Chương 6 : Giải phương trình vi phân

Trịnh Anh Phúc, Vũ Văn Thiệu, Đinh Viết Sang, Nguyễn Đức Nghĩa [1]

[1]Bộ môn Khoa Học Máy Tính, Viện CNTT & TT,
Trường Đại Học Bách Khoa Hà Nội.

Ngày 30 tháng 5 năm 2015

Giới thiệu

Mở đầu

Phân loại bài toán giải phương trình vi phân (PTVP)

- Bài toán giá trị ban đầu: phụ thuộc điều kiện ban đầu
- Bài toán biên: phụ thuộc điều kiện biên

Bài toán giá trị ban đầu

$$y'(t) = f(y,t); y(t_0) = y_0,$$

trong đó $f(y,t)$ là hàm hai biến của y, t; $y(t_0) = y_0$ là điều kiện ban đầu.

Vấn đề

- f không phụ thuộc vào y: Tính tích phân hàm f theo t.
- f phụ thuộc vào y: Vấn đề trở nên khó khăn! Cần cách tiếp cận khác.

Một số ví dụ về PTVP:

Ví dụ 1: Tăng trưởng dân số

Tốc độ tăng dân số nếu không hạn chế sẽ tỷ lệ với tổng số dân:

$$y' = ky.$$

Nghiệm giải tích: $y(t) = Ce^{kt}$, với C là hằng số.
Giả sử điều kiện ban đầu: $y(0) = 100$.
Ta có: $C = 100$.
Như vậy, điều kiện ban đầu không thể thiếu trong phát biểu của bài toán giá trị ban đầu. Lời giải bài toán giá trị ban đầu **chỉ có thể được xác định duy nhất** khi có điều kiện ban đầu.

Ví dụ 2: Phương trình Lotka-Voltera về thú săn mồi-con mồi

Gọi $F(t)$ là số lượng cáo, $R(t)$ là số lượng thỏ tại thời điểm t. Khi đó các phương trình có dạng:

$$R' = (\alpha - \beta F)R$$

$$F' = (\gamma R - \delta)F$$

trong đó: $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ là các hằng số dương.

Ý nghĩa::

- Tốc độ tăng trưởng của bầy thỏ tỉ lệ thuận với số lượng thỏ và tỉ lệ nghịch với số lượng cáo là thú ăn thịt nó.
- Tốc độ tăng trưởng của bầy cáo tỉ lệ nghịch với số lượng cáo do thức ăn trở nên khan hiếm, và tỉ lệ thuận với số lượng thỏ do thức ăn của nó tăng.

Nhận xét: Nói chung rất khó xác định công thức giải tích cho nghiệm của PTVP và thường thì công thức như vậy không tồn tại. Tuy nhiên nếu cho trước các điều kiện đầu ta có thể giải chúng một cách **gần đúng**.

Sự tồn tại và tính duy nhất nghiệm

Trong một số tình huống, PTVP chỉ có lời giải địa phương.
Ví dụ: Xét bài toán giá trị ban đầu:

$$y' = y^2; y(0) = 1. \tag{1}$$

Nghiệm PTVP (1): $y = \frac{1}{t-1}, t \in [0, 1)$.
Tuy nhiên:

$$\lim_{t \to 1} y = \infty.$$

Do đó: PTVP (1) chỉ tồn tại nghiệm địa phương!

Điều kiện đủ để IVP có nghiệm địa phương

Định lý 1:

Nếu f liên tục trên hình chữ nhật

$$R = \{(t, y) : |t - t_0| \leq \alpha; |y - y_0| \leq \beta\}$$

thì IVP có nghiệm $y(t)$ với $|t - t_0| \leq min\{\alpha, \beta/M\}$, trong đó $M = max\{|f(t, y)| : (t, y) \in R\}$.

Lưu ý: Khi lời giải tồn tại, chưa chắc nó là duy nhất.

Ví dụ:

$$y' = y^{2/3}; y(0) = 0.$$

Có hai lời giải thỏa mãn: $y(t) \equiv 0$ hoặc $y(t) = t^3/27$.

Điều kiện đủ để IVP có nghiệm địa phương duy nhất

Định lý 2

Nếu f và $\partial f/\partial y$ liên tục trên hình chữ nhật

$$R = \{(t, y) : |t - t_0| \leq \alpha; |y - y_0| \leq \beta\}$$

thì IVP có nghiệm duy nhất $y(t)$ với $|t - t_0| \leq min\{\alpha, \beta/M\}$, trong đó $M = max\{|f(t, y)| : (t, y) \in R\}$.

Định lý 3

Giả sử $t_0 \in [a, b]$. Nếu f liên tục với $a \leq t \leq b, -\infty < y < \infty$ và liên tục Liptchitz đều theo y, nghĩa là tìm được hằng số L sao cho với mọi y_1, y_2 và $t \in [a, b]$ ta có bất đẳng thức sau được thực hiện:

$$|f(t, y_2) - f(t, y_1)| \leq L|y_2 - y_1|,$$

thì IVP có nghiệm duy nhất $y(t)$ trên đoạn $[a, b]$.

Phương pháp số giải PTVP

Đòi hỏi tính giá trị của lời giải tại lưới điểm chia:

$$t_n = t_{n-1} + h, n = 1, 2, \ldots$$

trong đó: h gọi là độ dài bước (hay bước thời gian).

Phương pháp Euler thuận

Sử dụng sai phân xấp xỉ thuận:

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{h} = y'_n. \tag{2}$$

Viết lại (2) dưới dạng:

$$y_{n+1} = y_n + hf(y_n, t_n). \tag{3}$$

Như vậy, từ (3) ta có công thức đệ quy tính y_n như sau:

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + hf(y_0, t_0), \\ y_2 &= y_1 + hf(y_1, t_1), \\ &\dots \\ y_n &= y_{n-1} + hf(y_{n-1}, t_{n-1}). \end{aligned}$$

Ví dụ 1: Xét bài toán giá trị đầu:

$$y'(t) = -20y(t) + 7e^{-0.5t}, y(0) = 5.$$

(a) Sử dụng phương pháp Euler thuận giải bài toán trên với $h = 0.01$ và $0 \leq t \leq 0.02$.

