LINEAR ALGEBRA FOR IT

CONTENTS

CHAPTER 1

MATRIX AND SYSTEMS OF LINEAR EQUATIONS
MA TRẬN VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

1.1 Matrix and matrix operators

1.1.1 Organize and interpret data stored in matrices

1. **Matrices**

   - Matrices are classified in terms of the numbers of rows and columns they have.

     Example 1.1.1

     Một công ty điện tử có 4 nhà phân phối chính ở Việt Nam đang phân phối 4 loại sản phẩm của công ty. Số lượng hàng của 4 nhà phân phối trong quý 2 năm vừa rồi lần lượt là:

     - Máy tính bàn: NPP1: 20 cái; NPP2: 25 cái; NPP3: 22 cái; NPP4: 18 cái.
     - Máy tính bảng: NPP1 27 cái; NPP2: 40 cái; NPP3: 31 cái; NPP4: 25 cái.
     - Điện thoại: NPP1: 16 cái; NPP2: 16 cái; NPP3: 19 cái; NPP4: 16

     Chúng ta có thể nhìn bảng liệt kê trên để biết tình hình của công ty. Tuy nhiên, chúng ta cần biết các thông tin một cách gọn gàng hơn để đưa ra kế hoạch cụ thể cho công ty một cách tốt hơn. Chúng ta có thể liệt kê lại dữ liệu theo bảng sau:

     Table 1.1.1

	NPP1	NNPP2	NPP3	NPP4
Máy tính bàn	20	25	22	18
Máy tính bảng	27	40	31	25
Điện thoại	16	16	19	16

   - Matrix M has three rows and four columns, so we say this is a 3×4 matrix.

     Example 1.1.2

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccc} \text{Column 1} & \text{Column 2} & \text{Column 3} & \text{Column 4} \end{array} \\
M = & \begin{bmatrix} 20 & 25 & 22 & 18 \\ 27 & 40 & 31 & 25 \\ 16 & 16 & 19 & 16 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{Row 1} \\ \text{Row 2} \\ \text{Row 3} \end{array}
\end{array}
$$

- The matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{12} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

has m rows and n columns, so it is an $m \times n$ matrix.

1.1.2 The matrix operators

- **Size matrix**: When we designate A as an $m \times n$ matrix, we are indicating the size of the matrix.
- Two matrices are said to have the same order (be the same size) if they have the same number of rows and the same number of columns.

Example 1.1.3

$B = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ and $C = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ do not have the same order. B is a 2×3 matrix and C is a 3×2 matrix.

- **The elements:** The numbers in a matrix are called its entries or elements (các phần tử)
- Thus a_{23} represents the entry in the second row and the third column, and we refer to it as the "two-three entry."
- A matrix with one row, such as $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, is called a row matrix (ma trận dòng)
- A matrix with one column, such as $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ is called a column matrix (ma trận cột)
- Any matrix in which every entry is zero is called a zero matrix (ma trận không); examples include

Example 1.1.4

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- **Square matrix - Ma trận vuông:** If the number of rows equals the number of columns, we say the matrix is a square matrix (ma trận vuông).

Example 1.1.5

Matrix $E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -5 \end{pmatrix}$ is a 3×3 square matrix.

- **Diagonal elements - Phần tử chéo:** Trong ma trận vuông, phần tử $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ được gọi là phần tử chéo.
- **Diagonal matrix (Ma trận chéo)**: Là ma trận vuông có các phần tử ngoài đường chéo chính bằng 0. Ký hiệu: $diag(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$

Example 1.1.6 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$

$A = diag(1, 3, -5, 2)$

- **Identity Matrix - Ma trận đơn vị**: An $n \times n$ (square) matrix that has 1s down its diagonal and 0s everywhere else is called an identity matrix, I_n.

  Example 1.1.7

  $$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- **Triangle matrix - Ma trận tam giác:**

  + Ma trận tam giác trên: là ma trận vuông, có các phần tử nằm phía dưới đường chéo chính đều bằng 0.

    Example 1.1.8 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$

  + Ma trận tam giác dưới: là ma trận vuông, có các phần tử nằm phía trên đường chéo chính đều bằng 0.

    Example 1.1.9 $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$

- **Two matrices to be equal:** We define two matrices to be equal if they are of the same order and if each entry in one equals the corresponding entry in the other.

  Example 1.1.10

  Give $A = \begin{pmatrix} 1 & 4+y \\ z & 3t \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 2x-1 & 3y \\ 2xz-3 & t+5 \end{pmatrix}$. Find x, y, z, t, if $A = B$

- **Transposes matrix - Ma trận chuyển vị:** When the columns and rows of matrix A are interchanged to create a matrix B, and vice versa, we say that A and B are transposes of each other (Chuyển hàng thành cột, chuyển cột thành hàng) and write

  $$A^T = B \quad and \quad B^T = A$$

  We have $(A)_{m\times n}$ then $(A^T)_{n\times m}$.

  Example 1.1.11 *Give* $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & -1 \\ 4 & 0 & 2 & -1 \\ -2 & 5 & 2 & 0 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 5 \\ 2 & 7 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$. *Find* A^T *and* B^T

- **Ma trận đối xứng:** Ma trận đối xứng là ma trận vuông thoả:

  $$A = A^T \tag{1.1}$$

  hoặc

  $$(A_{ij}) = (A_{ji}) \tag{1.2}$$

  Example 1.1.12

  Ma trận $\begin{pmatrix} -3 & 4 & 1 \\ 4 & 0 & -7 \\ 1 & -7 & 2 \end{pmatrix}$ là ma trận đối xứng.

2. **Addition and Subtraction of Matrices - Phép cộng và trừ của ma trận:** f two matrices have the same number of rows and columns, we can add the matrices by adding their corresponding entries.

   - **Sum of Two Matrices:** If matrix A and matrix B are of the same order and have elements a_{ij} and b_{ij}, respectively, then their sum $A+B$ is a matrix C whose elements are
   $$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \tag{1.3}$$
   for all i and j.
   - The commutative law of addition for matrices:
   $$A + B = B + A \tag{1.4}$$
   - The matrix $-B$ is called the negative of the matrix B, and each element of $-B$ is the negative of the corresponding element of B.
   $$A - B = A + (-B) \tag{1.5}$$

   Example 1.1.13

   Give $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 1 & 2 \\ -4 & 0 & -7 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & -4 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -2 & 0 \\ -6 & 8 & 1 & 3 \\ 3 & -5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$. Find $A+B$, $\quad A-B$

3. **Scalar Multiplication - Phép nhân một số với 1 ma trận:** Multiplying a matrix by a real number (called a scalar) results is a matrix in which each entry of the original is mutiphied by the real number.
   Thus, if $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a21 & a_{22} \end{pmatrix}$, then $cA = \begin{pmatrix} ca_{11} & ca_{12} \\ ca21 & ca_{22} \end{pmatrix}$

   Example 1.1.14

   Lấy dữ liệu trong (1.1.13). Tính $2A, 3B, 2A - 3B$

4. **Multiplication of Matrices- Phép nhân các ma trận**

   - Lấy dữ liệu trong ví dụ (1.1.1), biết giá nhập của của 1 máy tính bàn của NPP1 là 15 triệu, NPP2 là 13 triệu, NPP3 là 17 triệu, NPP4: là 20 triệu. Khi đó, tổng giá trị sản phẩm do NPP1 mà công ty nhập là bao nhiêu?
   - Tổng giá trị sản phẩm ccủa NPP1 mà công ty nhập là: $20\times15+25\times13+22\times17+18\times20$
   - Nếu ta đặt ma trận dòng A là ma trận sản lượng $A = \begin{pmatrix} 20 & 25 & 22 & 18 \end{pmatrix}$ và ma trận cột B là ma trận giá sản phẩm tương ứng $B = \begin{pmatrix} 15 \\ 13 \\ 17 \\ 20 \end{pmatrix}$
   - Khi đó, tổng giá trị sản phẩm có thể được xác định bởi:
   $$AB = \begin{pmatrix} 20 & 25 & 22 & 18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 15 \\ 13 \\ 17 \\ 20 \end{pmatrix} = (20 \times 15 + 25 \times 13 + 22 \times 17 + 18 \times 20) = (1359)$$
   - **Product of Two Matrices** Given an $m \times n$ matrix A and an $n \times p$ matrix B, the matrix product AB is an $m \times p$ matrix C, with the ij entry of C given by the formula
   $$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj} \tag{1.6}$$

Figure 1.1.1

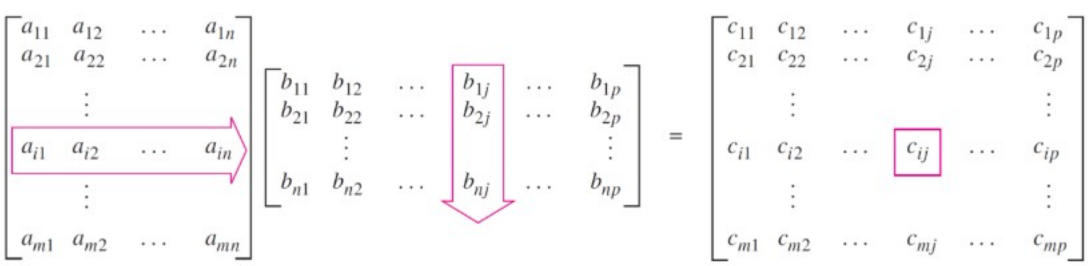
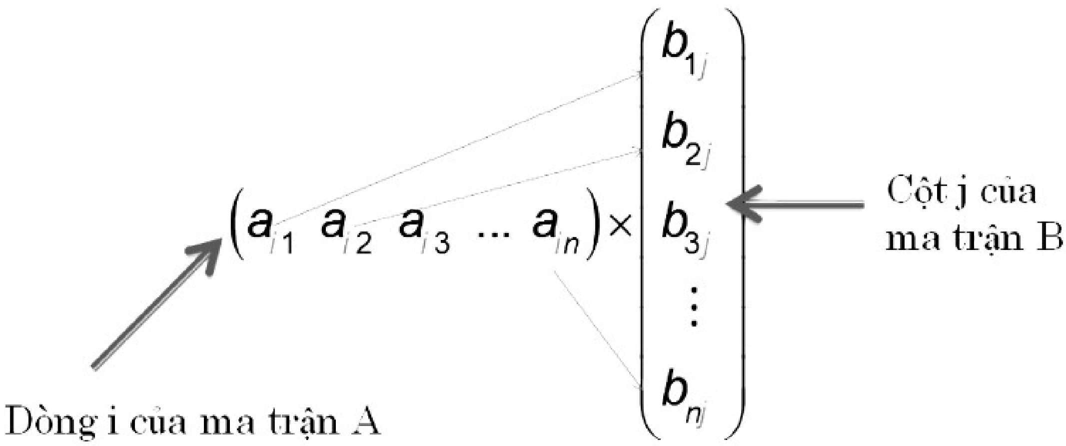


Figure 1.1.2



Example 1.1.15 *Give* $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 5 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -4 \\ 2 & -3 & 6 \end{pmatrix}$

Find $AB, \quad BA$

Example 1.1.16 *Give* $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 2 & -3 & 3 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

Find $CD, \quad C^2, \quad (C+D)C^T, C^T(D-C)$

1.2 Gauss Elimination: Solving Systems of Equations - Phép khử Gauss: Giải hệ phương trình tuyến tính

1.2.1 Systems with Unique Solutions

- In "Solutions of Systems of Linear Equations," we operated on the coefficients of the variables x, y, and z and on the constants.

- If we keep the coefficients of the variables x, y, and z in distinctive columns, we do not need to write the equations.

- In solving a system of linear equations with matrices, we first write the coefficients and constants from the system in the augmented matrix (Ma trận mở rộng).

- For example, the augmented matrix associated with

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 6 \\ x - z = 0 \\ x - y - z = -4 \end{cases} \quad \text{is} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -4 \end{array}\right)$$

- In the augmented matrix, the numbers on the left side of the solid line form the coefficient matrix (ma trận hệ số), with each column containing the coefficients of a variable (0 represents any missing variable).

- The column on the right side of the line (called the augment) contains the constants. Each row of the matrix gives the corresponding coefficients of an equation.

- The three different operations we can use to reduce the matrix are called elementary row operations (phép biến đổi dòng sơ cấp) and are similar to the operations with equations that result in equivalent systems.

- These operations are

  + Interchange two rows.
  + Add a multiple of one row to another row.
  + Multiply a row by a nonzero constant.

- When a new matrix results from one or more of these elementary row operations being performed on a matrix, the new matrix is said to be equivalent to the original because both these matrices represent equivalent systems of equations (Khi sử sụng các phép biến đổi sơ cấp trên hàng thì được ma trận mới tương đương với ma trận trước đó).

Example 1.2.1

Dùng các phép biến đổi sơ cấp trên dòng, chuyển các ma trận sau về ma trận đơn vị cùng kích thước: $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

1.2.2 Ma trận bậc thang

Ma trận bậc thang là ma trận thoả 2 điều kiện sau:

- Các dòng khác 0 luôn nằm trên các dòng bằng o;

- Trên 2 dòng khác o, các phần tử khác 0 đầu tiên của dòng nằm dưới nằm bên phải phần tử khác 0 đầu tiên của dòng trên (tính từ trái sang phải).

Example 1.2.2

Các ma trận sau là ma trận bậc thang:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Các ma trận sau không là ma trận bậc thang:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 & 7 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

- Thuật toán tìm ma trận bậc thang:
  + Xác định các phần tử được đánh dấu;
  + Lần lượt triệt tiêu các phần tử nằm phía dưới chúng (trong cùng 1 cột) theo thứ tự từ trái sang phải.

Example 1.2.3 *Chuyển các ma trận sau về dạng bậc thang:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -3 \\ 1 & -4 & -7 & -1 & -19 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & -5 & -3 & -5 \end{pmatrix}$$

1.2.3 Hạng của ma trận

- Cho ma trận $A \in \mathbf{M}_{m\times n}$. Hạng của ma trận A là số dòng khác 0 của ma trận bậc thang của ma trận A. Kí hiệu: $rank(A)$ hoặc $r(A)$
- Nếu A là ma trân có kích thước $m \times n$ thì $rank(A) \leq min\{m, n\}$.
- Ta có: $rank(A) = rank(A^T)$

Example 1.2.4 *Xác định hạng của ma trận A, B trong ví dụ* (1.2.3)

Example 1.2.5 *Tìm hạng của các ma trận sau:*

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 5 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}; \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ -2 & -1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

1.2.4 Solving Systems of Equations

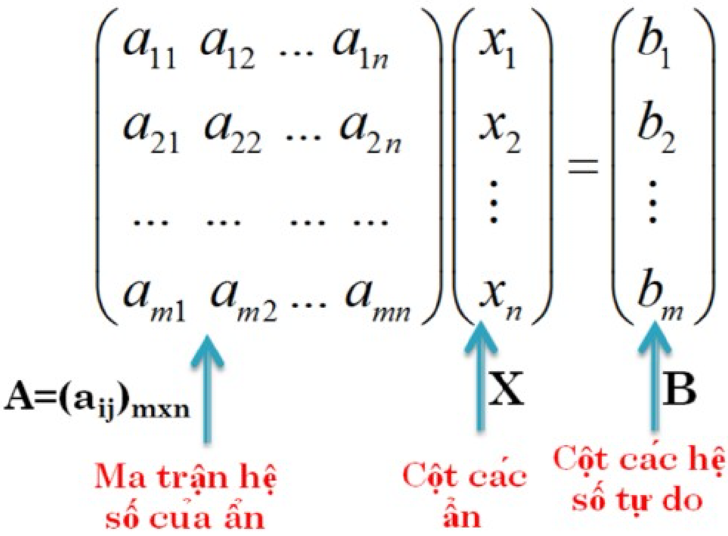
- Dạng tổng quát của hệ phương trình tuyến tính:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{1.7}$$

Đặt $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{mn} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$

Trong đó, A là ma trận hệ số của các ẩn; B là ma trận hệ số tự do (cột vế phải) và X là ma trận các ẩn.

- Khi đó, dạng ma trận của hệ phương trình (3.1) có dạng:



Hay

$$AX = B \tag{1.8}$$

- Ma trận mở rộng: Ma trận mở rộng tổng quát của hệ (3.1) là:

$$\tilde{A} = (A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{mn} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right) \tag{1.9}$$

1.2.5 Định lý Kronecker - Capelli

Gọi $\tilde{A} = (A|B))$ là ma trận mở rộng của hệ phương trình $AX = B$ thì:

- Nếu $rank(\tilde{A}) \neq rank(A)$ thì hệ vô nghiệm;
- Nếu $rank(\tilde{A}) = rank(A)$ thì hệ có nghiệm;
  + Nếu $rank(\tilde{A}) = rank(A =)$ số ẩn của hệ phương trình thì hệ có nghiệm duy nhất;
  + Nếu $rank(\tilde{A}) = rank(A) <$ số ẩn của hệ phương trình thì hệ có vô số nghiệm, với $n - rank(A)$ ẩn tự do.
- Nếu $rank(\tilde{A}) \neq rank(A)$ thì hệ

1.2.6 Gauss Elimination:

The process that we use to solve a system of equations with matrices (called the elimination method or Gauss-Jordan elimination method) is a systematic procedure that uses row operations to attempt to reduce the coefficient matrix to an identity matrix.

- Viết ma trận mở rộng;
- Dùng các phép biến đổi sơ cấp trên dòng, biến đổi ma trận mở rộng về dạng ma trận bậc thang;
- Dùng định lý Kronecker - Capelli, kiểm tra hệ phương trình có nghiệm hay không?

- Viết phương trình tương ứng với ma trận bậc thang;
- Giải ngược từ dưới lên, tìm nghiệm của hệ phương trình (nếu có).

Example 1.2.6 *Giải các hệ phương trình sau bằng phương pháp Gauss:*

1. $\begin{cases} 2x - y - z = 4 \\ 3x + 4y - 2z = 11 \\ 3x - 2y + 4z = 11 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = -4 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = -6 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = -4 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 3x_2 - 6x_3 + 6x_4 + 4x_5 = -5 \\ 3x_1 - 7x_2 + 8x_3 - 5x_4 + 8x_5 = 9 \\ 3x_1 - 9x_2 + 12x_3 - 9x_4 + 6x_5 = 15 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x + 3y + z = 1 \\ 3x + y - 9z = 2 \end{cases}$

1.2.7 Hệ phương trình thuần nhất

- Dạng tổng quát của hệ phương trình tuyến tính:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \tag{1.10}$$

- Hệ phương trình thuần nhất luôn luôn có nghiệm $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix}$. Nghiệm này được gọi là nghiệm tầm thường.
- Nếu $r(A) < min\{m, n\}$ thì hệ thuần nhất có vô số nghiệm. Tức là, hệ thuần nhất có nghiệm không tầm thường.
- Việc giải hệ, vẫn được xử lý giống như hệ không thuần nhất.

