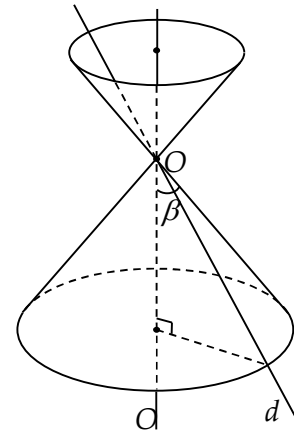


MẶT NÓN

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Mặt nón tròn xoay

Trong mặt phẳng (P) , cho hai đường thẳng d và Δ cắt nhau tại O và chúng tạo thành góc β với $0^\circ < \beta < 90^\circ$. Khi quay (P) xung quanh trục Δ với góc β không thay đổi được gọi là mặt nón tròn xoay (gọi tắt là mặt nón) đỉnh O (hình 1). Đường thẳng Δ gọi là trục, đường thẳng d được gọi là đường sinh và góc 2β gọi là góc ở đỉnh.

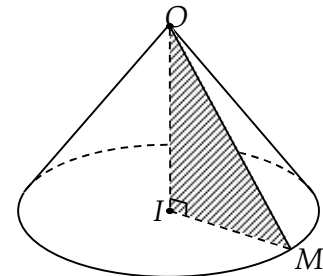


Hình 1.

2. Hình nón tròn xoay

Cho ΔOIM vuông tại I quay quanh cạnh góc vuông OI thì đường gấp khúc OIM tạo thành một hình, gọi là hình nón tròn xoay (gọi tắt là hình nón) (hình 2).

- ✧ Đường thẳng OI gọi là trục, O là đỉnh, OI gọi là đường cao và OM gọi là đường sinh của hình nón.
- ✧ Hình tròn tâm I , bán kính $r = IM$ là đáy của hình nón.
- ✧ Phần mặt tròn xoay sinh bởi các điểm trên cạnh OM khi quay quanh OI gọi là mặt xung quanh của hình nón.



Hình 2.

Khối nón tròn xoay (gọi tắt là khối nón) là phần không gian được giới hạn bởi một hình nón tròn xoay, kể cả hình nón đó.

3. Một số tính chất

a) Nếu cắt hình nón bởi mặt phẳng (P) đi qua đỉnh thì có các trường hợp sau:

- (P) cắt hình nón theo hai đường sinh \Rightarrow giao tuyến là tam giác cân.
- (P) tiếp xúc với mặt nón theo một đường sinh ((P) là mặt phẳng tiếp diện của hình nón).

b) Nếu cắt hình nón bởi mặt phẳng (P) không đi qua đỉnh thì có các trường hợp sau:

- Nếu (P) vuông góc với trục hình nón \Rightarrow giao tuyến là một đường tròn.
- Nếu (P) song song với 2 đường sinh hình nón \Rightarrow giao tuyến là một nhánh của hypebol.
- Nếu (P) song song với 1 đường sinh hình nón \Rightarrow giao tuyến là một đường parabol.

4. Công thức diện tích và thể tích của hình nón

Cho hình nón có chiều cao là h , bán kính đáy r và đường sinh là l thì có:

- ✧ Diện tích xung quanh: $S_{xq} = \pi rl$.
- ✧ Diện tích toàn phần hình nón: $S_{tp} = S_{xq} + S_{đáy} = \pi rl + \pi r^2$.

✧ Thể tích khối nón: $V_{\text{nón}} = \frac{1}{3} S_{\text{đáy}} \cdot h = \frac{1}{3} \pi r^2 h$.

B. BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1: Cho tam giác vuông OIM quanh cạnh góc vuông OI tạo thành một hình nón tròn xoay. Biết góc $\widehat{IOM} = 30^\circ$ và cạnh $IM = a$. Tính diện tích xung quanh của hình nón tròn xoay và thể tích của khối nón tròn xoay được tạo nên bởi hình nón tròn xoay trên.

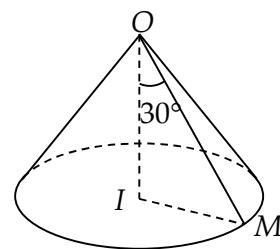
Giải:

Ta có: $r = IM = a$.

$$l = OM = \frac{IM}{\sin \widehat{IOM}} = 2a, \quad h = OI = \sqrt{OM^2 - IM^2} = a\sqrt{3}.$$

Diện tích xung quanh của hình nón: $S_{xq} = \pi rl = \pi a \cdot 2a = 2\pi a^2$.

Thể tích của khối nón: $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \pi a^2 a\sqrt{3} = \frac{\pi a^3 \sqrt{3}}{3}$.



Ví dụ 2: Một hình nón có đường kính đáy là $2a\sqrt{3}$, góc ở đỉnh là 120° . Tính diện tích toàn phần của hình nón và thể tích của khối nón trên.

Giải:

Ta có $r = IA = a\sqrt{3}$, $\widehat{IOA} = 60^\circ$ nên

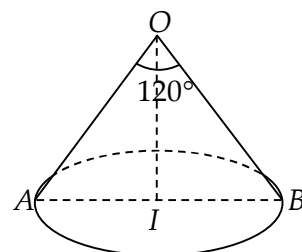
$$l = OA = \frac{IA}{\sin 60^\circ} = \frac{a\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2a, \quad h = OI = \sqrt{OA^2 - IA^2} = \sqrt{4a^2 - 3a^2} = a.$$

Diện tích xung quanh của hình nón: $S_{xq} = \pi rl = \pi a\sqrt{3} \cdot 2a = 2\pi a^2 \sqrt{3}$.

Diện tích đáy của hình nón: $S_{\text{đáy}} = \pi r^2 = 3\pi a^2$.

Diện tích toàn phần của hình nón: $S_{tp} = S_{xq} + S_{\text{đáy}} = 2\pi a^2 \sqrt{3} + 3\pi a^2 = (2\sqrt{3} + 3)\pi a^2$.

Thể tích của khối nón: $V = \frac{1}{3} S_{\text{đáy}} \cdot h = \frac{1}{3} 3\pi a^2 \cdot a = \pi a^3$.



Ví dụ 3: Cho hình nón có chiều cao $h = 20$ cm, bán kính đáy $r = 25$ cm. Mặt phẳng (α) đi qua đỉnh cắt hai đường sinh của hình nón. Biết khoảng cách từ tâm của đáy đến mặt phẳng (α) là 12 cm. Tính diện tích thiết diện đó.

Giải:

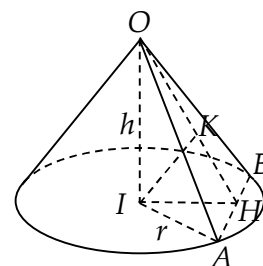
Ta có (α) cắt hình nón theo thiết diện là tam giác cân OAB với

A, B là hai điểm nằm trên đường tròn đáy.

Gọi H là trung điểm AB khi đó $IH \perp AB$.

Mà $OI \perp AB$ suy ra $AB \perp (OIH)$ (1).

Kẻ $IK \perp OH$, K nằm trên OH .



Từ (1) suy ra $IK \perp AB$. Do đó $IK \perp (OAB)$. Theo giả thiết $IK = 12$ cm.

Tam giác OIH vuông tại I nên $\frac{1}{IK^2} = \frac{1}{IH^2} + \frac{1}{OI^2} \Rightarrow IH = \frac{OI \cdot IK}{\sqrt{OI^2 - IK^2}} = \frac{20 \cdot 12}{\sqrt{20^2 - 12^2}} = 15$ cm.

$$OH = \sqrt{OI^2 + IH^2} = \sqrt{20^2 + 15^2} = 25 \text{ cm.}$$

$$AH = \sqrt{IA^2 - IH^2} = \sqrt{25^2 - 15^2} = 20 \text{ cm} \Rightarrow AB = 40 \text{ cm.}$$

$$\text{Diện tích thiết diện: } S = \frac{1}{2} OH \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot 25 \cdot 40 = 500 \text{ cm}^2.$$

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho hình nón đỉnh S có thiết diện đi qua trục là tam giác vuông cân SAB có cạnh huyền bằng $a\sqrt{2}$. Tính diện tích toàn phần của hình nón và thể tích của khối nón tương ứng.

$$\text{Đáp án: } S_{tp} = \frac{\pi a^2(1 + \sqrt{2})}{2}; V = \frac{\pi a^3 \sqrt{2}}{12}.$$

Bài 2. Cho hình nón tròn xoay có đỉnh là S có O là tâm của đường tròn đáy, đường sinh bằng $a\sqrt{2}$ và góc giữa đường sinh và mặt phẳng đáy bằng 60° . Tính diện tích xung quanh S_{xq} của hình nón và thể tích của khối nón tương ứng.

$$\text{Đáp án: } S_{xq} = \pi a^2; V = \frac{\pi a^3 \sqrt{6}}{12}.$$

Bài 3. Cho hình nón tròn xoay có thiết diện qua trục là một tam giác vuông cân có diện tích bằng $2a^2$. Tính diện tích xung quanh của hình nón và thể tích của khối nón tương ứng.

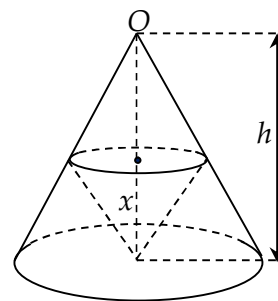
$$\text{Đáp án: } S_{xq} = 2\pi a^2 \sqrt{2}; V = \frac{2\sqrt{2}\pi a^3}{3}.$$

Bài 4. Cho hình lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh đáy bằng a , chiều cao $2a$. Biết rằng O' là tâm của $A'B'C'D'$ và (C) là đường tròn nội tiếp đáy $ABCD$. Tính diện tích xung quanh của hình nón có đỉnh O' và đáy (C) .

$$\text{Đáp án: } S_{xq} = \frac{3\pi a^2}{2}.$$

Bài 5. Cho hình nón đỉnh O , chiều cao là h . Một khối nón khác có đỉnh là tâm của đáy và có đáy là một thiết diện song song với đáy của hình nón đỉnh O đã cho (hình vẽ). Tính chiều cao x của khối nón này để thể tích của nó lớn nhất, biết $0 < x < h$.

$$\text{Đáp án: } x = \frac{h}{3}.$$



D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

1. Tính diện tích, thể tích mặt nón đơn thuần.

Câu 1: [2H2-1] (Chuyên Thái Bình, lần 3 năm 2017) Cho hình nón có bán kính đáy là $4a$, chiều cao là $3a$. Diện tích xung quanh hình nón bằng

- A. $24\pi a^2$. B. $20\pi a^2$. C. $40\pi a^2$. D. $12\pi a^2$.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

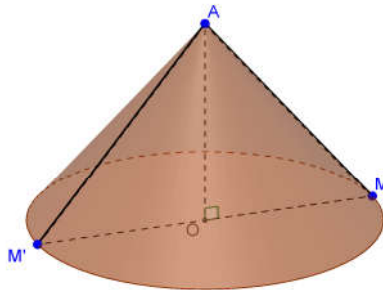
$$S_{xq} = \pi r l; l^2 = (3a)^2 + (4a)^2 = (5a)^2 \Rightarrow l = 5a \Rightarrow S_{xq} = 20\pi a^2.$$

Câu 2: [2H2-2] (Chuyên Nguyễn Quang Diêu, lần 1 năm 2017) Một hình nón có đường sinh bằng đường kính đáy. Diện tích đáy của hình nón bằng 9π . Tính đường cao h của hình nón.