(b) Làm lại yêu cầu a) đối với $h = 0.01, 0.001, 0.0001$ trên máy tính cho $0 \leq t \leq 0.1$. Đánh giá sai số cho ba phép tính này bằng cách so sánh với nghiệm chính xác của phương trình:

$$y = 5e^{-20t} + \frac{7}{19.5}(e^{-0.5t} - e^{-20t}).$$

Giải quyết trường hợp $h = 0.01$ và $0 \leq t \leq 0.02$ theo phương pháp Euler thuận. Ta có:

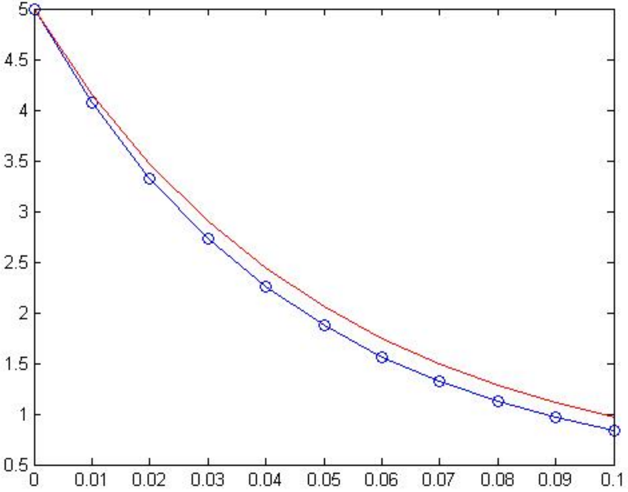
$t_0 = 0, y_0 = y(0) = 5$
$t_1 = 0.01, y_1 = y_0 + hy_0' = 5 + (0.01)(-20(5) + 7exp(0)) = 4.07$
$t_2 = 0.02, y_2 = y_1 + hy_1' = 4.07 + (0.01)(-20(4.07) + 7exp(-0.005)) = 3.32565$

```
%Tinh gia tri nghiem chinh xac
function fy = fv(t)
fy=5*exp(-20*t)+(7/19.5)*(exp(-0.5*t)-exp(-20*t));

%Tinh gia tri ham f(y,t)
function f = fyt(y1,t1)
f=-20*y1+7*exp(-0.5*t1);
```

```
% Phuong phap Euler thuan giai bai toan dau
h=input('Nhap h=');
t=0:h:0.1;
n=length(t);
y=zeros(1,n);
y(1)=5;
for i=1:n-1
    y(i+1)=y(i)+h*fyt(y(i),t(i));
end
plot(t,y,'o');
hold on;
plot(t,y);
y1=fv(t);
plot(t,y1,'r');
hold off
fprintf('\n      t          y         y1       y1-y')
for i=1:n
    fprintf('\n %f %f %f %f',t(i),y(i),y1(i),y1(i)-y(i))
end
    fprintf('\n')
```

```
>> Euler_thuan
Nhap h=0.01

      t            y           y1        y1-y
 0.000000 5.000000 5.000000 0.000000
 0.010000 4.070000 4.156934 0.086934
 0.020000 3.325651 3.466375 0.140724
 0.030000 2.729824 2.900679 0.170855
 0.040000 2.252817 2.437213 0.184396
 0.050000 1.870868 2.057449 0.186582
 0.060000 1.564966 1.746215 0.181249
 0.070000 1.319904 1.491090 0.171187
 0.080000 1.123515 1.281906 0.158390
 0.090000 0.966068 1.110335 0.144267
 0.100000 0.839774 0.969561 0.129788
```

Đồ thị của nghiệm chính xác và nghiệm gần đúng



Ưu nhược điểm phương pháp Euler

Ưu điểm: Đơn giản

Nhược điểm:

- Sai số làm tròn.
- Tính không ổn định tiềm ẩn xuất hiện khi hằng số thời gian của phương trình âm.

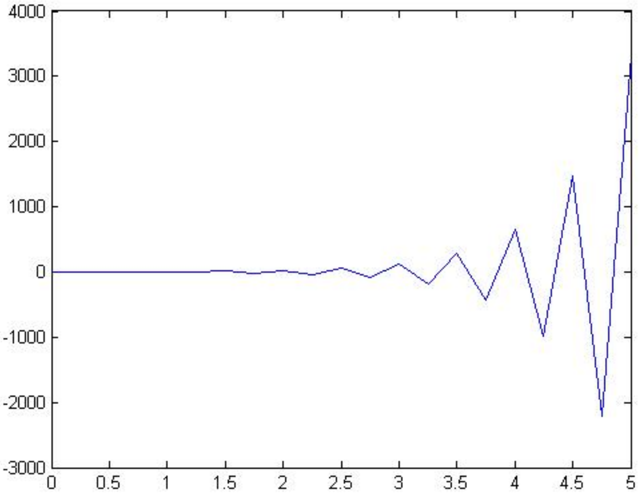
Ví dụ: Xét phương trình

$$y' = -\alpha y, y(0) = y_0,$$

trong đó: $y_0 > 0$ và $\alpha > 0$.
Nghiệm giải tích: $y = y_0 e^{-\alpha t} \to 0$ khi $t \to +\infty$.
Phương pháp Euler thuận có dạng: $y_{n+1} = (1 - \alpha h) y_n$.

- Nếu $\alpha h < 1$ thì lời giải được thu nhỏ và dương.
- Nếu $\alpha h > 1$ thì dấu của lời giải xen kẽ nhau.
- Nếu $\alpha h > 2$ thì giá trị tuyệt đối của lời giải tăng từng bước. Tức là lời giải không ổn định.