Example 1.2.7

Giải hệ phương trình sau:

1. $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y - z = 0 \\ -x + 2y + 2z = 0 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_3 - x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 + 4x_5 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_5 = 0 \end{cases}$

1.3 Determinants - Định thức

- The determinant of matrix A is denoted $detA$ or $|A|$.
- Determinant of a 1×1 matrix:

$$det(a_{11}) = |a_{11}| = a_{11} \tag{1.11}$$

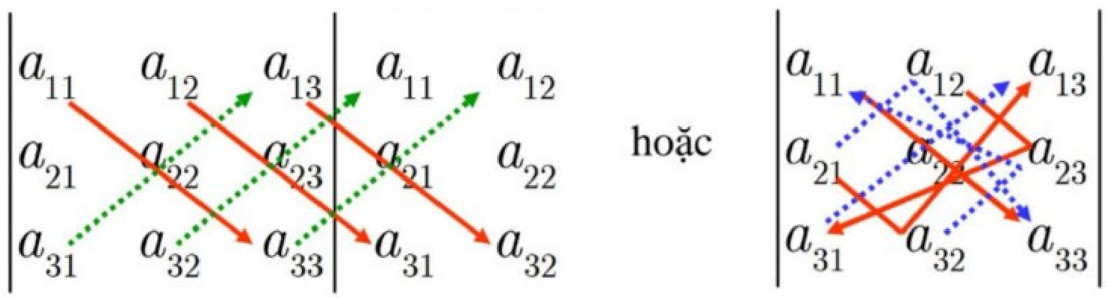
- Determinant of a 2×2 matrix:

$$det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \tag{1.12}$$

1.3.1 Tính định thức 3×3 bằng quy tắc Sarrus - Determinant of a 3×3 matrix:

Ta có thể dùng Quy tắc Sarrus để tính định thức của ma trận vuông kích thước 3×3

Figure 1.3.1



$$det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33}) \tag{1.13}$$

Example 1.3.1 *Tính các định thức của các ma trận sau*

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 \\ -2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 8 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 9 & -3 & 2 \\ 2 & 6 & -1 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & m \\ -m & 1 & 1 \\ 2 & 4 & -3 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} x & y & 3-x \\ 2y & x & 1 \\ -x & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

1.3.2 Tính định thức bằng phần bù đại số

Cho ma trận vuông A. Khai triển định thức A theo dòng i, được xác định như sau:

$$detA = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} detM_{ij} \tag{1.14}$$

Trong đó, M_{ij} là ma trận có được từ ma trận A bằng cách bỏ hàng i, cột j.

Chú ý: Ta có thể khai triển định thức theo bất cứ hàng hoặc cột nào (ưu tiên hàng hoặc cột có nhiều số 0 hoặc nhiều tham số).

Example 1.3.2 *Tính các định thức của các ma trận sau*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -3 & 4 & 6 & 1 \\ 5 & 3 & 9 & 2 \\ 3 & -1 & 8 & 9 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 & -1 \\ 10 & 4 & 9 & -2 \\ -1 & 7 & 0 & 3 \\ -3 & -2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} x & 3 & 5 & 5 \\ 2x & 4 & 9 & 3 \\ 3x & 7 & 1 & 3 \\ 4x & -2 & -5 & -1 \end{pmatrix}$$

1.3.3 Tính chất của định thức:

1. **Tính chất 1:**

$$detA = det(A^T) \tag{1.15}$$

$$detAB = detAdetB \tag{1.16}$$

$$det(cA) = c^n det(A) \tag{1.17}$$

Trong đó, $A \in \mathbf{M}_n, \quad c \in \mathbf{R}$

Example 1.3.3 *Cho* $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -m \\ 2 & -m & 2 \\ -m & 2 & 2 \end{pmatrix}$. *Tìm* m *để* $det(-3A) = 1$

2. **Tính chất 2:**

- Đổi chỗ 2 hàng cho nhau thì định thức đổi dấu;
- Nếu nhân một hàng cho 1 số khác 0 thì định thức tăng lên k lần;
- Định thức của ma trận tam giác trên bằng tích các phần tử trên đường chéo chính;
- Nếu cộng vào 1 hàng bất kì bội của dòng khác thì định thức của nó không thay đổi;
- Định thức bằng 0 nếu có 1 hàng (hoặc 1 cột) toàn số 0;
- Định thức bằng 0 nếu có 2 hàng (hoặc 2 cột) tỷ lệ với nhau;
- Nếu nhân ma trận vuông cấp n cho một số k thì định thức tăng lên k lần.

Example 1.3.4

1.3.4 Tính định thức bằng các phép biến đổi sơ cấp:

Dùng các tính chất 2 của định thức, để biến đổi định thức ban đầu về định thức của ma trận tam giác trên.

Example 1.3.5 *Tính định thức của các ma trận sau bằng cách dùng các phép biến đổi sơ cấp.*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 7 \\ 5 & 3 & 6 \\ -2 & 7 & 1 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1.4 Inverse of a Square Matrix; Matrix Equations

1.4.1 Defintion:

- If the product of A and B is the identity matrix, I, we say that B is the inverse of A (and A is the inverse of B). The matrix B is called the inverse matrix of A, denoted A^{-1}.

- Two square matrices, A and B, are called inverses of each other if $AB = I \quad and \quad ABA = I$

$$AB = BA = I \tag{1.18}$$

In this case, $B = A^{-1}$ and $A = B^{-1}$

1.4.2 Điều kiện cần và đủ để ma trận vuông có ma trận nghịch đảo:

Cho ma trận vuông A, điều kiện để tồn tại ma trận nghịch đảo A^{-1} là:

$$det(A) \neq 0 \tag{1.19}$$

Example 1.4.1

Give $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & m \\ -m & 3 & -1 \\ 4 & 3 & -5 \end{pmatrix}$. If the inverse for a square matrix A then find m.

Example 1.4.2

Give $B = \begin{pmatrix} m-1 & 2 & -3 \\ -4m & 5 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. If the inverse doesn't exist for a matrix B then find m?

1.4.3 Tính chất:

$$\left(A^{-1}\right)^{-1} = A \tag{1.20}$$

$$detA^{-1} = \frac{1}{det(A)} \tag{1.21}$$

$$\left(A^{-1}\right)^{T} = \left(A^{T}\right)^{-1} \tag{1.22}$$

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} \tag{1.23}$$

1.4.4 Phương pháp tìm ma trận nghịch đảo:

1. **Use determinants - Phương pháp định thức:** If a 3×3 matrix A then

$$A^{-1} = \frac{1}{detA}\begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} \\ c_{12} & c_{22} & c_{32} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{pmatrix} \tag{1.24}$$

with

$$c_{ij} = (-1)^{i+j}det(M_{ij}) \tag{1.25}$$

Với M_{ij} là ma trận có được từ ma trận A bằng cách bỏ đi hàng i, cột j.

Example 1.4.3 *Tìm ma trận nghịch đảo (nếu có) của các ma trận sau:*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & 5 & 2 \\ -2 & 4 & 7 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 7 & 0 \\ 4 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

Example 1.4.4

Cho ma trận $C = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$.

(a) Tìm m để ma trận khả nghịch.

(b) Giả sử C khả nghịch, tìm C^{-1}.

2. **Use Operation - Dùng các phép biến đổi sơ cấp:**

   - Form the augemented matrix $(A|I)$, where A is the $n]\times$ and I_n is the $n \times n$ identity matrix.
   - Perform elementary row operations on $(A|I)$ until we have an augmented matrix of the form $(I|B)$ - that is, until the matrix on the left is transformed into the identity matrix.
     If A has no inverse, the reduction process on $(A|I)$ will yield a row of zeros in the left half of the augmented matrix.
   - The matrix B (on the right) is the inverse of matrix A.
     Dùng các phép biến đổi sơ cấp, chuyển ma trận $(A|I)$ về ma trận dạng $(I|B)$. Khi đó, ma trận B chính là ma trận nghịch đảo của ma trận A.

Example 1.4.5 *Find A^{-1}, if the inverse exits*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 2 \\ 4 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

3. **Matrix Equations:**

   - If A is an $n \times n$ matrix and if B and X are $n \times 1$ matrices, then is a matrix equation.
   - If the inverse of a matrix A exists, then we can use that inverse to solve the matrix equation for the matrix X. The general solution method follows. Multiplying both sides of the equation (from the left) by $A^{˘1}$ gives

$$AX = B \quad \Leftrightarrow \quad X = A^{-1}B \tag{1.26}$$

$$XA = B \quad \Leftrightarrow \quad X = BA^{-1} \tag{1.27}$$

$$AXB = C \quad \Leftrightarrow \quad X = \ldots\ldots \tag{1.28}$$

$$ABX = C \quad \Leftrightarrow \quad X = \ldots\ldots \tag{1.29}$$

Example 1.4.6

Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -3 & 5 & 2 \\ 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} -3 & 5 & -1 \\ 4 & 3 & 0 \\ -1 & -3 & 7 \end{pmatrix}$.

Tìm ma trận X thoả:

(a) $AX = B$

(b) $A - XC = -3B$

(c) $2X - 3I_3 = B - C$

Example 1.4.7

Cho $f(x) = x^2 - 3x + 7$. Tính $f(A)$ và $f(B)$, với $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -3 & 5 & 2 \\ 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

1.5 Hệ phương trình Cramer:

1.5.1 Định nghĩa:

Hệ phương trình Cramer là hệ phương trình thoả:

- Số phương trình bằng số ẩn (hệ vuông);

- Định thức của ma trận hệ số của các ẩn khác 0.

1.5.2 Phương pháp giải hệ Cramer:

1. **Dùng phương tình ma trận:** Ta có phương trình ma trận $AX = B$, trong đó: A là ma trận hệ số của ẩn, B là ma trận vế phải, X là ma trận ẩn. Do hệ phương trình theo điều kiện $detA \neq 0$ nên dễ dàng tìm được ma trận X, $X = A^{-1}B$

   Example 1.5.1

   Dùng phương tình ma trận, giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} 2x - y - z = 4 \\ 3x + 4y - 2z = 11 \\ 3x - 2y + 4z = 11 \end{cases}$

2. **Dùng định thức:** Hệ phương trình Cramer có nghiệm duy nhất được xác định bởi:

$$x_j = \frac{detA_j}{detA} \tag{1.30}$$

   Trong đó, A là ma trận hệ số của các ẩn, A_j là ma trận có được từ ma trận A bằng cách thay cột j bằng cột vế phải.

   Example 1.5.2

   Dùng định thức, giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} 2x - y - z = 4 \\ 3x + 4y - 2z = 11 \\ 3x - 2y + 4z = 11 \end{cases}$

   Example 1.5.3

   Giải hệ phương trình sau bằng phương pháp Cramer $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = -1 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = -4 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = -6 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 4 \end{cases}$

1.5.3 Hệ quả:

1. Điều kiện để hệ Cramer có nghiệm duy nhất là

$$detA \neq 0 \tag{1.31}$$

2. Để hệ Cramer vô nghiệm thì:

$$\begin{cases} detA = 0 \\ \exists j : \ detA_j \neq 0 \end{cases} \tag{1.32}$$

3. Để hệ Cramer có vô số nghiệm thì

$$\begin{cases} detA = 0 \\ \forall j: \ detA_j = 0 \end{cases} \tag{1.33}$$

Example 1.5.4

Cho hệ phương trình $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 3y + mz = 3 \\ x + my + 3z = 2 \end{cases}$ Xác định m để:

(a) Hệ có nghiệm duy nhất.

(b) Hệ vô nghiệm.

(c) Hệ có vô số nghiệm.

Example 1.5.5

Cho hệ phương trình $\begin{cases} kx_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + kx_2 + kx_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + kx_3 = 1 \end{cases}$ Xác định k để:

(a) Hệ có nghiệm duy nhất.

(b) Hệ vô nghiệm.

(c) Hệ có vô số nghiệm.

CHAPTER 2

EUCLIDEAN $n-$ SPACES - LINEAR COMBINATION AND LINEAR SPANS
KHÔNG GIAN EUCLIDE - TỔ HỢP TUYẾN TÍNH VÀ SPANS

2.1 Khái niệm về không gian vector

Không gian vector thực là một tập rỗng V, các phần tử được gọi là vector, trên đó định nghĩa phép cộng vector, phép nhân vector với một số thực. Hai phép toán đó thoả 10 tiên đề sau:

1. Nếu $u, v \in V$ thì $u + v \in V$
2. $u + v = v + u$,
   inV
3. $u + (v + w) = (u + v) + w$, với $u, v, w \in V$
4. Tồn tại vector θ sao cho $\theta + u = u + \theta$ với $u \in V$
5. Với mỗi vector $u \in V$, tồn tại vector $-u \in V$ sao cho $u + (-u) = (-u) + u = 0$.
6. Nếu $u \in V, \lambda \in \mathbf{R}$ thì $\lambda u \in V$
7. $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$, với $\lambda \in \mathbf{R}, u \in V$
8. $(\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u$, với $\lambda, \mu \in \mathbf{R}, u \in V$
9. $\lambda(\mu u) = (\lambda\mu)u$, với $\lambda, \mu \in \mathbf{R}, u \in V$
10. $1u = u$, với $u \in V$

2.1.1 Không gian vector Euclide $n-$ chiều, $\mathbf{R}^n$

1. Không gian Euclide là tập mà mỗi phần tử là một bộ n số thực, có thứ tự $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, còn gọi là một vector có n thành phần . Tập $\mathbf{R}^2$ là tập các điểm trong mặt phẳng toạ độ Oxy. Tập $\mathbf{R}^3$ là tập các điểm trong không gian $Oxyz$
2. Với phép cộng 2 vector là cộng các thành phần tương ứng;
3. Với phép nhân 2 vector là tích vô hướng của 2 vector;

4. Tập $\mathbf{R}^n$ là một không gian vector. Ngoài ra, hai vector bằng nhau khi các thành phần tương ứng bằng nhau.

5. Tổng quát:
$$\mathbf{R}^n = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) | x_i \in \mathbf{R}, i = \overline{1, n}\} \tag{2.1}$$
Với 2 phép toán:
$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n) \tag{2.2}$$
$$k(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (kx_1, kx_2, \ldots, kx_n) \tag{2.3}$$

Example 2.1.1 *Trong KGVT $\mathbf{R}^4$, cho $u_1 = (1, 2, 3, 4), u_2 = (-1, -2, 4, 6)$. Tính $u_1 + u_2$, $-3u_1 + u_2$.*

2.1.2 Linear Combination and linear Spans - Tổ hợp tuyến tính và Bao tuyến tính

2.1.3 Linear Combination - Tổ hợp tuyến tính

Cho KGVT $(V, +, .)$. Cho tập $S = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ là một họ vector của V. Khi đó, biểu thức:
$$c_1u_1 + c_2u_2 + \ldots + c_nu_n = \sum_{i=1}^{n} c_iu_i \tag{2.4}$$
với $c_i = const \in \mathbf{R}$ được gọi là tổ hợp tuyến tính của các vector của họ S.

Example 2.1.2 *Hãy biểu diễn vector x thành tổ hợp tuyến tính của u_i, biết:*

1. Trong $\mathbf{R}^2$, $x = (7; -3), u_1 = (-6; 7), u_2 = (3; 5)$
2. Trong $\mathbf{R}^3$, cho $x = ((7, -12, 15), u_1 = (2; -3, 0), u_2 = (-1, 3, 2), u_3 = (5, -1, 3)$
3. Trong $\mathbf{R}^4$, cho $x = (2, -1, 1, 2), u_1 = (-2, 3, 1, 0), u_2 = (-1, -1, 2, -3), u_3 = (0, -1, -2, 0), u_4 = (0, -3, 2, 1)$

Example 2.1.3 *Hãy xác định λ sao cho x là tổ hợp tuyến tính của u, v, w. Biết*

1. Trong $\mathbf{R}^3$, cho $x = (7, -2, \lambda), u = (2, 3, 4), v = (3, 7, -1), w = (1, -6, 1)$
2. Trong $\mathbf{R}^3$, cho $x = (5, \lambda, 2), u = (4, 4, 3), v = (2, 1, 0), w = (4, 1, 6)$

2.1.4 Linear Spans - Bao tuyến tính- Spans

Cho KGVT $(V, +, .)$ và hệ các vector $S = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\} \subset V$

1. Tập W được gọi là tập không gian con của V, ký hiệu $W \subset V$ nếu thoả 2 điều kiện sau:
   - Nếu $u_1 + u_2 \in W$ thì $u_1 + u_2 \in W$
   - Nếu $k \in \mathbf{R}$, $u \in W$ thì $ku \in W$
2. Tập tất cả các tổ hợp tuyến tính của họ S được gọi là bao tuyến tính của S, ký hiệu, $Span(S)$
$$Span(S) = \left\{c_1u_1 + c_2u_2 + \ldots, c_nu_n = \sum_{i=1}^{n} c_iu_i, \quad c_i \in \mathbf{R}\right\} \subset V \tag{2.5}$$
3. Nếu $Span(S) = V$, tức là $\forall x \in V$ thì đều có thể biểu thị tuyến tính qua họ S
$$\forall x \in V, x = c_1u_1 + c_2u_2 + \ldots + c_nu_n = \sum_{i=1}^{n} c_iu_i, c_i \in \mathbf{R} \tag{2.6}$$

2.2 Họ vector độc lập tuyến tính và phụ thuộc tuyến tính

2.2.1 Định nghĩa:

Cho KGVT V, họ $S = \{u_1, u_2, \ldots, u_n)\} \subset V$. Xét tổ hợp tuyến tính

$$\sum_{i=1}^{n} c_i u_i = 0 \tag{2.7}$$

1. Nếu (2.7) chỉ xảy ra khi $c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0$ thì ta nói họ S độc lập tuyến tính.
2. Nếu tồn tại các số thực $c_1, c_2, \ldots, c_n$ không đồng thời bằng 0 để (2.7) thoả mãn thì ta nói họ S là phụ thuộc tuyến tính.

Example 2.2.1

1. Cho $S = \{x = (1, 2), y = (1, -3)\}$ trong $\mathbf{R}^2$. Hỏi họ S có độc lập tuyến tính hay không?
2. Cho $S = \{u_1 = (3, -6, 9), u_2 = (-2, 4, 5), u_3 = (3, 4, -2)\}$ trong $\mathbf{R}^3$. Hỏi họ S có độc lập tuyến tính hay không?

