# Phương pháp chứng minh

Trần Vĩnh Đức

HUST

Ngày 19 tháng 12 năm 2016

# Tài liệu tham khảo

- Eric Lehman, F Thomson Leighton & Albert R Meyer, *Mathematics for Computer Science*, 2013 (Miễn phí)
- K. Rosen, *Toán học rời rạc ứng dụng trong tin học* (Bản dịch Tiếng Việt)

## Định nghĩa

Chứng minh toán học của một mệnh đề là một dãy suy luận logic dẫn đến mệnh đề này từ một tập tiên đề.

# Nội dung

## Định nghĩa

Mệnh đề là một khẳng định hoặc đúng hoặc sai.

- Mệnh đề $2 + 3 = 5$ ✓
- Mệnh đề $1 + 1 = 3$ ✗

# Khẳng định không phải mệnh đề

- "Đưa tôi cái bánh!"
- "Bây giờ là $5$ giờ"

## Mệnh đề

*Với mọi số nguyên dương $n$, giá trị*

$$p(n) ::= n^2 + n + 41$$

*là số nguyên tố.*

- $p(0) = 41$ ✓
- $p(1) = 43$ ✓
- $p(2) = 47$ ✓
- $p(3) = 53$ ✓
- $\cdots$
- $p(39) = 1601$ ✓

nhưng

$$p(40) = 40^2 + 40 + 41 = 41 \times 41 \quad ✗$$

## Mệnh đề (Giả thuyết Euler, 1769)

*Phương trình*

$$a^4 + b^4 + c^4 = d^4$$

*không có nghiệm khi* $a, b, c, d$ *là số nguyên.*

Năm 1988, Noam Eikies đã chứng minh là sai với phản ví dụ

$$a = 95800, \qquad b = 217519,$$
$$c = 414560, \qquad d = 422481$$

## Mệnh đề

*Phương trình*

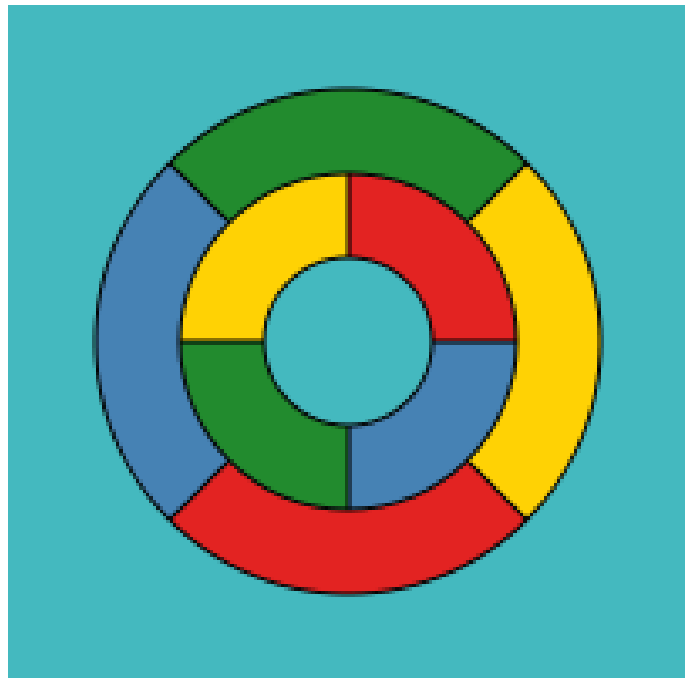
$$313(x^3 + y^3) = z^3$$

*không có nghiệm nguyên dương.*

Mệnh đề này cũng sai nhưng phản ví dụ nhỏ nhất có nhiều hơn $1000$ chữ số.

## Mệnh đề (Định lý bốn màu)

*Mọi bản đồ đều có thể tô được chỉ bằng bốn màu sao cho hai vùng kề nhau có màu khác nhau.*



Hình: Bản đồ tô $5$ màu

## Mệnh đề (Định lý bốn màu)

*Mọi bản đồ đều có thể tô được chỉ bằng bốn màu sao cho hai vùng kề nhau có màu khác nhau.*

Appel & Hakel đã phân loại các bản đồ và dùng máy tính để kiểm tra xem chúng có tô được bằng $4$ màu. Họ đã hoàn tất chứng minh năm 1976. Tuy nhiên

- Chứng minh quá dài để có thể kiểm tra mà không dùng máy tính.
- Không ai đảm bảo rằng chương trình máy tính này chạy đúng.
- Không ai đủ nhiệt tình để kiểm tra hết hàng nghìn trường hợp đã được chứng minh.

