# Chương 5 : Tính gần đúng đạo hàm, tích phân

Đinh Viết Sang [1]

[1] Bộ môn Khoa Học Máy Tính, Viện CNTT & TT,
Trường Đại Học Bách Khoa Hà Nội.

Ngày 30 tháng 3 năm 2015

# Giới thiệu

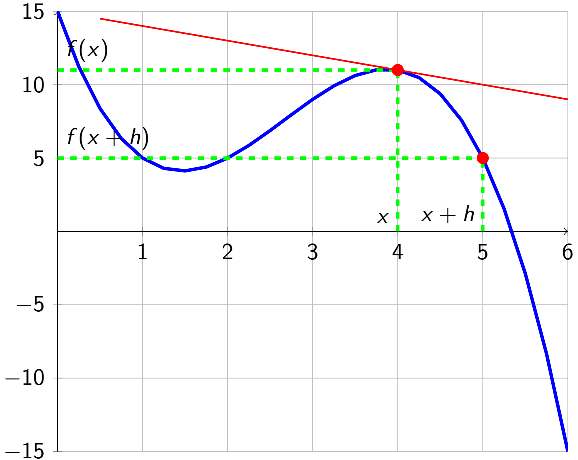
# Tính gần đúng đạo hàm

## Đặt vấn đề

Giả sử hàm $f$ là khả vi tại $x$. Do nhiều nguyên nhân khác nhau mà ta có thể cần phải tính đạo hàm gần đúng của hàm $f$.
Định nghĩa đạo hàm bậc nhất:

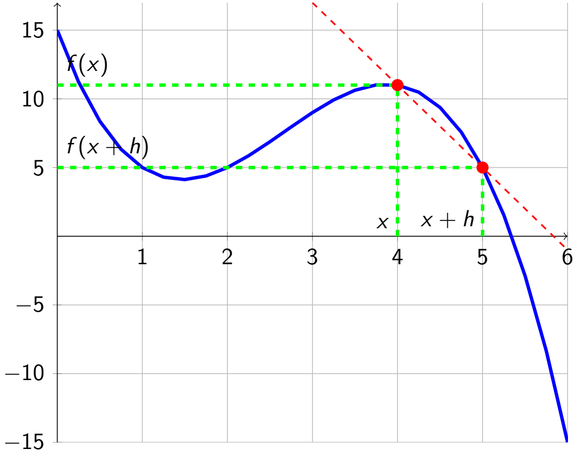
$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

# Tính gần đúng đạo hàm




Tiếp tuyến đồ thị hàm $f(x)$ được biểu diễn bằng màu đỏ khi $h \to 0$

# Tính gần đúng đạo hàm




Cát tuyến đồ thị hàm $f(x)$ khi $h > 0$

# Tính gần đúng đạo hàm

## Công thức sai phân thuận (Forward Differences)

Xét khai triển Taylor của hàm $f$ tại lân cận $x$

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + f"(\xi)\frac{h^2}{2!}$$

từ đó ta có công thức tính xấp xỉ đạo hàm bậc nhất

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

trong đó $\xi \in [x, x+h]$ còn $f"(\xi)\frac{h}{2}$ là sai số rút gọn

# Tính gần đúng đạo hàm

## Công thức sai phân thuận (tiếp)

Công thức có độ chính xác bậc nhất vì sai số rút gọn (truncation error) là

$$f''(\xi)\frac{h}{2} = O(h)$$

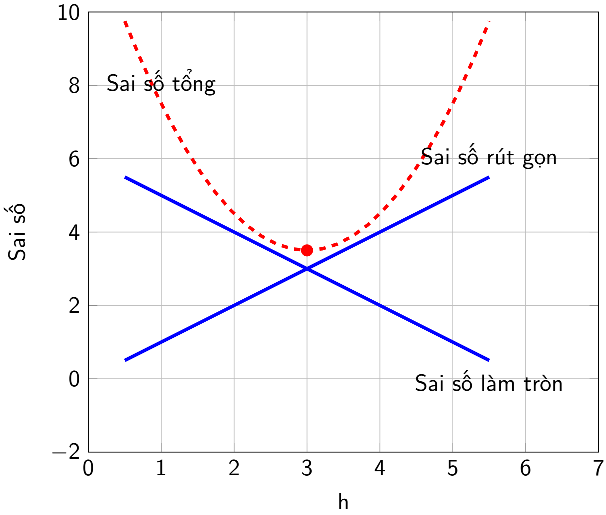
ta thấy

- Muốn sai số trên nhỏ thì $h \to 0$
- Tuy nhiên, trên máy tính còn sai số làm tròn (round off error) là

  $$\frac{\epsilon(|f(x+h)| + |f(x)|)}{h}$$

  trong đó $\epsilon$ là độ chính xác máy tính

# Tính gần đúng đạo hàm




Điểm lý tưởng đánh dấu đỏ có $h \approx \sqrt{\epsilon}$

# Tính gần đúng đạo hàm

## Ví dụ thực nghiệm

Xét hàm $f(x) = sin(x)$ sử dụng công thức sai phân thuận để tính $f'(\pi/3) = 0.5$. Để tính giá trị đạo hàm trên dùng độ dài bước sai phân $h = 10^{-k}$ với $k = 1, 2, ..., 16$