2.2.2 Tính chất

1. Khi xét tính độc lập hay phụ thuộc tuyến tính của họ vector S trong KG $\mathbf{R}^n$
   (a) Nếu số vector của họ S khác n thì họ S phụ thuộc tuyến tính.
   (b) Nếu số vector của S bằng n thì ta có thể kiểm tra bằng cách tính định thức mà toạ độ của các vector được viết theo cột. Nếu định thức khác 0 thì hệ độc lập tuyến tính. Nếu định thức bằng 0 thì họ S phụ thuộc tuyến tính.
2. Trong họ đang xét, nêu vector nào đó là tổ hợp tuyến tính của các vector còn lại thì hệ đó phụ thuộc tuyến tính.

Example 2.2.2 *Kiểm tra họ S sau có độc lập tuyến tính hay không?*

1. Trong $\mathbf{R}^2$, cho $S = \{u_1 = (3; \frac{1}{2}), u_2 = (5, -6)\}$
2. Trong $\mathbf{R}^3$, cho $S = \{u_1 = (2; 9, -8), u_2 = (-2, 3, 4), u_3 = (3, 5, 0)\}$
3. Trong $\mathbf{R}^4$, cho $S = \{u_1 = (-2, 3, -4, 1), u_2 = (3, -1, 5, -2), u_3 = (0, 1, -3, 5), u_4 = (4, -2, 1, 0)\}$

2.3 Không gian hữu hạn chiều và cơ sở của không gian hữu hạn chiều

2.3.1 Cơ sở của một KGVT

- Cho KGVT V và $S = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\} \subset S$.
- Ta nói, S là cơ sở của V nếu:
  1. $Span(S) = V$, nghĩa là S sinh ra V.
  2. S độc lập tuyến tính.
- Cơ sở chính tắc của KGVT $\mathbf{R}^n$: Trong KGVT $\mathbf{R}^n$, họ vector $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, với $e_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0), e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, e_n = (0, 0, \ldots, 1)$ được gọi là cơ sở chính tắc của $\mathbf{R}^n$.

2.3.2 Không gian hữu hạn chiều

- Khi KGVT V có cơ sở gồm n vector thì ta nói KGVT V là KGVT hữu hạn chiều.
- Ta chứng minh được rằng: một cơ sở khác của V cũng phải có đúng n vector và giá trị n là duy nhất.. Khi đó, n được gọi là số chiều của V, ký hiệu, $dimV = n$.
- Tức là: $Dim\mathbf{R}^n = n$

2.3.3 Toạ độ của 1 vector đối với một cơ sở

- Giả sử $S = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ là một cơ sở của V. Khi đó, ứng với mỗi $v \in V$, thì tồn tại duy nhất $c_i(i = \overline{1, n})$ sao cho:

$$v = \sum_{i=1}^{n} c_i u_i \tag{2.8}$$

- Khi đó, c_i được gọi là các toạ độ của v đối với cơ sở S. Ký hiệu:
  + Vector toạ độ của v đối với cơ sở S:

$$(v)_S = (c_1, c_2, \ldots, c_n) \tag{2.9}$$

  + Ma trận toạ độ của vector v đối với cở S:

$$[v]_S = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \cdots \\ c_n \end{pmatrix} \tag{2.10}$$

Example 2.3.1 *Kiểm tra xem họ S có phải là cơ sở của $\mathbf{R}^n$ không? Nếu là cơ sở thì hãy tìm ma trận toạ độ của v đối với S*

1. Trong $\mathbf{R}^3$, cho $S = \{u_1 = (1, -7, 9), u_2 = (4, -5, 1), u_3 = (-9, 3, 5)\}$ và $v = (-2, 4, -7)$
2. Trong $\mathbf{R}^3$, cho $S = \{u_1 = (1, 2, 4), u_2 = (3, 1, 5), u_3 = (-2, -1, 8)\}$ và $v = (-1, -2, 3)$
3. Trong $\mathbf{R}^4$, cho $S = \{u_1(1, -3, 2, 5), u_2 = (4, -5, 1, 0), u_3 = (-1, 4, 2, 1), u_4 = (3, 0, 2, 1)\}$ và $v = (2, 1, 0, 1)$

2.4 Ma trận chuyển cơ sở

- Cho KGVT V và hai cơ sơ $S = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ và $S = \{u'_1, u'_2, \ldots, u'_n\}$
- Khi đó: $\forall v \in V$, ma trận P thoả mãn:

$$(v)_S = P_{S \to S'}(v)_{S'} \tag{2.11}$$

  được gọi là ma trận chuyển cơ sở từ S sang S'
- Chú ý: Từ (2.11) có có thể suy ra

$$(v)_{S'} = P^{-1}_{S \to S'}(v)_S \tag{2.12}$$

- Để có được P, ta biểu diễn các vector u_i trong S sang các vector trong S'. Cụ thể:

$$u_1 = p_{11}u'_1 + p_{12}u'_2 + \ldots + p_{1n}u'_n \tag{2.13}$$

$$u_2 = p_{21}u'_1 + p_{22}u'_2 + \ldots + p_{2n}u'_n \tag{2.14}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$u_n = p_{n1}u'_1 + p_{n2}u'_2 + \ldots + p_{nn}u'_n \tag{2.15}$$

- Cụ thể:

$$P_{S\to S'} = ([u_1]_{S'} \quad [u_2]_{S'} \quad \cdots \quad [u'_n]_{S'}) \tag{2.16}$$

Example 2.4.1

Trong $\mathbf{R}^3$, cho $S = \{u_1 = (1,-2,3), u_2 = (3,4,1), u_3 = (4,3,-5)\}$ và $S' = \{u'_1 = (4,-2,5), u'_2 = (3,-4,0), u'_3 = (-6,3,-2)\}$

1. Kiểm tra S và S' có là cơ sở của $\mathbf{R}^3$ không?
2. Hãy tìm ma trận chuyển cơ sở từ S sang S'
3. Cho $(v)_{S'} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix}$. Hãy tìm $(v)_S$
4. Hãy tìm ma trận chuyển cơ sở từ S' sang S

Example 2.4.2

Trong $\mathbf{R}^3$, cho $B = \{u_1 = (1,3,2), u_2 = (4,1,-9), u_3 = (3,4,-1)\}$ và $B' = \{u'_1 = (-2,5,-2), u'_2 = (-4,8,1), u'_3 = (3,-2,1)\}$

1. Kiểm tra B và B' có là cơ sở của $\mathbf{R}^3$ không?
2. Hãy tìm ma trận chuyển cơ sở từ B sang B'
3. Cho $(v)_B = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}$. Hãy tìm $(v)_{B'}$

Example 2.4.3

Trong $\mathbf{R}^3$, cho 2 họ B và B' là cơ sở của $\mathbf{R}^3$. Biết ma trận chuyển cơ sở $P_{B\to B'} = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 9 \\ 3 & -5 & 10 \\ 3 & 10 & -9 \end{pmatrix}$

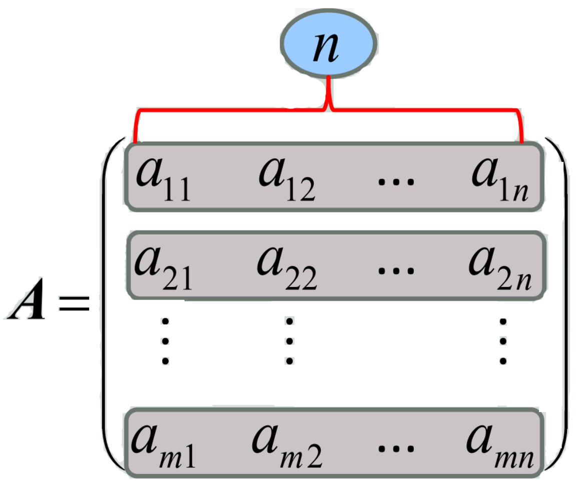
1. Tìm $(v)_B$, biết $(v)_{B'} = (-2,-2,-2)$
2. Tìm $(v)_{B'}$, biết $(v)_B = (-5,6,7)$

CHAPTER 3

ROW SPACES AND COLUMN SPACES

3.1 Row Spaces

- Given any matrix , $m \times n$ matrix A, $A \in \mathbf{R}^n$,



- The rows of A can be considered as vectors in $\mathbb{R}^n$

$$r_1 = (a_{11} \quad a_{12} \quad \dots \quad a_{1n})$$

$$r_2 = (a_{21} \quad a_{22} \quad \dots \quad a_{2n})$$

$$r_m = (a_{11} \quad a_{m2} \quad \dots \quad a_{mn})$$

- Span $\{r_1, r_2, \dots, r_n\}$ is subspace of $\mathbb{R}^n$

- This subspace is called the row space of A. of A

3.2 Column Spaces

- Given any matrix , $m \times n$ matrix A, $A \in \mathbf{R}^n$,

$$A = \left.\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\right\} m$$

- The columns of A can be considered as vectors in $\mathbb{R}^m$

$$c_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ \dots \\ a_{1n} \end{pmatrix} \quad c_2 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix} \quad \dots \quad c_n = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

- Span $\{c_1, c_2, \dots, c_n\}$ is subspace of $\mathbb{R}^m$
- This subspace is called the column space of A.

3.3 Note

- The row space of A is the column space of A^T
- The row space of A is the column space of A^T

Example 3.3.1

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- If A is not a square matrix, then the row space and column space of A contains totally "diferent type" of vectors.

Example 3.3.2

Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ -5 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Find the row space and the column space of A.

+ The row space of A is a subspace of $\mathbf{R^3}$
+ The column space of A is a subspace of $\mathbf{R^4}$

- We wite $r_1 = (2, -1, 0)$ (as a vector) rather than a row matrix $r_1 = (2 \quad -1 \quad 0)$

- The row space of

$$A=\begin{pmatrix}2&-1&0\\1&-1&3\\-5&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{array}{c}r_1\\r_2\\r_3\\r_4\end{array}$$

is a subspace of $\mathbf{R}^3$

$= Span\{r_1, r_2, r_3, r_4\}$

$= \{a(2,-1,0)+b(1,-1,3)+c(-5,1,0)+d(1,0,1)|a,b,c,d\in\mathbf{R}\}$

$= \{(2a+b-5c+d,-a-b+c,3b+d)|a,b,c,d\in\mathbf{R}\}$

- The column space of

$$A=\begin{array}{c}\begin{pmatrix}2&-1&0\\1&-1&3\\-5&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\\ \begin{array}{ccc}c_1&c_2&c_3\end{array}\end{array}$$

is a subspace of $\mathbf{R}^4$

$= Span\{c_1, c_2, c_3\}$

$$=\left\{a\begin{pmatrix}2\\1\\-5\\1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}0\\3\\0\\1\end{pmatrix}\mid a,b,c\in\mathbf{R}\right\}\left\{=\begin{pmatrix}2a-b\\a-b+3c\\-5a+b\\a+c\end{pmatrix}\mid a,b,c\in\mathbf{R}\right\}$$

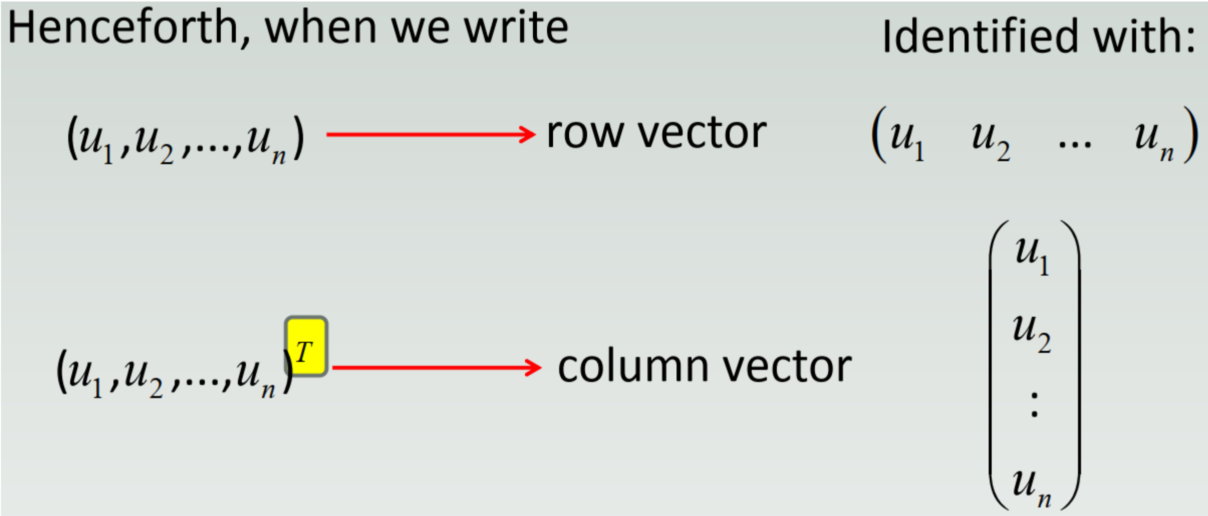
Example 3.3.3

Give matrix $B=\begin{pmatrix}1&0&-1&1&3\\0&1&-3&2&1\\0&0&-3&1&-1\end{pmatrix}$ Find a basic for the row space and column space of B

Example 3.3.4

Give matrix $C=\begin{pmatrix}2&1\\3&-1\\1&2\\-1&3\\-1&0\end{pmatrix}$ Find a basic for the row space and column space of C

- We have observed that a vector in $\mathbf{R}^n$ can be identified as a row or matrix.



3.4 Rank of a system vector

3.4.1 Định nghĩa:

- Cho không gian vector V và một họ vector $\mathbf{R}^n$ is $S = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$.
- Số chiều của không gian con sinh bởi S được gọi là hạng của hệ vector S
- Hay số tối đa các vector độc lập tuyến tính có thể rút ra từ S gọi là hạng của họ S.

3.4.2 APPLYING: Find the basis of system vector - Tìm cơ sở và số chiều của một họ vector:

- Giải thuật tìm hạng của một hệ vector: Cho KGVT V, có một cơ sở B và một họ các vector S.
  + Đặt $W = spanS$
  + Lập ma trận A gồm các vector của S được viết theo hàng
  + Dùng các phép biến đổi sơ cấp trên hàng, chuyển A về dạng bậc thang.
  + Ta nhận được hệ sinh mới, sinh ra cùng KG con W bằng cách: Loại trừ các vector sinh bởi các hàng không, các vector còn lại tạo thành một hệ các vector độc lập tuyến tính sinh ra W và do đó, các vector này chính là số chiều của W và cũng là số hàng của S.

Example 3.4.1

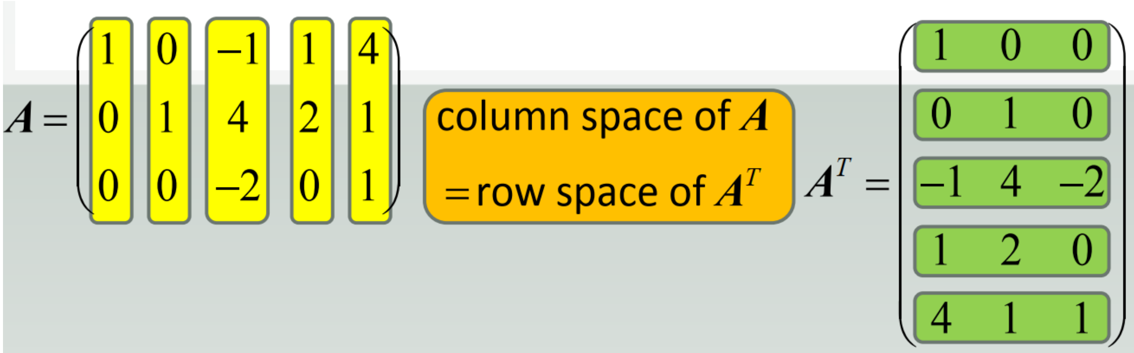
Give matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ then

- The row space of A is a subspace of $\mathbf{R}^5$
- The column space of A is a subspace of $\mathbf{R}^3$
- Row space of A = Span $\{(1, 0, -1, -1, 4), (0, 1, 4, 2), (0, 0, -2, 0, 1), \}$.
  If $\{(1, 0, -1, -1, 4), (0, 1, 4, 2), (0, 0, -2, 0, 1)\}$ (that is, the row of A) are linearly independent, then obviously they will form a basis for the row space of.

- Column space of A $=$ Span $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

  If $\{(1,0,0),(0,1,0),(-1,4,-2),(1,2,0),(4,1,1)\}$ (that is, the column of A) are linearly independent, then obviously they will form a basis for the column space of.

- The relationship between column space of A and row space of A^T



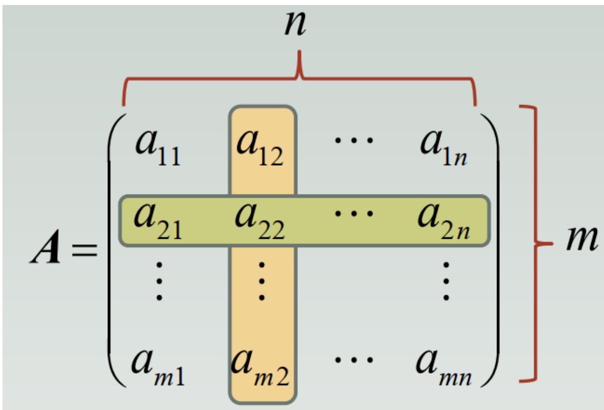
  So to find a basis for the column space of, we can use the previous method to find a basis for the row space of A^T

Example 3.4.2

Tìm cơ sở và số chiều của hệ $S = \{u_1 = (1,2,0,4), u_2 = (0,1,5,0), u_3 = (-1,3,2,-4), u_4 = (2,1,0,8), u_5 = (3,1,-1,12)\}$ và $V = Span\{u_1,u_2,u_3,u_4,u_5\}$. Find a basis for V.