- A. $h = 3\sqrt{3}$. B. $h = \sqrt{3}$. C. $h = \frac{\sqrt{3}}{2}$. D. $h = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.



Ta có $l = 2R$ và $S = 9\pi \Leftrightarrow \pi R^2 = 9\pi \Leftrightarrow R = 3$

$$\Rightarrow h = AO = \sqrt{6^2 - 3^2} = 3\sqrt{3}$$

Câu 3: [2H2-2] (THPT Lê Hồng Phong, năm 2017): Một hình nón có thiết diện qua trục là tam giác đều cạnh a . Thể tích khối nón là

- A. $\frac{a^3 \sqrt{3}\pi}{12}$. B. $\frac{a^3 \sqrt{3}\pi}{24}$. C. $\frac{a^3 \sqrt{2}\pi}{24}$. D. $\frac{a^3 \sqrt{2}\pi}{12}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Ta có tam giác SAB đều cạnh a , $SO = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $r = OB = \frac{a}{2}$.

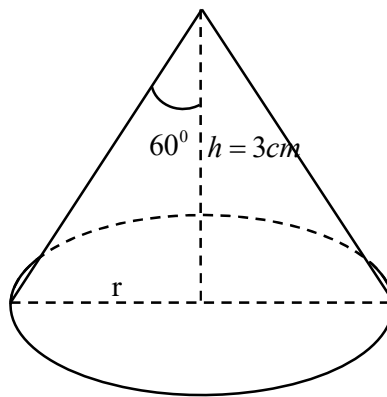
$$\text{Vậy thể tích khối nón là } V = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot SO = \frac{\pi a^2}{12} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi \sqrt{3} a^3}{24}.$$

Câu 4: [2H2-2] (Chuyên ĐHSPT Hà Nội, năm 2017): Cho hình nón có chiều cao bằng 3cm , góc giữa trục và đường sinh bằng 60° . Thể tích của khối nón là

- A. $9\pi \text{cm}^3$. B. $3\pi \text{cm}^3$. C. $18\pi \text{cm}^3$. D. $27\pi \text{cm}^3$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.



Hình nón có chiều cao $h = 3\text{ cm}$.

Bán kính đáy $r = h \cdot \tan 60^\circ = 3\sqrt{3}\text{ cm}$.

Thể tích khối nón là: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi (3\sqrt{3})^2 \cdot 3 = 27\pi\text{ cm}^3$.

Câu 5: [2H2-2] (Chuyên ĐHSPT Hà Nội, năm 2017): Cho hình nón có độ dài đường sinh bằng 2 cm , góc ở đỉnh bằng 60° . Diện tích xung quanh của hình nón là

A. $\pi\text{ cm}^2$.

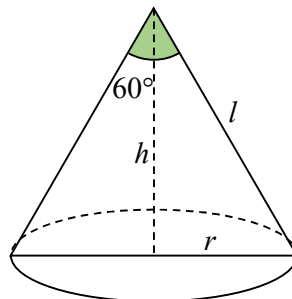
B. $2\pi\text{ cm}^2$.

C. $3\pi\text{ cm}^2$.

D. $6\pi\text{ cm}^2$.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.



Do góc ở đỉnh bằng 60° suy ra thiết diện đi qua trục hình nón là tam giác đều.

Ta có $r = 1$, $l = \frac{r}{\sin 30^\circ} = 2r = 2$.

Diện tích xung quanh của hình nón là $S_{xq} = \pi r l = 2\pi\text{ cm}^2$.

Câu 6: [2H2-1] (Chuyên Phan Bội Châu, lần 1 năm 2017): Một hình nón có chiều cao bằng $a\sqrt{3}$ và bán kính đáy bằng a . Tính diện tích xung quanh S_{xq} của hình nón.

A. $S_{xq} = 2\pi a^2$.

B. $S_{xq} = \sqrt{3}\pi a^2$.

C. $S_{xq} = \pi a^2$.

D. $S_{xq} = 2a^2$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Đường sinh: $l = \sqrt{h^2 + r^2} = 2a$. Diện tích xung quanh là $S_{xq} = \pi r l = 2\pi a^2$

Câu 7: [2H2-2] (Sở GD&ĐT tỉnh Bình Phước, lần 1 năm 2017): Thiết diện qua trục hình nón là một tam giác vuông cân có cạnh góc vuông bằng a . Diện tích toàn phần và thể tích của khối nón tương ứng có giá trị lần lượt là

A. $\frac{\sqrt{2}\pi a^2}{2}$ và $\frac{\sqrt{2}\pi a^3}{4}$.

B. $\frac{(1+\sqrt{2})\pi a^2}{2}$ và $\frac{\sqrt{2}\pi a^3}{4}$.

C. $\frac{(1+\sqrt{2})\pi a^2}{2}$ và $\frac{\sqrt{2}\pi a^3}{12}$.

D. $\frac{\sqrt{2}\pi a^2}{2}$ và $\frac{\sqrt{2}\pi a^3}{12}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có đường kính đáy là $a\sqrt{2} \Rightarrow R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, chiều cao hình nón là $\sqrt{a^2 - \frac{1}{2}a^2} = \frac{a}{\sqrt{2}}$

$$S_{tp} = S_{xq} + S_d = \pi \frac{a\sqrt{2}}{2} a + \pi \left(\frac{a\sqrt{2}}{2} \right)^2 = \frac{\pi a^2 (\sqrt{2} + 1)}{2}$$

$$\text{Ta có } V = \frac{1}{3} B.h = \frac{1}{3} \pi \left(\frac{a\sqrt{2}}{2} \right)^2 \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi a^3 \sqrt{2}}{12}$$

Câu 8: [2H2-2] (Chuyên Thái Bình, lần 1 năm 2017) Một hình nón có góc ở đỉnh bằng 60° , đường sinh bằng $2a$, diện tích xung quanh của hình nón là:

A. $S_{xq} = 4\pi a^2$

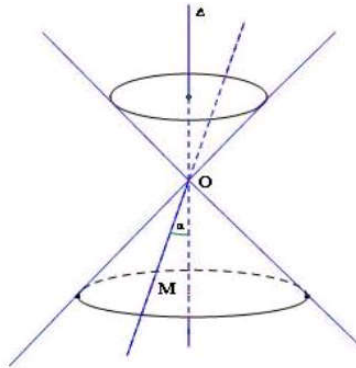
B. $S_{xq} = 2\pi a^2$

C. $S_{xq} = \pi a^2$

D. $S_{xq} = 3\pi a^2$

Hướng dẫn giải:

Chọn B



Góc α được gọi là góc ở đỉnh.

Ta tính được $r = 2a \sin 30^\circ = a \Rightarrow S_{xq} = \pi r l = 2\pi a^2$

Câu 9: [2H2-1] (THPT Lương Thế Vinh, Hà Nội, lần 1 năm 2017) Cho khối tròn xoay có đường cao $h = 15\text{cm}$ và đường sinh $l = 25\text{cm}$. Thể tích V của khối nón là:

A. $V = 2000\pi(\text{cm}^3)$

B. $V = 240\pi(\text{cm}^3)$

C. $V = 500\pi(\text{cm}^3)$

D. $V = 1500\pi(\text{cm}^3)$

Hướng dẫn giải:

Chọn A

Thể tích khối nón tròn xoay $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$. Trong đó r là bán kính đáy, h là chiều cao.

Mối quan hệ giữa các đại lượng h, r, l trong hình nón là $l = \sqrt{h^2 + r^2}$

Bán kính đáy của hình nón là $r = \sqrt{l^2 - h^2} = \sqrt{25^2 - 15^2} = 20$

Thể tích khối tròn xoay là $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot 20^2 \cdot 15 = 2000\pi$

Câu 10: [2H2-3] (Chuyên Trần Phú, Hải Phòng, lần 1 năm 2017): Cắt hình nón đỉnh S bởi mặt phẳng đi qua trục ta được một tam giác vuông cân có cạnh huyền bằng $a\sqrt{2}$. Gọi BC là dây cung của đường tròn đáy hình nón sao cho mặt phẳng (SBC) tạo với mặt phẳng đáy một góc 60° . Tính diện tích tam giác SBC

A. $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{3}$

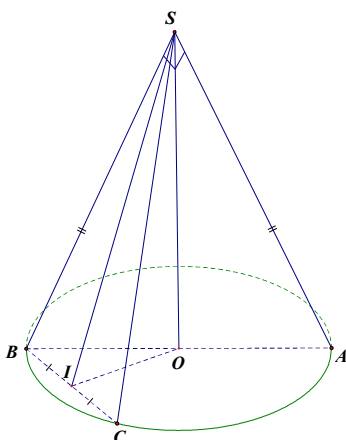
B. $S = \frac{a^2\sqrt{2}}{3}$

C. $S = \frac{a^2}{3}$

D. $S = \frac{a^2\sqrt{2}}{2}$

Hướng dẫn giải:

Đáp án B



$\triangle SAB$ vuông cân ở S , $AB = a\sqrt{2}$, $SA = SB = a$ suy ra $OB = \frac{a\sqrt{2}}{2} = SO$

Gọi I là trung điểm BC , $\triangle SBC$ cân ở S suy ra $SI \perp BC$

Góc $(SBC, \text{đáy}) = \text{góc } SIO = 60^\circ$

$$\sin \widehat{SIO} = \frac{SO}{SI} = \sin 60^\circ \rightarrow SI = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

$$BC = 2BI = 2\sqrt{SB^2 - SI^2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$\Rightarrow S_{\triangle SBC} = \frac{1}{2}SI \cdot BC = \frac{a^2\sqrt{2}}{3}.$$

Câu 11: [2H2-2] Bán kính đáy của hình nón bằng a , diện tích xung quanh bằng hai lần diện tích đáy. Tính thể tích V của khối nón.

A. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}\pi$.

B. $V = a^3\sqrt{3}\pi$.

C. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}\pi$.

D. $V = \frac{4\pi\sqrt{3}a^3}{3}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Gọi h, l, R lần lượt là chiều cao, đường sinh và bán kính đáy của hình nón.

Ta có diện tích xung quanh bằng hai lần diện tích đáy $\Rightarrow l = 2r = 2a$

$h = \sqrt{l^2 - r^2} = a\sqrt{3}$. Vậy thể tích của khối nón là: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}\pi$.