# Tính gần đúng đạo hàm

| h | $\frac{\sin(\pi/3+h)-\sin(\pi/3)}{h}$ | Sai số tổng |
|---|---|---|
| 1.000000e-01 | 4.559019e-01 | -4.409811e-02 |
| 1.000000e-02 | 4.956616e-01 | -4.338424e-03 |
| 1.000000e-03 | 4.995669e-01 | -4.330960e-04 |
| 1.000000e-04 | 4.999567e-01 | -4.330210e-05 |
| 1.000000e-05 | 4.999957e-01 | -4.330133e-06 |
| 1.000000e-06 | 4.999996e-01 | -4.330281e-07 |
| 1.000000e-07 | 5.000000e-01 | -4.300676e-08 |
| 1.000000e-08 | 5.000000e-01 | -3.038735e-09 |
| 1.000000e-09 | 5.000000e-01 | 4.137019e-08 |
| 1.000000e-10 | 5.000000e-01 | 4.137019e-08 |
| 1.000000e-11 | 5.000000e-01 | 4.137019e-08 |
| 1.000000e-12 | 5.000445e-01 | 4.445029e-05 |
| 1.000000e-13 | 4.996004e-01 | -3.996389e-04 |
| 1.000000e-14 | 4.996004e-01 | -3.996389e-04 |
| 1.000000e-15 | 5.551115e-01 | 5.511151e-02 |
| 1.000000e-16 | 0 | -5.000000e-01 |

Tối ưu với $h = 10^{-8}$ vậy $\epsilon = 10^{-16}$

# Tính gần đúng đạo hàm

## Công thức sai phân ngược (Backward Differences)

Khi dùng sai phân thuận, ta dùng $x+h$ là điểm bên phải thì bây giờ ta dùng điểm bên trái $x-h$. Công thức Taylor lúc này sẽ là

$$f(x-h) = f(x) - f'(x)h + f"(\xi)\frac{h^2}{2!}$$

Công thức sai phân ngược tính gần đúng đạo hàm

$$f'(x) \approx \frac{f(x) - f(x-h)}{h}$$

Công thức này cũng có xấp xỉ bậc nhất $O(h)$ và điểm lý tưởng $h \approx \sqrt{\epsilon}$

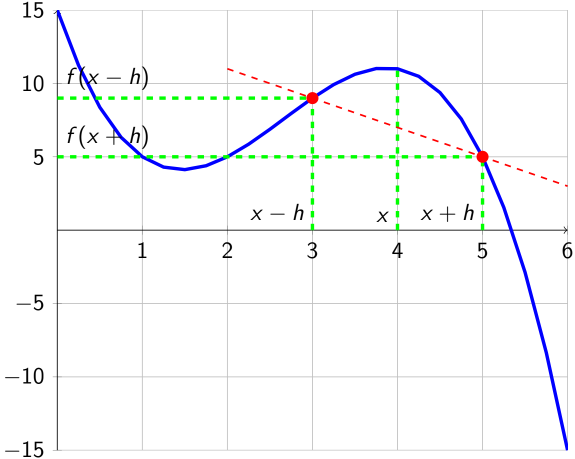
# Tính gần đúng đạo hàm

## Công thức sai phân trung tâm (Central Difference)

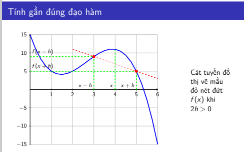
Lấy giá trị sai phân trung bình sai phân cả hai phía (sai phân thuận cộng ngược), ta có được công thức sai phân trung tâm

$$
\begin{aligned}
f'(x) &\approx \frac{1}{2}\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\frac{f(x)-f(x-h)}{h}\right)\\
&=\left(\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}\right)
\end{aligned}
$$

# Tính gần đúng đạo hàm




Cát tuyến đồ thị vẽ mầu đỏ nét đứt $f(x)$ khi $2h > 0$




Thoạt nhìn, công thức có vẻ không được tốt lắm

- Không suy ra từ công thức giải tích, chuỗi Taylor
- Nó tính hệ số góc của cát tuyến độ rộng 2h
- Các tính toán không thực hiện tại điểm quan tâm $x$