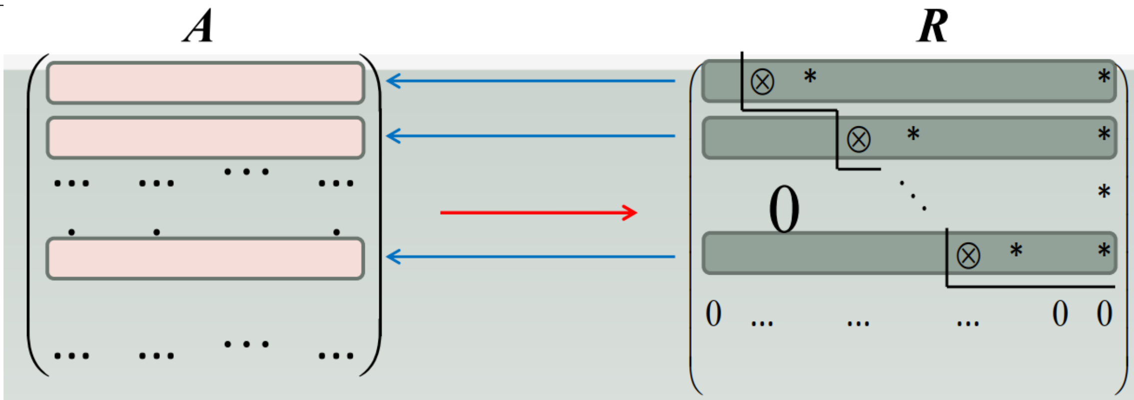
3.5 A basis and the dimension for the row space & column space of matrix

- Note that: Any matrix



The row space of A is a subspace of $\mathbf{R}^m$ while the column space is a subspace of $\mathbf{R}^n$

- A basis for the row space of A



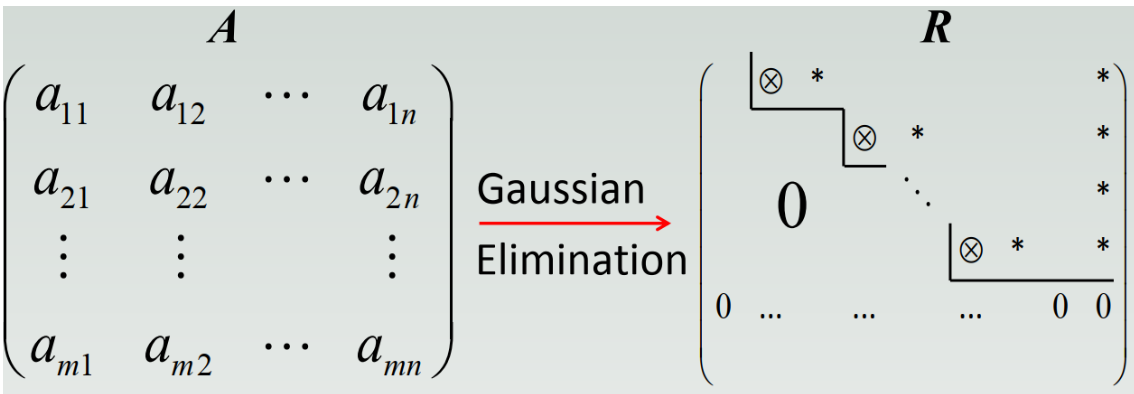
can't be obtained by taking the non zero rows of R

Example 3.5.1

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{G.E.}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = R$$

- The row space and the column space of a matrix have the same dimension. These two subspaces may have nothing to do with each other (if $m \neq n$) but the theorem states that they have the same dimension.

- Let R be a row echelon form of A.



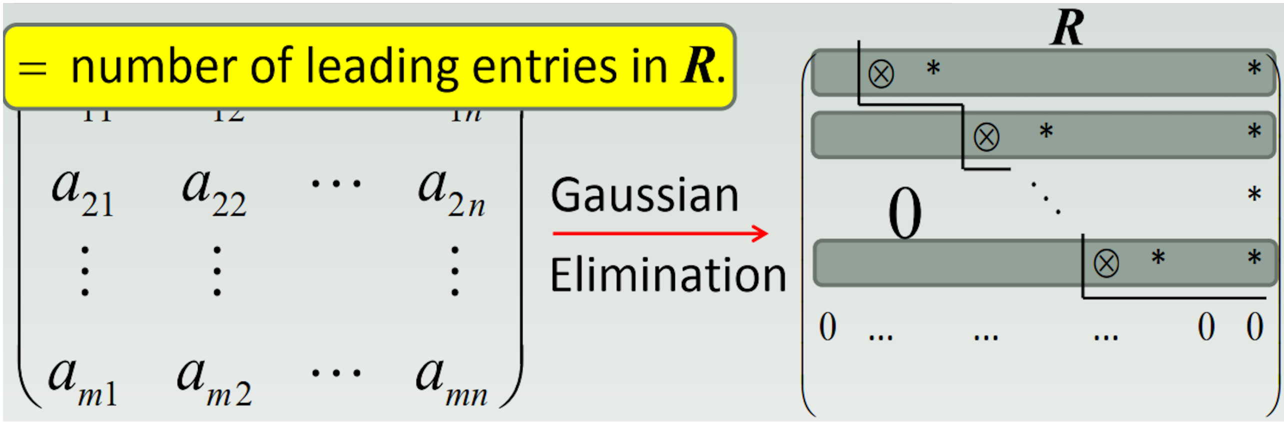
3.5.1 A basis for row spaces of matrix

Question: What is a basis for the row space of A?

Answer: The non-zero rows of $\boldsymbol{R}$.

Question: What is a dimension of the row space of A?

Answer: The number of non-zero rows of $\boldsymbol{R}$.

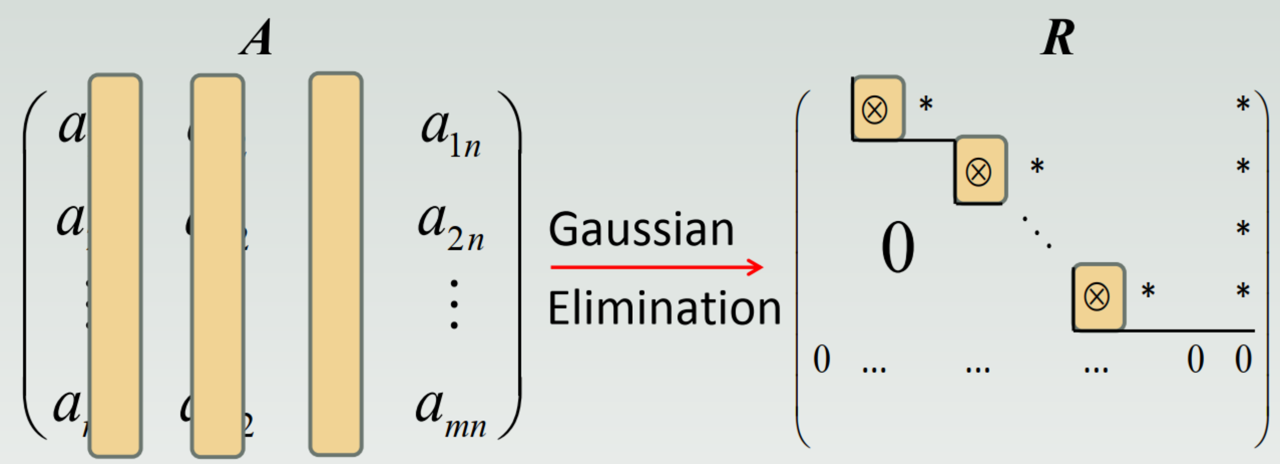


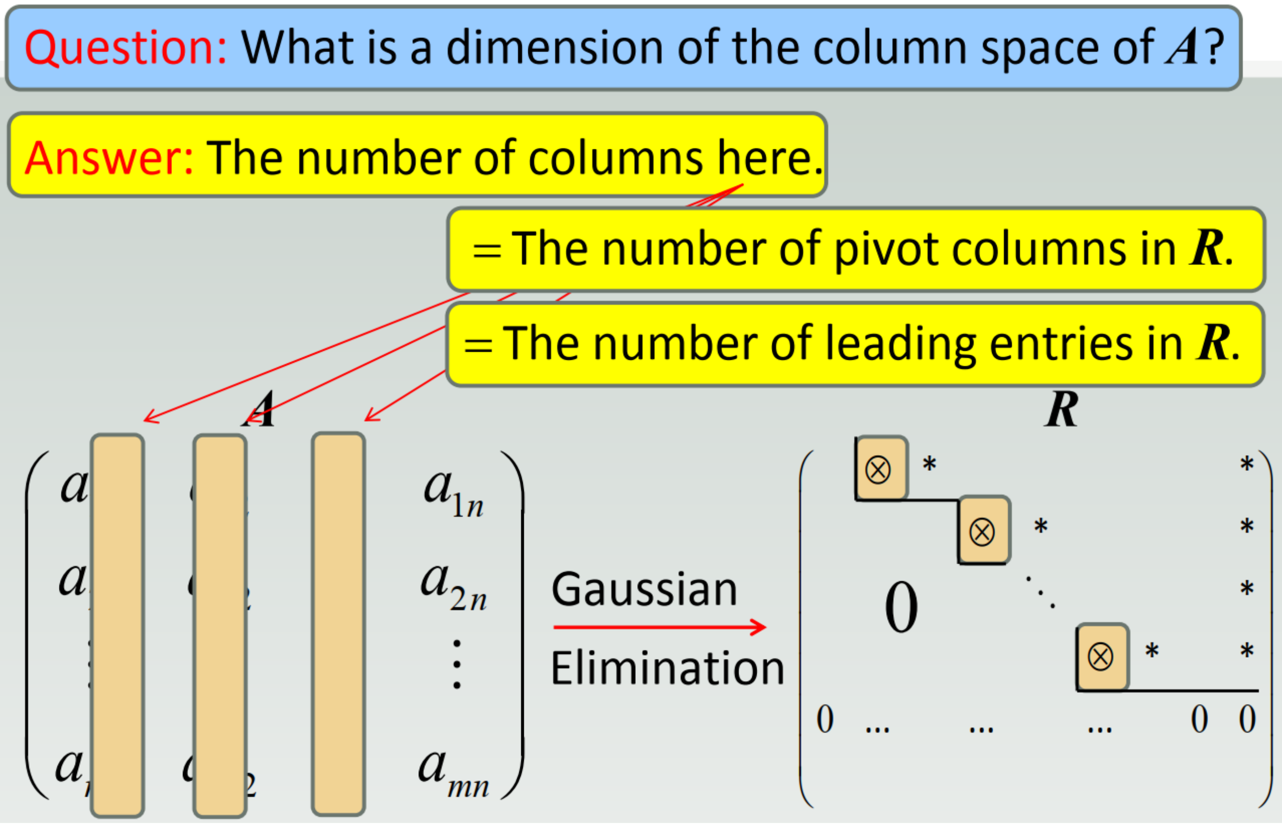
3.5.2 A basis for column spaces of matrix

Question: What is a basis for the column space of A?

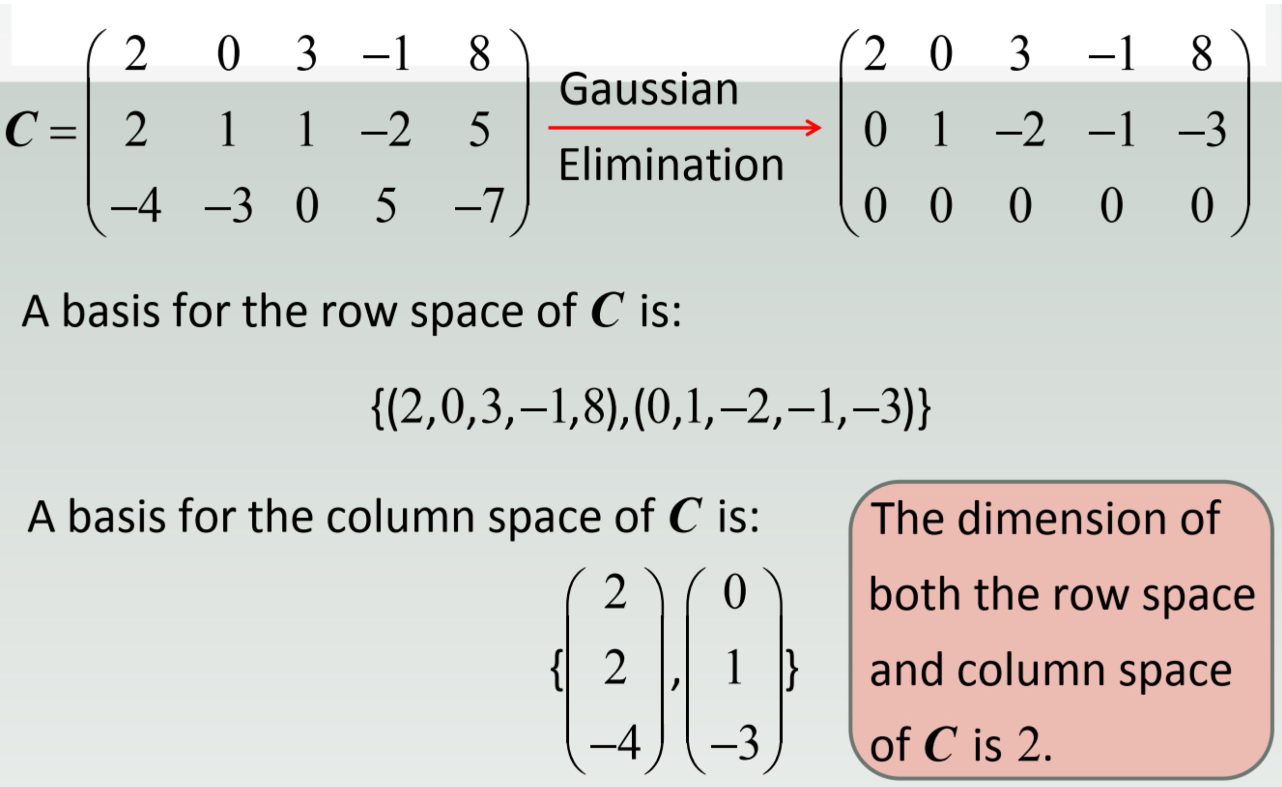
Answer: The columns of A corresponding to the pivot columns of $\boldsymbol{R}$.

Question: What is a dimension of the column space of A?





Example 3.5.2



Example 3.5.3

Find a basis for the column space of the following matrix. $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

3.6 A basis and dimension of the nullspace of a homogeneuos linear - Cơ sở và số chiều của không gian nghiệm của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất

3.6.1 The nullspace of the matrix & the nullity of matrix

- Give a homogeneous linear system with n variables.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \tag{3.1}$$

- Let A be a $m \times n$ matrix.
- The solution set of $Ax = 0$ is a subspace of $\mathbf{R}^n$ and is also called the solution space of $Ax = 0$. This is also called the **nullspace of the matrix *A*.**

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Since the nullspace of is a subspace of $\mathbf{R}^n$, its dimension is $\leq n.$
- The dimension of the nullspace of is called the **nullity of *A*** and denoted by **nullity(*A*).**

Example 3.6.1

Find a basis for the nullspace and determine the nullity of the following matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & 0 & 8 \\ 3 & 1 & -1 & 12 \end{pmatrix}$$

We have: The reduced row echelon form of the augmented matrix $(A|0)$ is

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4s \\ 0 \\ 0 \\ s \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s \in \mathbb{R}.$$

A general solution for $\boldsymbol{Ax} = \mathbf{0}$ is $\begin{cases} x_1 & = & -4s \\ x_2 & = & 0 \\ x_3 & = & 0 \\ x_4 & = & s, \quad s \in \mathbb{R} \end{cases}$

So a basis for the nullspace of $\boldsymbol{A}$ is $\left\{\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

$\text{nullity}(\boldsymbol{A}) = 1$

1 non pivot column

What is the rank of $\boldsymbol{A}$?

$\text{rank}(\boldsymbol{A}) = 3$

3 pivot columns

Example 3.6.2

Find a basis for the nullspace and determine the nullity of the following matrix:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

We have: The reduced row echelon form of the augmented matrix $(B|0)$ is

$(\boldsymbol{B}\,|\,\boldsymbol{0})$ is
$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

A general solution for $\boldsymbol{Bx} = \boldsymbol{0}$ is
$$\begin{cases} x_1 &= -s-t \\ x_2 &= s \\ x_3 &= -t \\ x_4 &= 0 \\ x_5 &= t, \qquad s,t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -s-t \\ s \\ -t \\ 0 \\ t \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

The reduced row echelon form of the augmented matrix

$(\boldsymbol{B}\,|\,\boldsymbol{0})$ is
$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

So a basis for the nullspace of $\boldsymbol{B}$ is
$$\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$\text{nullity}(\boldsymbol{B}) = 2$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -s-t \\ s \\ -t \\ 0 \\ t \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

What is the rank of $\boldsymbol{B}$?

$\text{rank}(\boldsymbol{B}) = 3$

2 non pivot columns

3 pivot columns

- THEOREM: (Dimension Theorem for matrices) Let A be a matrix with n columns. Then

$$\boxed{\text{rank}(A) + \text{nullity}(A) = n}$$

3.6.2 A basis and dimension of the nullspace of a homogeneuos linear

- Từ hệ phương trình thuần nhất (3.1), ta có dạng ma trận của hệ $AX = 0$.
- Dùng phương pháp Gauss, giải hệ phương trình, tìm nghiệm.
- Từ hệ nghiệm, ta suy ra hệ vector sinh ra tập nghiệm.

- Khảo sát hệ này, ta tìm được cơ sơ và số chiều của không gian nghiệm.

Example 3.6.3 *Tìm cơ sở và số chiều của không gian nghiệm của các hệ sau:*

1. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 - 4x_5 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 7x_4 + 5x_5 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 4x_4 - 2x_5 = 0 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$

3. $3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 5x_5 = 0$

4. $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 0 \\ -2x_2 - 2x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$

CHAPTER 4

DIAGONALIZATION - CHÉO HOÁ

4.1 The eigenvalue and the eigenvector – Giá trị riêng và vector riêng

4.1.1 Definition:

- Let A be a square matrix of order n.
- A nonzero column vector $u \in \mathbf{R^n}$ is called eigenvector of A

$$\boldsymbol{Au} = \lambda \boldsymbol{u} \quad \text{for some scalar } \lambda.$$

- Its solution are the eigenvalues λ_i of A
- A solution $\alpha \neq 0$ corresponding to an eigenvalue λ is called an eigenvector of A.
- The scalar λ is called an eigenvalue o A and $\boldsymbol{u}$ is said to be an eigenvector of A qith the eignevalue λ
- Cho ma trận A vuông, $A \in \mathcal{M}_n$.
- Khi đó, giá trị $\lambda \in \mathbf{R}$ được gọi là giá trị riêng (GTR) của ma trận A nếu tồn tại vector cột $\alpha \in \mathbf{R}^n$, $(u \neq 0)$ thoả điều kiện:

$$(A - \lambda I_n)u = 0 \tag{4.1}$$

  The (4.1) homogeneous linear system (Hệ phương trình thuần nhất) with coefficient matrix $(A - \lambda I_n)$ (ma trận mở rộng).
- Khi đó, u được gọi là vector riêng (VTR) của ma trận A ứng với GTR λ.
- **Chú ý:**

  + Một giá trị riêng có thể có nhiều vector riêng;
  + Mỗi VTR chỉ ứng với một GTR duy nhất;
  + Nếu α là VTR của A thì $k\alpha$, $(k \in \mathbf{R})$ cũng là VTR của A.
- Note that $(A - \lambda I_n)$ is singular and thus this homogeneous linear system has infinitely many solutions.
- The solution space of $(A - \lambda I_n)u = 0$ is called the eigenspace of A assocoates with λ and is denoted by E_λ.

