

# Hôn nhân bền vững

Hay lấy người mình yêu và không bỏ được



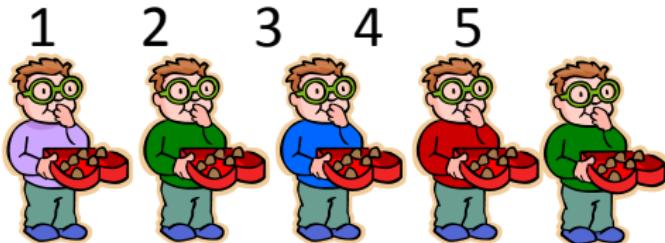
# Tham khảo

- Mathematics for Computer Science.
- Albert R. Meyer 's slides

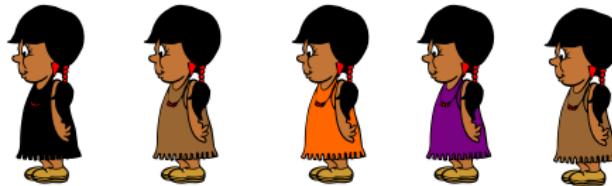
# Hôn nhân bền vững

# Tổ chức đám cưới

Chàng trai



Cô gái



A

B

C

D

E

# Hôn nhân bền vững

## Mức độ yêu thích

Nam



1 : CBEAD



2 : ABEDC



3 : DCBAE



4 : ACDBE



5 : ABDEC

Nữ



A : 35214



B : 52143



C : 43512



D : 12345



E : 23415

# Hôn nhân bền vững

## Mức độ yêu thích



1: CBEAD



2 : ABEDC



3 : DCBAE



4 : ACDBE



5 : ABDEC

Thủ chiến lược  
“tham lam” cho nam

# Hôn nhân bền vững

Mức độ yêu thích



1 : ~~CBEAD~~



2 : ABED~~C~~



3 : DC~~BAE~~



4 : A~~CDBE~~



5 : ABDEC~~C~~

Chàng trai 1 cưới Cô gái C  
(lựa chọn thứ 1 của anh ta)



1



C

# Hôn nhân bền vững

## Mức độ yêu thích



2 : ABE D



3 : D BAE



4 : A DBE



5 : ABDE

# Hôn nhân bền vững

## Mức độ yêu thích



2 : ABED



3 : DBAE



4 : ADBE



5 : ABDE

# Hôn nhân bền vững

## Tiếp theo:

Mức độ yêu thích

Chàng trai 2 cưới Cô gái A

(vẫn là lựa chọn thứ 1 của anh ta)



2 : ~~ABED~~

3 : ~~DBAE~~

4 : ~~ADBE~~

5 : ~~ABDE~~



2



A

# Hôn nhân bền vững

Cuối cùng với đám cưới “tham lam cho nam”



1 C



2 A



3 D



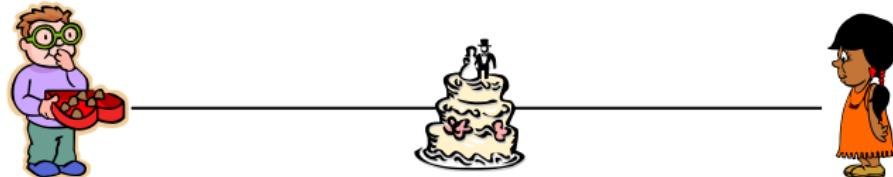
4 B



5 E

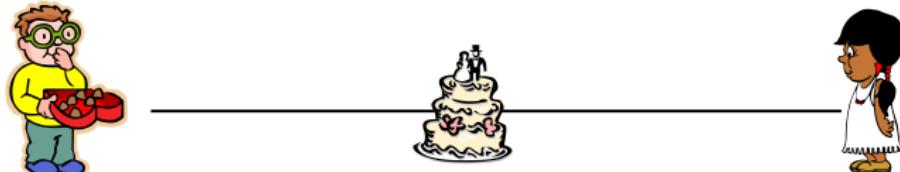
# Hôn nhân bền vững

## Vấn đề!



1

C



4

B

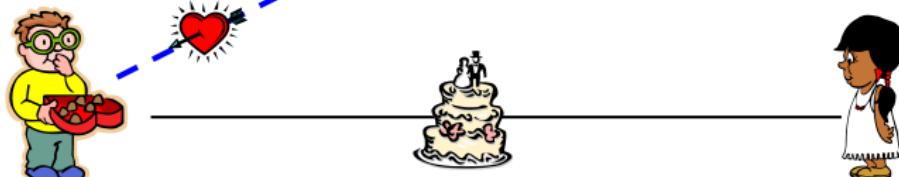
# Hôn nhân bền vững

Chàng trai 4 thích cô C hơn vợ anh ta.