Sự không ổn định của nghiệm PTVP $y' = -\alpha y, y(0) = y_0$ với $\alpha = 10, h = 0.25$ trên đoạn $0 \leq t \leq 5$:



Phương pháp Euler thuận đối với hệ PTVP

Hệ PTVP thường cấp 1:

Xét hệ PTVP thường cấp 1:

$$\begin{cases} y' = f(y,z,t), & y(0) = y_0, \\ z' = g(y,z,t), & z(0) = z_0. \end{cases}$$

Phương pháp Euler đối với HPT trên có dạng như sau:

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + hy'_n = y_n + hf(y_n, z_n, t_n), \\ z_{n+1} = z_n + hz'_n = z_n + hg(y_n, z_n, t_n). \end{cases}$$

Phương pháp Euler thuận giải PTVP bậc cao

Phương pháp: Phân rã PTVP bậc cao thành các cặp PTVP bậc 1.

Ví dụ:

Giải PTVP bậc hai:

$$y''(t) - 0.05y'(t) + 0.15y(t) = 0, y'(0) = 0, y(0) = 1. \tag{4}$$

Đặt $y' = z$ và viết lại PTVP (4) trên dưới dạng:

$$\begin{cases} y' = z, y(0) = 1, \\ z' = 0.05z - 0.15y, z(0) = 0. \end{cases}$$

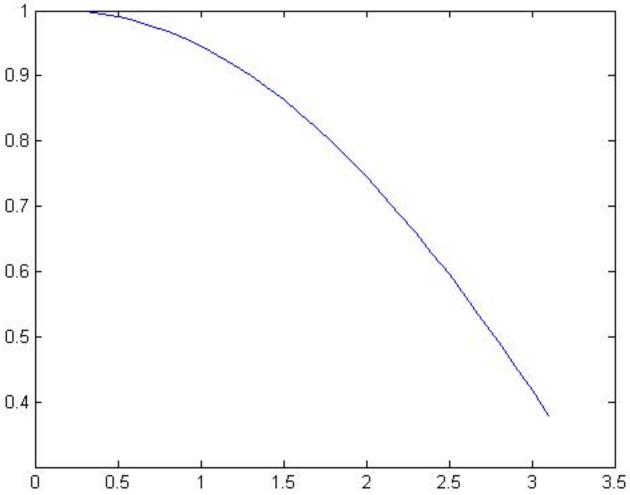
Phương pháp Euler đối với PT nói trên có dạng như sau:

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + hy'_n = y_n + hf(y_n, z_n, t_n) = y_n + hz_n, \\ z_{n+1} = z_n + hz'_n = z_n + hg(y_n, z_n, t_n) = z_n + h(0.05z_n - 0.15y_n). \end{cases}$$

Ta sẽ viết chương trình thực hiện phương pháp Euler thuận để tìm nghiệm PTVP (4) trên đoạn tích phân $a \leq t \leq b$ bất kỳ.

```
a=input('Nut trai a=');
b=input('Nut phai b=');
N=input('So doan chia N=');
h=(b-a)/N;
t=a+h*(1:(N+1));
y(1)=1;
z(1)=0;
for j=1:N
    y(j+1)=y(j)+h*z(j);
    z(j+1)=z(j)+h*(0.05*z(j)-0.15*y(j));
end
plot(t,y);
```

Đồ thị nghiệm tìm được của PTVP
$y''(t) - 0.05y'(t) + 0.15y(t) = 0, y'(0) = 0, y(0) = 1.$



Phương pháp Euler cải biên

Dựa trên quy tắc hình thang để tính tích phân $y' = y(t)$:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[f(y_{n+1}, t_{n+1}) + f(y_n, t_n)] \tag{5}$$

Nếu f tuyến tính đối với y thì phương trình (5) là tuyến tính đối với y_{n+1}, do đó dễ dàng xác định y_{n+1}.

Ví dụ: Xét PTVP: $y' = ay + cos(t)$. Khi đó PT (5) trở thành:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[ay_{n+1} + cos(t_{n+1}) + ay_n + cos(t_n)]$$

Giải phương trình đối với y_{n+1} ta được:

$$y_{n+1} = \frac{1 + ah/2}{1 - ah/2} y_n + \frac{h/2}{1 - ah/2}[cos(t_{n+1}) + cos(t_n)]$$

Nếu f không là hàm tuyến tính đối vớiy thì PT (5) trở thành phi tuyến đối với y_{n+1}. Để tính y_{n+1} cần sử dụng các thuật toán giải phương trình phi tuyến.

Phương pháp Euler cải biên

Phương pháp được sử dụng rộng rãi nhất là phương pháp xấp xỉ liên tiếp:

$$y_{n+1}^{k} - y_n = \frac{h}{2}[f(y_{n+1}^{(k-1)}, t_{n+1}) + f(y_n, t_n)].$$

trong đó y_{n+1}^{k} là xấp xỉ ở lần thứ k của y_{n+1} và y_{n+1}^{0} là giá trị khởi tạo của y_{n+1}.

Thủ tục lặp sẽ dừng khi $|y_{n+1}^{k} - y_{n+1}^{(k-1)}| < \varepsilon$.

Ví dụ giải PTVP cấp 1 phi tuyến

Sử dụng phương pháp Euler cải biên với $h = 0.1$ để giải:

$$y' = -y^{1.5} + 1, y(0) = 10,$$

với $0 \leq t \leq 1$.

Áp dụng phương pháp Euler cải biên ta được:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[-(y_{n+1})^{1.5} - (y_n)^{1.5} + 2].$$

Với $n = 0$:

$$y_1^{(1)} = y_0 + \frac{h}{2}[-(y_1^{(0)})^{1.5} - (y_0)^{1.5} + 2] \cong y_0 + \frac{h}{2}[-(y_0)^{1.5} - (y_0)^{1.5} + 2]$$

$$y_1^{(1)} \approx 10 + \frac{0.1}{2}[-(10)^{1.5} - (10)^{1.5} + 2] = 6.9377$$

Lặp lại các bước tương tự:

$$y_1^{(2)} \approx 10 + \frac{0.1}{2}[-(6.9377)^{1.5} - (10)^{1.5} + 2] = 7.6052$$

$$y_1^{(3)} \approx 10 + \frac{0.1}{2}[-(7.6052)^{1.5} - (10)^{1.5} + 2] = 7.4702$$

$$\ldots$$

$$y_1^{(7)} \approx 10 + \frac{0.1}{2}[-(7.4935)^{1.5} - (10)^{1.5} + 2] = 7.4932$$

$$y_1^{(8)} \approx 10 + \frac{0.1}{2}[-(7.4932)^{1.5} - (10)^{1.5} + 2] = 7.4933$$

Kết quả sau 10 bước lặp:

t	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
y	10.0	7.4933	5.8586	4.7345	3.9298	3.3357	2.8859	2.5386	2.2658	2.0487	1.8748

Phương pháp Euler cải biên chính xác hơn phương pháp Euler thuận.