Câu 12: [2H2-1] (THPT Hậu Lộc 4, lần 1 năm 2017): Cho hình nón có đường cao bằng 20cm, bán kính đáy 25cm. Diện tích xung quanh hình nón đó là:

- A. $125\pi\sqrt{41}\text{ cm}^2$ B. $120\pi\sqrt{41}\text{ cm}^2$ C. $480\pi\sqrt{41}\text{ cm}^2$ D. $768\pi\sqrt{41}\text{ cm}^2$

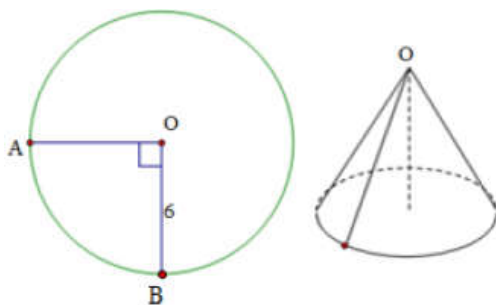
Hướng dẫn giải

Đáp án A

Độ dài đường sinh là: $l = \sqrt{20^2 + 25^2} = 5\sqrt{41}$

Diện tích xung quanh hình nón đó là: $S_{xq} = \pi Rl = \pi \cdot 25 \cdot 5\sqrt{41} = 125\pi\sqrt{41}(\text{cm}^2)$

Câu 13: [2H2-3] (THPT Hậu Lộc 4, lần 1 năm 2017): Cho hình tròn có bán kính là 6. Cắt bỏ $\frac{1}{4}$ hình tròn giữa 2 bán kính OA, OB rồi ghép 2 bán kính đó lại sao cho thành một hình nón (như hình vẽ).



Thể tích khối nón tương ứng đó là:

- A. $\frac{81\pi\sqrt{7}}{8}$ B. $\frac{9\pi\sqrt{7}}{8}$ C. $\frac{81\pi\sqrt{7}}{4}$ D. $\frac{9\pi\sqrt{7}}{2}$

Hướng dẫn giải:

Đáp án A

Độ dài đường sinh l của hình nón bằng bán kính của hình tròn $\Rightarrow l = 6$

Chu vi đáy của hình nón là sau khi bỏ phần tam giác OAB là độ dài cung lớn AB:

$$l_{AB} = \frac{3}{4}(2\pi \cdot 6) = 9\pi$$

Bán kính đáy của hình nón sau khi ghép là: $R_N = \frac{9\pi}{2\pi} = \frac{9}{2}$

Độ dài đường cao của hình nón là: $h = \sqrt{l^2 - R^2} = \sqrt{6^2 - \left(\frac{9}{2}\right)^2} = \frac{3\sqrt{7}}{2}$

Thể tích khối nón đó là: $V = \frac{1}{3}S.h = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot \left(\frac{9}{2}\right)^2 \cdot \frac{3\sqrt{7}}{2} = \frac{81\sqrt{7}\pi}{8}$

Câu 14: [2H2-1] (Sở GD&ĐT tỉnh Thanh Hóa, lần 1 năm 2017): Cho khối nón (α) có thể tích bằng 4π và chiều cao là 3. Tính bán kính đường tròn đáy của khối nón (α).

- A. 2. B. 1. C. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. D. $\frac{4}{3}$.

Hướng dẫn giải**Chọn A**

$$r^2 = \frac{3V}{\pi h} = \frac{3.4\pi}{3\pi} = 4 \Rightarrow r = 2$$

Câu 15: [2H2-2] (Sở GD&ĐT tỉnh Tuyên Quang, năm 2017): Một hình nón có bán kính đáy bằng R , đường cao $\frac{4R}{3}$. Khi đó góc ở đỉnh của hình nón là 2α thỏa mãn đẳng thức:

A. $\sin \alpha = \frac{3}{5}$

B. $\cos \alpha = \frac{3}{5}$

C. $\tan \alpha = \frac{3}{5}$

D. $\cot \alpha = \frac{3}{5}$

Hướng dẫn giải:**Chọn A**

Độ dài đường sinh của hình nón là: $l = \sqrt{R^2 + \left(\frac{4}{3}R\right)^2} = \frac{5}{3}R$. Vậy:

$$\sin \alpha = \frac{R}{\frac{5}{3}R} = \frac{3}{5}$$

Câu 16: [2H2-1] (Sở GD&ĐT tỉnh Kiên Giang, năm 2017) Tính thể tích khối nón, biết khối nón có chu vi đáy là 6π và chiều cao bằng 5.

A. $V = 30\pi$.

B. $V = 45\pi$.

C. $V = 15\pi$.

D. $V = 10\pi$.

Hướng dẫn giải:**Chọn C**

Ta có chu vi đáy là $C = 2\pi R = 6\pi \Rightarrow R = 3$.

Vậy thể tích khối nón là $V = \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot h = \frac{1}{3}\pi \cdot 3^2 \cdot 5 = 15\pi$

Câu 17: [2H2-1] (Sở GD&ĐT tỉnh Long An, năm 2017) Cho hình nón (N) có diện tích toàn phần bằng $24\pi \text{ cm}^2$ và bán kính mặt đáy bằng 3 cm . Tính thể tích V của khối nón (N).

A. $V = 6\pi (\text{cm}^3)$.

B. $V = 24\pi (\text{cm}^3)$.

C. $V = 12\pi (\text{cm}^3)$.

D. $V = 36\pi (\text{cm}^3)$.

Hướng dẫn giải:**Chọn C**

Ta có $S_{tp} = S_{xq} + S_d = \pi R^2 + \pi Rl = \pi \cdot 3^2 + \pi \cdot 3 \cdot l = 24\pi \Rightarrow l = 5 (\text{cm})$. Vậy chiều cao $h = 4 \text{ cm}$

Vậy thể tích khối nón là: $V = \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot h = \frac{1}{3}\pi \cdot 3^2 \cdot 4 = 12\pi$

Câu 18: [2H2-2] (Sở GD&ĐT tỉnh Bắc Giang, lần 2 năm 2017): Cắt một hình nón bởi một mặt phẳng qua trục của nó, ta được thiết diện là một tam giác vuông có diện tích bằng 9. Tính diện tích toàn phần của hình nón.

A. 9π .

B. $6\pi(1 + \sqrt{2})$.

C. $9\pi(1 + \sqrt{2})$.

D. $9\pi\sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải:**Chọn C**

Thiết diện với hình nón qua trục là tam giác cân nên theo giả thiết thiết diện là tam giác vuông cân có cạnh là đường sinh l nên ta có $S = \frac{1}{2}l^2 = 9 \Rightarrow l = 3\sqrt{2}$.

Khi đó bán kính đường tròn đáy và chiều cao của hình nón là $h = R = \frac{l}{\sqrt{2}} = 3$

Vậy diện tích toàn phần của hình nón là: $S_{tp} = \pi R^2 + \pi Rl = 9\pi(1 + \sqrt{2})$

Câu 19: [2H2-1] (Sở GD&ĐT tỉnh Hà Nam, năm 2017): Cho khối nón (N) có bán kính đáy bằng 3 và thể tích bằng 12π . Tính diện tích xung quanh S_{xq} của hình nón (N)?

- A. $S_{xq} = 18\pi$. B. $S_{xq} = 16\pi$. C. $S_{xq} = 24\pi$. D. $S_{xq} = 15\pi$.

Hướng dẫn giải:

Chọn D

Ta có $V = \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot h = \frac{1}{3}\pi \cdot 3^2 \cdot h = 12\pi \Rightarrow h = 4$. Vậy độ dài đường sinh $l = 5$

Vậy $S_{xq} = \pi Rl = \pi \cdot 3 \cdot 5 = 15\pi$

Câu 20: [2H2-2] Một hình nón có độ dài đường sinh bằng $2a$ và mặt phẳng qua trục cắt hình nón theo thiết diện là tam giác vuông. Tính thể tích V của khối nón.

- A. $V = \frac{2\sqrt{2}\pi a^3}{3}$ B. $V = \frac{\sqrt{3}\pi a^3}{3}$ C. $V = \frac{2\sqrt{3}\pi a^3}{3}$ D. $V = \frac{\sqrt{2}\pi a^3}{3}$

Hướng dẫn giải:

Chọn A

Thiết diện qua trục là tam giác vuông cân cạnh $2a$ nên bán kính qua trục và đường cao đều bằng $a\sqrt{2}$. vậy thể tích là $V = \frac{1}{3}\pi \cdot (a\sqrt{2})^2 \cdot a = \frac{2\sqrt{2}\pi a^3}{3}$

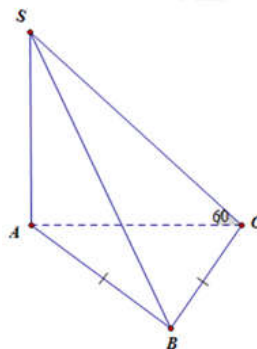
Câu 21: [2H2-1] Một hình nón có thể tích bằng $\frac{4\pi a^3}{3}$ và bán kính của đường tròn đáy bằng $2a$.

Khi đó, đường cao của hình nón là:

- A. a B. $2a$ C. $\frac{a}{2}$ D. $3a$

Hướng dẫn giải:

Chọn A



Ta có $V_n = \frac{1}{3} \cdot S \cdot h = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \pi \cdot (2a)^2 \cdot h = \frac{4\pi a^3}{3} \Rightarrow h = a$.

Câu 22: [2H2-3] Cho hình nón đỉnh S, đường cao SO. Gọi A và B là hai điểm thuộc đường tròn đáy của hình nón sao cho khoảng cách từ O đến AB bằng 2 và $\angle SAO = 30^\circ$; $\angle SAB = 60^\circ$. Tính diện tích xung quanh hình nón

A. $4\pi\sqrt{3}$

B. $\frac{3\pi\sqrt{2}}{4}$

C. $2\pi\sqrt{3}$

D. $3\pi\sqrt{2}$

Hướng dẫn giải:

Chọn A

I là trung điểm của AB thì $OI \perp AB$; $SI \perp AB$; $OI = 2$

Lại có
$$\begin{cases} AO = SA \cdot \cos \angle SAO = SA \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ AI = SA \cdot \cos \angle SAI = \frac{SA}{2} \end{cases}$$

Từ đó ta có $\frac{AI}{AO} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Mặt khác $\frac{AI}{AO} = \cos \angle IAO \Rightarrow \sin \angle IAO = \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{2}{OA} \Rightarrow OA = \sqrt{6}$

Mà $SA = \frac{OA}{\cos 30^\circ} = \sqrt{6} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{2}$

Diện tích xung quanh cần tính là: $S_{xq} = \pi \cdot OA \cdot SA = 4\pi\sqrt{3}$

Câu 23: [2H2-3] Cho hình nón S, đường cao SO. Gọi A, B là hai điểm thuộc đường tròn đáy của hình nón sao cho khoảng cách từ O đến AB bằng a và $\widehat{SAO} = 30^\circ$, $\widehat{SAB} = 60^\circ$. Tính diện tích xung quanh hình nón.

