \text{e. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + x \cos x}{\sin x \cos x}; & \text{f. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - x \cos x}{\sin^2 3x}; & \text{g. } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1 - x^3}{x^2 + 7x} \right)^5; & \text{h. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(1 - \cos x)}{1 - \cos x}; \\
 \text{i. } \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[3]{\frac{x^2 - 5x}{x^3 + x - 2}}; & \text{j. } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[5]{x}}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[5]{x}}; & \text{k. } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[3]{x} - 5x + 3}{2x + \sqrt[3]{x^2} - 4}.
 \end{array}$$

2/. Xét tính liên tục của hàm số

a) Tìm các giá trị của x mà tại đó hàm số liên tục

$$\begin{array}{ll}
 \text{i) } f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x - 6}{x - 3}, & x \neq 3; \\ 5, & x = 3. \end{cases} & \text{ii) } g(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4}, & x \neq \pm 2; \\ 3, & x = 2; \\ 4, & x = -2. \end{cases}
 \end{array}$$

b) Xác định giá trị của c để hàm số sau liên tục tại $x = 0$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{9x - 3 \sin x}{x^2}, & x \neq 0; \\ c, & x = 0. \end{cases}$$

c) Xác định giá trị $g(3)$ để hàm số liên tục tại $x = 3$: $g(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$.

d) xác định a, b để hàm số liên tục với mọi x

$$\text{i)} f(x) = \begin{cases} -2, & x \leq -1; \\ ax - b, & -1 < x < 1; \\ b, & x \geq 1. \end{cases}$$

$$\text{ii)} f(x) = \begin{cases} ax + 2b, & x \leq 0; \\ x^2 + 3a - b, & 0 < x \leq 2; \\ 3x - 5, & x > 2. \end{cases}$$

3/. a) Cho hàm số $f(x, y) = xe^y + 1$. Tính các đạo hàm riêng cấp 1 và cấp 2 của hàm số.

b) Cho hàm số $z = xe^y + ye^x + 1$. Tính $dz(1, 1)$.

c) Cho hàm số $f(x, y) = 4^{xy}$. Tính $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{yx}(x, y)$.

4/. a) Tìm cực trị (địa phương) của hàm số

$$\text{i)} z = x^2 + xy + y^2 - x - y; \quad \text{ii)} z = x^2 - 2x + 4y^2 - 8y + 9;$$

$$\text{iii)} f(x, y) = x^3 y + 12x^2 - 8y; \quad \text{iv)} f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 2;$$

$$\text{v)} f(x, y) = (1 + xy)(x + y); \quad \text{vi)} f(x, y) = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2.$$

b) Tìm cực trị hàm số

$$\text{i)} z = x^2 + y^2 \text{ thỏa điều kiện } x + 3y - 1 = 0.$$

$$\text{ii)} z = 4 - x^2 - y^2 \text{ thỏa điều kiện } 2x + y - 10 = 0.$$

$$\text{iii)} z = x^2 + y \text{ thỏa điều kiện } x^2 + y^2 = 1.$$

$$\text{iv)} z = x^2 + y^2 \text{ thỏa điều kiện } \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1.$$

$$\text{v)} z = x^2 e^y \text{ thỏa điều kiện } x^2 + y^2 = 3.$$

5/. Tính các tích phân sau:

a) $I = \int x^2 \sin x^3 dx$. Đặt $t = \sin x^3 \Rightarrow dt = 3x^2 \cos x^3 dx = 3x^2 \sqrt{1 - \sin^2 x^3} dx = 3x^2 \sqrt{1 - t^2} dx$.

$$I = \int \frac{tdt}{3\sqrt{1-t^2}}. \text{Đặt } u = 1-t^2 \Rightarrow dt = -2tdt$$

$$I = \frac{-1}{6} \int u^{-1/2} du = \frac{-1}{3} \sqrt{u} + C = \frac{-1}{3} \sqrt{1 - \sin^2 x^3} + C = \frac{-1}{3} \cos x^3 + C$$

Cách 2: đặt $t = x^3$.

b) $I = \int 7x^2 \sin x dx = 7 \int x^2 \sin x dx$. Đặt $\begin{cases} u = x^2 \\ dv = \sin x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2x dx \\ v = -\cos x \end{cases}$.

$$7I = -x^2 \cos x + 2 \int x \cos x dx. \text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = \cos x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \sin x \end{cases}$$

$$7I = -x^2 \cos x + 2 \left[x \sin x - \int \sin x dx \right] = -x^2 \cos x + 2[x \sin x + \cos x] + C.$$

Suy ra I

c) $\int \frac{(2x+1)^2}{x} dx = \int \frac{4x^2 + 4x + 1}{x} dx = 4 \int x dx + 4 \int dx + \int \frac{dx}{x} = 2x^2 + 4x + 4 \ln |x| + C$.