Ví dụ:

Xét phương trình: $y' = \alpha y$.

Phương pháp Euler cải biên có dạng:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{\alpha h}{2}(y_{n+1} + y_n)$$

Giải theo y_{n+1} ta được:

$$y_{n+1} = (1 + \frac{\alpha h}{2})(1 - \frac{\alpha h}{2})^{-1} y_n$$

Khai triển hệ số của phương trình trên ta được:

$$y_{n+1} = (1 + \alpha h + \frac{1}{2}(\alpha h)^2 + \frac{1}{4}(\alpha h)^3 + \ldots) y_n$$

So sánh với khai triển Taylor của lời giải chính xác $y_{n+1} = e^{\alpha h} y_n$:

$$y_{n+1} = (1 + \alpha h + \frac{1}{2!}(\alpha h)^2 + \frac{1}{3!}(\alpha h)^3 + \ldots) y_n$$

Như vậy lời giải thu được chính xác đến số hạng bậc hai.
Trong khi bằng cách phân tích tương tự, ta có thể chỉ ra rằng phương pháp Euler thuận chính xác đến số hạng bậc nhất.

Phương pháp Euler ngược

Phương pháp Euler ngược được phát triển trên cơ sở sai phân xấp xỉ ngược:

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{h} = y'_{n+1}$$

Từ đó:

$$y_{n+1} = y_n + hf(y_{n+1}, t_{n+1})$$

Để giải phương trình trên xác định y_{n+1} ta có thể áp dụng các phương pháp số, chẳng hạn phương pháp Newton.
Nghiệm xấp xỉ ban đầu khởi tạo cho y_{n+1} là $y_{n+1}^{(0)} = y_n$.

Phương pháp Runge-Kutta

Xét phương trình vi phân:

$$y' = f(y,t), y(0) = y_0$$

Để tính y_{n+1} tại $t_{n+1} = t_n + h$ với giá trị của y_n đã biết, chúng ta lấy tích phân phương trình trên trong khoảng $[t_n, t_{n+1}]$:

$$y_{n+1} = y_n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(y,t)dt \tag{6}$$

Phương pháp Runge-Kutta được phát triển nhờ áp dụng các phương pháp phân tích số để tính tích phân ở bên phải của công thức (6).

Áp dụng quy tắc hình thang:

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(y,t)dt = \frac{h}{2}[f(y_n,t_n) + f(y_{n+1},t_{n+1})] \quad (7)$$

Trong phương trình (7), y_{n+1} chưa biết. Do đó số hạng thứ hai được xấp xỉ bởi $f(\bar{y}_{n+1}, t_{n+1})$, trong đó $\bar{y}_{n+1}$ là ước tính đầu tiên của y_{n+1} theo phương pháp Euler thuận.
Phương pháp Runge-Kutta bậc 2 được tóm lược như sau:

$$\bar{y}_{n+1} = y_n + hf(y_n, t_n),$$
$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[f(y_n,t_n) + f(\bar{y}_{n+1},t_{n+1})].$$

Hoặc có thể được viết lại dưới dạng chuẩn sau:

$$k_1 = hf(y_n, t_n),$$
$$k_2 = hf(y_n + k_1, t_{n+1}),$$
$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}[k_1 + k_2].$$

Độ chính xác của phương pháp Runge-Kutta bậc 2

Khai triển giá trị chính xác của y_{n+1}:

$$y_{n+1} = y_n + hf + \frac{h^2}{2}[f_t + f_y f] + \frac{h^3}{6}[f_{tt} + 2f_{ty} f + f_{yy} f^2 + f_t f_y + f_y^2 f] + O(h^4)$$

Khai triển của y_{n+1} theo công thức của phương pháp Runge-Kutta:

$$y_{n+1} = y_n + hf + \frac{h^2}{2}[f_t + f_y f] + \frac{h^3}{4}[f_{tt} + 2f_{ty} f + f_{yy} f^2] + O(h^4)$$

Như vậy phương pháp Runge-Kutta bậc hai có độ chính xác tới bậc h^2.

Phương pháp Runge-Kutta bậc hai để giải các PTVP bậc cao

Ví dụ

Xét PTVP bậc 2: $y''(t) + ay'(t) + by(t) = q(t), y(0) = 1, y'(0) = 0$, trong đó a, b là các hằng số và $q(t)$ là hàm cho trước.

Đặt $z(t) = y'(t)$. Phương trình đã cho chuyển thành hệ PTVP bậc 1:

$$\begin{aligned} y' &= f(y, z, t) = z, y(0) = 1, \\ z' &= g(y, z, t) = -az - by + q, z(0) = 0. \end{aligned}$$

Phương pháp Runge-Kutta cho hệ PTVP trên có dạng:

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(y_n, z_n, t_n) = hz_n, \\ l_1 &= hg(y_n, z_n, t_n) = h(-az_n - by_n + q_n), \\ k_2 &= hf(\bar{y}_{n+1}, \bar{z}_{n+1}, t_{n+1}) = hf(y_n + k_1, z_n + l_1, t_{n+1}) = h(z_n + l_1), \\ l_2 &= hg(\bar{y}_{n+1}, \bar{z}_{n+1}, t_{n+1}) = hg(y_n + k_1, z_n + l_1, t_{n+1}) \\ &= h(-a(z_n + l_1) - b(y_n + k_1) + q_{n+1}), \\ y_{n+1} &= y_n + (k_1 + k_2)/2, z_{n+1} = z_n + (l_1 + l_2)/2. \end{aligned}$$