1

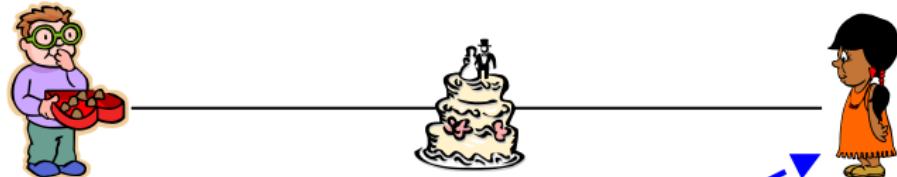
C



4

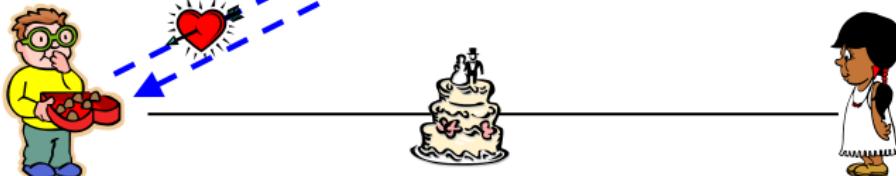
B

# Hôn nhân bền vững và ngược lại



1

C



4

B

# Hôn nhân bền vững

## Một cặp lừa đảo



1



C



4



B

Hôn nhân bền vững

Bài toán

Hôn nhân bền vững:

Tổ chức đám cưới cho mọi  
người mà không có cắp lừa  
đảo!



Hôn nhân bền vững

DỄ KHÔNG?

CÙNG THỬ XEM!



# Hôn nhân bền vững

# Mức độ yêu thích

Nam



1 : CBEAD



2 : ABEDC



3 : DCBAE



4 : ACDBE



5 : ABDEC

Nữ



A : 35214



B : 52143



C : 43512



D : 12345



E : 23415

# Hôn nhân bền vững I.



3 A



5 B



4 C



1 D



2 E

Mọi cô gái đều lấy được người yêu thích nhất

# Hôn nhân bền vững II



5 A



2 B



4 C



3 D



1 E

“tối ưu cho nam”

## Hôn nhân bền vững

Không chỉ là một bài toán vui:

- Tuyển sinh đại học  
(bài báo của Gale & Shapley, 1962)
- Ghép cặp Bệnh viện & Sinh viên nội trú.
- Ghép cặp các Clients & Servers

# Hôn nhân bền vững

Không chỉ là một bài toán vui:

- Tuyển sinh đại học

(bài báo của Gale & Shapley, 1962)

- Ghép cặp cho các Bệnh viện & các Sinh viên nội trú.
- Ghép cặp nhảy



# Hôn nhân bền vững



# Bài toán Hôn nhân bền vững

Trần Vĩnh Đức

Ngày 27 tháng 2 năm 2017

# Tài liệu tham khảo

- Eric Lehman, F Thomson Leighton & Albert R Meyer, *Mathematics for Computer Science*, 2013 ([Miễn phí](#))
- Albert R Meyer's slides

# Bài toán Hôn nhân bền vững

- $N$  chàng trai &  $N$  cô gái,

## Bài toán Hôn nhân bền vững

- $N$  chàng trai &  $N$  cô gái,
- Mỗi chàng trai có một danh sách xếp hạng các cô gái,

## Bài toán Hôn nhân bền vững

- $N$  chàng trai &  $N$  cô gái,
- Mỗi chàng trai có một danh sách xếp hạng các cô gái,
- Mỗi cô gái có một danh sách xếp hạng các chàng trai.

## Bài toán Hôn nhân bền vững

- $N$  chàng trai &  $N$  cô gái,
- Mỗi chàng trai có một danh sách xếp hạng các cô gái,
- Mỗi cô gái có một danh sách xếp hạng các chàng trai.
- Hãy tìm cách ghép cặp mỗi chàng trai với một cô gái sao cho không có cặp lừa đảo.

## Định nghĩa

- Cho một cặp ghép  $M$ , cô gái  $x$  và chàng trai  $y$  gọi là một **cặp lừa đảo** nếu họ thích nhau hơn bạn của họ trong cặp ghép  $M$ .

## Định nghĩa

- Cho một cặp ghép  $M$ , cô gái  $x$  và chàng trai  $y$  gọi là một **cặp lừa đảo** nếu họ thích nhau hơn bạn của họ trong cặp ghép  $M$ .
- Cặp ghép không chứa cặp lừa đảo gọi là **cặp ghép ổn định**.