So E_λ contains ALL the eigenvectors of $\boldsymbol{A}$ associated with λ.

4.1.2 Cách tìm giá trị riêng

- Xét đa thức đặc trưng characteristic polynomial

$$(A - \lambda I_n)$$

Trong đó: I_n là ma trận đơn vị cùng kích thước với ma trận A;

- Giải phương trình đặc trưng: characteristic equation

$$det(A - \lambda I_n) = 0 \tag{4.2}$$

tìm các GTR λ.

4.1.3 Cách tìm vector riêng

Giả sử cần tìm VTR ứng với GTR λ

- Gọi VTR α là VTR cần tìm, thoả

$$(A - \lambda I_n)\alpha = 0 \tag{4.3}$$

- Dùng các phép biến đổi sơ cấp, chuyển $(A - \lambda I_n)$ về dạng ma trận bậc thang.

- Giải hệ tìm α

Example 4.1.1

Find the eigenvalues and eigenvector of the matrix A

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$
2. $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$
3. $C = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$
4. $D = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -4 \\ -2 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
5. $E = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 7 \\ -1 & 6 & 9 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix}$
6. $F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
7. $G = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

4.2 Diagonalization - Chéo hoá

4.2.1 Definition

- Given a square matrix A, we wanted to know if is possible to find an invertible matrix P such that

$$P^{-1}AP = D \text{ a diagonal matrix} \tag{4.4}$$

- A square matrix A is called diagonalizable if there exists an invertible matrix P such that $P^{-1}AP$ is a diagonal matrix.

- In here, matrix P is said to diagonalize A

- Let A be a square matrix order n. Then A is diagonalizable if and only if A has n linearly independent eigenvectors.

It is important to emphasize the n eigenvectors have to be linearly independent since

E_λ contains ALL the eigenvectors of A associated with λ.

that is, A already has infinitely eigenvectors associated with a particular eigenvalue λ.

- Nếu trong phương trình (4.4), ma trận D là ma trận chéo thì ta nói A là ma trận chéo hoá được và ma trận P gọi là ma trận làm chéo hoá A.
- Ta có thể nói A chính là ma trận của ánh xạ tuyến tính $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ đối với cơ sở chính tắc của $\mathbf{R}^n$.
- Nếu ma trận A chéo hoá được, nghĩa là tồn tại một ma trận khả nghịch P sao cho $P^{-1}AP$ là một ma trận chéo thì A chính mà ma trận đổi cơ sở từ cơ sở chính tắc $B = \{e_1 = (1, 0, \ldots, 0), e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, e_n = (0, 0, \ldots, 1)\}$ qua một sơ sở B' nào đó của $\mathbf{R}^n$ mà trong cơ sở này, ma trận của f là ma trận chéo.

4.2.2 Giải thuật chéo hoá A

Bước 1: Lập đa thức đặc trưng $(A - \lambda I_n)$.

Bước 2: Giải phương trình đặc trưng: $det(A - \lambda I_n) = 0$ tìm các giá trị riêng của A

Bước 3: Ứng với các giá trị riêng λ vừa tìm được, ta tìm các vector riêng tương ứng thoả $(A - \lambda I_n)\alpha = 0$, chính là một cơ sở cho KG riêng E_λ

Bước 4: Xét hệ vector B' gồm tất cả các vector riêng tạo thành cơ sở cho KG riêng vừa nhận được ở bước 3.

+ Nếu số phần tử của B' bằng n, tức là $dimE_\lambda = n$ thì A chéo hoá được. và ma trận làm chéo hoá A chính là ma trận P và được xác định bởi toạ độ của các VTR vừa tìm được, được viết theo cột tương ứng.
+ Nếu số phần tử của B' nhỏ hơn n, nghĩa là $dimE_\lambda < n$ thì không chéo hoá được.

Bước 5: Xác định ma trận chéo (nếu cần). Ma trận chéo được xác định như sau:

$$D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \mathbf{0} \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & \lambda_k \end{pmatrix} \tag{4.5}$$

Eigenvalues of A

P is said to orthogonally diagonalize A.

Example 4.2.1

Hãy tìm ma trận chéo hoá của các ma trận trong ví dụ (4.1.1)

4.2.3 APPLICATION OF DIAGONALIZATION

Once a square matrix A can be diagonalized, we can compute A^n easily

$$D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \mathbf{0} \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & \lambda_k \end{pmatrix}$$

Eigenvalues of A

$$\Leftrightarrow A = PDP^{-1}$$
$$\Leftrightarrow A^K = PD^K P^{-1}$$

$$= P\begin{pmatrix} \lambda_1^k & & & \mathbf{0} \\ & \lambda_2^k & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & \lambda_n^k \end{pmatrix}P^{-1}$$

For $k = -1$

$$A^{-1} = P\begin{pmatrix} \lambda_1^{-1} & & & \mathbf{0} \\ & \lambda_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & \lambda_n^{-1} \end{pmatrix}P^{-1}$$

For $k = -m$

$$A^{-m} = P\begin{pmatrix} \lambda_1^{-m} & & & \mathbf{0} \\ & \lambda_2^{-m} & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & \lambda_n^{-m} \end{pmatrix}P^{-1}$$

Example 4.2.2

Hãy tìm luỹ thừa 20 của các ma trận (chéo hoá được) trong ví dụ (4.1.1)

Example 4.2.3

Let $A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -6 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$. Compute A^{10} and A^{-10}

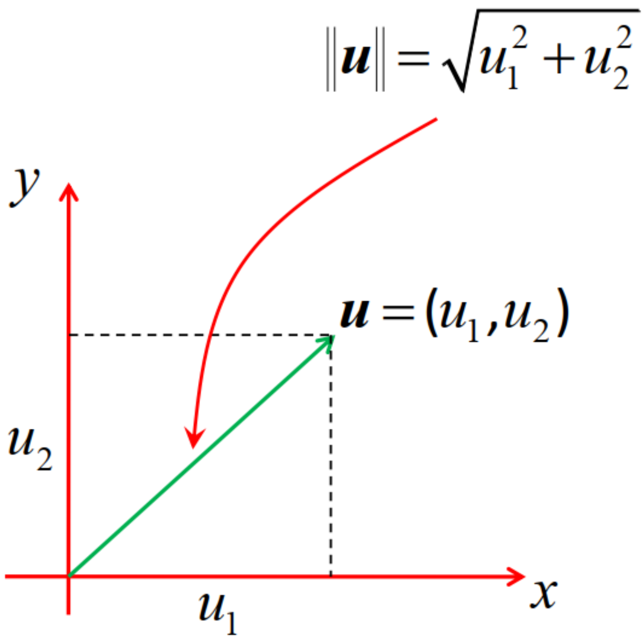
CHAPTER 5

ORTHOGONAL AND ORTHONORMAL BASES - TRỰC GIAO VÀ CƠ SỞ TRỰC GIAO

5.1 The length (or norm) of a vector

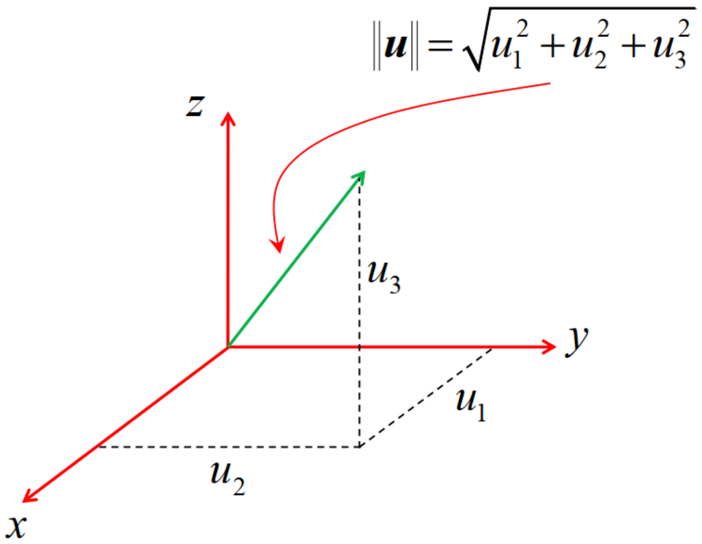
- If $u = (u_1, u_2)$ is a vector in $\mathbf{R}^2$, the length of u is defined to be

$$\|u\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} \tag{5.1}$$



- If $u = (u_1, u_2, u_3)$ is a vector in $\mathbf{R}^3$, the length of u is defined to be

$$\|u\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} \tag{5.2}$$



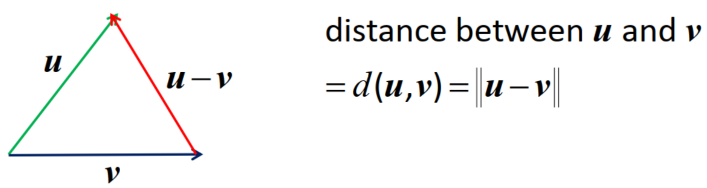
- If $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ is a vector in $\mathbf{R}^n$, the length of u is defined to be

$$\|u\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_n^2} \tag{5.3}$$

- Vectors of length 1 are called unit vectors - Vector đơn vị.

5.2 The distance between 2 vectors

- If u and v are two vectors in $\mathbf{R}^2$ or $\mathbf{R}^3$, the distance between u and v is defined to be the length of the vector $u - v$



- If $u = (u_1, u_2), v = (v_1, v_2)$ are vectors in $\mathbf{R}^2$, then

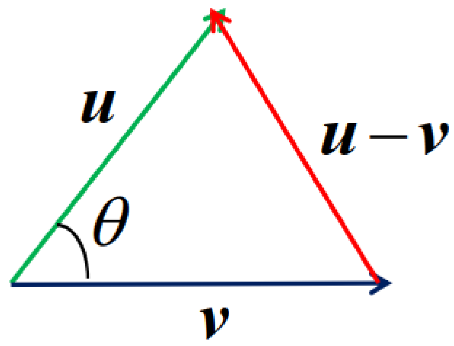
$$d(u, v) = \|u - v\| = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2} \tag{5.4}$$

- If $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n), v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ are vectors in $\mathbf{R}^n$, then

$$d(u, v) = \|u - v\| = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + \ldots + (u_n - v_n)^2} \tag{5.5}$$

5.3 Angle between 2 vectors in $\mathbf{R}^2$ or $\mathbf{R}^3$

If u and v are two vectors in $\mathbf{R}^2$ or $\mathbf{R}^3$, let the angle between u and v be θ.



By cosine rule,

$$\|u-v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\|u\|\|v\|cos\theta \tag{5.6}$$

$$cos\theta = \frac{\|u\|^2 + \|v\|^2 - \|u-v\|^2}{2\|u\|\|v\|} \tag{5.7}$$

$$\theta = cos^{-1}\left(\frac{\|u\|^2 + \|v\|^2 - \|u-v\|^2}{2\|u\|\|v\|}\right) \tag{5.8}$$

5.4 The dot product (or inner product - Tích vô hướng) and matrix product

- Let $u = (u_1, u_2, \ldots u_n)$ and $u = (v_1, v_2, \ldots v_n)$ be two vectors in $\mathbf{R}^n$. Here u and v are written as row vectors

- The dot product (or inner product) of u and v is the value

$$u \cdot v = < u, v > = u_1v_1 + u_2v_2 + \ldots + u_nv_n \tag{5.9}$$

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + \ldots + u_nv_n$$

dot product

matrix product

$$= \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \ldots & u_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^T$$

- Let $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ be two vectors in $\mathbf{R}^n$ Here u and v are written as column vectors

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + \ldots + u_nv_n$$

matrix product

$$= \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \ldots & u_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{u}^T\boldsymbol{v}$$

dot product

Example 5.4.1

Let $u = (1, -2, 2, -1)$ and $v = (1, 0, 2, 0)$ are two vectors in $\mathbf{R}^4$. Compute: $< u, v >$, $\|u\|$, $\|v\|$, $d(u, v)$, angle between u and v.

Example 5.4.2

Let $u = (5, -2, 3)$ and $v = (4, -2, 1)$ are tow vectors in $\mathbf{R}^3$. Compute: $< u, v >$, $\|u\|$, $\|v\|$, $d(u, v)$, angle between u and v.

5.5 Theorem (some results about dot products)

Let c be a scalar and u, v, w be vectors in $\mathbf{R}^n$.

1. $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$
2. $\langle (u + v), w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle$
3. $\langle w, (u + v)\rangle = \langle w, u\rangle + \langle w, v\rangle$
4. $\langle (cu), v\rangle = \langle u, (cv)\rangle = c(\langle u, v\rangle)$
5. $\|cu\| = |c|\|u\|$
6. $\langle u, u\rangle \geq 0$ and $\langle u, u\rangle = 0$ if only if $u = 0$.

The dot product of any vector with itself is non-negative and the only vector whose dot product with itself is zero is the zero vector.

5.6 Orthogonal & Orthonormal - Trực giao & Hệ trực chuẩn

5.6.1 Definition

- Two vectors u, v are said to be orthogonal (Trực giao) if

$$\langle u, v\rangle = 0 \tag{5.10}$$

$$\langle u, v\rangle = 0 \Rightarrow cos^{-1}\left(\frac{\langle u, v\rangle}{\|u\|\|v\|}\right) = cos^{-1}(0) = \frac{\pi}{2}. \tag{5.11}$$

- A set S of vectors in $\mathbf{R}^n$ is said to be orthogonal if every pair of distinct vectors in s are orthgonal - Hệ trực giao

- A set S of vectors in $\mathbf{R}^n$ is said to be orthonormal if S is orthgonal and every vector in S is a unit vector (Một họ vector S được gọi là trực chuẩn nếu S trực giao và mỗi vector là vector đơn vị).

- The Standard basis for $\mathbf{R}^n$ (Hệ cơ sở trực chuẩn) is an orthonormal set

$$e_1 = (1, 0, \ldots, 0), e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, e_n = (0, 0, \ldots, 1)$$

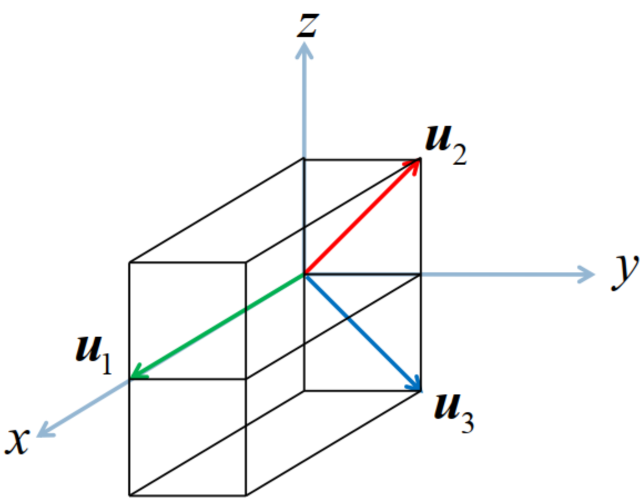
  * Orthogonal: $\langle e_i, e_j\rangle = 0$ if $i \neq j$

* Unit vectors: $\|e_i\| = \sqrt{0^2 + \ldots + 1^2 + \ldots + 0^2} = 1$

- Let S be an orthogonal set of non zero vectos in a vector space. Then, S is a linearly independent set (Mọi hệ trực giao trong $\mathbf{R}^n$ không chức vector 0 đều độc lập tuyến tính).

Example 5.6.1

Let $S = \{u_1, u_2, u_3\}$ where $u_1 = (2,0,0)$; $u_2 = (0,1,1)$; $u_3 = (0,1,-1)$.



Is S an orthogonal set?

5.6.2 Algorithm Gram - Schmidt Process (Thuật toán trực giao hoá Gram - Schmidt)

- Let $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ be a basis for a vector space V.
- Let $v_1 = u_1$
- Compute

$$v_2 = u_2 - \frac{\langle u_2, v_1\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle} v_1 = u_2 - \frac{\langle u_2, v_1\rangle}{\|v_1\|^2} v_1 \tag{5.12}$$

$$v_3 = u_3 - \frac{\langle u_3, v_2\rangle}{\|v_2\|^2} v_2 - \frac{\langle u_3, v_1\rangle}{\|v_1\|^2} v_1 \tag{5.13}$$

$$v_4 = u_4 - \frac{\langle u_4, v_3\rangle}{\|v_3\|^2} v_3 - \frac{\langle u_4, v_2\rangle}{\|v_2\|^2} v_2 - \frac{\langle u_4, v_1\rangle}{\|v_1\|^2} v_1 \tag{5.14}$$

$$\vdots$$

$$v_k = u_k - \sum_{i<k} \frac{\langle u_k, v_i\rangle}{\|v_i\|^2} v_i \tag{5.15}$$

Then, $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}\}$ is an orthogonal basis fot V - Cơ sở trực giao.

Example 5.6.2

Trong KGVT $\mathbf{R}^3$, xét một cơ sở $S = \{u_1 = (2,-1,0), u_2 = (-1,-1,1), u_3 = (-2,-2,1)\}$. Hãy trực giao hoá Gram - Schmidt cơ sở S.

Example 5.6.3

Trong KGVT $\mathbf{R}^3$, xét một cơ sở $B = \{v_1 = (-1;2;-1), u_2 = (0,1,1), u_3 = (1;1;2)\}$. Hãy trực giao hoá Gram - Schmidt cơ sở B.

5.6.3 Gram - Schmidt Process (Quá trình trực chuẩn hoá Gram - Schmidt

- Give $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}\}$ is an orthogonal basis fot V.
- Let

$$w_i = \frac{1}{\|v_i\|} v_i \tag{5.16}$$

Then, $\{w_1, w_2, \dots, w_k\}$ is an orthonormal basis fot V - Cơ sở trực chuẩn.