Phương pháp Runge-Kutta bậc 3

Công thức ban đầu:

$$y_{n+1} = y_n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(y,t)dt$$

Phương pháp Runge-Kutta bậc 3 dựa trên quy tắc Simson để xấp xỉ tích phân ở vế phải của công thức trên:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}[f(y_n,t_n) + 4f(\bar{y}_{n+\frac{1}{2}}, t_{n+\frac{1}{2}}) + f(\bar{y}_{n+1}, t_{n+1})]$$

trong đó $\bar{y}_{n+1}$ và $\bar{y}_{n+\frac{1}{2}}$ được ước tính qua phương pháp Euler thuận:

$$\bar{y}_{n+\frac{1}{2}} = y_n + \frac{h}{2}f(y_n,t_n),$$

$$\bar{y}_{n+1} = y_n + hf(\bar{y}_{n+\frac{1}{2}}, t_{n+\frac{1}{2}}) \text{ hoặc } \bar{y}_{n+1} = y_n + hf(\bar{y}_n, t_n)$$

hoặc tổ hợp tuyến tính cả hai:

$$\bar{y}_{n+1} = y_n + h[\theta f(y_n,t_n) + (1-\theta)f(\bar{y}_{n+\frac{1}{2}}, t_{n+\frac{1}{2}})]$$

trong đó θ là tham số chưa biết và được xác định để cựu đại độ chính xác

Phương pháp Runge-Kutta bậc 3

Phương pháp Runge-Kutta bậc 3 được viết lại dưới dạng:

$$k_1 = hf(y_n, t_n),$$
$$k_2 = hf(y_n + \frac{1}{2}k_1, t_n + \frac{h}{2}),$$
$$k_3 = hf(y_n + \theta k_1 + (1-\theta)k_2, t_n + h),$$
$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3).$$

Để tìm giá trị tối ưu của θ, chúng ta khai triển k_1, k_2, k_3 dưới dạng chuỗi Taylor:

$$k_1 = hf,$$
$$k_2 = hf + \frac{1}{2}h^2(f_t + f_y f) + \frac{1}{8}h^3(f_u + 2f_{ty}f + f_{yy}f^2),$$
$$k_3 = hf + h^2(f_t + f_y f) + \frac{1}{2}h^3[f_{tt} + 2f_{ty}f + f_{yy}f^2 + (1-\theta)(f_t + f_y f)f_y]$$

Bằng cách thế các đẳng thức ta xác định được $\theta_{opt} = -1$. Khi đó công thức Runge-Kutta bậc 3 chính xác đến số hạng bậc ba h^3.

Phương pháp Runge-Kutta bậc 3

Tổng kết lại, phương pháp Runge-Kutta bậc 3 được viết dưới dạng sau:

$$
\begin{aligned}
k_1 &= hf(y_n, t_n),\\
k_2 &= hf(y_n + \frac{1}{2}k_1, t_n + \frac{h}{2}),\\
k_3 &= hf(y_n - k_1 + 2k_2, t_n + h),\\
y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 4k_2 + k3).
\end{aligned}
$$

Phương pháp Runge-Kutta bậc 4

Phương pháp Runge-Kutta bậc 4 tính chính xác tới số hạng bậc 4 trong khai triển Taylor.

Sau đây chúng ta sẽ giới thiệu hai phiên bản hay dùng nhất của phương pháp Runge-Kutta bậc 4.

Phiên bản 1 dựa trên quy tắc 1/3 Simson:

$$\begin{aligned}
k_1 &= hf(y_n, t_n),\\
k_2 &= hf(y_n + k_1/2, t_n + h/2),\\
k_3 &= hf(y_n + k_2/2, t_n + h/2),\\
k_4 &= hf(y_n + k_3, t_n + h),\\
y_{n+1} &= y_n + (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)/6.
\end{aligned}$$

Phiên bản 2 dựa trên quy tắc 3/8 Simson:

$$\begin{aligned}
k_1 &= hf(y_n, t_n),\\
k_2 &= hf(y_n + k_1/3, t_n + h/3),\\
k_3 &= hf(y_n + k_1/3 + k_2/3, t_n + 2h/3),\\
k_4 &= hf(y_n + k_1 - k_2 + k_3, t_n + h),\\
y_{n+1} &= y_n + (k_1 + 3k_2 + 3k_3 + k_4)/8.
\end{aligned}$$

Phương pháp Runge-Kutta bậc 4

Ví dụ 1:

Tính $y(1)$ bằng cách giải:

$$y' = -1/(1+y^2), y(0) = 1$$

sử dụng phương pháp Runge-Kutta bậc 4 với $h = 1$.

Đặt $f(y,t) = -1/(1+y^2)$ và $y_0 = 1, t_0 = 0$.
Ta có:

$$\begin{aligned}
k_1 &= hf(y_0, t_0) = -1/(1+1) = -1/2 \\
k_2 &= hf(y_0 + k_1/2, t_0 + h/2) = 1/(1+0.75^2) = -0.64 \\
k_3 &= hf(y_0 + k_2/2, t_0 + h/2) = -1/(1+0.68^2) = -0.6838 \\
k_4 &= hf(y_0 + k_3, t_0 + h) = -1/(1+0.3161^2) = -0.9091 \\
y_1 &= y_0 + (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)/6 \\
&= 1 + (-0.5 + 2(0.64) - 2(0.6838) - 0.9091)/6 = 0.3238
\end{aligned}$$

Phương pháp Runge-Kutta bậc 4

Ví dụ 2:

Xét bài toán giá trị đầu:

$$y' = -20y + 7e^{-0.5t}, y(0) = 5.$$

Sử dụng phương pháp Runge-Kutta bậc 4 giải bài toán trên đoạn $0 \leq t \leq 0.09$ với bước chia $h = 0.01, 0.001, 0.0001$.
Đưa ra sai số bằng cách so sánh với nghiệm chính xác của phương trình