# Tính gần đúng đạo hàm

## Công thức sai phân trung tâm (Central Difference)

Để phân tích sai số, ta dùng chuỗi Taylor

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + f"(x)\frac{h^2}{2} + f'''(\xi_+)\frac{h^3}{3!}$$
$$f(x-h) = f(x) - f'(x)h + f"(x)\frac{h^2}{2} - f'''(\xi_-)\frac{h^3}{3!}$$

với $\xi_+ \in (x, x+h)$ và $\xi_- \in (x-h, x)$. Trừ hai vế, chia cho $2h$ ta có

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} - \frac{1}{6}f'''(\xi)h^2, \xi \in [x-h, x+h]$$

Công thức cho phép xấp xỉ đạo hàm với sai số $O(h^2)$, điểm lý tưởng có $h = \epsilon^{1/3}$

# Tính gần đúng đạo hàm

## Ví dụ thực nghiêm

Xét hàm $f(x) = sin(x)$ sử dụng công thức sai phân trung tâm để tính $f'(\pi/3) = 0.5$. Để tính giá trị đạo hàm trên dùng độ dài bước sai phân $h = 10^{-k}$ với $k = 1, 2, ..., 16$

# Tính gần đúng đạo hàm

| h | $\frac{\sin(\pi/3+h)-\sin(\pi/3)}{h}$ | Sai số tổng |
|---|---|---|
| 1.000000e-01 | 4.991671e-01 | -8.329168e-04 |
| 1.000000e-02 | 4.999917e-01 | -8.333292e-06 |
| 1.000000e-03 | 4.999999e-01 | -8.333340e-08 |
| 1.000000e-04 | 5.000000e-01 | -8.338326e-10 |
| 1.000000e-05 | 5.000000e-01 | -7.826573e-12 |
| 1.000000e-06 | 5.000000e-01 | -4.113332e-11 |
| 1.000000e-07 | 5.000000e-01 | 2.919336e-10 |
| 1.000000e-08 | 5.000000e-01 | -3.038735e-09 |
| 1.000000e-09 | 5.000000e-01 | 4.137019e-08 |
| 1.000000e-10 | 5.000000e-01 | 4.137019e-08 |
| 1.000000e-11 | 5.000000e-01 | 4.137019e-08 |
| 1.000000e-12 | 5.000445e-01 | 4.445029e-05 |
| 1.000000e-13 | 4.996004e-01 | -3.996389e-04 |
| 1.000000e-14 | 4.996004e-01 | -3.996389e-04 |
| 1.000000e-15 | 5.551115e-01 | 5.511151e-02 |
| 1.000000e-16 | 0 | -5.000000e-01 |

Tối ưu với $h = 10^{-5}$ vậy $\epsilon \approx 10^{-16}$

# Tính gần đúng đạo hàm

## Tính gần đúng đạo hàm bậc hai

Dùng khai triển Taylor của $f$, tại hai điểm $x+h$ và $x-h$ đến đạo hàm bậc 4, khử đạo hàm bậc lẻ, ta thu đc công thức

$$f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} - \frac{1}{12}h^2 f^{(4)}(\xi)$$

Công thức cho phép xấp xỉ đạo hàm với sai số $O(h^2)$, điểm lý tưởng có $h = \epsilon^{1/4}$. Vậy với độ chính xác $\epsilon = 10^{-16}$ thì $h = 10^{-4}$

# Tính gần đúng đạo hàm

## Tính gần đúng đạo hàm bậc hai

Hoàn toàn tương tự, ta tính đạo hàm riêng. Ví dụ tính gradient của hàm $f(x, y)$ gồm hai biến độc lập

$$\frac{\delta f}{\delta x}(x, y) \approx \frac{f(x+h, y) - f(x-h, y)}{2h}$$
$$\frac{\delta f}{\delta y}(x, y) \approx \frac{f(x, y+h) - f(x, y-h)}{2h}$$

# Tính gần đúng đạo hàm

## Hàm tính gần đúng đạo hàm của MATLAB

MATLAB cung cấp hàm tính sai phân **Y = diff(X)**

- nếu **X** là vec tơ thì nó trả lại

$$[X(2) - X(1)\ X(3) - X(2)\ \dots\ X(n) - X(n-1)]$$

- nếu **X** là ma trận $m \times n$ thì nó trả lại ma trận chênh lệch giữa hai dòng kế tiếp

$$[X(2:m,:) - X(1:m-1,:)]$$

với $m$ là hàng của ma trận

# Tính gần đúng đạo hàm

Hàm **diff** còn có thể tính đạo hàm của các hàm cho dưới dạng công thức giải tích và trả lại kết quả xâu chứa công thức giải tích của đạo hàm.
Một số cách dùng thông dụng:

- **diff(S)**: tính đạo hàm của biểu thức $S$ đối với tên biến được xác định bởi hàm $findsym(S)$.
- **diff(S,'v')** hoặc **diff(S,sym('v'))** tính đạo hàm của $S$ đối với biến $v$.
- **diff(S,n)**, trong đó $n$ nguyên dương, tính đạo hàm cấp $n$ của $S$.