d) $\int \frac{x^2 dx}{(1+x)^8} = \int \frac{(x+1)^2 - 2x-1}{(1+x)^8} dx = \int \frac{(x+1)^2 - 2(x+1)+1}{(1+x)^8} dx$

$$= \int \frac{dx}{(x+1)^6} - 2 \int \frac{dx}{(x+1)^7} + \int \frac{dx}{(x+1)^8} = \dots$$

e) $I = \int \frac{e^x dx}{e^x + 1}$. Đặt $t = e^x + 1 \Rightarrow dt = e^x dx$. $I = \int \frac{dt}{t} = \ln |t| + C = \ln(e^x + 1) + C$

f) $I = \int x^3 e^{-x} dx$. Đặt $\begin{cases} u = x^3 \\ dv = e^{-x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 3x^2 dx \\ v = -e^{-x} \end{cases}$. $I = -x^3 e^{-x} + 3 \int x^2 e^{-x} dx$. Đặt $\begin{cases} u = x^2 \\ dv = e^{-x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2x dx \\ v = -e^{-x} \end{cases}$, $J = \int x^2 e^{-x} dx = -x^2 e^{-x} + 2 \int x e^{-x} dx$.

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = e^{-x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -e^{-x} \end{cases}, K = \int xe^{-x} dx = -xe^{-x} + \int e^{-x} dx = -xe^{-x} - e^{-x} + C.$$

Vậy I =

$$g) I = \int x^2 \cos x dx. \text{ Đặt } \begin{cases} u = x^2 \\ dv = \cos x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2x dx \\ v = \sin x \end{cases} \dots$$

$$h) I = \int e^{ax} \sin bx dx. \text{ Đặt } \begin{cases} u = e^{ax} \\ dv = \sin bx dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = ae^{ax} dx \\ v = -\frac{1}{b} \cos bx \end{cases} \dots$$

$$i) \int x^3 e^{-x^2} dx;$$

$$j) I = \int \sin(\ln x) dx; \quad J = \int \cos(\ln x) dx.$$

Tích phân hàm hữu ti: Xem bài giảng chương 5 trang 29 đến 35

$$k) \int \frac{x^2 dx}{x^3 + 5x^2 + 8x + 4}; \quad m) \int \frac{x^5 + 3x^3 + 4x}{x^4 + 3x^2 + 2} dx;$$

$$n) \int \frac{x^2 + 1}{x^4 + x^2 + 1} dx; \quad o) \int \frac{x^2 + 2}{x^4 + x^2 + 1} dx.$$

6/. Tính các tích phân sau:

$$a) I = \int_1^2 \frac{x+3}{2x^2 + 3x + 1} dx; \quad b) \int_e^{e^2} \frac{dx}{x \ln \sqrt{x}}; \quad c) \int_0^1 \frac{dx}{4x^2 + 4x + 5}; \quad d) \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x \sin x}{\cos^2 x};$$

$$e) \int_{-2}^2 \frac{x^2 \tan 2x dx}{1+x^4}; \quad f) \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos 2x} dx; \quad g) \int_0^{\pi} \frac{x \sin x dx}{1 + \cos^2 x}.$$

7/. Khảo sát sự hội tụ của các chuỗi số sau

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{n(n+1)(n+3)}. \text{ Ta có } a_n = \frac{3n+1}{n(n+1)(n+3)} \leq \frac{3(n+1)}{n(n+1)(n+3)} = \frac{3}{n(n+1)} \leq 3 \frac{1}{n^2} = b_n, \forall n$$

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ hội tụ, suy ra $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2019^n}{3+2020^n}$. Ta có $a_n = \frac{2019^n}{3+2020^n} \leq \frac{2019^n}{2020^n} = \frac{2019}{2020} \cdot \left(\frac{2019}{2020}\right)^{n-1} = a_n$, $\forall n$. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ(vì là chuỗi hình học có $|r| < 1$), vậy chuỗi đã cho hội tụ.

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$. Ta có $a_n = \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{n^n} = b_n$, $\forall n$. Mặt khác $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$, suy ra $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ hội tụ nên $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ.

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{2020^n}$;(Tiêu chuẩn căn)

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$. Ta có $|a_n| = \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \frac{1}{n}$.

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2019^n}{2020^n}$ (Tương tự b).

8/. Khảo sát sự hội tụ của các chuỗi số sau

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}; \quad b) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} \right); \quad c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}; \quad d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{5^n + n};$$

$$e) \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n^2}; \quad f) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln n!}; \quad g) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2 + n + 1}; \quad h) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}};$$

$$i) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{3^n n!}; \quad j) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}; \quad k) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n n!}{n^n}; \quad l) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 5n^2}{n! + \ln n};$$

$$m) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{3^n}{(\ln n)^n}; \quad n) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n^2} \cdot 2^n}{(n+1)^{n^2}}; \quad o) \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+2} \right)^{n(n-1)}; \quad p) \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \left(\sin^{-1} \frac{1}{n} \right)^n;$$

$$q) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n^2}{n^2}; \quad r) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{(\ln 3)^n}; \quad s) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n + 2 \cos n\alpha}{n(\ln n)^{3/2}}; \quad t) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3^n}{n^3};$$

$$u) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln n}; \quad v) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(e - \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right); \quad w) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}.$$