A. $S_{xq} = \frac{3\pi a^2}{2}$

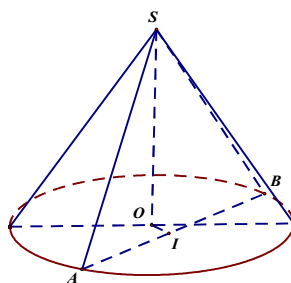
B. $S_{xq} = \frac{\pi a^2}{2}$

C. $S_{xq} = \frac{\pi a^2 \sqrt{3}}{2}$

D. $S_{xq} = \pi a^2 \sqrt{3}$

Hướng dẫn giải:

Đáp án D



Gọi I là trung điểm của AB thì

$OI \perp AB$, $SI \perp AB$, $OI = a$. Ta có $OA = \frac{SA\sqrt{3}}{2}$, $AI = \frac{SA}{2}$

Từ đó $\frac{AI}{OA} = \frac{1}{3}$, mà $\frac{AI}{OA} = \cos \widehat{IAO}$

$\Rightarrow \sin \widehat{IAO} = \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{a}{OA} \Rightarrow OA = \frac{a\sqrt{6}}{2}$, và $SA = a\sqrt{2}$

Vậy $S_{xq} = \pi \cdot OA \cdot SA = \pi a^2 \sqrt{3}$

Câu 24: [2H2-2] (Chuyên Quốc học Huế, lần 2 năm 2017): Một hình nón có bán kính đáy bằng 1 và có thiết diện qua trục là một tam giác vuông cân. Tính diện tích xung quanh của hình nón.

A. $\sqrt{2}\pi$

B. π

C. $2\sqrt{2}\pi$

D. $\frac{1}{\sqrt{2}}\pi$

Hướng dẫn giải:

Chọn A

Thiết diện qua trục là tam giác vuông cân, mà bán kính đáy bằng 1 nên độ dài đường sinh của hình nón là $l = \sqrt{2}$

Vậy diện tích xung quanh của hình nón là: $S_{xq} = \pi Rl = \pi \cdot 1 \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2} \cdot \pi$

Câu 25: [2H2-2] Một hình nón tròn xoay có độ dài đường sinh bằng độ dài đường kính đáy, diện tích đáy của hình nón bằng 4π . Tính chiều cao h của hình nón

A. $h = \sqrt{3}$

B. $h = 2\sqrt{3}$

C. $h = \frac{\sqrt{3}}{2}$

D. $h = 3\sqrt{3}$

Hướng dẫn giải:

Chọn B

$$S = \pi r^2 = 4\pi \Leftrightarrow r = 2 \Rightarrow l = 4 \Rightarrow h = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3}$$

Câu 26: [2H2-1] Cho khối nón có bán kính đáy R , đường sinh ℓ . Thể tích của khối nón được tính theo công thức nào sau đây:

A. $V = \frac{1}{3} \pi R^2 \ell$

B. $V = \frac{1}{3} \pi R^2 \sqrt{\ell^2 + R^2}$

C. $V = \frac{1}{3} \pi R^2 \sqrt{R^2 - \ell^2}$

D. $V = \frac{1}{3} \pi R^2 \sqrt{\ell^2 - R^2}$

Hướng dẫn giải:

Chọn D

$$\text{Vì } \ell^2 = h^2 + R^2 \text{ nên thể tích của khối nón là } V = \frac{1}{3} \pi R^2 h = \frac{1}{3} \pi R^2 \sqrt{\ell^2 - R^2}$$

$$\rightarrow S_{xq} = \pi \cdot a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \pi \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2} \right)^2 R^2 = \pi R^2 \frac{3 + 2\sqrt{3}}{2}$$

Câu 27: [2H2-2] Cho hình nón có chiều cao h và góc ở đỉnh bằng 90° . Thể tích của khối nón xác định bởi hình nón trên

A. $\frac{\sqrt{6}\pi h^3}{3}$

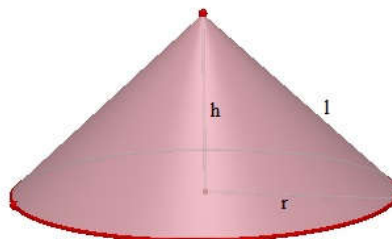
B. $\frac{\pi h^3}{3}$

C. $\frac{2\pi h^3}{3}$

D. $2\pi h^3$

Hướng dẫn giải:

Chọn B



Do góc ở đỉnh của hình nón bằng 90° nên thiết diện qua trục hình nón là tam giác vuông cân. Suy ra bán kính đáy của hình nón là $r = h$

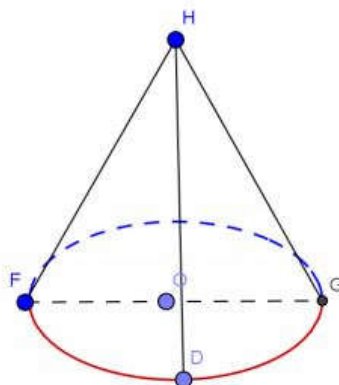
Thể tích khối nón là : $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{\pi h^3}{3}$.

Câu 28: [2H2-2] Cho hình nón đỉnh S, đáy là hình tròn tâm O, thiết diện qua trục là tam giác đều cạnh a, thể tích của khối nón là:

- A. $\frac{1}{6}\pi a^3\sqrt{3}$ B. $\frac{1}{24}\pi a^3\sqrt{3}$ C. $\frac{1}{12}\pi a^3\sqrt{3}$ D. $\frac{1}{8}\pi a^3\sqrt{3}$

Hướng dẫn giải:

Chọn B



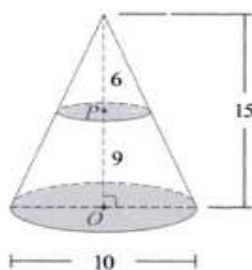
Dựng thiết diện tam giác đi qua trục là tam giác HFG có cạnh bằng a

Nên khối chóp có chiều cao $h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$

$$S_{\text{day}} = \pi r^2 = \pi \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$V = \frac{1}{3}hS = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a \cdot \pi \cdot \frac{a^2}{4} = \frac{1}{24}\pi a^3\sqrt{3}$$

Câu 29: [2H2-3] Cho hình nón có đáy là đường tròn có đường kính 10. Mặt phẳng vuông góc với trục cắt hình nón theo giao tuyến là một đường tròn như hình vẽ. Thể tích của khối nón có chiều cao bằng 6 là:



A. 8π

B. 24π

C. $\frac{200\pi}{9}$

D. 96π

Hướng dẫn giải:

Chọn A

$$\frac{r}{R} = \frac{6}{15} \Rightarrow r = \frac{6.5}{15} = 2. \text{ Vậy } V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = 8\pi$$

Câu 30: [2H2-2] Một hình nón có bán kính đường tròn đáy bằng 1 và thiết diện qua trục là một tam giác vuông cân. Tính diện tích xung quanh hình nón.

A. $\sqrt{2}\pi$.

B. π .

C. $2\sqrt{2}\pi$.

D. $\frac{1}{\sqrt{2}}\pi$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A

Gọi ℓ là độ dài đường sinh của hình nón. Ta có: $2\ell^2 = (2R)^2 = 4 \Rightarrow \ell = \sqrt{2}$.

Diện tích xung quanh của hình nón là: $S_{xq} = \pi r \ell = \pi\sqrt{2}$.

Câu 31: [2H2-2] Cho hình nón có thiết diện qua trục là tam giác vuông cân có cạnh góc vuông bằng 2. Tính diện tích của thiết diện đi qua đỉnh và cắt đáy của hình nón theo cung 120°

A. $\frac{\sqrt{3}}{4}$

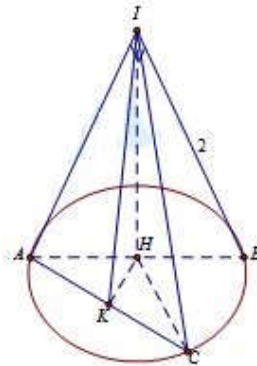
B. $\sqrt{3}$

C. $\sqrt{15}$

D. $\frac{\sqrt{15}}{2}$

Hướng dẫn giải:

Chọn D



Ta có: $AB = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2} \Rightarrow AH = HC = \frac{AB}{2} = \sqrt{2}$

$AC^2 = AH^2 + HC^2 - 2 \cdot AH \cdot HC \cos 120^\circ = 2(\sqrt{2})^2 - 2(\sqrt{2})^2 \left(-\frac{1}{2}\right) = 6 \Rightarrow AC = \sqrt{6}$. Gọi K là trung điểm của AC

Ta có: $KH = \sqrt{AH^2 - AK^2}$

$$= \sqrt{(\sqrt{2})^2 - \left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}; IH = \frac{AB}{2} = \sqrt{2}$$

$$IK = \sqrt{IH^2 + KH^2} = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{5}{2}}; S_{IAC} = \frac{1}{2} IK \cdot AC = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{2}} \cdot \sqrt{6} = \frac{\sqrt{15}}{2}$$

Câu 32: [2H2-2] Thiết diện qua trục hình nón là tam giác vuông cân có độ dài cạnh huyền bằng $2a$. Thể tích hình nón là:

A. $\frac{\pi a^3}{4}$

B. $\frac{\sqrt{2}\pi a^3}{6}$

C. πa^3

D. $\frac{\pi a^3}{3}$

Hướng dẫn giải:

Chọn D

Thiết diện của hình nón với mặt phẳng qua đỉnh của nón là tam giác vuông cân tại đỉnh chóp có độ dài là $2a$ nên ta tính được chiều cao và bán kính đáy của hình nón là a (tương ứng là chiều cao

của tam giác vuông cân tại đỉnh O và thiết diện nó là tam giác vuông cân nên cạnh huyền của tam giác vuông cân sẽ đi qua tâm của đáy)

Vậy thể tích hình cần tính là $V = \frac{\pi a^3}{3}$

Câu 33: [2H2-2] (**Chuyên Thái Bình, lần 4 năm 2017**): Cắt hình nón đỉnh S bởi mặt phẳng đi qua trục ta được một tam giác vuông cân có cạnh huyền bằng $a\sqrt{2}$. Thể tích khối nón theo a là:

A. $\frac{\pi a^3 \sqrt{2}}{12}$

B. $\frac{\pi a^3 \sqrt{2}}{4}$

C. $\frac{\pi a^3}{4}$

D. $\frac{\pi a^3 \sqrt{7}}{3}$

Hướng dẫn giải:

Chọn A

Do thiết diện qua trục là tam giác vuông cân có cạnh huyền bằng $a\sqrt{2}$ nên ta có $R = h = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

Vậy thể tích của khối nón là: $V = \frac{1}{3} \pi R^2 \cdot h = \frac{1}{3} \pi \cdot \left(\frac{a\sqrt{2}}{2} \right)^3 = \frac{\pi a^3 \sqrt{2}}{12}$.