Ví dụ:

```
>> syms x t
>> b=diff(sin(x^2))
b =
2*x*cos(x^2)
>> diff(t^6,6)
ans =
720
>> diff(exp(2*x*t-x*cos(t)),'x')
ans =
exp(2*t*x - x*cos(t))*(2*t - cos(t))
>> diff(exp(2*x*t-x*cos(t)),'t')
ans =
exp(2*t*x - x*cos(t))*(2*x + x*sin(t))
```

# Câu hỏi

# Tính gần đúng tích phân

## Đặt vấn đề

Tính giá trị của *tích phân xác định*

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

trong đó $f$ là hàm khả tích trên đoạn [a,b]. Vấn đề đặt ra là

- Hàm $f$ dưới dấu tích phân quá phức tạp để tính nguyên hàm
- Hàm $f$ dưới dấu tích phân không cho công thức, mà chỉ biết dãy điểm $(x_i, f_i), i = 1, 2, \cdots, n$

# Tính gần đúng tích phân

## Tổng Riemann

Giả sử $f$ là hàm xác định trên đoạn đóng [a,b]

- $\Delta$ là phép chia đoạn [a,b] thành n đoạn đóng $I_k = [x_{k-1}, x_k], k = 1, 2, ..., n$ sao cho $a = x_0 < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n = b$.
- Chọn n điểm mỗi điểm thuộc từng đoạn con, $\{c_k : c_k \in I_k = [x_{k-1}, x_k], k = 1, 2, ...., n\}$

Thì *tổng Riemann* của hàm $f(x)$ tương ứng phép chia $\Delta$ và các điểm chọn $c_k$ là

$$\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k = f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + \cdots + f(c_n)\Delta x_n$$

# Tính gần đúng tích phân

## Định nghĩa tích phân xác định

Tích phân xác định của $f(x)$ theo $x$ từ a đến b là giới hạn sau của tổng Riemann

$$I = \int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k$$

với giả thiết giới hạn này tồn tại, ta nói hàm $f$ là khả tích Riemann. Các thuật ngữ liên quan

- Hàm $f(x)$ gọi là hàm cần tích phân
- a và b là cận tích phân
- [a,b] - khoảng tích phân

# Tính gần đúng tích phân

## Các tính chất của tích phân xác định

Cho $f(x)$, $g(x)$ cùng khả tích trên [a,b] và $C$ là hằng số

1. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ với $c \in [a, b]$
2. $\int_a^a f(x)dx = 0$
3. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
4. $\int_a^b (f(x) + g(x))\, dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$
5. $\int_a^b Cf(x)dx = C\int_a^b f(x)dx$

# Tính gần đúng tích phân

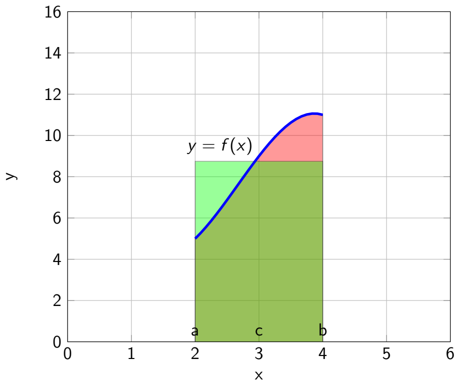
## Định lý cơ bản (The first fundamental theorem)

Nếu $f$ là liên tục trên đoạn đóng [a,b] và $F$ là nguyên hàm của $f$ (nghĩa là $F'(x) = f(x)$) thì $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

# Tính gần đúng tích phân

## Định lý về giá trị trung bình (The mean value theorem)

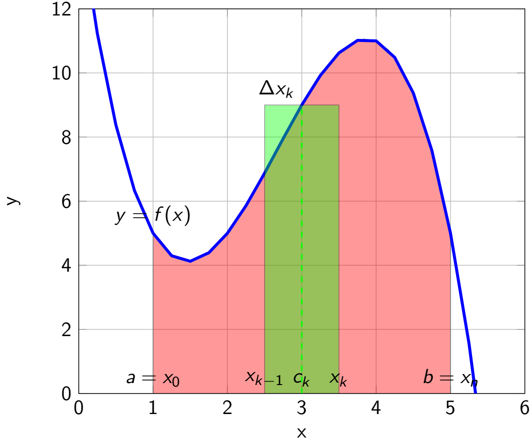
Nếu hàm $f$ là liên tục trên đoạn đóng [a,b] thì tồn tại số $c$ trong đoạn [a,b] sao cho $f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$