## Mệnh đề (Định lý cuối cùng của Fermat)

*Phương trình*

$$x^n + y^n = z^n$$

*không có nghiệm nguyên với* $n \geq 3$.

- Bài toán được viết trong một quyển sách Fermat đọc năm 1630.
- Andrew Wiles chứng minh là đúng năm 1994.

## Mệnh đề (Giả thuyết Goldbach)

*Mọi số nguyên chẵn lớn hơn $2$ đều là tổng của hai số nguyên tố.*

- Được giả thuyết năm 1742
- Đã được khẳng định là đúng với mọi số không lớn hơn $10^{16}$.
- ✓ hay ✗ ?

## Định nghĩa

Vị từ là một mệnh đề mà giá trị chân lý phụ thuộc vào một hoặc nhiều biến.

$$p(n) :: = \text{“}n \text{ là số bình phương hoàn hảo”}$$
$$p(4) = \text{“}4 \text{ là số bình phương hoàn hảo”}$$
$$p(4) = \checkmark$$
$$p(5) = \times$$

# Phương pháp tiên đề

- Thủ tục chuẩn để thiết lập các giá trị chân lý trong toán học đã được phát triển khoảng từ 300 BC bởi Euclid.
- Bắt đầu từ $5$ "giả sử" để xây dựng hình học Euclid. Ví dụ:

  > *Qua một điểm nằm ngoài một đường thẳng ta vẽ được một và chỉ một đường thẳng song song với đường thẳng đã cho.*

- Các mệnh đề như thế này được thừa nhận là đúng được gọi là tiên đề.
- Bắt đầu từ các tiên đề này, Euclid thiết lập giá trị chân lý của các mệnh đề khác bằng cách đưa ra "chứng minh".
- Chứng minh là một dãy các lập luận logic từ tập tiên đề dẫn đến mệnh đề cần chứng minh.

# Một số thuật ngữ cho mệnh đề

- Mệnh đề đúng và quan trọng gọi là *định lý*.
- *Bổ đề* là mệnh đề chuẩn bị có ích để chứng minh các mệnh đề khác.
- *Hệ quả* là một mệnh đề mà chứng minh nó chỉ cần vài bước từ một định lý.

# Hệ tiên đề của chúng ta

- Về cơ bản, toán học hiện đại dựa trên hệ tiên đề ZFC (Zermelo-Fraekel with Choice) cùng với một vài quy tắc suy luận logic.
- Tuy nhiên, chúng quá tối giản. Ví dụ, một chứng minh hình thức trong ZFC cho $2 + 2 = 4$ cần nhiều hơn $20,000$ bước lập luận!
- Trong môn học này, ta thừa nhận mọi sự kiện trong toán "phổ thông" như tiên đề.

# Suy luận logic

- Luật Modus Ponens:

$$\frac{P, \quad P \Rightarrow Q}{Q}$$

(Một chứng minh của $P$ và một chứng minh $P$ suy ra $Q$ là một chứng minh của $Q$)

- Luật

$$\frac{P \Rightarrow Q, \quad Q \Rightarrow R}{P \Rightarrow R}$$

- Luật

$$\frac{\neg P \Rightarrow \neg Q}{Q \Rightarrow P}$$

# Không phải luật

$$\frac{\neg P \Rightarrow \neg Q}{P \Rightarrow Q} \quad \text{✗}$$

## Ví dụ

- Nếu $4$ là số nguyên tố, thì "tôi không biết bay". ✓
- Nếu $4$ không phải số nguyên tố, thì "tôi biết bay". ✗.