Câu 34: [2H2-3] Một vật N_1 có dạng hình nón có chiều cao bằng 40cm. Người ta cắt vật N_1 bằng một mặt cắt song song với mặt đáy của nó để được một hình nón nhỏ N_2 có thể tích bằng $\frac{1}{8}$ thể tích

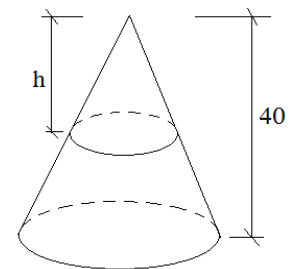
N_1 . Tính chiều cao h của hình nón N_2 ?

A. 5 cm

B. 10 cm

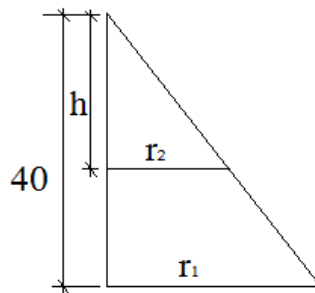
C. 20 cm

D. 40 cm



Hướng dẫn giải:

Đáp án C



Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích của N_1 và N_2 và r_1, r_2 lần lượt là bán kính đáy của N_1, N_2 ta có:

$$\frac{1}{8} = \frac{V_2}{V_1} = \frac{\frac{1}{3} \pi r_2^2 h}{\frac{1}{3} \pi r_1^2 \cdot 40} = \frac{r_2^2 h}{r_1^2 \cdot 40}$$

Mặt khác ta có: $\frac{r_2}{r_1} = \frac{h}{40}$

Do đó ta có: $\frac{1}{8} = \left(\frac{h}{40}\right)^3 \Leftrightarrow \frac{h}{40} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow h = 20 \text{ cm}$

Câu 35: [2H2-2] (THPT Chuyên Hạ Long – Quảng Ninh, lần 1, năm 2017) Cắt hình nón (N) bằng một mặt phẳng đi qua trục của hình nón được thiết diện là một tam giác vuông cân có diện tích bằng $3a^2$. Tính diện tích xung quanh của hình nón (N)

A. $6\pi a^2$

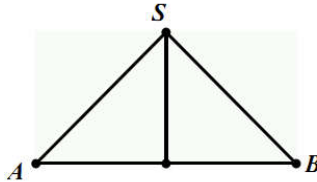
B. $\sqrt{2}\pi a^2$

C. $6\sqrt{2}\pi a^2$

D. $3\sqrt{2}\pi a^2$

Hướng dẫn giải:

Đáp án A



$$V_{SAB} = 3a^2 \Leftrightarrow \frac{(\text{cạnh})^2}{2} = 3a^2 \Leftrightarrow SA = a\sqrt{6} \Rightarrow r = h = a\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow S_{xq} = \pi \cdot a\sqrt{3} \cdot a\sqrt{6} = 3\pi a\sqrt{2}$$

Câu 36: [2H2-2] (Chuyên Lương Thế Vinh – Đồng Nai, lần 1, năm 2017) Một hình nón có diện tích đáy bằng $16\pi dm^2$ và diện tích xung quanh bằng $20\pi dm^2$. Thể tích của khối nón là

A. $16\pi dm^3$.

B. $8\pi dm^3$.

C. $32\pi dm^3$.

D. $\frac{16}{3}\pi dm^3$.

Hướng dẫn giải:

Đáp án A

$$\text{Ta có } \begin{cases} \pi r^2 = 16\pi \\ l\pi r = 20\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = 4 \\ l = 5 \end{cases} \Rightarrow h = 3. \text{ Thể tích khối nón: } V = \frac{1}{3}h \cdot r^2 = 16\pi (dm^3).$$

2. Quay tam giác

Câu 37: [2H2-2] (THPT Phan Đình Phùng, Hà Nội năm 2017) : Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 6, AC = 8$. Tính diện tích xung quanh của hình nón tròn xoay tạo thành khi quay tam giác ABC quanh cạnh AC .

A. $S_{xq} = 160\pi$.

B. $S_{xq} = 80\pi$.

C. $S_{xq} = 120\pi$.

D. $S_{xq} = 60\pi$.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

$$\text{Ta có } S_{xq} = \pi Rl. \text{ Với } l = BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = 10, R = AB = 6$$

$$\text{Vậy } S_{xq} = \pi \cdot 6 \cdot 10 = 60\pi.$$

Câu 38: [2H2-2] (Sở GD&ĐT tỉnh Thái Bình, năm 2017). Trong không gian, cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 2, AC = \sqrt{5}$ quay xung quanh cạnh AC tạo thành hình nón tròn xoay. Tính diện tích xung quanh S_{xq} của hình nón đó.

- A. $S_{xq} = 2\sqrt{5}\pi$ B. $S_{xq} = 12\pi$ C. $S_{xq} = 6\pi$ D. $S_{xq} = 3\sqrt{5}\pi$

Hướng dẫn giải:

Chọn C

Theo giả thiết thì hình nón đã cho có $R = AB = 2, h = AC = \sqrt{5} \Rightarrow l = BC = 3$

Vậy diện tích xung quanh của hình nón là:

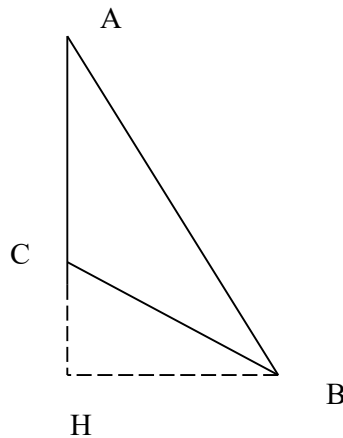
$$S_{xq} = \pi Rl = \pi \cdot 2 \cdot 3 = 6\pi$$

Câu 39: [2H2-3] (THPT Kim Liên, lần 2 năm 2017): Cho tam giác ABC có $AB = \sqrt{13}(cm), BC = \sqrt{5}(cm)$ và $AC = 2(cm)$. Thể tích V của khối tròn xoay được tạo thành khi quay tam giác ABC quanh trục AC .

- A. $V = \frac{10\pi}{3}(cm^3)$. B. $V = 8\pi(cm^3)$. C. $V = \frac{16\pi}{3}(cm^3)$. D. $V = \frac{8\pi}{3}(cm^3)$.

Hướng dẫn giải

Chọn D



Theo Hê rông, diện tích tam giác ABC là: $S = 2$

$$\text{Mặt khác } S = \frac{1}{2} BH \cdot AC = BH = 2$$

$$\text{Vậy } AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = 3 \Rightarrow CH = 1$$

Vậy thể tích khối nón được sinh ra là:

$$V = \frac{1}{3} \pi \cdot BH^2 \cdot AH - \frac{1}{3} \pi \cdot BH^2 \cdot CH = \frac{8}{3} \pi$$

Câu 40: [2H2-2] (THPT Hồng Ngự 2, Đồng Tháp, năm 2017) Cho tam giác AOB vuông tại O , có $\hat{A} = 30^\circ$ và $AB = a$. Quay tam giác AOB quanh trục AO ta được một hình nón có diện tích xung quanh bằng:

- A. $\frac{\pi a^2}{2}$ B. $\frac{\pi a^2}{4}$ C. πa^2 D. $2\pi a^2$

Hướng dẫn giải:

Chọn A

Ta có $\sin A = \frac{OB}{AB} \Rightarrow OB = \sin A \cdot AB = \frac{1}{2}a = R$

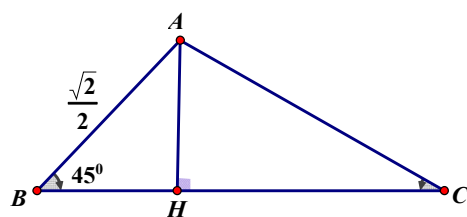
Vậy diện tích xung quanh của hình nón là: $S_{xq} = \pi Rl = \pi \cdot \frac{1}{2}a \cdot a = \frac{1}{2}\pi a^2$

Câu 41: [2H2-3] Cho tam giác ABC có $\widehat{ABC} = 45^\circ$, $\widehat{ACB} = 30^\circ$, $AB = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Quay tam giác quanh cạnh BC , ta được khối tròn xoay có thể tích bằng

A. $V = \frac{\pi(1+\sqrt{3})}{24}$. **B.** $V = \frac{\pi\sqrt{3}(1+\sqrt{3})}{72}$. **C.** $V = \frac{\pi(1+\sqrt{3})}{3}$. **D.** $V = \frac{\pi(1+\sqrt{3})}{8}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A



Từ A kẻ $AH \perp BC$. Khi đó tam giác ABH vuông cân tại H , có $AB = \frac{\sqrt{2}}{2}$ nên $AH = BH = \frac{1}{2}$

Tam giác AHC vuông tại H có góc $C = 30^\circ$, $AH = \frac{1}{2}$ nên $HC = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Thể tích khối tròn xoay được tính bằng tổng thể tích hai khối nón được sinh ra khi quay bởi tam giác ABH, ACH .

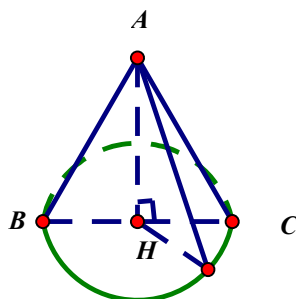
$$V = \frac{1}{3}BH \cdot \pi \cdot AH^2 + \frac{1}{3}CH \cdot \pi \cdot AH^2 = \frac{\pi(1+\sqrt{3})}{24}$$

Câu 42: [2H2-2] Cho tam giác ABC đều cạnh bằng 4 cm quay xung quanh đường cao AH tạo nên một hình nón. Thể tích của khối nón đó là:

A. $\frac{4\sqrt{3}}{3}\pi(\text{cm}^3)$ **B.** $\frac{32\sqrt{3}}{3}\pi(\text{cm}^3)$ **C.** $\frac{8\sqrt{3}}{3}\pi(\text{cm}^3)$ **D.** $\frac{16\sqrt{3}}{3}\pi(\text{cm}^3)$

Hướng dẫn giải:

Chọn C.



Theo giả thiết ta có $h = AH = \frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$ và $r = \frac{BC}{2} = \frac{4}{2} = 2$.

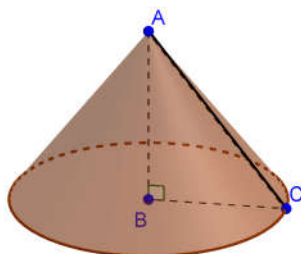
Thể tích của khối nón $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi 2^2 \cdot 2\sqrt{3} = \frac{8\sqrt{3}}{3}\pi$

Câu 43: [2H2-2] (**Chuyên ĐHSPT Hà Nội, năm 2017**): Tam giác ABC vuông tại B có $AB = 3a$, $BC = a$. Khi quay hình tam giác đó quanh đường thẳng AB một góc 360° ta được một khối tròn xoay. Thể tích của khối tròn xoay đó là:

- A. πa^3 . B. $\frac{\pi a^3}{2}$. C. $\frac{\pi a^3}{3}$. D. $3\pi a^3$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.