Diện tích hình chữ nhật đáy $b - a$ và đường cao $f(c)$ có diện tích bằng tích phân $\int_a^b f(x)dx$

# Tính gần đúng tích phân

Cách tiếp cận chung khi tính xấp xỉ tích phân $I = \int_a^b f(x)dx$ bằng diện tích phần nằm dưới đường cong hàm $f(x)$ như sau:




Diện tích là tổng Riemann

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k$$

# Tính gần đúng tích phân

## Công thức Newton-Cotes

Ý tưởng chung của phương pháp thay thế hàm $f(x)$ bởi đa thức nội suy Lagrange $p_n(x)$ như sau

$$
\begin{aligned}
I = \int_a^b f(x)dx &\approx \int_a^b \left( \sum_{i=0}^{n} \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} f(x_i) \right) \\
&= \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \int_a^b \left( \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right)
\end{aligned}
$$

# Tính gần đúng tích phân

## Công thức Newton-Cotes

Công thức của sai số để đánh giá xấp xỉ tích phân như sau

$$
\begin{aligned}
E &= \int_a^b f(x)dx - \int_a^b p_n(x)dx \\
&= \frac{1}{(n+1)!} \int_a^b f^{(n+1)}(\xi_x) \left( \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) \right) dx
\end{aligned}
$$

trong đó $a \leq \xi_x \leq b$.

# Tính gần đúng tích phân

Các công thức thu được theo cách tiếp cận

1. thay hàm $f(x)$ dưới dấu tích phân bằng công thức nội suy Lagrange
2. phép chia $\Delta$ thành lưới n điểm cách đều $x_i = a + i\ h, i = 0, 1, \cdots, n$ với $h = (b - a)/n$

thì được gọi là *công thức Newton-Cotes*.

# Tính gần đúng tích phân

Các cách chọn $p_n(x)$ khác nhau dẫn đến các công thức nội suy Lagrange khác nhau. Bảng sau tóm tắt tên gọi của một số phương pháp

| n | Đa thức nội suy | Tên công thức | Sai số |
|---|---|---|---|
| 1 | Tuyến tính | Hình thang | $O(h^2)$ |
| 2 | Bậc hai | Simson $1/3$ | $O(h^4)$ |
| 3 | Bậc ba | Simson $3/8$ | $O(h^4)$ |

# Câu hỏi

# Tính gần đúng tích phân

## Công thức hình thang (Trapezoidal Rule)

Với $n = 1$ thì công thức đa thức nội suy

$$p_1(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

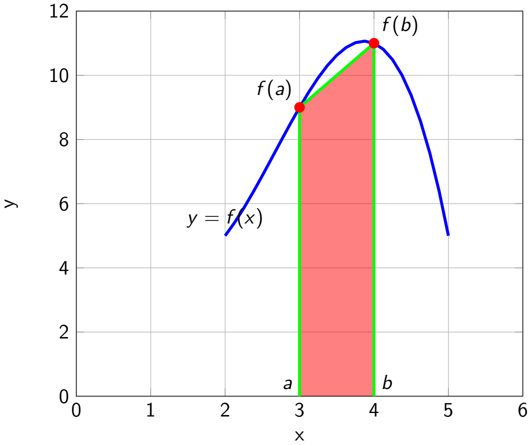
$$\Rightarrow F_1(x) = \frac{[f(b) - f(a)]\, x^2}{2(b - a)} + x\left(f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}a\right)$$

thay vào công thức xấp xỉ, ta có

$$I \approx \int_a^b p_1(x)dx = \int_a^b \left(f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)\right) dx$$