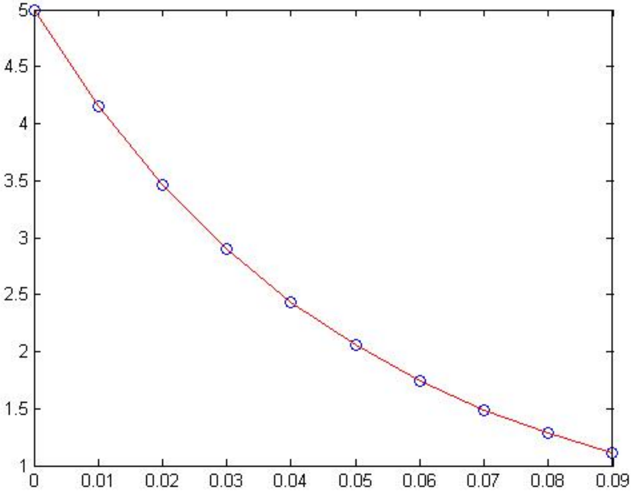
$$y = 5e^{-20t} + (7/19.5)(e^{-0.5t} - e^{-20t}).$$

```
% Tinh gia tri nghiem chinh xac
fv=inline('5*exp(-20*t)+(7/19.5)*(exp(-0.5*t)-exp(-20*t))');
% Tinh gia tri ham f(y,t)
fyt=inline('-20*y1+7*exp(-0.5*t1)','y1','t1');
% Phuong phap Runge-Kutta bac 4
clc;h=input('Nhap h=');
t=0:h:0.09;n=length(t);y=zeros(1,n);y(1)=5;
for k=2:n
    y1=y(k-1);t1=t(k-1);
    k1=h*fyt(y1,t1);
    k2=h*fyt(y1+k1/2,t1+h/2);
    k3=h*fyt(y1+k2/2,t1+h/2);
    k4=h*fyt(y1+k3,t1+h);
    y(k)=y(k-1)+(k1+2*k2+2*k3+k4)/6;
end
plot(t,y,'o'); hold on; plot (t,y);
y1=fv(t); plot(t,y1,'r'); hold off
fprintf('      t       y       y1      Sai so\n')
for i=1:n
fprintf(' %f %f %f %f\n',t(i),y(i),y1(i),y1(i)-y(i))
end
```

Kết quả với $h = 0.01$:

```
Nhap h=0.01
        t          y          y1        Sai so
 0.000000 5.000000 5.000000 0.000000
 0.010000 4.156946 4.156934 -0.000012
 0.020000 3.466395 3.466375 -0.000020
 0.030000 2.900703 2.900679 -0.000024
 0.040000 2.437240 2.437213 -0.000026
 0.050000 2.057476 2.057449 -0.000027
 0.060000 1.746242 1.746215 -0.000026
 0.070000 1.491116 1.491090 -0.000025
 0.080000 1.281929 1.281906 -0.000024
 0.090000 1.110357 1.110335 -0.000022
```

Hình minh họa phương pháp Runge-Kutta bậc 4



Phương pháp Runge-Kutta bậc 4 giải hệ PTVP

Xét hệ PTVP:

$$y' = f(x, y, z),$$
$$z' = g(x, y, z).$$

Phương pháp Runge-Kutta bậc 4 cho hệ PTVP trên có dạng:

$$
\begin{aligned}
k_1 &= hf(y_n, z_n, t_n)\\
l_1 &= hg(y_n, z_n, t_n)\\
k_2 &= hf(y_n + k_1 z_n/2 + l_1 t_n/2 + h/2)\\
l_2 &= hg(y_n + k_1 z_n/2 + l_1 t_n/2 + h/2)\\
k_3 &= hf(y_n + k_2 z_n/2 + l_2 t_n/2 + h/2)\\
l_3 &= hg(y_n + k_2 z_n/2 + l_2 t_n/2 + h/2)\\
k_4 &= hf(y_n + k_3 z_n + l_3 t_n + h)\\
l_4 &= hg(y_n + k_3 z_n + l_3 t_n + h)\\
y_{n+1} &= y_n + (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)/6\\
z_{n+1} &= z_n + (l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4)/6
\end{aligned}
$$

Sai số, sự ổn định

Phương pháp Runge-Kutta bao gồm hai loại lỗi: Sai số làm tròn và không ổn định.
Sai số làm tròn là nguyên nhân của sự khác nhau giữa khai triển Taylor của phương pháp số và khai triển Taylor của phương pháp chính xác. Độ lớn sai số giảm khi bậc của phương pháp tăng.
Để thấy rõ tính không ổn định của phương pháp Runge-Kutta, chúng ta hãy xét phương trình sau:

$$y' = \alpha y,$$

trong đó $\alpha < 0$. Giá trị chính xác của y_{n+1} được tính như sau:

$$y_{n+1} = e^{\alpha h} y_n$$

Do $\alpha < 0$ nên $|y_{n+1}|$ giảm khi n tăng. Khai triển Taylor:

$$y_{n+1} = [1 + \alpha h + \frac{1}{2}(\alpha h)^2 + \frac{1}{6}(\alpha h)^3 + \frac{1}{24}(\alpha h)^4 + O(h^5)] y_n$$

Phương pháp Runge-Kutta bậc 4 giải phương trình $y' = \alpha y$:

$$
\begin{aligned}
k_1 &= \alpha h y_n \\
k_2 &= \alpha h(y_n + \frac{k_1}{2}) = \alpha h(1 + \frac{1}{2})y_n \\
k_3 &= \alpha h(y_n + \frac{k_2}{2}) = \alpha h(1 + \frac{1}{2}\alpha h(1 + \frac{1}{2}\alpha h))y_n \\
k_4 &= \alpha h(y_n + k_3) = \alpha h(1 + \alpha h(1 + \frac{1}{2}\alpha h(1 + \frac{1}{2}\alpha h)))y_n \\
y_{n+1} &= [1 + \alpha h + \frac{1}{2}(\alpha h)^2 + \frac{1}{6}(\alpha h)^3 + \frac{1}{24}(\alpha h)^4]y_n
\end{aligned}
$$

Công thức này tương đương với 5 số hạng đầu tiên trong khai triển Taylor của nghiệm chính xác.
Như vậy cả sai số làm tròn và tính không ổn định của lời giải đều bắt nguồn từ xấp xỉ này.