Theo đề bài ta thu được hình nón có $h = AB = 3a$, $R = BC = a$.

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}\pi a^2 \cdot 3a = \pi a^3$$

Câu 44: [2H2-2] (**Chuyên Lương Văn Tụy, lần 1 năm 2017**). Tam giác ABC vuông tại A cạnh $AB = 6$, cạnh $AC = 8$, M là trung điểm của cạnh AC . Tính thể tích khối tròn xoay do tam giác BMC qua 1 vòng quanh cạnh AB là:

- A. 98π B. 108π C. 96π D. 86π

Hướng dẫn giải:

Chọn C

Khi quay tam giác BMC quanh cạnh AB ta thấy khối tròn xoay tạo ra sẽ là hình có thể tích bằng thể tích hình nón có đường cao là cạnh AB và đường sinh là cạnh BC trừ đi hình nón có đường cao là cạnh AB và đường sinh là cạnh huyền BM của tam giác ABM .

Khi đó thể tích khối tròn xoay tạo ra là $V = \frac{1}{3}AB \cdot \pi \cdot AC^2 - \frac{1}{3}AB \cdot \pi \cdot AM^2 = 96\pi$

Câu 45: [2H2-3] (**Chuyên Lương Văn Tụy, lần 1 năm 2017**). Tam giác ABC vuông tại B , $AB = 10$, $BC = 4$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, AC . Thể tích khối tròn xoay do hình thang vuông $BMNC$ quay một vòng quanh MB là:

- A. $\frac{40\pi}{3}$ B. $\frac{20\pi}{3}$ C. $\frac{102\pi}{3}$ D. $\frac{140\pi}{3}$

Hướng dẫn giải:

Chọn D

Thể tích hình cần tính là hiệu thể tích của hình nón có bán kính đáy là BC, chiều cao là AB và hình nón có bán kính đáy là MN, chiều cao là AM.

$$V = \frac{1}{3}\pi(10.4^2 - 5.2^2) = \frac{140\pi}{3}$$

Câu 46: [2H2-2] (**Chuyên Vĩnh Phúc, lần 3 năm 2017**): Cho hình tam giác ABC vuông tại A có $\widehat{ABC} = 30^\circ$ và cạnh góc vuông $AC = 2a$ quay quanh cạnh AC tạo thành hình nón tròn xoay có diện tích xung quanh bằng:

A. $16\pi a^2\sqrt{3}$

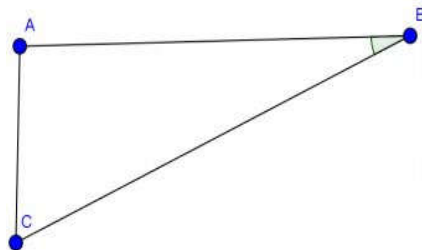
B. $8\pi a^2\sqrt{3}$

C. $2\pi a^2$

D. $\frac{4}{3}\pi a^2\sqrt{3}$

Hướng dẫn giải:

Đáp án B



$AC = 2a$; Suy ra $AB = 2\sqrt{3}a$; $BC = 4a$

Khi quay quanh cạnh AC ta được một hình nón

Có đường sinh $l = 4a$ và bán kính đáy là $2\sqrt{3}a$

Diện tích xung quanh: $S = \pi rl = \pi 2\sqrt{3}a.4a = 8\pi a^2\sqrt{3}$.

Câu 47: [2H2-2] Một tam giác ABC vuông tại A với $AB = 6, AC = 8$. Cho hình tam giác ABC quay quanh cạnh AC ta được hình nón có diện tích xung quanh và diện tích toàn phần lần lượt là S_1, S_2 . Khi đó

A. $\frac{S_1}{S_2} = \frac{8}{5}$

B. $\frac{S_1}{S_2} = \frac{5}{8}$

C. $\frac{S_1}{S_2} = \frac{5}{13}$

D. $\frac{S_1}{S_2} = \frac{9}{5}$

Hướng dẫn giải:

Chọn D

Khi quay tam giác ABC quanh cạnh AC ta được khối nón có đường cao là AC, bán kính đường tròn đáy là AB và độ dài đường sinh là BC.

$$\text{Khi đó } \frac{S_1}{S_2} = \frac{\pi rl}{\pi rl + \pi r^2} = \frac{l}{r+l} = \frac{10}{10+6} = \frac{5}{8}$$

Câu 48: [2H2-3] Tam giác ABC vuông tại B. $AB = 2a, BC = a$. Cho tam giác ABC quay một vòng quanh cạnh huyền AC. Gọi V_1 là thể tích khối nón có đường sinh AB, V_2 là thể tích khối nón có đường sinh BC. Khi đó tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$ bằng

A. 3

B. 4

C. 2

D. $2\sqrt{2}$

Hướng dẫn giải:

Chọn B

Khi quay hình tam giác ABC quanh cạnh AC thì hình nón có đường sinh là AB thì sẽ nhận BH là bán kính hình tròn đáy, và hình nón nhận BC là đường sinh sẽ nhận BH là bán kính hình tròn đáy (với H là chân đường cao từ B xuống AC)

$$\text{Ta có } HB = \frac{2\sqrt{5}}{5}a \Rightarrow AH = \frac{4\sqrt{5}}{5}, CH = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\text{Ta có } \frac{V_1}{V_2} = \frac{AH}{CH} = 4$$

Câu 49: [2H2-2] Cho tam giác ABO vuông tại O, có góc $BAO = 30^\circ$, $AB = a$. Quay tam giác ABO quanh trục AO ta được một hình nón có diện tích xung quanh bằng:

- A. πa^2 B. $2\pi a^2$ C. $\frac{\pi a^2}{2}$ D. $\frac{\pi a^2}{4}$

Hướng dẫn giải:

Chọn C

Hình nón thu được có đường sinh $l = AB = a$; bán kính đáy $r = OB = AB \cdot \sin 30^\circ = \frac{a}{2}$ và diện tích

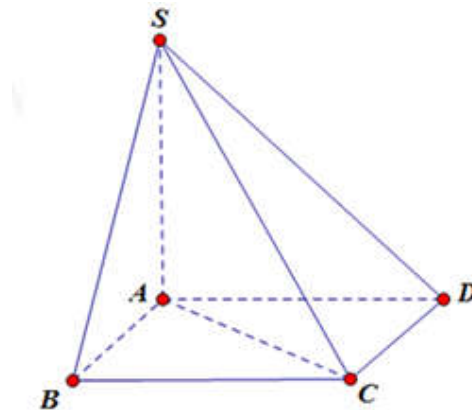
$$\text{xung quanh là } S_{xq} = \pi r l = \frac{\pi a^2}{2}$$

Câu 50: [2H2-3] Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với đáy $SC = a\sqrt{6}$. Khi tam giác SAC quay quanh cạnh SA thì đường gấp khúc SAC tạo thành một hình nón tròn xoay. Thể tích của khối nón tròn xoay đó là:

- A. $\frac{4\pi a^3}{3}$ B. $\frac{a^3 \pi \sqrt{2}}{6}$ C. $\frac{\pi a^3 \sqrt{3}}{3}$ D. $\frac{\pi a^3 \sqrt{3}}{6}$

Hướng dẫn giải:

Chọn A



$$\text{Ta có ngay } AC = a\sqrt{2} \Rightarrow SA = \sqrt{SC^2 - AC^2} = \sqrt{6a^2 - 2a^2} = 2a$$

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 h = \frac{1}{3} \pi AC^2 \cdot SA = \frac{1}{3} \pi \cdot 2a^2 \cdot 2a = \frac{4\pi a^3}{3}.$$

Câu 51: [2H2-2] Trong không gian, cho tam giác ABC vuông tại C có đường cao kẻ từ C là $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $CA = a$. Khi đó đường sinh l của hình nón nhận được khi quay tam giác ABC qua trục CA là?

- A. $l = a$ B. $l = \sqrt{2}a$ C. $l = \sqrt{3}a$ D. $l = 2a$

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Đường sinh của hình nón quay được thực chất chính là cạnh huyền AB của tam giác vuông ABC . Mà tam giác vuông đã có một cạnh bên và đường cao, ta chỉ cần áp dụng công thức hệ thức lượng trong tam giác:

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{CA^2} + \frac{1}{CB^2} \Leftrightarrow \frac{4}{3a^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{CB^2}$$

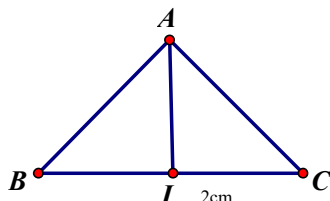
$$\Rightarrow CB = a\sqrt{3} \Rightarrow AB = 2a \text{ (theo định lý Pytago).}$$

Câu 52: [2H2-2] (**Chuyên Phan Bội Châu, lần 1 năm 2017**): Trong không gian, cho tam giác ABC là tam giác vuông cân tại A , gọi I là trung điểm của BC , $BC = 2$. Tính diện tích xung quanh của hình nón nhận được khi quay tam giác ABC quanh trục AI .

- A. $S_{xq} = \sqrt{2}\pi$. B. $S_{xq} = 2\pi$. C. $S_{xq} = 2\sqrt{2}\pi$. D. $S_{xq} = 4\pi$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.



Hình nón nhận được khi quay $\triangle ABC$ quanh trục AI có bán kính IB và đường sinh AB .

$\triangle ABC$ vuông cân tại A nên: $AI = BI = 1\text{cm}$ và $AB = AI \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2}$

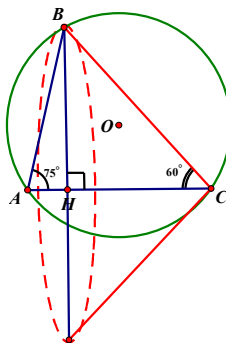
$$S_{xq} = \pi \cdot r \cdot l = \pi \cdot 1 \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2}\pi$$

Câu 53: [2H2-3] (**THPT Chuyên Thái Nguyên, lần 3, năm 2017**) Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn tâm O , bán kính R có $\widehat{BAC} = 75^\circ$, $\widehat{ACB} = 60^\circ$. Kẻ $BH \perp AC$. Quay $\triangle ABC$ quanh AC thì $\triangle BHC$ tạo thành hình nón xoay (N). Tính diện tích xung quanh của hình nón tròn xoay (N) theo R .

- A. $\frac{3+2\sqrt{2}}{2}\pi R^2$. B. $\frac{3+2\sqrt{3}}{2}\pi R^2$. C. $\frac{\sqrt{3}(\sqrt{2}+1)}{4}\pi R^2$. D. $\frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{4}\pi R^2$.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.