Example 5.6.4

Hãy tìm cơ sở trực chuẩn của cơ sở trực giao trong ví dụ (5.6.2)

Example 5.6.5

Trong KG Euclide R^3, cho cơ sở $S = \{u_1 = (1, -2, 3), u_2 = (0, 2, -2), u_3 = (1, 1, 1)\}$. Hãy trực chuẩn hoá Gram - Schmidt họ S

Example 5.6.6

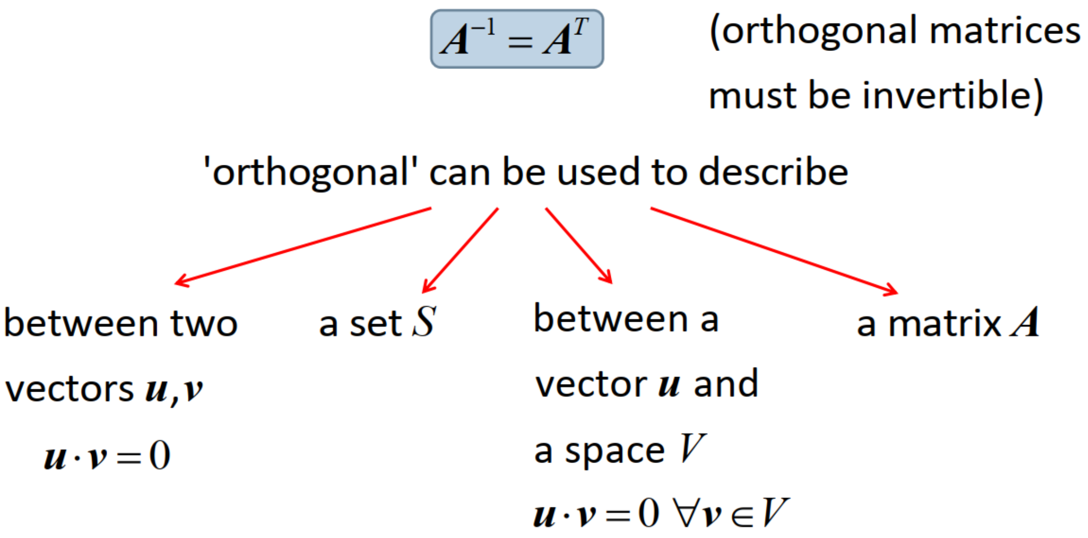
Trong KG Euclide R^4, cho cơ sở $S = \{u_1 = (3, -2, 1, 0), u_2 = (0, 2, -2, 1), u_3 = (1, 1, 1, 2), u_4 = (-1, -1, 0, -1)\}$. Hãy trực chuẩn hoá Gram - Schmidt họ S

5.7 The orthogonal matrix - Ma trận trực giao

5.7.1 Definition

A square matrix A is said to be orthogonal if

$$A^{-1} = A^T \tag{5.17}$$



Example 5.7.1 *The following are example of orthgonal matrices*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

5.7.2 Theorem (equivalent statements) - Các mệnh đề tương đương

Let A be a square matrix of order n. The following statements are equivalent.

1) A is orthogonal

2) The rows of A forms an orthonormal basis for $\mathbb{R}^n$.

3) The columns of A forms an orthonormal basis for $\mathbb{R}^n$.

5.7.3 The symmetric matrix - Ma trận đối xứng

A square matrix A is said to be a symmetric matrix if

$$A = A^T \tag{5.18}$$

Or

$$a_{ij} = a_{ji}, \quad \forall i, j \tag{5.19}$$

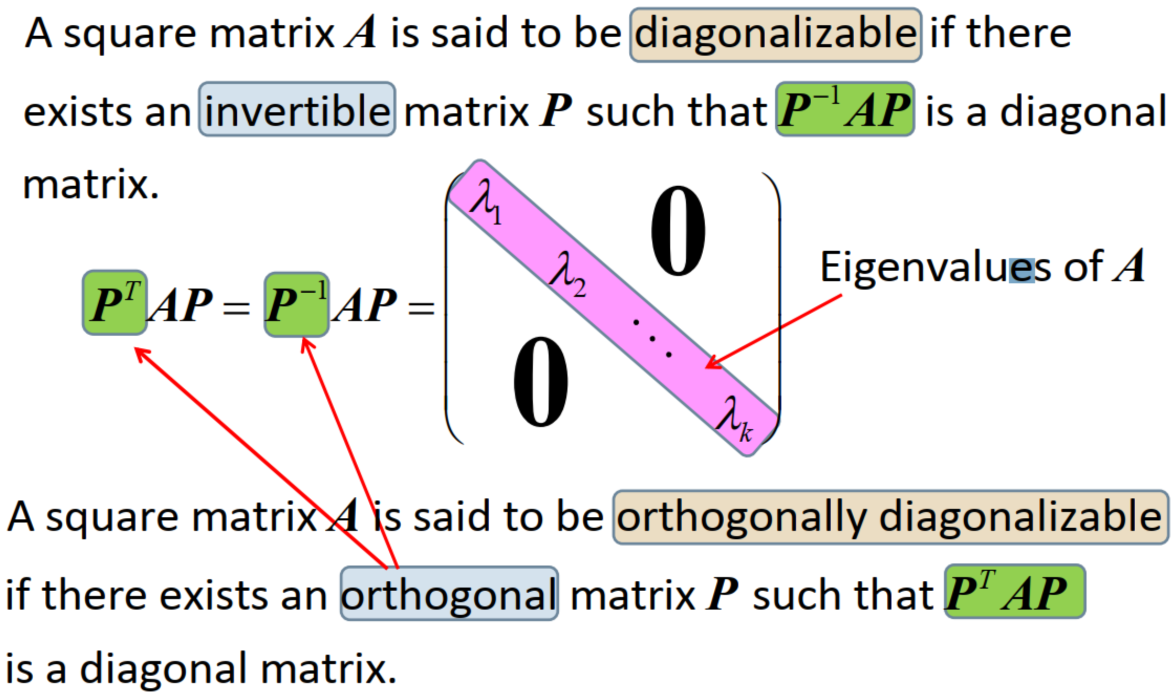
Example 5.7.2

The matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -3 & 5 & 4 \\ 1 & 4 & -7 \end{pmatrix}$ is a symmetric matrix.

5.7.4 Theorem

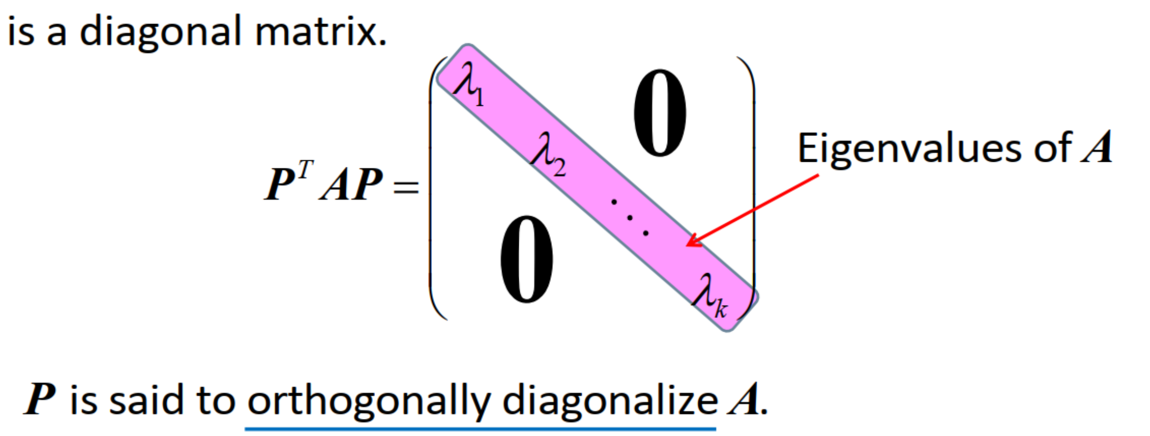
A square matrix is orthogonally diagonalizable if and only if it is symmetric.

Ma trận $A \in \mathcal{M}_n$, là ma trận đối xứng thì luôn tồn tại ma trận $P \in \mathcal{M}_n$ làm chéo hoá A, tức là $P^{-1}AP$ là ma trận chéo hoá.
Remmeber:



5.8 Definition - Orthogonal diagonlization - Chéo hoá trực giao

A square matrix A í said to be orthogonally diagonlizable if there exists an orthogonal matrix P such that P^TAP is a diagonal matrix



5.9 Algorithm Orthogonal diagonalization - Thuật toán Chéo hoá một ma trận đối xứng bằng ma trận trực giao

Given a symmetric matrix A, we wish to find an orthogonal matrix P such that P^TAP is a diagonal matrix.

Step 1 Solve the characteristic equation

$$det(A - \lambda I_n) = 0$$

to find all the distinct eigenvalues $\lambda_1; \lambda_2, \ldots, \lambda_k$

Step 2 For each eigenvalue λ_i

- Find the eigenvectors, find a basis S_{λ_i} for the eigenspace E_{λ_i}
- Apply Gram - Schmidt Process to transform S_{λ_i} into an orthonormal basis T_{λ_i}

Step 3: Let $T = T_{\lambda_1} \cup T_{\lambda_2} \cup \ldots \cup T_{\lambda_k}$, say $T = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ put as column. Then $P = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ is an orthogonal matrix that will orthogonally diagonalize A

Example 5.9.1

Find an orthogonal matrix P that orthogonallly diagonalizes the following symmetric matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

5.10 Dạng toàn phương

5.10.1 Định nghĩa

Một dạng toàn phương trên $\mathbf{R}^n$ là một ánh xạ $q : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ có dạng:

$$q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

$$\begin{aligned} &= a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \ldots + 2a_{1n}x_1x_n \\ &+ a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{24}x_2x_4 + \ldots + a_{nn}x_n^2 \end{aligned}$$

Example 5.10.1

Cho ánh xạ $q : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, được xác định bởi:

$$q(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 4x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_2x_3$$

là một dạng toàn phương trên $\mathbf{R}^3$

5.10.2 Ma trận của dạng toàn phương

Một dạng toàn phương trên $\mathbf{R}^n$ là một ánh xạ $q : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ có dạng:

$$q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

$$\begin{aligned} &= a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \ldots + 2a_{1n}x_1x_n \\ &+ a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{24}x_2x_4 + \ldots + a_{nn}x_n^2 \end{aligned}$$

Đặt

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Khi đó, ma trận A là ma trận đối xứng và thoả

$$q(x_1, x_2, \ldots, x_n) = X^T AX \tag{5.20}$$

Ta nói, A là ma trận của dạng toàn phương q.

Example 5.10.2

Cho dạng toàn phương trên $\mathbf{R}^3$

$$q(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 4x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_2x_3$$

Khi đó, $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ là ma trận đối xứng. và

$$q(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

5.10.3 Dạng chính tắc của dạng toàn phương

- Cho dạng toàn phương q trên $\mathbf{R}^n$, $q(x_1, x_2, \ldots, x_n) = X^TAX$ và B_0 là một cơ sở chính tắc của $\mathbf{R}^n$

- Ma trận A là ma trận của dạng toàn phương q trong cơ sở chính tắc. Khi đó, đẳng thức (5.20) có thể viết thành

$$q(X) = [X]_{B_0}^T A\,[X]_{B_0} \tag{5.21}$$

  Nếu tồn tại cơ sở $B \in \mathbf{R}^n$ sao cho

$$q(X) = [X]_B^T A'\,[X]_B \tag{5.22}$$

  Trong đó, $A' = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & a_n \end{pmatrix}$ là ma trận chéo.

- Khi đó, với cơ sở B, ta có thể tính được

$$q(X) = a_1y_1^2 + a_2y_2^2 + \ldots + a_ny_n^2 \tag{5.23}$$

  được gọi là dạng chính tắc của dạng toàn phương q.
  Trong đó,

$$[X]_B = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

5.10.4 Luật quán tính

Khi một dạng toàn phương trên không gian $\mathbf{R}^n$ được đưa về dạng chính tắc bằng hai cách khác nhau thì số các hệ số dương bằng nhau và số các hệ số âm cũng bằng nhau.

5.10.5 Giải thuật chuyển dạng toàn phương về dạng chính tắc

1. **Phương pháp dùng ma trận trực giao:**

   - Cho dạng toàn phương q trên $\mathbf{R}^n$, thoả

$$q(x_1, x_2, \ldots, x_n) = X^TAX$$

     Trong đó, A là ma trận đối xứng.

- Do A là ma trận đối xứng nên ta luôn tìm được ma trận trực giao sao cho $P^{-1}AP$ là ma trận chéo.
- Gọi $A' = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix}$ là ma trận chéo
- Đặt $X = A'Y$, với $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$
- Khi đó,

$$q(y_1, y_2, \dots, y_n) = Y^T A' Y = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \tag{5.24}$$

Hay

Example 5.10.3 *Tìm dạng toàn phương chính tắc của dạng toàn phương sau:*

$$q = 3x_2^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 - 4x_2x_3$$

2. **Thuật toán Lagrange:**
Để chuyển dạng toàn phương q về dạng chính tắc thì ngoài phương pháp chéo hoá một ma trận, ta có thể dùng thuật toán Lagranage để biến dạng toàn phương về dạng chính tắc như sau:

- Đổi biến mới y_1 sao cho

$$q = a_{11}y_1^2 + q_1 \tag{5.25}$$

Trong đó, q_1 chỉ lệ thuộc vào $n-1$ biến $x_2, x_3, \dots, x_n$.
- Đối với biến x_1, bằng cách gom tất cả các số hạng có chứa biến x_1, ta có:

$$a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \dots + a_{1n}x_1x_n$$

$$= a_{11}\left[x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \dots \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n\right]^2 - a_{11}\left(\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \dots \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n\right) \tag{5.26}$$

- Đặt

$$y_1 = x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \dots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n \tag{5.27}$$

thì

$$q = a_{11}y_1^2 + q_1 \tag{5.28}$$

Trong đó, q_1 chỉ lệ thuộc vào $n-1$ biến $x_2, x_3, \dots, x_n$.
- Tiếp tục khử số hạng $x_2, \dots$

Example 5.10.4 *Chuyển các dạng toàn phương sau về dạng chính tắc:*

(a) $q = 2x_1^2 + x_2^2 + 17x_3^2 - 4x_1x_2 + 12x_1x_3 - 16x_2x_3$
(b) $q = x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_2x_3$

3. Trường hợp không có x_1^2 thì gom các số hạng chứa x_2^2 trước.

   Example 5.10.5 *Chuyển dạng toàn phương sau về dạng chính tắc:*

$$q = x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3$$

4. Trường hợp không có $x_1^2, x_2^2, \ldots, x_n^2$ (Chỉ có các tích chéo): Khi đó, ta xét một số hạng tích chéo, chẳng hạn x_1x_2, ta đặt

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 \\ x_2 = y_1 - y_2 \end{cases} \tag{5.29}$$

   Sau đó, thay x_1, x_2 vào q và tiến hành thuật toán Lagrange đối với y_1^2

   Example 5.10.6 *Chuyển dạng toàn phương sau về dạng chính tắc:*

$$q = x_1x_2 + 3x_1x_3 - 8x_2x_3$$

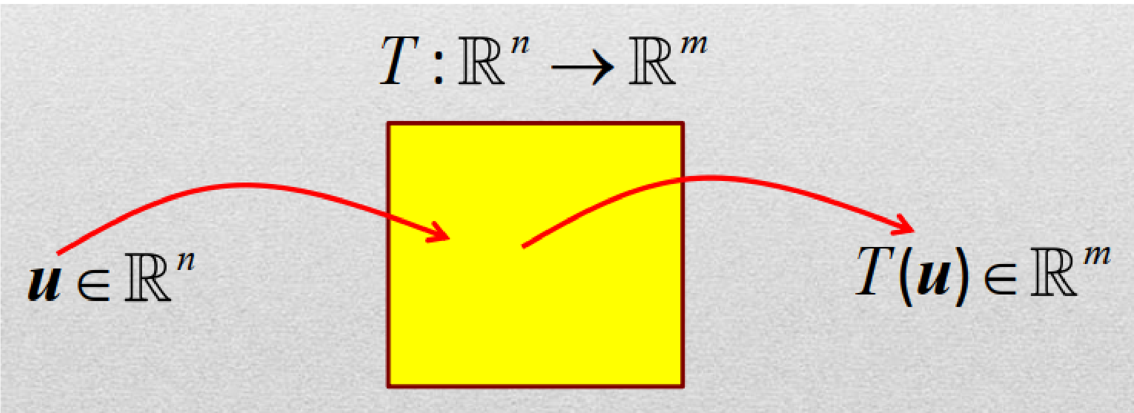
CHAPTER 6

LINEAR TRANSFORMATION FROM $\mathbf{R}^n$ to $\mathbf{R}^m$ (BIẾN ĐỔI TUYẾN TÍNH)

6.1 Definition

6.1.1 Definition 1

- A linear transformation is a mapping $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ of the form



$$T\begin{pmatrix}\boxed{x_1}\\ \boxed{x_2}\\ \vdots \\ \boxed{x_n}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\boxed{a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n}\\ \boxed{a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n}\\ \vdots \\ \boxed{a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n}\end{pmatrix} \quad \forall \begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

n components: vector in $\mathbb{R}^n$

m components: vector in $\mathbb{R}^m$

where $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{mn}$ are real numbers.

formula for T

$$T\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} \quad \forall \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$T(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{Ax}$

for all $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$

- The $m \times n$ matrix A is called the standard matrix for T so any transformtion T where a matrix A can be found to 'represent' what T does (by pre - multiplying A to say 'input' vector) is a linear transformation.

$$T\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow T(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{Ax} \ \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$$

- Let $I : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ be the transformation defined by

$$I(u) = u, \quad \forall u \in R^n \tag{6.1}$$

'what you put into I, you get back the same thing'

For all $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n$,

$$\boxed{I(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u} = \boldsymbol{I}_n \boldsymbol{u}}$$

I is called the identity transformation.