Các hàm trên MATLAB

Xét bài toán đầu đối với PTVP:

$$y' = f(t, y), y_0 = y(0), t_0 \leq t \leq t_1.$$

Các hàm liên quan:

- Các hàm giải bài toán: ODE45,ODE113,ODE15S,ODE23T, ODE23TB.
- Các hàm thiết lập tùy chọn: ODESET,ODEGET.
- Các hàm đưa kết quả: ODEPLOT,ODEPHAS2,ODEPHAS3,ODEPRINT.

Hàm ODE45

Công dụng:

Giải các phương trình vi phân không trơn (IVP) bằng các phương pháp bậc thấp (bậc trung bình).

Cách sử dụng:

Lệnh gọi: [T,Y]=ODExx(ODEFUN,TSPAN,Y0)

trong đó xx được thay bởi 23 hoặc 45 tùy vào việc lựa chọn ODE23 hay ODE45.

Các tham số đầu vào:

- TSPAN=[T0 TFINAL] là khoảng tích phân $[t_0, t_1]$
- Y0 là giá trị khởi đầu y_0
- ODEFUN là hàm ODEFUN(T,Y) trả lại vector cột tương ứng với giá trị (t, y)

Kết quả:

- Mỗi dong trong mảng kết quả Y tương ứng với thời gian trong vector cột T
- Để nhận được giá trị của lời giải tại các điểm cần tính T0,T1,...,TFINAL cần sử dụng: TSPAN=[T0 T1 ... TFINAL]

Lệnh gọi [T,Y]=ODExx(ODEFUN,TSPAN,Y0,OPTIONS) giải PTVP nói trên với các thuộc tính được chỉ ra bởi biến cấu trúc OPTION được tạo bởi hàm ODESET.

Các tùy chọn được sử dụng nhiều nhất là:

- Độ chính xác cho sai số tương đối 'RelTol' (ngầm định là 1e-3)
- Vector các độ chính xác cho sai số tuyệt đối 'AbsTol' (ngầm định là 1e-6 cho tất cả các thành phần)

Lệnh gọi [T,Y]=ODExx(ODEFUN,TSPAN,Y0,OPTIONS,P1,P2,...)
Lệnh này truyền thêm thông số bổ sung P1,P2,... cho hàm ODEFUN(T,Y,P1,P2,...) trong ODE và các hàm được chỉ ra trong OPTION.

Sử dụng OPTIONS=[] để chỉ ra không có tùy chọn này được xác lập.

Ví dụ 1

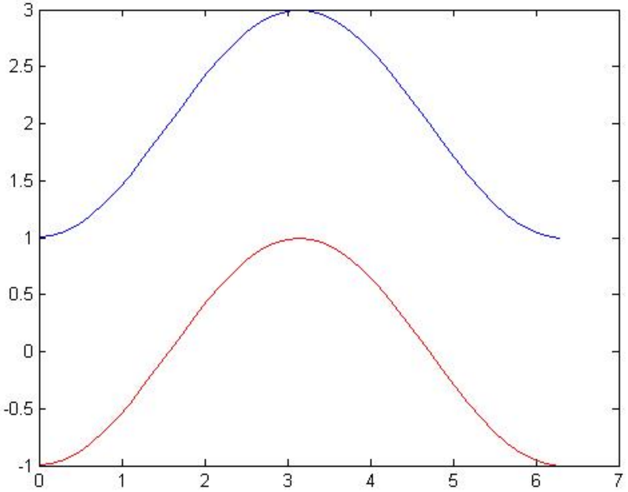
Giải phương trình:

$$y' = sint, y(0) = 1, 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Nghiệm chính xác của phương trình là $y = -cost + 2$.
Chương trình trên MatLab:

```
function dydt=fp(t,y)
dydt=[sin(t)];

[t,y]=ode45(@fp,[0 2*pi],[1]);
plot(t,y);
hold on
plot(t,-cos(t),'r')
```

Lời giải phương trình:



Ví dụ 2

Xét bài toán khảo sát sự lây lan của bệnh cúm trong cộng đồng N người. Mô hình của bài toán là hệ PTVP sau:

$$
\begin{aligned}
x' &= -\beta xy + \gamma \\
y' &= \beta xy - \alpha y \\
z' &= \alpha y - \gamma
\end{aligned}
$$

hay dạng vector:

$$\mathbf{u}' = f(t, y)$$

với

$$u' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}, f(t, y) = \begin{pmatrix} -\beta xy + \gamma \\ \beta xy - \alpha y \\ \alpha y - \gamma \end{pmatrix}$$

trong đó x là số người nhạy cảm với bệnh, y là số người đã mắc bệnh, z là số người miễn dịch, kể cả những người đã bình phục ở thời điểm t.
Các thông số α, β, γ tương ứng với tốc độ bình phục, lây lan và bổ sung mỗi ngày. Giả thiết rằng lượng dân cư không đổi, tức số mới sinh bằng số tử vong.