Hình nón (N) có đường sinh là đoạn $l = BC$, đường cao $h = CH$ và bán kính $r = BH$

Trong $\triangle ABC$ ta có $BC = 2R \sin 75^\circ$

Trong $\triangle BHC$ ta có $BH = BC \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} BC$

Diện tích xung quanh hình nón (N):

$$S_{xq} = \pi r l = \pi \cdot BC \cdot BH = \pi \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} BC^2 = \pi \frac{3+2\sqrt{3}}{2} R^2$$

Câu 54: [2H2-3] (Chuyên Phan Bội Châu - Nghệ An, lần 1, năm 2017) Cho tam giác ABC vuông tại A , $AB = 3a$, $AC = 4a$. Gọi M là trung điểm của AC . Khi qua quanh AB , các đường gấp khúc AMB , ACB sinh ra các hình nón có diện tích xung quanh lần lượt là S_1 , S_2 . Tính tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$.

A. $\frac{S_1}{S_2} = \frac{\sqrt{13}}{10}$.

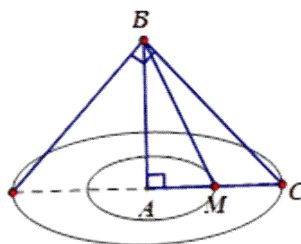
B. $\frac{S_1}{S_2} = \frac{1}{4}$.

C. $\frac{S_1}{S_2} = \frac{\sqrt{2}}{5}$.

D. $\frac{S_1}{S_2} = \frac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.



$$S_1 = \pi r_1 l_1 = \pi \cdot \frac{AC}{2} \cdot \sqrt{AB^2 + \left(\frac{AC}{2}\right)^2} = 2\pi\sqrt{13}; S_2 = \pi r_2 l_2 = \pi \cdot AC \cdot \sqrt{AB^2 + AC^2} = 20\pi.$$

Do đó $\frac{S_1}{S_2} = \frac{\sqrt{13}}{10}$.

3. Mặt nón ngoại tiếp khối đa diện

Câu 55: [2H2-3] Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $2a$, góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng 30° . Tính diện tích xung quanh mặt nón và thể tích của khối nón có đỉnh S và đáy là đường tròn ngoại tiếp đáy hình chóp $S.ABCD$.

A. $S_{xq} = \pi a^2; V = \frac{2\sqrt{6}\pi a^3}{9}$.

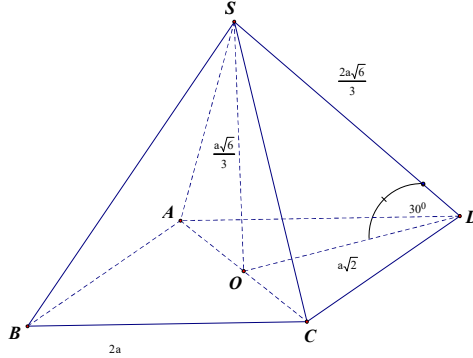
B. $S_{xq} = \pi a^2; V = \frac{\pi a^3 \sqrt{6}}{12}$.

C. $S_{xq} = \frac{4\sqrt{3}\pi a^2}{3}; V = \frac{\pi a^3 \sqrt{6}}{12}$.

D. $S_{xq} = \frac{4\sqrt{3}\pi a^2}{3}; V = \frac{2\sqrt{6}\pi a^3}{9}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn D



Tính được $OD = OC = a\sqrt{2}, SO = \frac{a\sqrt{6}}{3}; SD = \frac{2a\sqrt{6}}{3}$

$S_{xq} = SD \cdot \pi \cdot OC = \frac{4\sqrt{3}\pi a^2}{3}; V = \frac{1}{3} SO \cdot \pi \cdot OC^2 = \frac{2\sqrt{6}\pi a^3}{9}$

Câu 56: [2H2-3] Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh đáy bằng a, cạnh bên hợp với mặt đáy góc 60° . Hình nón có đỉnh S, đáy là đường tròn nội tiếp tứ giác ABCD có diện tích xung quanh là

A. $S = 2\pi a^2$

B. $S = \frac{\sqrt{7}\pi a^2}{4}$

C. $S = \pi a^2$

D. $S = \frac{\pi a^2}{2}$

Hướng dẫn giải:

Chọn C

Hình chóp tứ giác đều là hình chóp có đáy là hình vuông và đường cao của hình chóp đi qua tâm O của đáy.

Gọi O là tâm của đáy ABCD. Ta có

$SO \perp (ABCD) \Rightarrow SO \perp OD$. Từ đó ta có một trong các góc giữa cạnh bên và đáy là góc $SDO = 60^\circ$

$\Rightarrow SO = OD \tan 60^\circ = \frac{a}{\sqrt{2}} \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{6}}{2}$

$\Rightarrow l = SD = \sqrt{SO^2 + OD^2} = a\sqrt{2}$

Diện tích xung quanh hình nón cần tính là

$S_{xq} = \pi r l = \pi \cdot OD \cdot SD = \pi a^2$

Câu 57: [2H2-3] Hình nón tròn xoay ngoại tiếp tứ diện đều cạnh bằng a, có diện tích xung quanh là:

A. $S_{xq} = \frac{\pi a^2}{3}$.

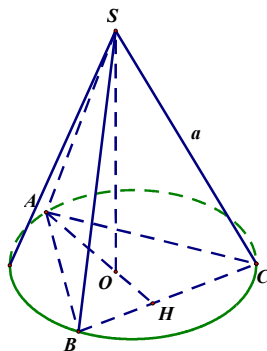
B. $S_{xq} = \frac{\pi a^2 \sqrt{2}}{3}$.

C. $S_{xq} = \frac{\pi a^2 \sqrt{3}}{3}$.

D. $S_{xq} = \frac{\pi a^2 \sqrt{3}}{6}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.



Kẻ $SO \perp (ABC)$, $SH \perp BC \Rightarrow OH \perp BC$

$$\text{Ta có } OA = \frac{2}{3} AH = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$S_{xq} = \pi OA \cdot SA = \pi \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot a = \frac{\pi a^2 \sqrt{3}}{3}.$$

Câu 58: [2H2-3] Cho hình nón đỉnh S. Xét hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác ngoại tiếp đường tròn đáy của hình nón và có $AB = BC = 10a$, $AC = 12a$, góc tạo bởi hai mặt phẳng (SAB) và (ABC) bằng 45° . Tính thể tích khối nón đã cho.

A. $9\pi a^3$

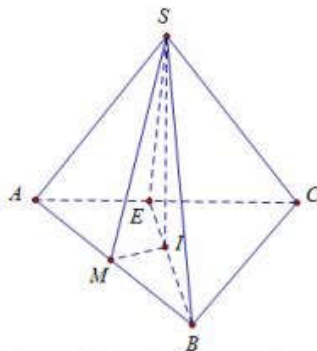
B. $12\pi a^3$

C. $27\pi a^3$

D. $3\pi a^3$

Hướng dẫn giải:

Chọn A



Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC cũng là tâm đường tròn đáy của hình nón.

Gọi E là trung điểm của AC khi đó $BE = \sqrt{AB^2 - AE^2} = 8a$.

$$P = \frac{AB + BC + CA}{2} = 16a \Rightarrow r = \frac{S_{ABC}}{P} = 3$$

Dựng $IM \perp AB \Rightarrow AB \perp (SMI) \Rightarrow \widehat{SMI} = 45^\circ$

Mặt khác $IM = r = 3a \Rightarrow SI = IM \tan 45^\circ = 3a$

$$\text{Vậy } V_{(N)} = \frac{1}{3} SI \cdot \pi r^2 = 9\pi a^3$$

Câu 59: [2H2-3] Cho hình lập phương cạnh a . Gọi O là tâm của hình vuông ABCD. Khi đó thể tích của khối nón có đỉnh là O và đáy là hình tròn nội tiếp hình vuông $A'B'C'D'$ bằng:

A. $\frac{1}{4}\pi a^3$ (đvtt)

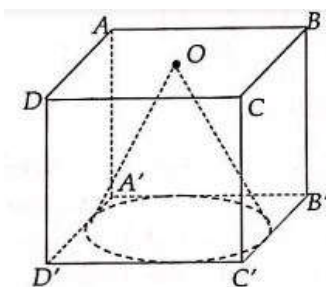
B. $\frac{1}{3}\pi a^3$ (đvtt)

C. $\frac{1}{12}\pi a^3$ (đvtt)

D. $\frac{1}{2}\pi a^3$ (đvtt)

Hướng dẫn giải:

Chọn C



Do đường tròn đáy của hình nón nội tiếp hình vuông $A'B'C'D'$ nên độ dài đường kính hình

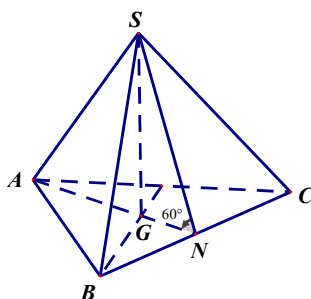
tròn $d = a \Rightarrow R = \frac{a}{2}$. Khi đó $V = \frac{1}{3} \cdot a \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 \pi = \frac{a^3}{12} \pi$

Câu 60: [2H2-3] (Chuyên Phan Bội Châu - Nghệ An, lần 1, năm 2017) Cho hình chóp đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a , góc giữa mặt bên và đáy bằng 60° . Tính diện tích xung quanh S_{xq} của hình nón đỉnh S , có đáy là hình tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

A. $S_{xq} = \frac{\pi a^2 \sqrt{3}}{3}$. B. $S_{xq} = \frac{\pi a^2 \sqrt{10}}{8}$. C. $S_{xq} = \frac{\pi a^2 \sqrt{7}}{4}$. D. $S_{xq} = \frac{\pi a^2 \sqrt{7}}{6}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.



Hình nón đỉnh S và đáy là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có:

$$\text{Bán kính đường tròn đáy } r = AG = \frac{2}{3} AN = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{Đường sinh } l = SA = \sqrt{SG^2 + AG^2} = \sqrt{(GN \tan 60^\circ)^2 + AG^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{6} \sqrt{3}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{7}{12}} a$$

$$\text{Diện tích xung quanh: } S_{xq} = \pi r l = \frac{\pi a^2 \sqrt{7}}{6}$$

Câu 61: [2H2-3] Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a , góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng 60° . Tính thể tích của hình nón có đỉnh S và đáy là đường tròn ngoại tiếp đáy hình chóp $S.ABCD$.