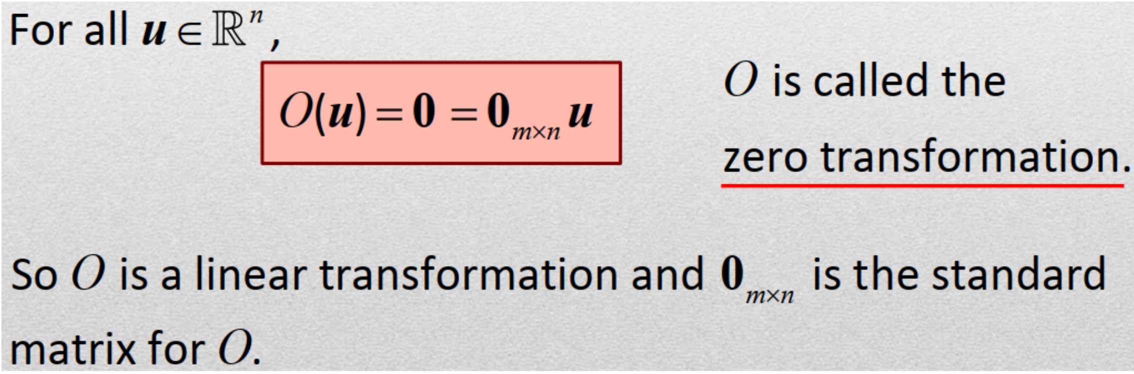
So I is a linear transformation and $\boldsymbol{I}_n$ is the standard matrix for I.

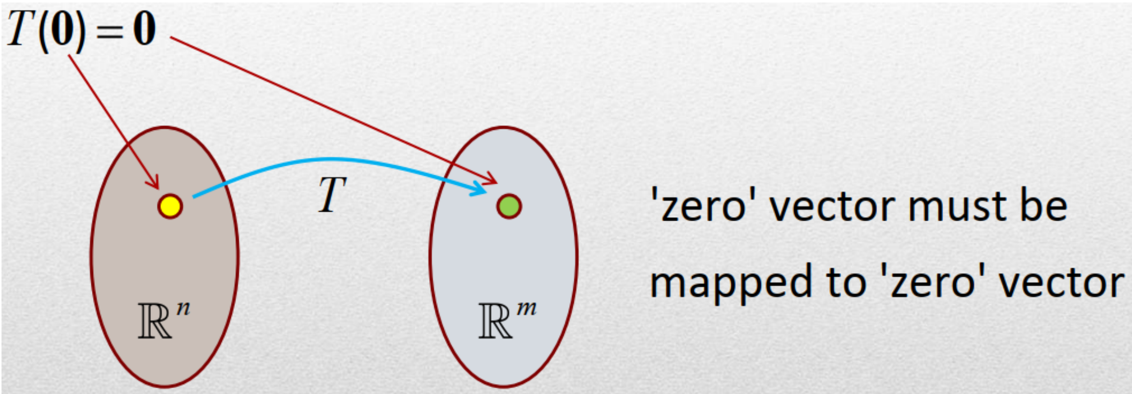
(I_n được gọi là toán tử hay ánh xạ đồng nhất)

- Let $0 : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ be the transformation defined by

$$I(u) = 0, \quad \forall u \in R^n \tag{6.2}$$

'what you put into I, you get back the zero vector'





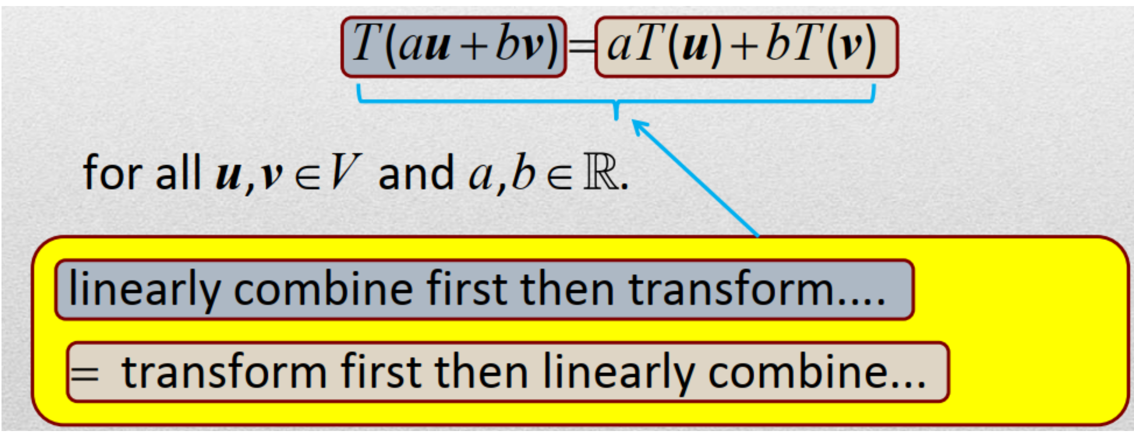
Example 6.1.1 *Let $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ be the transformation defined by*

$$T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+y \\ 2x \\ -3y \end{pmatrix}, \quad \forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2$$

6.1.2 Definition 2 (Abstract - khái quát)

- For abstract vector spaces V and W: The transformation $T : V \to W$ is a linear transformation if and only if

$$T(au + bv) = aT(u) + bT(v) \qquad u, v \in V \ \ and \quad a, b \in \mathbf{R} \tag{6.3}$$



Example 6.1.2 *Let* $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ *be the transfromation defined by*

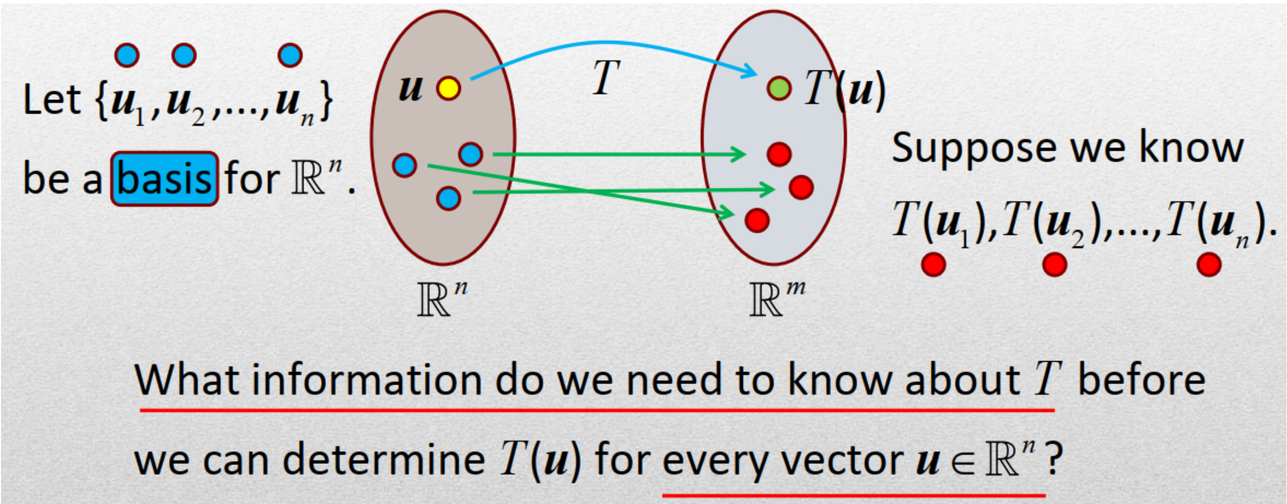
$$T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \end{pmatrix}, \quad \forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2$$

Example 6.1.3 *Let* $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ *be the transfromation defined by*

$$T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+5 \\ y-5 \end{pmatrix}, \quad \forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2$$

6.2 The matrix of Linear transformation - Ma trận của ánh xạ tuyến tính

- Suppose $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ is a linear transformation, let $B = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ be a basis for $\mathbf{R}^n$ and $B' = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ be a basis for $\mathbf{R}^m$



- Since $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ is a basis fo $\mathbf{R}^n$, for any vector $u \in \mathbf{R}^n$, we can write

$$x = \sum_{i=1}^{n} c_i u_i, \quad \forall x \in \mathbf{R}^n, \ \textit{and } c_i \in \mathbf{R} \tag{6.4}$$

- Since, T is a linear transformation, so we have

$$T(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i T(u_i) \tag{6.5}$$

- Suppose:

$$[T(u_1)]_{B'} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} \tag{6.6}$$

$$[T(u_2)]_{B'} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \tag{6.7}$$

$$\vdots$$

$$[T(u_n)]_{B'} = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \tag{6.8}$$

- The matrix

$$T_{BB'} = \begin{pmatrix} [T(u_1)]_{B'} & [T(u_2)]_{B'} & \cdots & [T(u_n)]_{B'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1n} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{2n} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{mn} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{6.9}$$

is called matrix for linear transformation T, from the basis B to B'

Example 6.2.1

Let $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ be the linear transformation such that

$$T\left((x_1, x_2, x_3)\right) = (x_1 - x_2, x_3), \quad \forall (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$$

with B và B' are the standard basis for $\mathbf{R}^3$ and $\mathbf{R}^2$. Find the matrix for T with basis B and B'

Example 6.2.2

Let $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ be the linear transformation such that

$$T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} y \\ y \\ x \end{pmatrix}, \quad \forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2$$

Give $B = \{u_1 = (8, -5), u_2 = (3, 4)\}$ is a basis of $\mathbf{R}^2$ and $B' = \{u'_1 = (1, -2, -3), u'_2 = (-2, 3, 4), u'_3 = (4, 0, -3)\}$ is a basis of $\mathbf{R}^3$. Find the matrix for T with basis B and B'

Example 6.2.3

Let $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ be the linear transformation such that

$$T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} z \\ z \\ x + y \end{pmatrix}, \quad \forall \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$$

Give $B = \{u_1 = (2, 5, -2), u_2 = (-4, 3, 5), u_3 = (5, 6, 4)\}$ is a basis of $\mathbf{R}^3$. Find the matrix for T with basis B

Example 6.2.4

The Euclidean space $\mathbf{R}^3$ và $\mathbf{R}^4$ and $S = \{u_1 = (2, 1, 1), u_2 = (3, 5, 1), u_3 = (2, 1, -3)\}$ and $S' = \{v_1 = (1, 2, 3, 4), v_2 = (-1, 1, -1, 0), v_3 = (-2, 3, -4, 1), v_4 = (-1, 1, 3, 2)\}$ are the basis of $\mathbf{R}^3$ và $\mathbf{R}^4$. You know the matrix for $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^4$ with B and B' is $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

Compute $T(x)$ with $x = (-3, 0, -2)$

BÀI TẬP ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

1. Use the following matrices for problem:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad D = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & -4 \end{pmatrix}; \quad G = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Perform the operation, if possible

$$C+D; \quad A-F; \quad A+A^T; \quad 8C-3D, \quad 4F+3G; \quad A^2+B; \quad (F+G)A; \quad (A-B)(F-2I_3)$$

2. Give $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 7 \\ 1 & -5 & 1 \\ 2 & 7 & -3 \end{pmatrix}$. Tính AB, ABC, $2A + BC$

3. Find x, y, z and t

(a) $\begin{pmatrix} x & 1 & 0 \\ 0 & y & z \\ t & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & -5 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 0 & x & 1 \\ 3 & y & y \\ z & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & y \\ 1 & 0 & t \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} x & 3 & 2x-1 \\ y & 4 & 4y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x-4 & z & 7 \\ 1 & t+1 & 3y+1 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} x & y & x+3 \\ z & 4 & 4y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x-1 & -1 & t \\ x & 5+y & -4 \end{pmatrix}$

4. Solve for x, y and z if

$$3\begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 2x & -y \\ 3y & -4z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 4-y \\ 18 & 15 \end{pmatrix}$$

5. Solve for x, y, z and w if

$$3\begin{pmatrix} x & 4 \\ 4y & w \end{pmatrix} - 5\begin{pmatrix} 4x & 2z \\ -3 & -2w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 30 \\ 5 & -7 \end{pmatrix}$$

6. Tính định thức của các ma trận sau:

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & a \\ 2 & 0 & b & 0 \\ 3 & c & 4 & 5 \\ d & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(b) $A = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 & 1 \\ 1 & 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & 1 & m \end{pmatrix}$

(c) $C = \begin{pmatrix} x & a & b & 0 & c \\ 0 & y & 0 & 0 & d \\ 0 & e & z & 0 & f \\ g & h & k & u & l \\ 0 & 0 & 0 & 0 & v \end{pmatrix}$

7. Tìm điều kiện để tồn tại ma trận nghịch đảo. Từ đó, tìm ma trận nghịch đảo của các ma trận sau:

(a) $A = \begin{pmatrix} m+1 & -m & 3 \\ 3 & -4m & 2m \\ 1 & -2 & -m \end{pmatrix}$ (c) $C = \begin{pmatrix} 4m & 3 & -4 \\ 2+2m & 1 & -m \\ 1 & -1 & m-2 \end{pmatrix}$

(b) $B = \begin{pmatrix} -3m & 2 & 4 \\ 1 & -m & 2 \\ 3 & 1-m & 4 \end{pmatrix}$ (d) $D = \begin{pmatrix} -2 & -2 & m \\ -2 & m & -2 \\ m & -2 & -2 \end{pmatrix}$

8. Dùng các phép biến đổi sơ cấp trên hàng, tính các định thức sau:

(a) $A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \end{vmatrix}$

(b) $B = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ -1 & 4 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ -2 & 6 & 0 & 5 \end{vmatrix}$

(c) $C = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

(d) $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

(e) $E = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & -1 \end{vmatrix}$

9. Dùng phương pháp Gauss - Jordan, tìm ma trận nghịch đảo của các ma trận sau (nếu có)

(a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

(c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ -2 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

(d) $D = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

(e) $E = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ -1 & 4 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ -2 & 6 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

10. Tìm ma trận X thoả:

(a) $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $X \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -7 \\ 15 & 2 & -13 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 8 & 1 & 1 \\ 5 & -3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 7 & -8 \end{pmatrix}$

11. Cho ma trận: $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 2 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 5 & 0 & 8 \\ 1 & -9 & 0 \end{pmatrix}$. Tìm ma trận X thoả:

(a) $A + B = X - I_3$

(b) $AXB = B^T$

(c) $XAB = A^T$

(d) $2X - I_3 = 3A - 5B$

12. Tìm hạng của ma trận sau:

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 4 & 2 \\ -3 & -2 & 6 & 2 \end{pmatrix}$

(b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 5 & 3 & 8 & 1 & 1 \\ 4 & 9 & 10 & 5 & 2 \end{pmatrix}$

(c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 5 & 3 & 8 & 1 & 1 \\ 4 & 9 & 10 & 5 & 2 \end{pmatrix}$

(d) $D = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -5 & 2 & 3 \\ 8 & 6 & -7 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & -8 & 2 & 7 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & -5 \\ 8 & 6 & -1 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

13. Biện luận theo m và λ, hạng của ma trận sau:

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & m \\ 1 & m & 3 \end{pmatrix}$

(b) $B = \begin{pmatrix} m & 5m & -m \\ 2m & m & 10m \\ -m & -2m & -3m \end{pmatrix}$

(c) $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ m & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

(d) $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ -2 & -1 & 1 & m & -2 \end{pmatrix}$

(e) $E = \begin{pmatrix} 3 & \lambda & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 7 & 2 \\ 1 & 10 & 17 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

(f) $F = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ \lambda & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & \lambda & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

14. Solve the following systems

(a) $\begin{cases} x - 3y + 3z = 7 \\ x + 2y - z = -2 \\ 3x + 2y + 4z = 5 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x - y + z = 4 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} -0.6x_1 + 0.1x_2 + 0.4x_3 = 10 \\ 0.4x_1 - 0.7x_2 + 0.2x_3 = -26 \\ 0.2x_1 + 0.6x_2 - 0.5x_3 = 20 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 3 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 4 \\ 2x_1 + 2x_3 - 3x_4 = 4 \\ x_1 - 3x_2 = 1 \end{cases}$

(e) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \\ x_1 - 3x_3 = 2 \\ x\_3x_2 + x_4 = 2 \\ x_2 - 4x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$

(f) $\begin{cases} 3x + 2y + z - w = 3 \\ x - y - 2z + 2w = 2 \\ 2x + 3y - z + w = 1 \\ -x + y + 2z - 2w = -2 \end{cases}$

(g) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 3x_4 + x_5 = 2 \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 + 3x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 2x_5 = 6 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 - 2x_5 = -7 \end{cases}$

(h) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_3 - x_4 + 2x_5 = 1 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 + 4x_5 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_5 = 4 \end{cases}$

(i) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 + 3x_5 = 7 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = -3 \\ 4x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 + x_5 = 1 \end{cases}$

15. Cho hệ phương trình $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + kx_3 = 3 \\ x_1 + kx_2 + 3x_3 = 2 \end{cases}$ Xác định k để:

(a) Hệ có nghiệm duy nhất.

(b) Hệ vô nghiệm.

(c) Hệ có vô số nghiệm.

16. Cho hệ phương trình $\begin{cases} mx_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + mx_2 + x_3 = m \\ x_1 + x_2 + mx_3 = m^2 \end{cases}$ Xác định m để:

(a) Hệ có nghiệm duy nhất.

(b) Hệ vô nghiệm.

(c) Hệ có vô số nghiệm.

17. Cho hệ phương trình $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 3 \\ 4x_1 + 8x_2 + 3x_3 = m \end{cases}$ Xác định m để:

(a) Hệ có nghiệm duy nhất.

(b) Hệ vô nghiệm.

(c) Hệ có vô số nghiệm.

18. Cho hệ phương trình $\begin{cases} kx_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + kx_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + kx_3 = 1 \end{cases}$ Xác định k để:

(a) Hệ có nghiệm duy nhất.

(b) Hệ vô nghiệm.

(c) Hệ có vô số nghiệm.

19. Tìm giá trị riêng và vector riêng của các ma trận sau:

(a) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 3 & -18 \\ 2 & -9 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

(e) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

(f) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(g) $\begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ 4 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

(h) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(i) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

(j) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(k) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

(l) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

(m) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

20. Trong KGVT $\mathbf{R}^3$, cho họ vector $S = \{u_1 = (-9, 7, 0), u_2 = (11, -10, 3), u_3 = (4, 2, m)\}$. Tìm m để S là cơ sở của $\mathbf{R}^3$

21. Tìm toạ độ của vector $u = (3, -7, 8)$ trong cơ sở $B = \{u_1 = (3, 4, 5), u_2 = (-4, 6, -2), u_3 = (4, 5, -1)\}$

22. Trong KGVT $\mathbf{R}^3$, cho 2 họ vector $S = \{u_1 = (-9, 7, 0), u_2 = (11, -10, 3), u_3 = (4, 2, -1)\}$ và $S' = \{u_1' = (7, 5, 3), u_2' = (-2, -2, 1), u_3' = (6, 5, 4)\}$.

    (a) Chứng minh S và $'$ là cơ sở của $\mathbf{R}^3$

    (b) Tìm ma trận toạ độ và vector toạ độ của $v = (-5, 2, 1)$ đối với cơ sở S.