$$= F_1(b) - F_1(a) = \frac{b - a}{2}\left[f(a) + f(b)\right]$$

# Tính gần đúng tích phân




Diện tích hình thang tô mầu hồng chính là xấp xỉ tích phân

$$I \approx \int_a^b p_1(x)dx$$

$$= \frac{b-a}{2}[f(a) + f(b)]$$

# Tính gần đúng tích phân

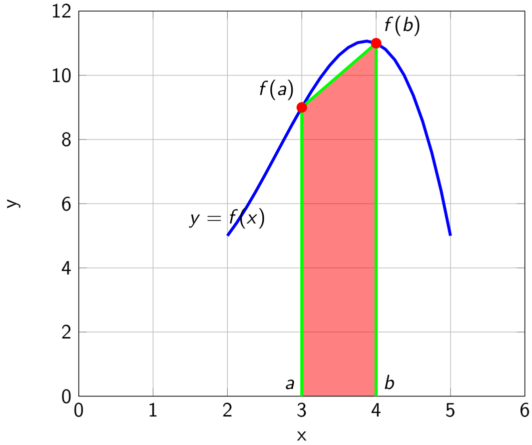
## Công thức hình thang

Sai số của công thức hình thang với $n = 1$

$$
\begin{aligned}
E_t &= \int_a^b f(x)dx - \int_a^b p_n(x)dx \\
&= \frac{1}{(n+1)!} \int_a^b f^{(n+1)}(\xi_x) \left( \prod_{l=0}^{n} (x - x_i) \right) dx \\
&= \frac{1}{2} \int_a^b f''(\xi_x)(x-a)(x-b)dx = \frac{1}{2} f''(\xi_x) \int_a^b (x-a)(x-b)dx \\
&= -\frac{1}{12} f''(\xi_x)(b-a)^3 = -\frac{(b-a)}{12} f''(\xi_x) h^2
\end{aligned}
$$

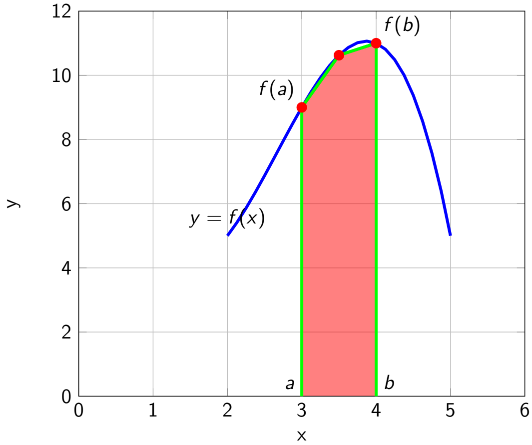
với $h = b - a$ và $\xi_x \in [a, b] \ \Rightarrow E_t = O(h^2)$

# Tính gần đúng tích phân




Vấn đề là khi ta xấp xỉ tích phân theo công thức $p_1(x)$ trên toàn đoạn [a,b] thì sai số sẽ lớn khi $h = b - a$ trở nên lớn, là bình phương $O(h^2)$

# Tính gần đúng tích phân




Ý tưởng chung là ta chia đoạn tích phân [a,b] thành các đoạn nhỏ hơn, để giảm sai số. Diện tích hai hình thang tô mầu hồng chính là xấp xỉ tích phân chia [a,b] thành hai đoạn nhỏ [a,a+h] và [a+h,b] với $h = (b - a)/2$.

# Tính gần đúng tích phân

## Công thức hình thang mở rộng

Chia đoạn [a,b] thành n đoạn đều nhau kích thước $h = (b-a)/n$ và tích phân sẽ là tổng

$$I = \int_a^{a+h} f(x)dx + \int_{a+h}^{a+2h} f(x)dx + \cdots + \int_{b-h}^{b} f(x)dx$$

Áp dụng công thức hình thang $f(x) = p_1(x)$, ta có

$$I = \frac{h}{2}\left[f(a) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(a+ih) + f(b)\right]$$

# Tính gần đúng tích phân

## Công thức hình thang mở rộng

Sai số của công thức như sau

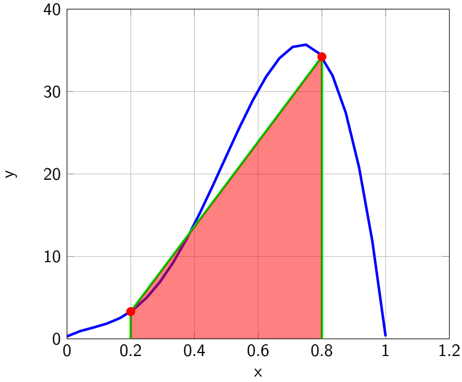
$$E_a = \frac{(b-a)h^2}{12}\overline{f''(x)} = \frac{(b-a)^3}{12n^2}\overline{f''(x)} = O(h^2)$$

trong đó $\overline{f''(x)}$ là giá trị trung bình đạo hàm cấp 2. Vậy tăng gấp đôi n thì $E_a$ giảm đi 4 lần.