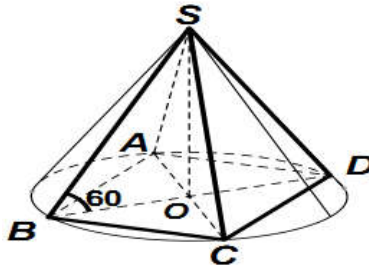
A. $S_{xq} = \pi a^2$; $V = \frac{\pi a^3 \sqrt{6}}{12}$ B. $S_{xq} = \pi a^2$; $V = \frac{\pi a^3 \sqrt{3}}{12}$

C. $S_{xq} = 2\pi a^2$; $V = \frac{\pi a^3 \sqrt{3}}{12}$

D. $S_{xq} = 2\pi a^2$; $V = \frac{\pi a^3 \sqrt{6}}{6}$

Hướng dẫn giải:

Đáp án B



Gọi O là tâm của hình vuông ABCD. Do S.ABCD là hình chóp đều nên $SO \perp (ABCD)$

Suy ra, OB là hình chiếu vuông góc của SB lên mp(ABCD)

Do đó, $\widehat{SBO} = 60^\circ$. Kết hợp $r = OB = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ ta suy ra :

$$h = SO = OB \cdot \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$$

$$\text{Thể tích hình nón: } V = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot h = \frac{1}{3} \pi \left(\frac{a\sqrt{2}}{2} \right)^2 \cdot \frac{a\sqrt{6}}{2} = \frac{\pi a^3 \sqrt{6}}{12}$$

Câu 62: [2H2-3] Cho S.ABCD là hình chóp tứ giác đều, cạnh đáy a, cạnh bên hợp với đáy góc 45° . Hình tròn xoay đỉnh S, đáy là đường tròn nội tiếp hình vuông ABCD, có diện tích xung quanh là:

A. $S_{xq} = 2\pi a^2$ B. $S_{xq} = \pi a^2$ C. $S_{xq} = \frac{\pi a^2}{2}$ D. $S_{xq} = \frac{\pi a^2}{4}$

Hướng dẫn giải:

Đáp án C

Hình tròn xoay này là hình nón. Kẻ $SO \perp (ABCD)$ thì O là tâm của hình vuông ABCD. Do

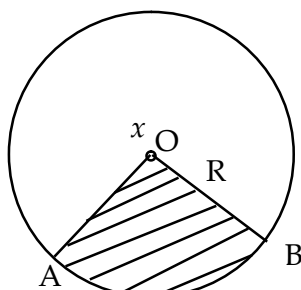
$\triangle SOA$ vuông cân tại O nên

$$SA = OA\sqrt{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{2} = a$$

$$S_{xq} = \pi \frac{AB}{2} \cdot SA = \pi \cdot \frac{a}{2} \cdot a = \frac{\pi a^2}{2}$$

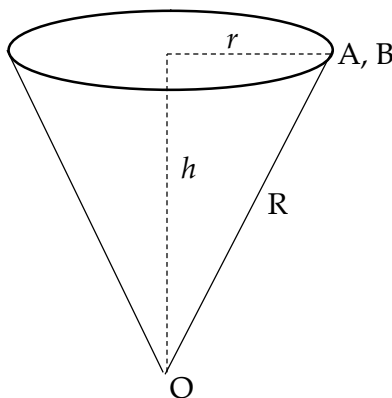
4. Vận dụng cao

Câu 63: [2H2-4] Hoàn có một tấm bìa hình tròn như hình vẽ, Hoàn muốn biến hình tròn đó thành một hình cái phễu hình nón. Khi đó Hoàn phải cắt bỏ hình quạt tròn AOB rồi dán hai bán kính OA và OB lại với nhau (diện tích chỗ dán nhỏ không đáng kể). Gọi x là góc ở tâm hình quạt tròn dùng làm phễu. Tìm x để thể tích phễu lớn nhất?



A. $\frac{2\sqrt{6}}{3}\pi$

B. $\frac{\pi}{3}$



C. $\frac{\pi}{2}$

D. $\frac{\pi}{4}$

Hướng dẫn giải: Đáp án A

$$l_{AB} = Rx; r = \frac{Rx}{2\pi}.$$

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{24\pi^2} R^3 \sqrt{x^4(4\pi^2 - x^2)} = \frac{1}{24\sqrt{2}\pi^2} R^3 \sqrt{x^2 x^2 (8\pi^2 - 2x^2)}$$

$$\text{Để } V \text{ lớn nhất thì } x^2 = 8\pi^2 - 2x^2 \Leftrightarrow x = \frac{2\sqrt{6}\pi}{3}.$$

Câu 64: [2H2-4] Cho hình nón tròn xoay có đỉnh S và đáy là đường tròn $C(O;R)$ với $R=a$ ($a>0$), $SO=2a, O' \in SO$ thỏa mãn $OO'=x$ ($0<x<2a$), mặt phẳng (α) vuông góc với SO tại O' cắt hình nón tròn xoay theo giao tuyến là đường tròn (C') . Thể tích khối nón đỉnh O đáy là đường tròn (C') đạt giá trị lớn nhất khi

A. $x = \frac{a}{2}$

B. $x = a$

C. $x = \frac{a}{3}$

D. $x = \frac{2a}{3}$

Hướng dẫn giải: Đáp án D

$$\text{Theo Định lý Ta-lét } \frac{R'}{R} = \frac{2a-x}{2a}. \text{ Suy ra } R' = \frac{R}{2a}(2a-x).$$

Khi đó thể tích khối nón đỉnh O đáy là đường tròn (C') là

$$V = \frac{1}{3}\pi x \left[\frac{R}{2a}(2a-x) \right]^2 = \frac{\pi R^2}{12a^2} x(2a-x)^2.$$

$$\text{Xét } f(x) = x(2a-x)^2 \text{ trên } (0;2a) \text{ ta có } f(x) \text{ đạt giá trị lớn nhất khi } x = \frac{2a}{3}.$$

Câu 65: [2H2-4] Một công ty sản xuất một loại cốc giấy hình nón có thể tích 27cm^3 với chiều cao là h và bán kính đáy là r . để lượng giấy tiêu thụ là ít nhất thì giá trị của r là:

A. $r = \sqrt[4]{\frac{3^6}{2\pi^2}}$

B. $r = \sqrt[6]{\frac{3^8}{2\pi^2}}$

C. $r = \sqrt[4]{\frac{3^8}{2\pi^2}}$

D. $r = \sqrt[6]{\frac{3^6}{2\pi^2}}$

Hướng dẫn giải: Đáp án B

$$\text{Thể tích của cốc: } V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = 27 \Rightarrow r^2 h = \frac{81}{\pi} \Rightarrow h = \frac{81}{\pi} \cdot \frac{1}{r^2}$$

Lượng giấy tiêu thụ ít nhất khi và chỉ khi diện tích xung quanh nhỏ nhất.

$$\begin{aligned} S_{xq} &= 2\pi r l = 2\pi r \sqrt{r^2 + h^2} = 2\pi r \sqrt{r^2 + \frac{81^2}{\pi^2} \frac{1}{r^4}} = 2\pi \sqrt{r^4 + \frac{81^2}{\pi^2} \frac{1}{r^2}} \\ &= 2\pi \sqrt{r^4 + \frac{81^2}{2\pi^2} \frac{1}{r^2} + \frac{81^2}{2\pi^2} \frac{1}{r^2}} \geq 2\pi \sqrt{3 \sqrt[3]{r^4 \cdot \frac{81^2}{2\pi^2} \frac{1}{r^2} \cdot \frac{81^2}{2\pi^2} \frac{1}{r^2}}} \\ &= 2\sqrt{3} \pi \sqrt[6]{\frac{81^4}{4\pi^4}} \quad (\text{theo BĐT Cauchy}) \\ S_{xq} \text{ nhỏ nhất} &\Leftrightarrow r^4 = \frac{81^2}{2\pi^2} \frac{1}{r^2} \Leftrightarrow r^6 = \frac{3^8}{2\pi^2} \Leftrightarrow r = \sqrt[6]{\frac{3^8}{2\pi^2}} \end{aligned}$$

Câu 66: [2H2-4] (THPT Chuyên Trần Phú – Hải Phòng, lần 1, năm 2017) Cho khối nón đỉnh O, chiều cao là h. Một khối nón khác có đỉnh là tâm I của đáy và đáy là một thiết diện song song với đáy của hình nón đã cho. Để thể tích của khối nón đỉnh I lớn nhất thì chiều cao của khối nón này bằng bao nhiêu?

- A. $\frac{h}{2}$ B. $\frac{h\sqrt{3}}{3}$ C. $\frac{2h}{3}$ D. $\frac{h}{3}$

Hướng dẫn giải: Đáp án D

- Phương pháp

+ Công thức tính thể tích khối nón $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$

+ $V_1 = \frac{1}{3} \pi n h (1-n)^2 r^2$ (ĐK: $0 < n < 1$)

+ Từ trên ta thấy $V_1 = f(n) \cdot V \Rightarrow V_{1\max}$ khi $f(n)_{\max}$

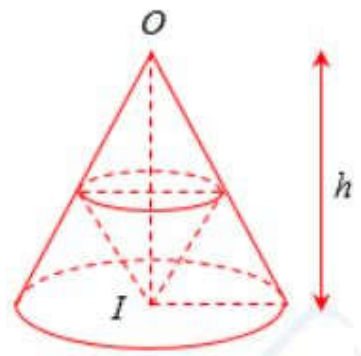
+ Khảo sát $f(n)$ để tìm n cho $f(n)_{\max}$

- Cách giải: Ta có: $f(n) = n(1-n)^2 = n^3 - 2n^2 + n$ (đk: $0 < n < 1$)

$$y' = 3n^2 - 4n + 1$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n = 1(L) \\ n = \frac{1}{3}(TM) \end{cases}$$

$$+ n = \frac{1}{3} \text{ thì } h_1 = \frac{h}{3} \Rightarrow r_1 = \frac{2r}{3} \Rightarrow V_1 = \frac{4}{81} \pi h^3$$

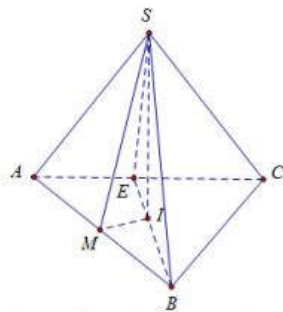


Câu 67: [2H2-4] (Chuyên Đại học Vinh, lần 3, năm 2017) Cho hình nón đỉnh S. Xét hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác ngoại tiếp đường tròn đáy của hình nón và có $AB = BC = 10a$, $AC = 12a$, góc tạo bởi hai mặt phẳng (SAB) và (ABC) bằng 45° . Tính thể tích khối nón đã cho.

- A. $9\pi a^3$ B. $12\pi a^3$ C. $27\pi a^3$ D. $3\pi a^3$

Hướng dẫn giải:

Đáp án A



Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC cũng là tâm đường tròn đáy của hình nón.

Gọi E là trung điểm của AC khi đó $BE = \sqrt{AB^2 - AE^2} = 8a$.

$$P = \frac{AB + BC + CA}{2} = 16a \Rightarrow r = \frac{S_{ABC}}{P} = 3$$

Dựng $IM \perp AB \Rightarrow AB \perp (SMI) \Rightarrow \widehat{SMI} = 45^\circ$

Mặt khác $IM = r = 3a \Rightarrow SI = IM \tan 45^\circ = 3a$

$$\text{Vậy } V_{(N)} = \frac{1}{3} SI \cdot \pi r^2 = 9\pi a^3$$

MỤC LỤC

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ	1
B. BÀI TẬP MẪU	2
C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN	3
D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM	3
1. Tính diện tích, thể tích mặt nón đơn thuần	3
2. Quay tam giác	16
3. Mặt nón ngoại tiếp khối đa diện	23