Chương 2. Hệ phương trình tuyến tính

§1. KHÁI NIỆM VỀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

1.1. Định nghĩa. *Hệ phương trình tuyến tính tổng quát* là hệ gồm m phương trình, n ẩn $(m, n \in \mathbb{N}^*)$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad \text{(I)}$$

trong đó: $x_j (j = \overline{1, n})$: được gọi là các ẩn của hệ

$a_{ij} (i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n})$: được gọi là các hệ số của ẩn

$b_i (i = \overline{1, m})$: được gọi là các hệ số tự do

Ký hiệu:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}=(a_{ij})_{m\times n}; \quad \overline{A}=\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

Ma trận hệ số

Ma trận bổ sung của hệ

$$B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_m \end{pmatrix}^T; \quad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix}^T$$

Ma trận hệ số tự do

Ma trận ẩn

Khi đó hệ (I) được viết dưới dạng AX = B; (II): được gọi là dạng ma trận của hệ phương trình tuyến tính

1.2. Nghiệm của hệ phương trình tuyến tính.

- Bộ số $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ được gọi là nghiệm của hệ (I) nếu $A\alpha = B$, với $\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n \end{pmatrix}^T$. Tập hợp tất cả các nghiệm của một hệ phương trình được gọi là *tập hợp nghiệm* của hệ phương trình đó.

- Hai hệ phương trình tuyến tính có cùng ẩn số được gọi là tương đương nếu chúng có cùng tập hợp nghiệm.

§2. CÁC PHƯƠNG PHÁP GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

2.1. Định lý Kronecker – Capeli. Hệ phương trình tuyến tính tổng quát (I) có nghiệm khi và chỉ khi $r(A) = r(\overline{A})$

2.2. Giải hệ phương trình tuyến tính bằng phương pháp Gauss

Xét hệ phương trình tuyến tính tổng quát: $AX = B$

Bước 1. Đưa ma trận bổ sung $\overline{A}$ về dạng bậc thang bằng PBĐSC **trên hàng**. Ta được một hệ phương trình mới tương đương với hệ đã cho.

Bước 2. Giải hệ phương trình mới với quy tắc: Các ẩn mà các hệ số là các phần tử khác 0 đầu tiên trên các hàng của ma trận bậc thang được gọi là các ẩn ràng buộc. Các ẩn còn lại là các ẩn tự do.

VD. Giải hệ phương trình

$$\text{a) } \begin{cases} x_1 - x_2 + 5x_4 = 6 \\ -14x_4 - 3x_1 - x_3 + 5x_2 = -22 \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 + 11x_4 = 17 \\ x_1 + 6x_4 - x_3 + x_2 = 2 \end{cases};$$

$$\text{b) } \begin{cases} x + z - 2y = 1 \\ 3x + y - z = -2 \\ -4y + 9x + 2z = 3 \\ 5x - 3y + 2z = 4 \end{cases}$$

- **Các bước giải và biện luận hệ phương trình tuyến tính bằng phương pháp Gauss**

Xét hệ phương trình tuyến tính tổng quát:

$$AX = B; \text{ (m phương trình, n ẩn)}$$

<u>Bước 1.</u> Đưa ma trận bổ sung $\overline{A}$ về dạng bậc thang bằng PBĐSC **<u>trên hàng</u>**.

<u>Bước 2.</u> Xét hạng của ma trận bậc thang đó

- Nếu $r(\overline{A}) \neq r(A)$ thì hệ vô nghiệm
- Nếu $r(\overline{A}) = r(A) = n$ thì hệ có nghiệm duy nhất
- Nếu $r(\overline{A}) = r(A) = r < n$ thì hệ có vô số nghiệm

  với $n - r$ ẩn tự do và r ẩn ràng buộc

VD. Giải và biện luận hệ phương trình

$$\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + ax_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + ax_3 = 1 \end{cases}$$

- Qua việc giải hệ phương trình tuyến tính bằng phương pháp Gauss ở trên, ta thấy rằng thực chất của việc tìm ma trận nghịch đảo bằng Phương pháp Gauss – Jordan là việc giải cùng một lúc nhiều hệ phương trình tuyến tính. Chẳng hạn, giả sử cần tìm ma trận nghịch đảo của ma trân vuông cấp ba:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_{11} & \mathbf{a}_{12} & \mathbf{a}_{13} \\ \mathbf{a}_{21} & \mathbf{a}_{22} & \mathbf{a}_{23} \\ \mathbf{a}_{31} & \mathbf{a}_{32} & \mathbf{a}_{33} \end{pmatrix}$$

Gọi ma trận nghich đảo cần tìm là ma trận ẩn $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}$

Để tìm X, ta phải giải phương trình ma trận AX = I hay

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Phương trình ma trận trên tương đương với ba hệ phương trình tuyến tính có cùng ma trận hệ số là A. Ta có thể giải đồng thời cả ba hệ một lúc theo phương pháp Gauss. Khi đưa ma trận hệ số A về dạng ma trận đơn vị thì ma trận nghịch đảo cần tìm chính là ma trận có được sau khi biến đổi ở vế phải.