# Tính gần đúng tích phân

Ví dụ như tính tích phân, giá trị chính xác là 12.82

$$I = \int_{0.2}^{0.8} (0.3 + 20x - 140x^2 + 730x^3 - 810x^4 + 200x^5)dx$$



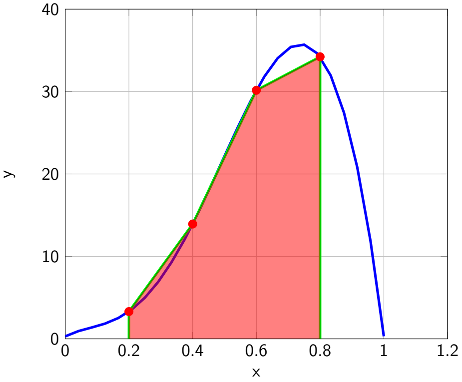

Công thức hình thang cho kết quả

$$\begin{aligned} I &= (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2} \\ &= (0.8-0.2)\frac{34.22+3.31}{2} \\ &= 11.26 \end{aligned}$$

# Tính gần đúng tích phân

Dùng công thức hình thang mở rộng $n = 3$ trong khoảng [0.2,0.8]

$$I = \int_{0.2}^{0.8} (0.3 + 20x - 140x^2 + 730x^3 - 810x^4 + 200x^5)dx$$




Công thức hình thang cho kết quả

$$I = \frac{h}{2}\left[f(a) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(a+ih) + f(b)\right]$$

$$=0.1\,[3.31 + 2(13.93 + 30.16) + 34.22]$$

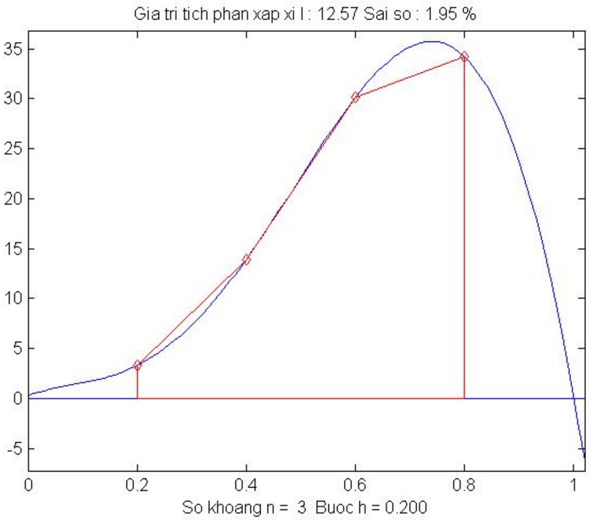
$$=12.57$$

# Tính gần đúng tích phân

Minh họa MATLAB hàm **I = trapezoid(f,a,b,n)** tính xấp xỉ tích phân theo công thức hình thang mở rộng

- Đầu vào :
  - f - biến xâu chứa tên hàm tính giá trị của $f(x)$
  - a,b - cận trên và dưới của khoảng tích phân
  - n - số khoảng chia
- Đầu ra :
  - I - giá trị gần đúng của tích phân $\int_a^b f(x)dx$

# Tính gần đúng tích phân



# Câu hỏi

# Tính gần đúng tích phân

## Công thức Simpson 1/3 Rule

Sử dụng đa thức Lagrange bậc hai $p_2(x)$, ta cần có 3 điểm và hai khoảng

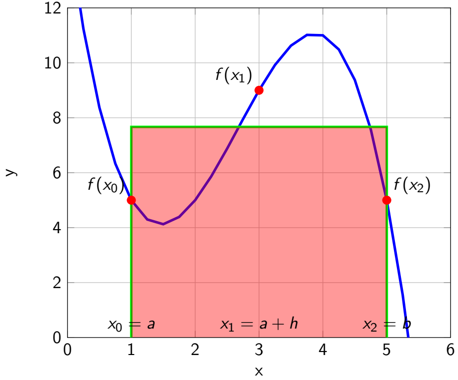
$$x_0 = a, x_1 = a + h \text{ và } x_2 = a + 2h = b$$

ta có

$$I \approx \int_{x_0}^{x_2} \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} f(x_0) + \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} f(x_1)$$
$$+ \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} f(x_2) dx$$
$$= \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)]$$

trong đó $h = (b - a)/2$

# Tính gần đúng tích phân




Xấp xỉ tích phân là diện tích phần hình chữ nhật tô mầu hồng

$$I = \underbrace{(b-a)}_{\text{rộng}} \underbrace{\frac{f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)}{6}}_{\text{chiều cao trung bình}}$$

# Tính gần đúng tích phân

## Công thức Simpson 1/3 Rule

Sai số của công thức được đánh giá theo công thức Newton-Cotes

$$E_t = -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi_x) = -\frac{(b-a)^5}{2880} f^{(4)}(\xi_x)$$

với $h = (b-a)/2$ và $\xi_x \in [a, b] \Rightarrow E_t = O(h^4)$

# Tính gần đúng tích phân

Tính xấp xỉ tích phân, giá trị chính xác 0.8821

$$I = \int_0^2 e^{-x^2} dx$$

# Tính gần đúng tích phân

## Công thức Simpson 1/3 Rule mở rộng

Giống như công thức hình thang, ta chia nhỏ khoảng [a,b] thành chẵn khoảng chia n và lẻ điểm chia từ $x_0$ đến $x_n$.

