BÀI GIẢNG 5. SỬ DỤNG CÔNG THỨC HẠ BẬC CAO

Biên soạn: Kiều Thị Thùy Linh

Tóm tắt lí thuyết

Trong nhiều bài toán giải phương trình lượng giác, ta thường gặp các dạng bài mà các hàm $\sin x, \cos x, \tan x, \cot x$ có bậc 3 trở lên. Để giải quyết các dạng bài toán này, ta cần ghi nhớ một số công thức hạ bậc cao sau:

1. Công thức hạ bậc ba

- $\sin^3 x = \frac{1}{4}(3\sin x - \sin 3x)$.
- $\cos^3 x = \frac{1}{4}(3\cos x + \cos 3x)$.
- $\tan^3 x = \frac{3\sin x - \sin 3x}{3\cos x + \cos 3x}$.
- $\cot^3 x = \frac{3\cos x + \cos 3x}{3\sin x - \sin 3x}$.

2. Công thức hạ bậc dạng $\sin^n x \pm \cos^n x$.

- $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x$.
- $\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x$.
- $\cos^4 x - \sin^4 x = \cos 2x$.
- $\cos^6 x - \sin^6 x = \cos 2x\left(1 - \frac{1}{4}\sin^2 2x\right)$.
- ....

3. Một số công thức hạ bậc mở rộng tổng quát

- $\cos^{2n} x = \frac{1}{2^{2n-1}}\sum_{k=o}^{n-1} C_{2n}^k \cos 2(n-k)x + \frac{1}{2^{2n}} C_{2n}^n$.
- $\cos^{2n+1} x = \frac{1}{2^{2n}}\sum_{k=o}^{n} C_{2n+1}^k \cos(2n-2k+1)x$.
- $\sin^{2n} x = \frac{(-1)^n}{2^{2n-1}}\sum_{k=o}^{n-1} (-1)^k C_{2n}^k \cos 2(n-k)x + \frac{1}{2^{2n}} C_{2n}^n$.
- $\sin^{2n+1} x = \frac{(-1)^n}{2^{2n}}\sum_{k=o}^{n} (-1)^k C_{2n+1}^k \sin(2n-2k+1)x$.

Nhận xét: Nhờ các công thức góc nhân đôi, góc nhân ba, công thức góc mở rộng,… và qua các biến đổi, ta nhận được công thức hạ bậc cao như ở trên.

I. Một số ví dụ

Ví dụ 1. Giải phương trình lượng giác $\cos^3 x.\cos 3x+\sin^3 x.\sin 3x=\frac{\sqrt{2}}{4}$.

Giải

$$PT\Leftrightarrow \frac{3\cos x+\cos 3x}{4}\cos 3x+\frac{3\sin x-\sin 3x}{4}=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\Leftrightarrow 3\cos 3x\cos x+3\sin 3x\sin x+\cos^2 3x-\sin^2 3x=\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow 3\left(\cos 3x\cos x+\sin 3x\sin x\right)+\cos 6x=\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow 3\cos 2x+\cos 6x=\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow 4\cos^3 2x=\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos^3 2x=\frac{\sqrt{2}}{4}=\frac{1}{\left(\sqrt{2}\right)^3}$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x=\frac{1}{\sqrt{2}}=\cos\frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{8}+k\pi\ \left(k\in\mathbb{Z}\right).$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x=\pm\frac{\pi}{8}+k\pi\ \ \left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

Ví dụ 2. Giải phương trình lượng giác $\cos^3 x\cos 3x+\sin^3 x\sin 3x=\cos^3 4x.$

Giải

$$PT\Leftrightarrow \frac{3\cos x+\cos 3x}{4}\cos 3x+\frac{3\sin x-\sin 3x}{4}\sin 3x=\cos^3 4x\lim_{x\to\infty}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}\left(\cos^2 3x-\sin^2 3x\right)+\frac{3}{4}\left(\cos 3x\cos x+\sin 3x\sin x\right)=\cos^3 4x$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}\cos 6x+\frac{3}{4}\cos 2x=\cos^3 4x$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}\left(4\cos^3 2x-3\cos 2x\right)+\frac{3}{4}\cos 2x=\cos^3 4x$$

$$\Leftrightarrow \cos^3 2x=\cos^3 4x$$

$$\Leftrightarrow \cos 4x=\cos 2x$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}4x=-2x+2k\pi\\4x=2x+2k\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow x=\frac{k\pi}{3}\quad\left(k\in\mathbb{Z}\right).$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x=\frac{k\pi}{3}\quad (k\in\mathbb{Z})$.

Ví dụ 3. Giải phương trình lượng giác $\sin^4 x+\cos^4\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{4}$.

Giải

$$PT \Leftrightarrow \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2+\left[\frac{1+\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)}{2}\right]^2=\frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow (1-\cos 2x)^2+(1-\sin 2x)^2=1$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x+\cos 2x=1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=1$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}=\cos\frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}+2k\pi \\ 2x-\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{4}+2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=k\pi \\ x=\frac{\pi}{4}+k\pi \end{array}\right. \quad (k\in\mathbb{Z}).$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x=k\pi, x=\frac{\pi}{4}+k\pi\quad (k\in\mathbb{Z})$.