# Nội dung

---

1 Thủ tục kén chồng

2 Cặp ghép tối ưu

# Thủ tục kén chồng

Ngày qua ngày...

# Buổi sáng

Các chàng trai đến hát dưới ban công cô gái chàng thích nhất.



Billy Bob



Brad



Angelina

## Buổi chiều

Cô gái **từ chối** hết chỉ trừ chàng trai cô thích nhất ở dưới ban công.



Billy Bob



Brad



Angelina

Hình: Nếu anh không phải Brad thì về đi!

# Buổi tối

Chàng trai bị từ chối xóa tên cô gái khỏi danh sách yêu thích của anh ta



Billy Bob

## Kén chồng (theo ngày)

**Buổi sáng:** Chàng trai đến hát dưới ban công nhà cô gái mình thích nhất.

**Buổi chiều:** Cô gái **từ chối** hết chỉ trừ chàng trai cô thích nhất ở dưới ban công.

**Buổi tối:** Chàng trai bị **từ chối** xóa tên cô gái khỏi danh sách yêu thích của anh ta

## Điều kiện dừng

- Dừng khi mọi cô gái không còn ai để **tù chối**.

## Điều kiện dừng

- Dừng khi mọi cô gái không còn ai để **từ chối**.
- Và các cô gái cưới chàng trai hiện tại **đến cầu hôn**.

# Hôn nhân bền vững

- Thuật toán luôn **Dừng**:

# Hôn nhân bền vững

- Thuật toán luôn **Dừng**:
  - Luôn có một ngày để làm đám cưới.

# Hôn nhân bền vững

- Thuật toán luôn **Dừng**:
  - Luôn có một ngày để làm đám cưới.
- Thuật toán **Đúng đắn**:

# Hôn nhân bền vững

- Thuật toán luôn **Dừng**:
  - Luôn có một ngày để làm đám cưới.
- Thuật toán **Đúng đắn**:
  - Mọi người đều có chồng (hoặc vợ).

# Hôn nhân bền vững

- Thuật toán luôn **Dừng**:
  - Luôn có một ngày để làm đám cưới.
- Thuật toán **Đúng đắn**:
  - Mọi người đều có chồng (hoặc vợ).
  - Hôn nhân ổn định.

## Định lý

*Thuật toán dừng trong  $\leq N^2 + 1$  ngày.*

## Định lý

*Thuật toán dừng trong  $\leq N^2 + 1$  ngày.*

- Nếu vào một ngày thuật toán chưa kết thúc, vậy đêm đó có một chàng trai xóa tên một cô gái khỏi danh sách.

## Định lý

*Thuật toán dừng trong  $\leq N^2 + 1$  ngày.*

- Nếu vào một ngày thuật toán chưa kết thúc, vậy đêm đó có một chàng trai xóa tên một cô gái khỏi danh sách.
- Có  $N$  danh sách, mỗi danh sách có  $N$  tên. Vậy chỉ có  $\leq N^2$  lần xóa.

# Tính đúng đắn của thuật toán

## Khẳng định

Với mỗi cô gái, chàng trai mà cô thích nhất đến cầu hôn vào ngày mai **không tệ hơn** chàng của ngày hôm nay.

# Tính đúng đắn của thuật toán

## Khẳng định

Với mỗi cô gái, chàng trai mà cô thích nhất đến cầu hôn vào ngày mai **không tệ hơn** chàng của ngày hôm nay.

vì chàng thích nhất của ngày hôm nay vẫn ở lại cho đến khi bị cô từ chối  
vì có chàng tốt hơn.

# Tính đúng đắn của thuật toán

## Khẳng định

Với mỗi chàng trai, cô gái mà chàng cầu hôn ngày mai sẽ **không tốt hơn** cô của ngày hôm nay.

vì nếu bị cô gái thích nhất từ chối, chàng phải chấp nhận thôi bằng cách xóa tên cô ta khỏi danh sách yêu thích.

## Tính đúng đắn của thuật toán

### Bất biến trong mọi ngày

Nếu cô gái  $G$  không có trong danh sách của chàng trai  $B$ , vậy hiện tại  $G$  đang được một chàng trai  $B'$  mà cô ấy thích hơn cầu hôn.

## Định lý

*Khi thuật toán dừng, mọi người đều có chồng hoặc vợ.*

## Định lý

*Khi thuật toán dừng, mọi người đều có chồng hoặc vợ.*

- Vì mỗi cô gái chỉ giữ lại **một** chàng trai mà cô ấy thích nhất trong danh sách.

## Định lý

Khi thuật toán dừng, mọi người đều có chồng hoặc vợ.