$$I = \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)dx + \cdots + \int_{n-2}^{n} f(x)dx$$

Áp dụng công thức Simpson 1/3 Rule rồi rút gọn, ta có

$$I \approx (b-a)\frac{f(x_0) + 4\sum_{i=1,3,5}^{n-1} f(x_i) + 2\sum_{j=2,4,6}^{n-2} f(x_j) + f(x_n)}{3n}$$

# Tính gần đúng tích phân

## Công thức Simpson 1/3 Rule mở rộng

Sai số của công thức được đánh giá bởi

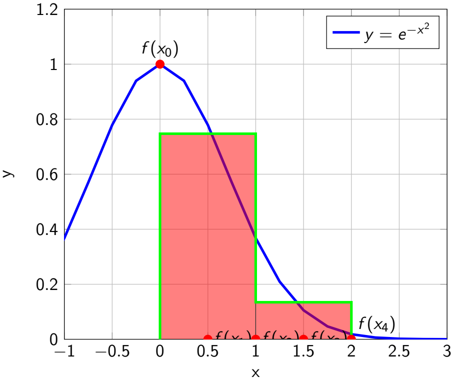
$$E_a = \frac{nh^5}{180}\overline{f^{(4)}}(x) = \frac{(b-a)h^4}{180}\overline{f^{(4)}}(x)$$

trong đó $\overline{f^{(4)}}(x)$ là giá trị trung bình đạo hàm cấp 4

# Tính gần đúng tích phân

Tính xấp xỉ tích phân, với n=4 và 5 điểm chia, giá trị chính xác 0.8821

$$I = \int_0^2 e^{-x^2} dx$$




Công thức Simpson 1/3
mở rộng cho kết quả

$$I = \int_0^2 e^{-x^2} dx \approx \frac{1}{6}[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)]$$

$$= \frac{1}{6}(e^0 + 4e^{-0.25} + 2e^{-1} + 4e^{-2.25} + e^{-4}) = 0.8818$$

# Tính gần đúng tích phân

## Công thức Simpson 1/3 Rule mở rộng

Minh họa MATLAB hàm tính xấp xỉ tích phân

$$\mathbf{I} = \mathbf{simpson}(\mathbf{fun}, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{n})$$

- Đầu vào :
  - fun - biến xâu chứa tên hàm tính giá trị của f(x)
  - a,b - cận dưới và trên của khoảng tích phân
  - n - số khoảng chia
- Đầu ra :
  - I - giá trị gần đúng tích phân theo công thức Simpson 1/3 Rule mở rộng

# Tính gần đúng tích phân

$$I = \int_{0.5}^{4.5} xe^{-x}dx = 0.848696509$$

| n | h | I | Sai số |
|---|---|---|---|
| 2 | 2.00000 | 0.782737200 | 0.065959308263687 5 |
| 4 | 1.00000 | 0.841741712 | 0.006954796541637 8 |
| 8 | 0.50000 | 0.848191341 | 0.000505167773249 9 |
| 16 | 0.25000 | 0.848663676 | 0.000032832315367 9 |
| 32 | 0.12500 | 0.848694436 | 0.000002072395035 0 |
| 64 | 0.06250 | 0.848696379 | 0.000000129845871 5 |
| 128 | 0.03125 | 0.848696500 | 0.000000008120396 7 |
| 256 | 0.01563 | 0.848696508 | 0.000000000507603 8 |
| 512 | 0.00781 | 0.848696509 | 0.000000000031726 3 |
| 1024 | 0.00391 | 0.848696509 | 0.000000000001983 6 |

# Tính gần đúng tích phân

## Công thức Simpson 3/8 Rule

- Dùng đa thức nội suy bậc 3
- Công thức xấp xỉ tích phân

$$I = \frac{3}{8}h\left[f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)\right]$$

trong đó $h = (b - a)/3$

- Sai số của công thức

$$E_t = -\frac{3}{80}h^5 f^{(4)}(\xi_x) = O(h^4)$$

# Tính gần đúng tích phân

## Các hàm tính gần đúng tích phân của MATLAB

- hàm **trapz** dùng công thức hình thang
- hàm **quad** dùng công thức Simpson cải tiến

# Câu hỏi

# Tổng kết

- Nhắc định nghĩa về đạo hàm
- Ba công thức sai phân (thuận, nghịch, trung tâm) cùng sai số
- Nhắc định nghĩa về tích phân
- Công thức chung Newton-Cotes
- Áp dụng cho các hàm nội suy cấp 1,2 và 3 cùng đánh giá sai số