Ví dụ 4. Giải phương trình lượng giác $\sin^6 x+\cos^6 x=\cos^2 2x+\frac{1}{16}$.

Giải

$$PT \Leftrightarrow 1-\frac{3}{4}\sin^2 2x=\cos^2 2x+\frac{1}{16}$$

$$\Leftrightarrow 1-\frac{3}{4}\sin^2 2x=1-\sin^2 2x+\frac{1}{16}$$

$$\Leftrightarrow 4\sin^2 2x=1 \Leftrightarrow 4\left(\frac{1-\cos 4x}{2}\right)=1$$

$$\Leftrightarrow 2-2\cos 4x=1 \Leftrightarrow \cos 4x=\frac{1}{2}=\cos\frac{\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x=\frac{\pi}{3}+k2\pi \\ 4x=-\frac{\pi}{3}+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{12}+k2\pi \quad (k\in\mathbb{Z}).$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x = \pm\frac{\pi}{12} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$.

Ví dụ 5. Giải phương trình lượng giác $\sin^8 x + \cos^8 x = \frac{17}{16}\cos^2 2x$.

Giải

$$PT \Leftrightarrow \left(\frac{1-\cos 4x}{2}\right)^4 + \left(\frac{1+\cos 4x}{2}\right)^4 = \frac{17}{16}\cos^2 2x$$

$$\Leftrightarrow (\cos 2x + 1)^4 + (\cos 2x - 1)^4 = 17\cos^2 2x.$$

Đặt $t = \cos 2x, \quad |t| \le 1$.

Khi đó, phương trình trở thành

$$(t+1)^4 + (t-1)^4 = 17t^2$$

$$\Leftrightarrow (t^4 + 4t^3 + 6t^2 + 4t + 1) + (t^4 - 4t^3 + 6t^2 - 4t + 1) = 17t^2$$

$$\Leftrightarrow 2t^4 - 5t^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow t^2 = \frac{1}{2}$$

Từ đó ta có

$$\cos^2 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1+\cos 4x}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos 4x = 0 \Leftrightarrow 4x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là : $x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4} \quad (k \in \mathbb{Z})$.

Ví dụ 6. Giải phương trình lượng giác $\dfrac{2(\sin^6 x + \cos^6 x) - \sin x \cos x}{\sqrt{2} - 2\sin x} = 0$.

Giải

Điều kiện : $\sin x \ne \frac{1}{\sqrt{2}}$.

$$PT \Leftrightarrow 2\left(1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x\right) - \frac{1}{2}\sin 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow 3\sin^2 2x + \sin 2x - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin 2x = 1 \\ \sin 2x = -\frac{4}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \sin 2x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Kết hợp với điều kiện, ta có $x=\frac{5\pi}{4}+2k\pi\ \ (k\in\mathbb{Z})$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là : $x=\frac{5\pi}{4}+2k\pi\ \ (k\in\mathbb{Z})$.

II. Bài tập tự luyện

Bài 1. Giải các phương trình lượng giác sau:

a. $\cos^3 x\sin 3x+\sin^3 x\cos 3x=\sin^3 4x$.

b. $4\sin^3 x\sin 3x+4\sin^3 x\cos 3x+3\sqrt{3}\cos 4x=3$.

c. $\cos^3 x\cos 3x-\sin^3 x\sin 3x=\cos^3 4x+\frac{1}{4}$.

Đ/S: a). $x=\frac{k\pi}{12}\ \ (k\in\mathbb{Z})$. b). $x=-\frac{\pi}{24}+\frac{k\pi}{2};x=\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}\ \ (k\in\mathbb{Z})$.

c). $x=\frac{\pi}{24}+\frac{k\pi}{2}\ \ (k\in\mathbb{Z})$.

Bài 2. Giải các phương trình lượng giác sau

a. $2\sin^2 x\left(4\sin^4 x-1\right)=\cos 2x\left(7\cos^2 2x+3\cos 2x-4\right)$.

b. $\dfrac{\sin^4 2x+\cos^4 2x}{\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\tan\left(\frac{\pi}{4}+x\right)}=\cos^4 4x$.

c. $\sin^8 x+\cos^8 x=\frac{17}{32}$.

d. $\sin^8 2x+\cos^8 2x=\frac{1}{8}$.

Đ/S: a). $x=\frac{\pi}{4}+k\pi;x=\pm\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2}\ \ (k\in\mathbb{Z})$. b). $x=\frac{k\pi}{2}\ \ (k\in\mathbb{Z})$.

c). $x=\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{4}\ \ (k\in\mathbb{Z})$. d). $x=\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{4}\ \ (k\in\mathbb{Z})$.

Bài 3. Cho $f(x)=3\cos^6 2x+\sin^4 2x+\cos 4x-m; g(x)=2\cos^2 2x.\sqrt{1+3\cos^2 2x}$. Tìm m để phương trình $f(x)=g(x)$ có nghiệm?

Đ/S: $-1 \le m \le 0$.

Bài 4. Tìm m để phương trình $\sin^4 x + (1-\sin x)^4 = m$ có nghiệm?

Đ/S: $m \in \left[\frac{1}{8};17\right]$.

Bài 5. Xác định a để phương trình $\sin^6 x + cos^6 x = a\left|\sin 2x\right|$ có nghiệm?

Đ/S: $a \le -\frac{1}{4}$.