2.3. Giải hệ phương trình tuyến tính bằng phương pháp Cramer

1. Định nghĩa hệ Cramer.

Một hệ phương trình tuyến tính tổng quát (I) được gọi là *hệ Cramer* nếu $\begin{cases} m = n \\ |A| \neq 0 \end{cases}$

Như vậy: $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$ (III): Hệ Cramer

2. Định lý Cramer.

Hệ Cramer có nghiệm duy nhất được tính theo công thức

$$x_j = \frac{|A_j|}{|A|}; \; j = \overline{1,n}$$

Trong đó: A: là ma trận hệ số

A_j: là ma trận thu được từ ma trận A bằng cách thay cột thứ j bởi cột hệ số tự do.

VD 1. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ \qquad x_2 + 3x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = -1 \end{cases}$$

VD 2. Giải và biện luận hệ phương trình

$$\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + ax_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + ax_3 = 1 \end{cases}$$

Chú ý.

Khi giải và biện luận hệ phương trình tuyến tính, nếu xảy ra trường hợp $|A| = |A_1| = |A_2| = |A_3| = 0$, ta không kết luận " Hệ vô số nghiệm", để có kết luận chính xác ta phải giải hệ bằng phương pháp Gauss. Còn nếu xảy ra trường hợp $|A| = 0$ và có ít nhất một $|A_j| \neq 0$ thì hệ đã cho vô nghiệm.

VD. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ -x - 2y + z = 1 \\ x + 2y - z = 1 \end{cases}$$

2.4. Giải hệ phương trình tuyến tính bằng phương pháp ma trận nghịch đảo

Xét hpt tuyến tính AX = B với A là ma trận khả nghịch (suy ra hpt là hệ Cramer). Khi đó hệ có nghiệm duy nhất là: $X = A^{-1}B$

VD. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} -3x + 4y + 6z = -2 \\ \quad\quad\quad\; y + z = 3 \\ 2x - 3y - 4z = 5 \end{cases}$$

§3. HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH THUẦN NHẤT

3.1. Định nghĩa. Một hệ phương trình tuyến tính tổng quát trong đó tất cả các hệ số tự do bằng 0 được gọi là *hệ phương trình tuyến tính thuần nhất*. Như vậy

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \quad (1)$$

là hệ phương trình tuyến tính thuần nhất m phương trình, n ẩn

Dạng ma trận của hệ: $AX = O$; với $A = (a_{ij})_{m\times n}$

Nhận xét. Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất (1) luôn có nghiệm $(0,0,\ldots,0)$, nghiệm này được gọi là *nghiệm tầm thường* của hệ.

3.2. Định lý. Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất (1) với n ẩn có nghiệm không tầm thường (tức nghiệm khác nghiệm tầm thường (0,0,...,0)) khi và chỉ khi r(A) < n; (A là ma trận hệ số).

Nhận xét. Trường hợp r(A) = n thì hệ (1) chỉ có nghiệm tầm thường.

Hệ quả 1. Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất có số phương trình ít hơn số ẩn thì hệ có nghiệm không tầm thường.

- Khi m = n, hệ (1) trở thành

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases} \qquad (2)$$

Hệ quả 2. Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất dạng (2) có nghiệm không tầm thường khi và chỉ khi $|A| = 0$; (A là ma trận hệ số)

Nhận xét. Trường hợp $\left|A\right| \neq O$ thì hệ (2) chỉ có nghiệm tầm thường.

3.3. Mối liên hệ giữa nghiệm của hệ phương trình tuyến tính tổng quát và nghiệm của hpt tuyến tính thuần nhất tương ứng

Xét hệ phương trình tuyến tính tổng quát: $AX = B$; (a)

và hệ phương trình tuyến tính thuần nhất: $AX = O$; (b)

Khi đó:
- Hiệu hai nghiệm bất kỳ của (a) là nghiệm của (b)
- Tổng một nghiệm bất kỳ của (a) và một nghiệm bất kỳ của (b) là nghiệm của (a)

VD 1. Tìm m để hệ phương trình thuần nhất sau chỉ có nghiệm tầm thường

$$\begin{cases} mx + y + z = 0 \\ x + my + z = 0 \\ x + y + mz = 0 \end{cases}$$

VD 2. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 9x_4 + x_1 + 7x_2 - 8x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_3 - 3x_2 - 2x_4 = 0 \\ 5x_1 + x_2 - 2x_3 + 5x_4 = 0 \\ 3x_1 - 13x_2 + 14x_3 - 13x_4 = 0 \end{cases}$$