# Nội dung

# Chứng minh mệnh đề "Nếu ... thì"

Để chứng minh mệnh đề $P \Rightarrow Q$:

1. Viết, "Giả sử $P$".
2. Chỉ ra bằng lập luận logic rằng $Q$ đúng.

## Định lý

*Nếu* $0 \leq x \leq 2$ *thì* $-x^3 + 4x + 1 > 0$.

## Chứng minh.

Giả sử $0 \leq x \leq 2$. Vậy các số

$$x, \quad 2 + x, \quad 2 - x$$

đều lớn hơn hoặc bằng $0$. Vậy

$$x(2 - x)(2 + x) \geq 0$$

Thêm $1$ vào tích trên ta được

$$x(2 - x)(2 + x) + 1 > 0$$

Khai triển tích ta được $-x^3 + 4x + 1 > 0$. □

# Chứng minh bằng phản đảo

- Phản đảo của mệnh đề $P \Rightarrow Q$ là mệnh đề $\neg Q \Rightarrow \neg P$.
- Ta chứng minh như sau:
  1. Viết "Ta chứng minh mệnh đề phản đảo:"
     và đưa ra mệnh đề phản đảo.
  2. Làm như phương pháp chứng minh "Nếu ... thì".

## Định lý

*Nếu $r$ là số vô tỷ, vậy $\sqrt{r}$ cũng là số vô tỷ.*

## Chứng minh.

- Ta chứng minh mệnh đề phản đảo: Nếu $\sqrt{r}$ là số hữu tỉ, vậy $r$ là số hữu tỉ.
- Giả sử rằng $\sqrt{r}$ là số hữu tỉ. Có nghĩa rằng có hai số nguyên $p, q$ sao cho $\sqrt{r} = p/q$.
- Bình phương hai vế ta được

$$\frac{p^2}{q^2} = r$$

- Vì $p^2, q^2$ đều là số nguyên nên $r$ là số hữu tỉ. □

# Chứng minh mệnh đề "Nếu và chỉ nếu"

Có hai cách chứng minh:

1. Chứng minh

$$P \Leftrightarrow Q \text{ tương đương với hai chứng minh } \begin{cases} P \Rightarrow Q \\ Q \Rightarrow P \end{cases}$$

2. Xây dựng dãy "nếu và chỉ nếu".

# Chứng minh bằng cách chia trường hợp

## Định lý

*Mọi nhóm gồm $6$ người đều có $3$ người hoặc đôi một quen nhau, hoặc đôi một lạ nhau.*

## Chứng minh.

Xét $x$ là một trong $6$ người. Có hai trường hợp tương tự nhau:

1. Trong $5$ người khác $x$, có ít nhất $3$ người đều quen $x$.
2. Trong $5$ người khác $x$, có ít nhất $3$ người đều lạ $x$.

Tại sao?

# Chứng minh bằng cách chia trường hợp

## Định lý

*Mọi nhóm gồm $6$ người đều có $3$ người hoặc đôi một quen nhau, hoặc đôi một lạ nhau.*

## Chứng minh trường hợp 1.

Trong $5$ người khác $x$, có ít nhất $3$ người đều quen $x$.
Có hai trường hợp con:

1. Không có cặp nào trong số $3$ người này quen nhau. ✓
2. Có một cặp trong $3$ người này quen nhau. Vậy cặp này cùng với $x$ tạo thành $3$ người quen nhau từng đôi một. ✓

□

## Bài tập

- GS Mc Brain và vợ là bà April tới một bữa tiệc ở đó có 4 đôi vợ chồng khác.
- Có một vài cặp bắt tay nhau nhưng không ai bắt tay với vợ hoặc chồng mình.
- GS hỏi mọi người khác xem họ bắt tay bao nhiêu người và ông ấy nhận được $9$ con số khác nhau.
- Hỏi có bao nhiêu người đã bắt tay April?

# Chứng minh phản chứng

Để chứng minh mệnh đề $P$ bằng phản chứng:

1. Viết "Ta chứng minh dùng phản chứng".
2. Viết "Giả sử $P$ sai."
3. Dẫn ra một sự kiện đã biết là sai (một phản chứng).
4. Viết "Điều này mâu thuẫn. Vậy $P$ phải đúng."