    (c) Tìm ma trận chuyển cơ sở từ S' sang S

23. Trong KGVT $\mathbf{R}^4$, cho 2 họ vector $S = \{u_1 = (-9, 7, 0, 1), u_2 = (1, -1, 3, -3), u_3 = (4, 2, -1, 0), u_4 = (1, 1, 1, 1)\}$ và $S' = \{u_1' = (1, -1, 3, 1), u_2' = (-2, 0, -2, 1), u_3' = (3, 0, 3, 0), u_4' = (-2, 3, 3, -2)\}$.

    (a) Chứng mình S và S' là cơ sở của $\mathbf{R}^4$

    (b) Tìm ma trận toạ độ và vector toạ độ của $v = (-5, 2, 1, 0)$ đối với cơ sở S.

    (c) Tìm ma trận chuyển cơ sở từ S' sang S

24. Xác định số chiều và một cơ sở của không gian nghiệm của hệ:

    (a) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$

    (b) $\begin{cases} 3x - 1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 5x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$

    (c) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ 4x_1 + 5x_3 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$

    (d) $\begin{cases} x - 1 - 2x - 2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - 6x - 2 + 2x_3 = 0 \\ 3x_1 - 9x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$

    (e) $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 0 \\ -2x_2 - 2x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$

    (f) $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 3x + 2y - z = 0 \\ 2x - 4y + z = 0 \\ 4x + 8y - 3z = 0 \\ 2x + y - 2z = 0 \end{cases}$

25. Tìm cơ sở và số chiều của không gian con của $\mathbf{R}^3$ sinh bởi các vector sau:

    (a) $u_1 = (1, -1, 2); u_2 = (2, 1, 3); u_3 = (-1, 5, 0)$

    (b) $a = (2, 4, 1); b = (36, -2); c = (-1, 2, -\frac{1}{2})$

26. Tìm cơ sở và số chiều của không gian con của $\mathbf{R}^4$ sinh bởi các vector sau:

    (a) $u_1 = (1, 1, -4, -3); u_2 = (2, 0, 2, -2); u_3 = (2, -1, 3, 2)$

    (b) $a = (-1, 1, -2, 0); b = (3, 3, , 6, 0); c = (9, 0, 0, 3)$

    (c) $x = (1, 1, 0, 0); y = (0, 0, 1, 1); z = (-2, 0, 2, 2); t = (0, -3, 0, 3)$

    (d) $v_1 = (1, 0, 1, -2); v_2 = (0, 0, 1, 1); v_3 = (2, 1, 5, -1); v_4 = (1, -1, 1, 4)$

27. Hãy tìm ma trận toạ độ và vector toạ độ của w đối với $S = \{u_1; u_2; u_3$, biết:

    (a) $w = (2, -3, 3); u_1 = (2, 3, -1); u_2 = (-4, 1, 2); u_3 = (1, 2, 3)$

    (b) $w = (5, -12, 3), u_1 = (1, 2, 3), u_2 = (-4, 5, 6); u_3 = (7, -8, 9)$

28. Give the basis for the space Euclide $\mathbf{R^3}$, $S = \{u_1 = (1, -2, 5), u_2 = (3, -4, 1), u_3 = (1, 2, 1)\}$. Find the an orthogonal basis for the space Euclide $\mathbf{R^3}$

29. Give the basis for the space Euclide $\mathbf{R^4}$, $S = \{u_1 = (1,-1,0,-1), u_2 = (0,0,1,1), u_3 = (1,2,1,-2), u_4 = (1,0,0,-3)\}$. Find the an orthogonal basis for the space Euclide $\mathbf{R^4}$

30. Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -4 \\ -2 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Hỏi ma trận A có chéo hoá được không? Hãy chéo hoá A (nếu có).

31. Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 7 \\ -1 & 6 & 9 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix}$. Hỏi ma trận A có chéo hoá được không? Hãy chéo hoá A (nếu có).

32. Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Hỏi ma trận A có chéo hoá được không? Hãy chéo hoá A (nếu có).

33. Hãy chéo hoá các ma trận sau (nếu có)

    (a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

    (b) $B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ -6 & -4 & 3 \\ -6 & -6 & 5 \end{pmatrix}$

    (c) $C = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ -4 & -4 & -5 \end{pmatrix}$

    (d) $D = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

34. Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Hỏi ma trận A có chéo hoá được không? Hãy chéo hoá A (nếu có).

35. Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} -7 & 24 \\ 24 & 7 \end{pmatrix}$. Tìm ma trận trực giao P làm chéo hoá A, xác định $P^{-1}AP$ và tính A^{10}

36. Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Tìm ma trận trực giao P làm chéo hoá A, xác định $P^{-1}AP$ và tính A^5

37. Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Tìm ma trận trực giao P làm chéo hoá A, xác định $P^{-1}AP$ và tính A^{20}

38. Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -6 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$. Tính A^{10}

39. Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Tính A^{100}

40. Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -36 \\ 0 & -3 & 0 \\ -36 & 0 & -23 \end{pmatrix}$. Tìm ma trận P là chéo hoá trực chuẩn A và tìm $P^{-1}AP$

41. Tìm dạng toàn phương chính tắc của mỗi dạng toàn phương sau:
   (a) $x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$
   (b) $x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3$
   (c) $x_1^2 - 3x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$
   (d) $x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3$
   (e) $4x_1^2 + x_2^2x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 3x_2x_3$
   (f) $x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3$
   (g) $2x_1^2 + 18x_2^2 + 8x_3^2 - 12x_1x_2 + 8x_1x_3 - 27x_2x_3$
   (h) $-12x_1^2 - 3x_2^2 - 12x_3^2 + 12x_1x_2 - 24x_1x_3 + 8x_2x_3$

42. Cho ánh xạ $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$, được xác định bởi
$$T(x, y) = (x - 3y, y - x; -y)$$
và $S = \{u_1 = (-2, 3), u_2 = (5, -1)\}$ và $S' = \{v_1 = (1, 2, 3), v_2 = (-1, 3, 8), v_3 = (-4, 6, 3)\}$ là cơ sở của $\mathbf{R}^2$ và $\mathbf{R}^3$. Tìm ma trận của ánh xạ T đối với cơ sở S và S'

43. Cho ánh xạ $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, được xác định bởi
$$T(x, y, z) = (2x - 3y, 3y - 4z, x + y + z)$$
và cơ sở của $\mathbf{R}^3$ là $S = \{u_1 = (-1, 2, 3), u_2 = (-1, 3, 8), u_3 = (-4, 6, 3)\}$. Tìm ma trận của ánh xạ T đối với cơ sở S.

44. Cho ánh xạ tuyến tính $T : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$, được xác định bởi:
$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - 2x_2; x_2 - 3x_3, x_3 - 4x_4)$$
và $B = \{u_1 = (1, 4, 1, 2), u_2 = (3, 1, 2, 1), u_3 = (-1, 1, 0, 1), u_4 = (2, 3, 1, 0)\}$ và $B' = \{v_1 = (1, 2, 3), v_2 = (-1, 3, 2), v_3 = (2, -1, -1)\}$ lần lượt là cơ sở của $\mathbf{R}^4, \mathbf{R}^3$. Tìm ma trận chuyển cơ sở của T đối với cơ sở B và B'.

45. Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 3 & -4 & -2 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ là ma trận của ánh xạ tuyến tính $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^4$. đối với cơ sở $B = \{u_1 = (2, 3, 3), u_2 = (4, 4, -1), u_3 = (2, 1, 4)\}$ của $\mathbf{R}^3$ và $B' = \{u'_1 = (4, 0, 0, 0), u'_2 = (-2, 3, 0, 0), u'_3 = (3, 2, 1, 0), u'_4 = (1, 2, 3, 4)\}$ của $\mathbf{R}^4$. Tìm $T(9, 7, 8)$

46. Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ là ma trận của ánh xạ tuyến tính $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$. đối với cơ sở $B = \{u_1 = (0, -2, 3), u_2 = (4, 4, -1), u_3 = (2, 1, 4)\}$ của $\mathbf{R}^3$ Tìm $T(9, 7, 8)$

47. Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ là ma trận của ánh xạ tuyến tính $T : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$. đối với cơ sở $u = \{u_1 = (1, 1, , 0, 1), u_2 = (-1, 0, -2, 1), u_3 = (-3, 1, 0, 0), u_4 = (-1, 2, 1, -2)\}$ và $V = \{v_1 = (0, -2, 3), v_2 = (4, 4, -1), v_3 = (2, 1, 4)\}$ của $\mathbf{R}^3$. Tìm $T((-1, 1, -1, 3))$

48. Trong KGVT, $\mathbf{R}^4$ và $\mathbf{R}^3$ cho họ vecor $S = \{v_1 = (1,2,3,4), v_2 = (-1,1,-1,0), v_3 = (-2,3,-4,1), v_4 = (-1,1,3,2)\}$ và $S\{u_1 = (2,1,1), u_2 = (3,5,1), u_3 = (2,1,-3)\}$ lần lượt là cơ sở của $\mathbf{R}^4$ và $\mathbf{R}^3$. Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ là ma trận của ánh xạ tuyến tính $f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$. Tìm $f(-3,0,-2;1)$

ÔN TẬP CUỐI KÌ (THAM KHẢO)

Đề 1

Câu 1: Giải hệ phương trình bằng phương pháp Crammer

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 10 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 4 \end{cases}$$

Câu 2: Cho ma trận A=$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 4 & -2 \\ 5 & -1 & -4 \end{pmatrix}$

1. Tính $f(A)$, biết $f(x) = x^3 - 2x^2 - 7$.
2. Tìm ma trận nghịch của A (nếu có) bằng phương pháp Gauss - Jordan.

Câu 3: Trong KG $\mathbf{R^4}$, cho họ $S = \{u_1 = (1,1,1,1), u_2 = (1,1,-1,1), u_3 = (0,1,-1,0), u_4 = (2,1,1,0)\}$.

1. Chứng minh S là một cơ sở của $\mathbf{R^4}$.
2. Tìm toạ độ của v đối với cơ sở S, biết $v = (3,2,-1,0)$.
3. Tìm ma trận chuyển cở sở từ S sang cơ sở S', với $S' = \{v_1 = (2,-2,0,1), v_2 = (-1,-1,-1,2), v_3 = (0,0,1,1), v_4 = (-1,3,0,2)\}$.

Câu 4: Tìm cơ sở và xác định số chiều của không gian nghiệm của hệ thuần nhất sau:

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 - 5x_4 - x_5 = 0 \\ 6x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 9x_4 + x_5 = 0 \\ -9x_1 + x_2 - 3x_3 + 11x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$$

Câu 5: Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 5 & 3\sqrt{3} \\ 3\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$. Tìm ma trận trực giao P làm chéo hoá A, xác định $P^{-1}AP$ và tính A^{10}

Đề 2

Câu 1: Giải hệ phương trình sau bằng phương pháp Gauss

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 - 3x_4 - x_5 = 11 \\ 5x_1 - x_2 + 5x_3 - x_4 - 2x_5 = 2 \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 + x_4 - x_5 = -5 \end{cases}$$

Câu 2: Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1-m \\ -3 & 1 & -3 \\ m & -2 & m \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & -3 \\ 0 & 5 & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -3 \\ 5 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

1. Tìm m để A khả nghịch.
2. Với $m = -2$, tìm ma trận X thoả: $AX + 2I_3 = B + 3C$
3. Giả sử A khả nghịch, tìm A^{-1} bằng phương pháp định thức.

Câu 3: Trong KGVT $\mathbf{R}^4$, cho họ vector
$S = \{u_1 = (1,2,3,4), u_2 = (-1,0,2,0), u_3 = (0,2,3,0,1), u_4 = (-1,2,0,0)\}$.

1. Chứng minh S là một cơ sở của $\mathbf{R}^4$
2. Tìm ma trận chuyển cơ sở từ cơ sở chính tắc B sang cơ sở S.
3. Tìm toạ độ của $v = (-1, -2, 0, 1)$ đối với cở sở S.

Câu 4: Tìm cơ sở và số chiều của KG nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - 4x_3 + 9x_4 = 0 \end{cases}$$

Câu 5: Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Hãy chéo hoá ma trận A (nếu có).)

Đề 3

Câu 1: Cho hệ

$$\begin{cases} x + y - 3z = -1 \\ 2x + y + mz = m + 1 \\ x + my + 3xz = 2 \end{cases}$$

1. Tìm m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất. Tìm nghiệm đó.
2. Tìm m để hệ vô nghiệm.
3. Tìm m để hệ có vô số nghiệm.

Câu 2: Cho ma trận $\begin{pmatrix} -3 & -2 & 4 \\ 4 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$. Tìm ma trận nghịch đảo (nếu có) bằng phương pháp định thức.
Câu 3:
3. Trong KGVT $\mathbf{R}^3$, cho họ $S = \{x = (2, -3, -4), y = (5, 4, 2), z = (1, 2, -2)\}$.

1. Chứng minh S là 1 cơ sở của $\mathbf{R}^3$
2. Hãy trực giao họ S.

Câu 4: Tìm cơ sở và số chiều của KG nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 6x_1 - 5x_2 + 7x_3 + 8x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Câu 5: Cho ma trận $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

1. Tìm các giá trị riêng và vector riêng của B.
2. Xác định một cơ sở của KGVT riêng tương ứng.
3. Chứng tỏ B chéo hoá được. Tìm ma trận P làm chéo hoá B. Tìm ma trận chéo $D = P^{-1}BP$.
4. Tính B^{10}

Đề 4

Câu 1: Giải hệ bằng phương pháp Gauss

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 - 3x_2 + 7x_3 = -1 \\ -x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 2 \end{cases}$$

Câu 2: Trong KGVT $\mathbf{R}^3$, cho $S = \{u_1 = (1,4,2), u_2 = (-3,4,0), u_3 = (5,-2,1)\}$ và $S' = \{v_1 = (-3,1,3), v_2 = (0,-1,4), v_3 = (3,2,5)\}$.

1. Chứng minh S, S' là cơ sở của $\mathbf{R}^3$
2. Tìm ma trận chuyển cơ sở từ S' sang S.
3. Tìm toạ độ của $v = (4,-3,2)$ đối với cơ sở S'

Câu 3: Trong KGVT $\mathbf{R}^3$, cho cơ sở $S = \{x = (3,2,7), y = (-2,-2,3), z = (1,1,1)\}$. Hãy trực chuẩn S.
Câu 4: Tìm cơ sở và số chiều của KG nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 + x_4 = 0 \\ 4x_1 - 7x_2 - 3x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + 7x_3 + 8x_4 = 0 \end{cases}$$

Câu 5: Cho $A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$. Hãy chéo hoá A và tính A^{20}

Đề 5

Câu 1: Cho hệ phương trình $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 3y + mz = 3 \\ x + y + 3z = 2 \end{cases}$. Tìm m để hệ có vô số nghiệm, vô nghiệm và có nghiệm duy nhất.

Câu 2: Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} m-1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & -m \end{pmatrix}$

1. Tìm m để A khả nghịch.
2. Với $m = -3$, tìm A^{-1} bằng phương pháp Gauss - Jordan.
3. Với $m = 2$, tìm ma trận X thoả: $AX = (A^{-1} + 2I_3)^T$

Câu 3: Tìm cơ sở và số chiều của KG nghiệm của hệ sau:

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 - 5x_4 - x_5 = 0 \\ 6x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 9x_4 + x_5 = 0 \\ -9x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 11x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$$

Câu Trong KG $\mathbf{R}^4$, cho cơ sở $S = \{x = (1,1,-1,2), y = (0,2,0,1), z = (-2,2,1,1), z = (0,0,0,4)\})$. Hãy trực chuẩn hoá S.

Câu 5: Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$. Hãy chéo hoá A và tính A^{15}

Đề 6

Câu 1: Cho hệ $\begin{cases} kx_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + kx_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + kx_3 = 1 \end{cases}$. Tìm k để hệ có vô số nghiệm,

Câu 2: Tìm cơ sở và số chiều của KG nghiệm của hệ: $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 5x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$.

Câu 3: Trong KGVT $\mathbf{R}^3$, cho họ B là cơ sở chính tắc và họ $S = \{u_1 = (-5, 2, 1), u_2 = (2, 4, 6), u_3 = (0, -2, 0)\}$.

1. Chứng minh S là 1 cơ sở của R^3.
2. Tìm ma trận chuyển cơ sở từ S sang B.
3. Tìm toạ độ của $v = (-3, 7, 1)$ đối với cơ sở S.
4. Trực giao S

Câu 4: Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Hãy chéo hoá A và tính A^{100}

Đề 7

1. Tìm hạng của ma trận sau: $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 6 & 10 & 2 \\ 1 & 4 & 7 & 2 \\ 6 & k & -8 & 2 \end{pmatrix}$
2. Tìm cơ sở và số chiều của không gian nghiệm của hệ: $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 0 \\ -x_1 + x_2 - x_4 - 2x_5 = 0 \\ 2x_1 + 2x_4 + 2x_5 = 0 \\ -2x_1 - 3x_2 + 7x_3 - 12x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$
3. Cho hai KGVT R^3 và họ vector $S = \{u_1 = (3; -2; -1), u_2 = (5, 4, -6), u_3 = (2; 4; -5)\}$ và $S' = \{v_1 = (-1, 3, 4), v_2 = (0, 1, 2); v_3 = (0, 2, 0)\}$
   (a) Họ S và S' có phải là cơ sở của R^3không?
   (b) Tìm ma trận chuyển cơ sở từ S' sang S.
4. Tìm cơ sở và số chiều của không gian dòng và không gian cột của ma trận sau:
5. Tìm cơ sở và số chiều của không gian dòng và không gian cột của ma trận: $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ -2 & -1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

Đề 8

1. Tìm hạng của ma trận sau: $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ k & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$
2. Cho ma trận $B = \begin{pmatrix} -3 & 2 & m \\ -2 & 1 & m \\ 1 & m & 3 \end{pmatrix}$
   (a) Tìm điều kiện của m để B có nghịch đảo.

(b) Giả sử B có nghịch đảo, tìm B^{-1}

(c) Cho $m = 3$, và tìm ma trận X thoả: $B^T X + C = -I_3$, với I_3 là ma trận đơn vị có vuông cấp 3 và $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

3. Tìm cơ sở và số chiều của không gian nghiệm: $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_3 - x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 + 4x_5 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_5 = 0 \end{cases}$

4. Tìm cơ sở và số chiều của không gian dòng và không gian cột của ma trận: $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & -1 & 8 \\ 2 & 1 & 1 & -2 & 5 \\ -4 & -3 & 0 & 5 & -7 \end{pmatrix}$