- Vì mỗi cô gái chỉ giữ lại **một** chàng trai mà cô ấy thích nhất trong danh sách.
- và tại mỗi thời điểm, mỗi chàng trai chỉ đến hát dưới ban công **một** cô gái.

## Định lý

*Cặp ghép thu được được bởi thủ tục kén chồng là ổn định.*

## Chứng minh.

Chàng Bob không thể nằm trong cặp lừa đảo



## Chứng minh.

Chàng Bob không thể nằm trong cặp lừa đảo

1. với cô gái  $G$  có trong danh sách yêu thích cuối cùng của mình: vì Bob đã cưới cô gái anh ấy thích nhất trong danh sách này.



## Chứng minh.

Chàng Bob không thể nằm trong cặp lừa đảo

1. với cô gái  $G$  có trong danh sách yêu thích cuối cùng của mình: vì Bob đã cưới cô gái anh ấy thích nhất trong danh sách này.
2. với cô gái  $G$  **không** có trong danh sách cuối cùng của mình: vì theo bất biến thì  $G$  thích chồng của mình hơn Bob.



# Nội dung

---

1 Thủ tục kén chồng

2 Cặp ghép tối ưu

Ai thích thủ tục kén chồng hơn,  
các chàng trai hay các cô gái?

## Định nghĩa

Ký hiệu

$S$  = "tập mọi cặp ghép ổn định".

Với chàng trai (hoặc cô gái)  $p$ , ta định nghĩa **lựa chọn có thể** của  $p$  là tập

$$\{q \mid \exists m \in S, \{p, q\} \in m\}$$

Đây là những cô gái (hoặc chàng trai) có thể ghép cặp với  $p$  trong một cặp ghép ổn định nào đó.

## Ví dụ

Xét danh sách

Chàng trai thích	Cô gái thích
1: $a, b$	$a: 1, 2$
2: $a, b$	$b: 1, 2$

Hãy tìm các lựa chọn có thể của chàng trai 1.

## Định nghĩa

- **Bạn đời tốt nhất** của một người là người tốt nhất trong các lựa chọn có thể của anh/chị ta.

## Định nghĩa

- **Bạn đời tốt nhất** của một người là người tốt nhất trong các lựa chọn có thể của anh/chị ta.
- **Bạn đời tệ nhất** của một người là người tệ nhất trong các lựa chọn có thể của anh/chị ta.

## Định lý

*Trong thủ tục kén chồng, mọi cô gái đều được bạn đời tệ nhất.*

## Định lý

*Trong thủ tục kén chồng, mọi cô gái đều được bạn đời tệ nhất.*

## Chứng minh.

- Giả sử tồn tại cách ghép cặp ổn định  $M$  sao cho cô gái  $g$  lấy anh  $b'$  tệ hơn anh  $b$  trong thủ tục kén chồng.



## Định lý

*Trong thủ tục kén chồng, mọi cô gái đều được bạn đời tệ nhất.*

## Chứng minh.

- Giả sử tồn tại cách ghép cặp ổn định  $M$  sao cho cô gái  $g$  lấy anh  $b'$  tệ hơn anh  $b$  trong thủ tục kén chồng.
- Trong  $M$  ta có cặp ghép

$$\{b', g\} \quad \text{và} \quad \{b, g'\}$$



## Định lý

*Trong thủ tục kén chồng, mọi cô gái đều được bạn đời tệ nhất.*

## Chứng minh.

- Giả sử tồn tại cách ghép cặp ổn định  $\mathcal{M}$  sao cho cô gái  $g$  lấy anh  $b'$  tệ hơn anh  $b$  trong thủ tục kén chồng.
- Trong  $\mathcal{M}$  ta có cặp ghép

$$\{b', g\} \quad \text{và} \quad \{b, g'\}$$

Vậy  $b$  và  $g$  là cặp lừa đảo với  $\mathcal{M}$ .



## Định lý

*Trong thủ tục kén chồng, mọi cô gái đều được bạn đời tệ nhất.*

## Chứng minh.

- Giả sử tồn tại cách ghép cặp ổn định  $\mathcal{M}$  sao cho cô gái  $g$  lấy anh  $b'$  tệ hơn anh  $b$  trong thủ tục kén chồng.
- Trong  $\mathcal{M}$  ta có cặp ghép

$$\{b', g\} \quad \text{và} \quad \{b, g'\}$$

Vậy  $b$  và  $g$  là cặp lừa đảo với  $\mathcal{M}$ . Tại sao?



## Định lý

*Trong thủ tục kén chồng, mọi chàng trai đều được bạn đời tốt nhất.*