## Định lý

*$\sqrt{2}$ là số vô tỉ.*

## Chứng minh.

- Ta chứng minh dùng phản chứng.
- Giả sử $\sqrt{2}$ là số hữu tỉ.
- Vậy ta có thể viết $\sqrt{2} = p/q$ ở dạng phân số tối giản.
- Ta có

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \quad \Rightarrow \quad 2 = \frac{p^2}{q^2} \quad \Rightarrow \quad 2q^2 = p^2$$

- Vậy $p$ chia hết cho $2$. Tại sao? Nên $p^2$ chia hết cho $4$.
- Vậy $q^2$ chia hết cho $2$. Nên $q$ chia hết cho $2$.
- Vậy $p/q$ không tối giản. ✗ □

# Nội dung

## Nguyên lý sắp thứ tự tốt (STTT)

Mọi tập số nguyên không âm khác rỗng đều có phần tử nhỏ nhất.

- Tập rỗng không có phần tử nhỏ nhất.
- Không đúng với tập số âm. Ví dụ tập

$$\{\cdots, -3, -2, -1\}$$

- Không đúng với mọi tập số hữu tỉ. Ví dụ tập

$$\left\{ \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots \right\}$$

## Định lý

*Mọi số hữu tỉ $m/n$ đều viết được dưới dạng $x/y$ sao cho $x, y$ không có ước chung nguyên tố.*

## Chứng minh.

- Giả sử ngược lại có $m, n$ không viết được như trên.
- Xét $C$ là tập tử số của các phân số như vậy. Vậy $C \neq \emptyset$ vì $m \in C$.
- Theo nguyên lý STTT, có số nhỏ nhất $m_0 \in C$.
- Theo định nghĩa của tập $C$, có số $n_0$ để $m_0/n_0$ không viết được ở dạng trên.

Chứng minh (tiếp).

- Có nghĩa rằng $m_0, n_0$ có ước chung nguyên tố $p > 0$. Vậy

$$\frac{m_0/p}{n_0/p} = \frac{m_0}{n_0}$$

- Vì $m_0/n_0$ không thể viết ở dạng trên. Vậy $\frac{m_0/p}{n_0/p}$ cũng không viết được ở dạng trên.
- Vậy ta có

$$\frac{m_0}{p} \in C \quad \text{và} \quad \frac{m_0}{p} < m_0$$ ✗

□

# Chứng minh dùng STTT

Để chứng minh $P(n)$ đúng với mọi số nguyên không âm $n$, ta làm như sau

- Định nghĩa tập phản ví dụ của $P$ :

$$C ::= \{n \in \mathbb{N} \mid \neg P(n) \text{ đúng } \}$$

- Giả sử phản chứng rằng $C \neq \emptyset$.
- Bởi nguyên lý STTT có phần tử nhỏ nhất $c \in C$.
- Đưa ra phản chứng: thường bằng cách chỉ ra $P(c)$ đúng hoặc chỉ ra một phần tử $d \in C$ và $d < c$.
- Kết luận rằng $C$ rỗng, có nghĩa rằng không có phản ví dụ.

## Định lý

*Mọi số nguyên dương lớn hơn một đều phân tích được thành tích các số nguyên tố.*

## Chứng minh bằng STTT.

- Giả sử tập phản ví dụ của định lý $C \neq \emptyset$.
- Có phần tử $n$ nhỏ nhất thuộc $C$. Vậy $n$ không nguyên tố. Có nghĩa rằng

$$n = a \cdot b \qquad \text{với} \quad a, b > 1$$

- Hơn nữa $a, b$ phải phân tích được thành tích các số nguyên tố. Tại sao?

$$a = p_1 \cdots p_k \qquad \text{và} \qquad b = q_1 \cdots q_m$$

- Vậy $n = p_1 \cdots p_k \cdot q_1 \cdots q_m$. ✗ □

## Định lý

*Mọi số nguyên dương đều thú vị.*

## Chứng minh.

- Xét $S$ là tập các số nguyên dương không thú vị.
- Nếu $S$ khác rỗng, $S$ chứa phần tử nhỏ nhất $n$.
- Nhưng là phần tử nhỏ nhất của một tập phải là một tính chất thú vị.
- Vậy $n$ không thuộc $S$. ✗

□