Chúng ta sẽ giải hệ phương trình với điều kiện đầu:

$$x(0) = 980; y(0) = 20; z(0) = 0;$$

và các tham số:

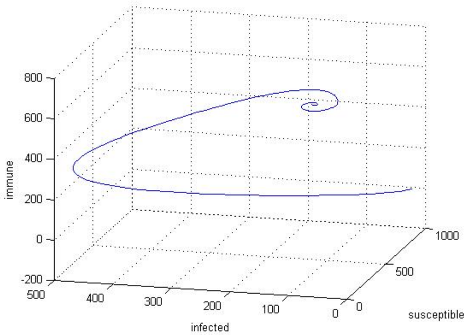
$$\alpha = 0.05; \beta = 0.0002; \gamma = 4.5$$

Trước hết ta viết hàm **flu** để tính giá trị của hàm vector $f(t, y)$:

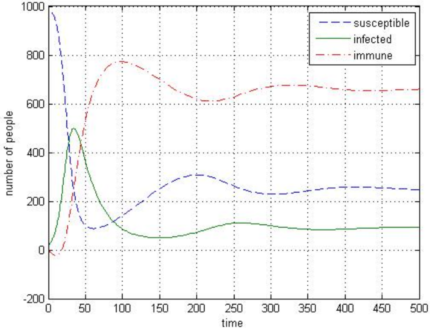
```
function yp=flu(t,y)
alpha =0.05;
beta=0.0002;
gamma=4.5;
xx=y(1);yy=y(2);zz=y(3);
yp1=-beta*xx*yy+gamma;
yp2=beta*xx*yy-alpha*yy;
yp3=alpha*yy-gamma;
yp=[yp1;yp2;yp3];
```

```
clear;
tspan=[0 500];
x0=980;
y0=20;
z0=0;
vec0=[x0 y0 z0];
options = odeset('reltol',1e-5,'abstol',[1e-5 1e-5 1e-5]);
[t,y]=ode45('flu',tspan,vec0,options);
figure(1);plot3(y(:,1),y(:,2),y(:,3))
view([-75 20]);
grid on;
xlabel('susceptible');ylabel('infected');zlabel('immune');
[maxinfect, imax]=max(y(:,2));
figure(2);plot(t,y(:,1),'--',t,y(:,2),t,y(:,3),'-.')
grid on;
legend('susceptible','infected','immune')
xlabel('time');ylabel('number of people');
```

Quỹ đạo dịch cúm:



Số người nhiễm bệnh theo thời gian



Ví dụ 3

Giải bài toán điều kiện đầu đối với PTVP cấp 2:

$$y'' = -sin(y) + sin(5t),$$
$$y(0) = 1; y'(0) = 0,$$
$$0 \leq t \leq 20.$$

Trước hết ta đưa về hệ hai PTVP cấp 1: Đặt $y_1 = y$ và $y_2 = y'$, ta thu được hệ:

$$y_1' = y_2,$$
$$y_2' = -sin(y_1) + sin(5t)$$

với điều kiện đầu

$$y_1(0) = 1,$$
$$y_2(0) = 0.$$

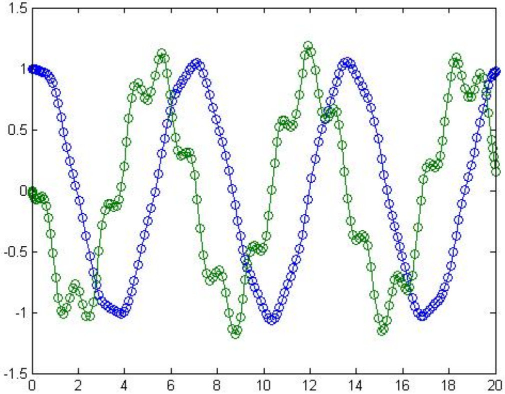
Để định nghĩa hàm g mô tả vế phải của hệ, ta sử dụng **y(1)** để mô tả y_1, **y(2)** để mô tả y_2:

$$g = inline('[y(2); -sin(y(1)) + sin(5 * t)]', 't', 'y')$$

Giải hệ PTVP:

$$ode45(g, [0, 20]; [1; 0])$$

Kết quả:



Hàm ODESET

Công dụng: Thiết lập hoặc thay đổi các tùy chọn khi sử dụng hàm ODE.
Cách sử dụng:

- Lệnh:
  OPTIONS=ODESET('NAME1','VALUE1','NAME2','VALUE2',...)
  tạo biến cấu trúc OPTIONS với các tùy chọn được chỉ định bởi 'NAMEi' được gán giá trị cho bởi VALUEi.
- Lệnh: OPTIONS=ODESET(OLDOPTS,'NAME1','VALUE1',...)
  thay đổi tùy chọn cũ.
- Lệnh: OPTIONS=ODESET(OLDOPTS,NEWOPTS)
  tổ hợp các tùy chọn cho bởi OLDOPTS với các tùy chọn trong NEWOPTS.
- Lệnh: ODESET
  không có tham số sẽ đưa ra màn hình các tùy chọn và giá trị của chúng.

Một số thuộc tính quan trọng của ODE:

- RelTol: Độ chính xác của sai số tương đối(dương, ngầm định 1e-3).
- AbsTol: Độ chính xác của sai số tuyệt đối (dương, ngầm định 1e-6)
- Vectorized: Vector hóa hàm ODE [on|off]
  Đặt thuộc tính này là 'on' nếu hàm F trong ODE được cài đặt sao cho việc gọi $F(t, [y1, y2, ...])$ trả lại giá trị [F(t,y1), F(t,y2),...].
- Mass: Ma trận khối lượng [constant matrix|function].
- MStateDependence: Sự phụ thuộc của ma trận khối lượng vào biến trạng thái y [none|weak|strong].
- MaxStep: Cận trên của độ dài bước (dương, ngầm định 0.1)

Sử dụng hàm **dsolve**

Ví dụ

Giải PTVP: $y'(t) = ty^2$.

```
sol=dsolve('Dy=t*y^2','t')
sol =
                0
 -1/(t^2/2 + C3)
```

Để giải bài toán điều kiện đầu cần đưa thêm thông tin:

```
sol=dsolve('Dy=t*y^2','y(-2)=1','t')
sol =
-1/(t^2/2 - 3)
```

Vẽ đồ thị của lời giải dùng hàm $ezplot(sol, [t0, t1])$.
Ví dụ chương trình MatLab vẽ đồ thị 12 đường cong của lời giải phương trình: $y' = ty^2$ tương ứng với điều kiện đầu $y(-2) = -0.3, -0.1, ..., 1.8, 2$ trên khoảng $[-2, 2]$.

```
sol=dsolve('Dy=t*y^2','y(-2)=y0','t')
for y0=-0.3:0.2:2.0
    ezplot(subs(sol,'y0',y0),[-2,2])
    hold on
end
hold off; axis tight
```

Đồ thị lời giải: