Tô màu đỉnh của đồ thị

Trần Vĩnh Đức

HUST

Ngày 7 tháng 9 năm 2017

Tài liệu tham khảo

- Norman L. Biggs, *Discrete Mathematics*, Oxford University Press, 2002.

Nội dung

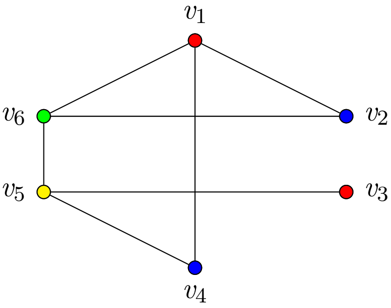
Định nghĩa và ví dụ

Thuật toán tham lam tô màu đỉnh

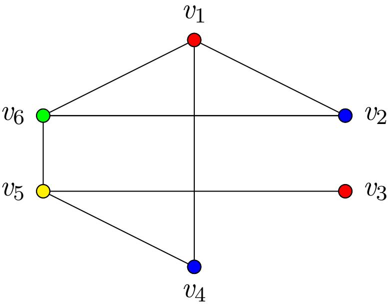
Ví dụ

Trường BK muốn xếp giờ học cho sáu môn học $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$ biết rằng có một vài sinh viên học các môn :

v_1 và v_2, v_1 và v_4, v_3 và v_5, v_2 và v_6,
v_4 và v_5, v_5 và v_6, v_1 và v_6.



Xếp lịch học



Tiết 1	Tiết 2	Tiết 3	Tiết 4
v_1 và v_3	v_2 và v_4	v_5	v_6

Xếp lịch học

- Ta tìm cách phân hoạch tập đỉnh thành 4 phần sao cho không phần nào chứa cặp đỉnh kề nhau.
- Một cách hình thức, đây là một hàm

$$c \; : \; \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\} \longrightarrow \{1, 2, 3, 4\}$$

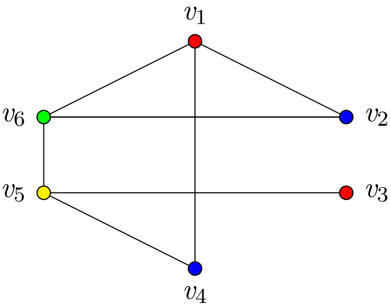
  gán mỗi đỉnh với một giờ học.
- Không mất tổng quát ta dùng các số nguyên dương cho các màu.

Định nghĩa

Một cách ***tô màu*** đỉnh của đồ thị $G = (V, E)$ là một hàm

$$c : V \longrightarrow \mathbb{N}$$

thỏa mãn tính chất : Nếu $\{x, y\} \in E$ thì $c(x) \neq c(y)$.



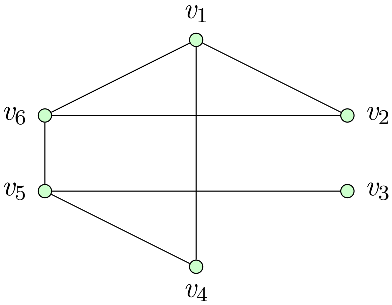
Định nghĩa

Sắc số của đồ thị G, ký hiệu là $\chi(G)$, là số nguyên k nhỏ nhất thỏa mãn có một cách tô màu G dùng k màu.

Nói cách khác, $\chi(G) = k$ nếu và chỉ nếu có một cách tô màu c từ V tới tập $\{1, 2, \ldots, k\}$, và k là số nguyên nhỏ nhất thỏa mãn tính chất này.

Ví dụ

Tìm sắc số của đồ thị



Tìm số màu

Để chứng minh rằng sắc số của một đồ thị là k thì ta phải:

1. tìm một cách tô màu dùng k màu;
2. chứng minh rằng không có cách tô màu nào dùng ít hơn k màu.

Bài tập

Tìm sắc số của các đồ thị sau:

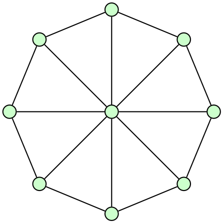
(i) đồ thị đầy đủ K_n;

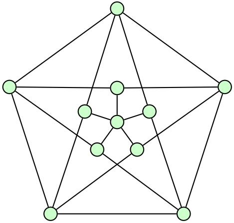
(ii) đồ thị vòng C_{2r};

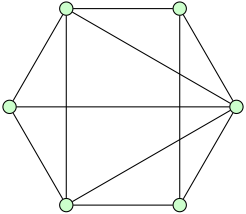
(iii) đồ thị vòng C_{2r+1};

Bài tập

Tìm sắc số của các đồ thị sau:







Bài tập

Hãy mô tả tất cả các đồ thị G có $\chi(G) = 1$.

Nội dung

Định nghĩa và ví dụ

Thuật toán tham lam tô màu đỉnh

Bài toán

Cho đồ thị G. Hãy tìm $\chi(G)$.

là bài toán khó. Người ta chưa biết thuật toán "nhanh" nào để giải nó, và hầu hết mọi người đều tin rằng không có thuật toán như vậy.

Thuật toán tham lam

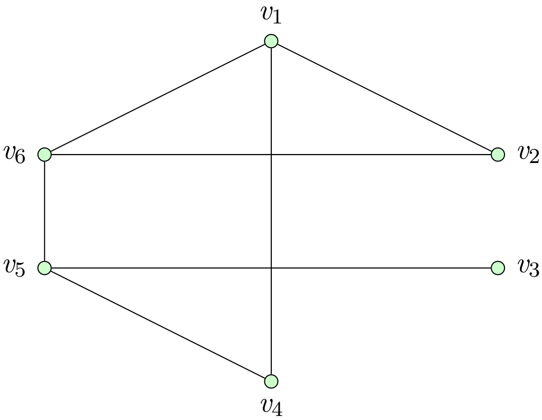
1. Sắp thứ tự các đỉnh theo thứ tự nào đó: $v_1, v_2, \cdots, v_n$.

2. `for` $i = 1, 2, \ldots, n$:

3. Gán màu hợp lệ nhỏ nhất cho v_i.

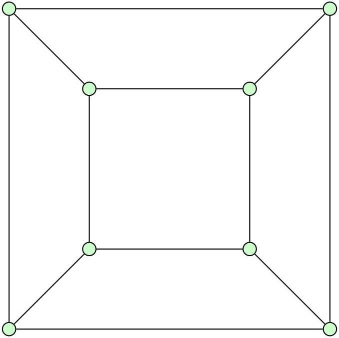
Bài tập

Dùng thuật toán tham lam để tô màu đồ thị sau:



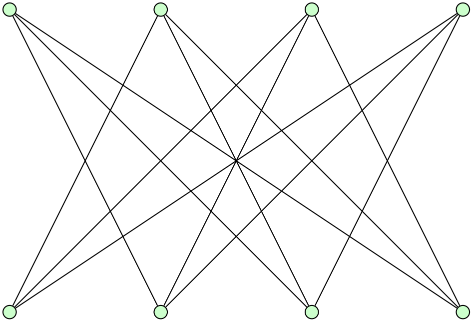
Bài tập

Tìm một cách sắp thứ tự các đỉnh để thuật toán tham lam tô màu đồ thị sau dùng ít màu nhất có thể.



Bài tập

Tìm một cách sắp thứ tự các đỉnh để thuật toán tham lam tô màu đồ thị sau dùng ít màu nhất có thể.



Mệnh đề

Nếu mọi đỉnh trong G đều có bậc $\leq k$, thì thuật toán tham lam dùng nhiều nhất $k+1$ màu.

Thử chứng minh bằng quy nạp theo k

Đặt $P(k) =$ "nếu mọi đỉnh trong G đều có bậc $\leq k$ thì thuật toán tham lam dùng nhiều nhất $k+1$ màu"

Bước cơ sở : $P(0)$ đúng. Tại sao?

Bước quy nạp : Giả sử $P(k)$ đúng để chứng minh $P(k+1)$!!!

Chứng minh bằng quy nạp theo số đỉnh

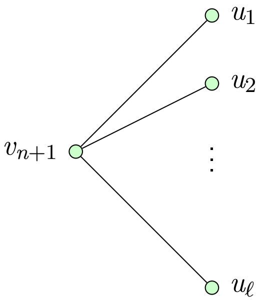
Đặt $P(n) =$ "Đồ thị G với n đỉnh và bậc mọi đỉnh trong G đều $\leq k$ thì thuật toán tham lam dùng nhiều nhất $k+1$ màu."

Bước cơ sở : $P(1)$ đúng vì G không có cạnh nào.

Bước quy nạp : Giả sử $P(n)$ đúng để chứng minh $P(n+1)$.

- Xét G là đồ thị bất kỳ với n đỉnh và có bậc lớn nhất $\leq k$.
- Sắp xếp các đỉnh theo thứ tự nào đó: $v_1, v_2, \ldots, v_n, v_{n+1}$.
- Xóa đỉnh v_{n+1} khỏi G ta thu được đồ thị G'.
- Đồ thị G' cũng có bậc lớn nhất $\leq k$. Tại sao?
- Theo quy nạp, thuật toán tham lam tô màu G' dùng nhiều nhất $k+1$ màu.

Chứng minh (tiếp)



v_{n+1} có $\ell \leq k$ hàng xóm

- Thêm đỉnh v_{n+1} và các cạnh liên quan vào lại G' để được G.
- Đỉnh v_{n+1} có $\leq k$ hàng xóm. Tại sao?
- Vậy tồn tại một màu hợp lệ trong $\{1, 2, \ldots, k+1\}$ để tô cho v_{n+1}.
- Vậy thuật toán tham lam tô màu G dùng không quá $k+1$ màu. ✓

Bài tập

Một đồ thị có ***độ rộng*** $k-1$ nếu các đỉnh có nó có thể được sắp xếp thành dãy

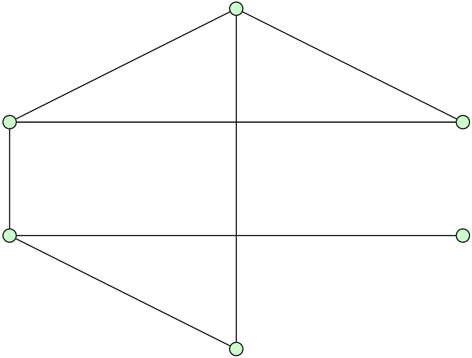
$$v_1, v_2, \cdots, v_n$$

sao cho mỗi đỉnh v_i có cạnh nối với nhiều nhất $k-1$ đỉnh đứng trước nó.

Hãy dùng quy nạp để chứng minh rằng mọi đồ thị với độ rộng nhỏ hơn hoặc bằng $k-1$ đều có thể tô bằng k màu.

Mệnh đề

Cho G là đồ thị với mọi đỉnh đều có bậc $\leq k$. Nếu G liên thông và không chính quy, vậy thì $\chi(G) \leq k$.



Hình: Đồ thị này có độ rộng 2. Tại sao?

Mệnh đề

Cho G là đồ thị với mọi đỉnh đều có bậc $\leq k$. Nếu G liên thông và không chính quy, vậy thì $\chi(G) \leq k$.

Ý tưởng chứng minh

Ta tìm một cách sắp thứ tự

$$v_1, v_2, \cdots, v_n$$

cho các đỉnh để thuật toán tham lam tô màu cho G dùng không quá k màu.

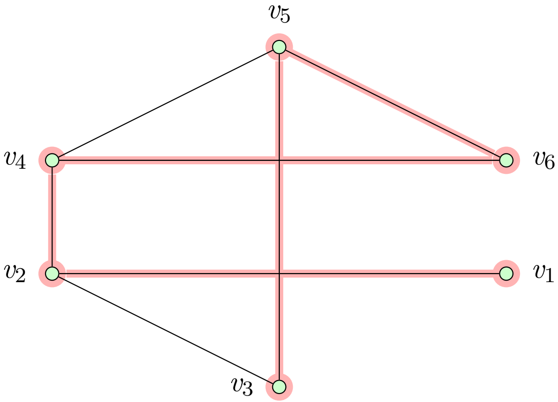
Sắp thứ tự các đỉnh

- Chọn một đỉnh trong G có bậc $\leq k-1$. Gán nó là v_n.
- Liệt kê cho các hàng xóm của v_n theo thứ tự là:

$$v_{n-1}, v_{n-2}, \cdots, v_{n-r}.$$

- Liệt kê các hàng xóm của v_{n-1} (trừ v_n). Có $\leq k-1$ đỉnh.
- Liệt kê các hàng xóm của v_{n-2} chưa được liệt kê. Có $\leq k-1$ đỉnh.
- Và cứ thế đến khi mọi đỉnh của G được liệt kê. (do G liên thông)

Ví dụ



Khẳng định

Với cách sắp xếp thứ tự đỉnh $v_1, v_2, \ldots, v_n$ như trên, mỗi đỉnh v_i chỉ nối với nhiều nhất $k-1$ đỉnh đứng trước nó.

Có nghĩa rằng đồ thị này có độ rộng $k-1$.

Định lý

Nếu G là đồ thị với mọi đỉnh đều có bậc $\leq k$, thì

(i) $\chi(G) \leq k + 1$;

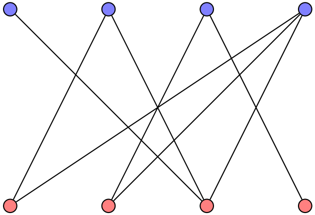
(ii) nếu G liên thông và không chính quy, thì $\chi(G) \leq k$.

Định nghĩa

Đồ thị G là ***đồ thị hai phần*** nếu $\chi(G) \leq 2$.

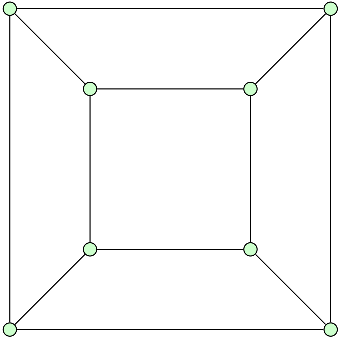
Khi đó tập đỉnh V của G được phân hoạch thành hai phần

$$V = V_{\text{đỏ}} \cup V_{\text{xanh}}$$



Ví dụ

Đồ thị sau có phải đồ thị hai phần không?

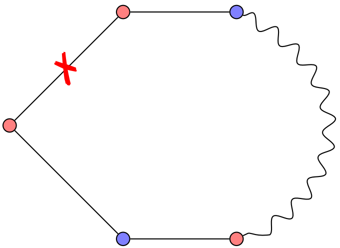


Định lý

G là đồ thị hai phần nếu và chỉ nếu nó không chứa chu trình độ dài lẻ.

Chứng minh

Nếu G có chu trình độ dài lẻ



Mâu thuẫn với tính chất $\chi(G) \leq 2$.

Chứng minh (tiếp)

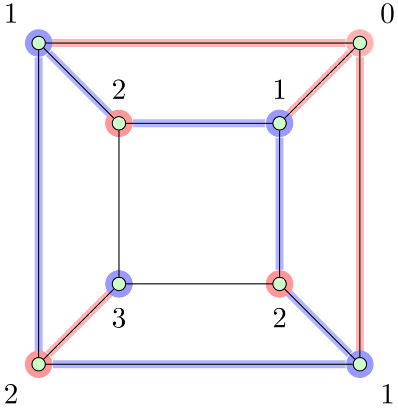
Ngược lại, giả sử G không có chu trình độ dài lẻ. Ta xây dựng một thứ tự cho các đỉnh của G để thuật toán tham lam tô G bằng hai màu.

Sắp thứ tự các đỉnh

- Chọn một đỉnh bất kỳ gọi là v_1; ta nói rằng v_1 có mức 0.
- Liệt kê các hàng xóm của v_1, gọi chúng là $v_2, v_3, \ldots, v_r$; ta nói rằng các đỉnh này có mức 1.
- Liệt kê các hàng xóm của các đỉnh ở mức 1 (trừ v_1); ta nói rằng các đỉnh này có mức 2.
- Cứ thế tiếp tục, ta liệt kê ở mức ℓ các đỉnh là hàng xóm của mức $\ell - 1$, ngoại trừ những đỉnh đã liệt kê ở mức $\ell - 2$.
- Khi không còn đỉnh nào được thêm vào, ta đã sắp thứ tự cho cho các đỉnh trong một thành phần liên thông G_0 của G. Ta tiếp tục như vậy với thành phần liên thông tiếp theo.

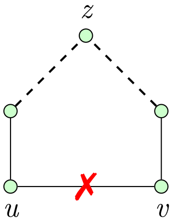
Ví dụ

Đồ thị dưới đây có thể tô bằng hai màu: các đỉnh có mức chẵn được tô màu đỏ, các đỉnh có mức lẻ được tô màu xanh.



Chứng minh (tiếp)

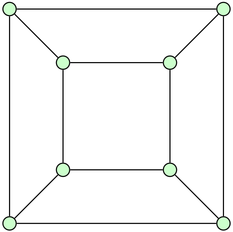
- Các đỉnh mức ℓ chỉ nối với đỉnh mức $\ell - 1$ hoặc $\ell + 1$.
- Các đỉnh mức ℓ không nối với nhau; ngược lại đồ thị sẽ có chu trình độ dài lẻ.



- Với cách sắp thứ tự các đỉnh như vậy, thuật toán tô màu sẽ chỉ dùng hai màu: các đỉnh có mức chẵn được tô màu đỏ, các đỉnh có mức lẻ được tô màu xanh.

Bài tập

Tìm 3 cách đánh số thứ tự các đỉnh của đồ thị lập phương dưới đây để thuật toán tham lam dùng $2, 3$, và 4 màu.



Bài tập

Chứng minh rằng với mọi đồ thị G ta luôn có cách sắp thứ tự các đỉnh để thuật toán tham lam tô màu G dùng đúng $\chi(G)$ màu.
[Gợi ý: dùng một cách tô màu dùng $\chi(G)$ màu để xác định thứ tự đỉnh cho thuật toán tham lam.]

Bài tập

Có sáu trạm phát sóng radio A, B, C, D, E, F với khoảng cách giữa các trạm (tính theo dặm) được cho bởi bảng sau

	A	B	C	D	E	F
A	-	85	175	100	50	100
B	85	-	125	175	100	130
C	175	125	-	100	200	250
D	100	175	100	-	210	220
E	50	100	200	210	-	100
F	100	130	250	220	100	-

Giả sử những trạm phát ở cách nhau *ít hơn* 150 dặm *phải* phát ở tần số khác nhau. Hãy tìm cách gán tần số cho mỗi trạm để số tần số là ít nhất.

Bài tập

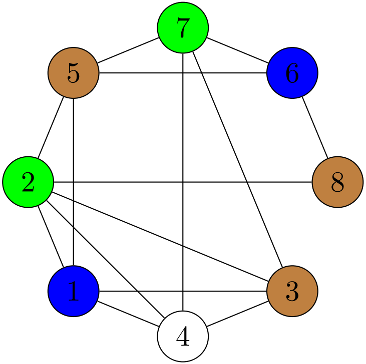
Viện CNTT&TT lên lịch bảo vệ khóa luận cho sinh viên K56. Các giáo sư $A, B, \ldots, J$ sẽ là thành viên của 8 hội đồng bảo vệ dưới đây:

Hội đồng 1 :	A	B	C	D	5 :	A	H	J
2 :	A	C	D	E	6 :	H	I	J
3 :	B	D	F	G	7 :	G	H	J
4 :	C	D	F	G	8 :	E	I	

Thời gian bảo vệ của mỗi hội đồng là một ngày. Hai hội đồng có thể bảo vệ cùng ngày nếu **không có chung thành viên**. Hãy tìm số ngày **ít nhất** để tất cả các hội đồng có thể bảo vệ xong. Giải thích câu trả lời của bạn.

Số hội đồng bảo vệ

- Xét đồ thị với tập đỉnh là các hội đồng, giữa hai dỉnh có cạnh nối nếu hai hội đồng có chung thành viên.
- Bài toán tương đương với bài toán tìm số màu ít nhất để tô đồ thị này.
- Đồ thị này có chứa clique $\{1, 2, 3, 4\}$ có kích thước 4 nên số ngày bằng 4 là ít nhất có thể.



Bài tập

Ký hiệu $e_i(G)$ là số đỉnh của đồ thị G có bậc nhỏ hơn i. Dùng thuật toán tham lam để chỉ ra rằng nếu tồn tại i để $e_i(G) \leq i+1$ thì $\chi(G) \leq i+1$.

Bài tập

Đồ thị M_r $(r \geq 2)$ đạt được từ đồ thị chu trình C_{2r} bằng cách thêm các cạnh nối giữa mỗi cặp đỉnh đối nhau. Chứng minh rằng

(i) M_r là đồ thị hai phần khi r là số lẻ.

(ii) $\chi(M_r) = 3$ khi r chẵn và $r \neq 2$.

(iii) $\chi(M_2) = 4$.