Đề thi tuyển sinh
Trại hè Toán học và Ứng dụng 2021

—PHẦN TOÁN HỌC—

Cấu trúc đề thi và hướng dẫn

Đây là phần Đề thi tuyển sinh phần Toán cho trại hè PiMA 2021. Đề thi gồm 3 câu hỏi Toán, số điểm của mỗi câu hỏi được cho bên cạnh đầu đề, điểm số của bạn trong phần này là tổng điểm của bạn ở 6 câu hỏi này.

Phần câu hỏi chính

Câu 1 - Tìm hiểu cơ bản về giá trị riêng của ma trận (5 điểm)

Cho ma trận vuông A với kích thước $n \times n$. Giá trị thực λ được gọi là **giá trị riêng** (**eigenvalue**) của A nếu tồn tại vector $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ sao cho $Av = \lambda v$. Trong trường hợp đó, v được gọi là **vector riêng** (**eigenvector**) của A.

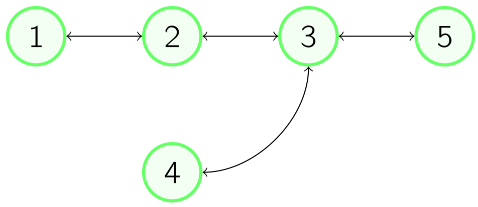
(A) Với định nghĩa như trên, với mỗi ma trận A bất kỳ, liệu có luôn tồn tại ít nhất một giá trị riêng hay không? Hãy giải thích.

(B) Giả sử λ_1 và λ_2 là hai giá trị riêng khác nhau của A lần lượt ứng với hai vector riêng v_1 và v_2. Chứng minh rằng nếu α_1 và α_2 là 2 số thực sao cho $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = 0$ thì $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

(C) Kết quả tương tự có còn đúng trong trường hợp tổng quát m giá trị riêng phân biệt bất kì hay không?

Câu 2 - Thử thách đi xe buýt (7 điểm)

Cho bản đồ trạm và tuyến xe buýt PiMA như hình dưới. Biết rằng chi phí để di chuyển từ một trạm bất kì sang trạm kế bên là 1 đồng. Ví dụ: từ trạm 1 sang trạm 2 tốn 1 đồng; từ trạm 4 sang trạm 2 tốn 2 đồng.



Trong thử thách **đi xe buýt** của PiMA, người tham gia xuất phát từ trạm 2, được phát một số tiền, và phải sử dụng vừa hết số tiền đó để kết thúc ở một trạm chỉ định. Hai bạn Linh và Thế Anh cùng tham gia thử thách này. Thế Anh được nhận 3 đồng và phải kết thúc ở trạm 3; Linh được nhận 4 đồng và phải kết thúc ở trạm 2.

1. Có bao nhiêu cách để Thế Anh hoàn thành thử thách?
2. Có bao nhiêu cách để Linh hoàn thành thử thách?

Hãy viết ma trận A với kích thước 5×5 sao cho $[A]_{i,j} = 1$ nếu trạm i và trạm j kề nhau và $[A]_{i,j} = 0$ trong trường hợp còn lại.

3. Tính A^3 và A^4. Giá trị của $[A^3]_{2,3}$ và $[A^4]_{2,2}$ là bao nhiêu?
4. Bạn rút ra được nhận xét gì? Chứng minh nhận xét của bạn.

Câu 3 - Những viên xúc xắc của Trung (8 điểm)

Trung là nhân viên của một casino có tiếng ở Las Vegas. Anh quản lý một trò chơi sử dụng xúc xắc. Do đặc thù nghề nghiệp, anh luôn giữ trong mình hai viên xúc xắc, mỗi viên sáu mặt có số từ 1 đến 6. Trong đó, một viên (từ đây gọi là viên X) là cân đối, tức xác suất để ra các mặt là như nhau. Viên còn lại (từ đây gọi là viên Y) không cân đối, xác suất để ra mặt số 6 là 50% và xác suất để ra mặt thứ i (i nhận giá trị nguyên từ 1 đến 5) là $c \times (i - 1)$.

1. Hãy tìm giá trị của c.

Trung chọn ngẫu nhiên giữa hai viên X và Y và tung viên xúc xắc này. Giả sử xác suất chọn viên X là 75%.

2. Tính xác suất của sự kiện viên xúc xắc được chọn là viên X và viên này cho ra giá trị 3.
3. Giả sử ta biết rằng kết quả ra mặt giá trị 3. Giữa viên X và Y, viên nào có xác suất đã được chọn cao hơn? Tính xác suất này.

Trung thực hiện quy trình tương tự thêm một lần nữa, tức là lại chọn ngẫu nhiên giữa hai viên X và Y và tung viên xúc xắc được chọn. Ở lần thứ hai, việc lựa chọn chỉ phụ thuộc vào lựa chọn lần đầu. Nếu lần đầu chọn X, xác suất để lần thứ hai cũng chọn X là 30%. Nhưng nếu lần đầu chọn Y, xác suất để lần thứ hai cũng chọn Y chỉ là 10%.

4. Tính xác suất của sự kiện "kết quả 2 lần tung lần lượt là 3 và 6 và Trung đã sử dụng lần lượt là viên X và Y".
5. Tính xác suất của sự kiện "kết quả 2 lần tung lần lượt là 3 và 6".
6. Biết rằng kết quả hai lần tung lần lượt là 3 và 6, gọi $p(i, j)$ là xác suất của sự kiện

"Trung lần lượt chọn viên i và j cho hai lần tung" (i và j nhận giá trị X hoặc Y). Hãy xác định i và j để $\rho(i, j)$ lớn nhất, và hãy tìm giá trị này.

Câu hỏi phụ (+1 điểm): Trong các câu 5 và 6, nếu như số lượng xúc xắc và số lần lặp lại quy trình tăng lên thì hướng tiếp cận hiện tại của bạn liệu có còn hiệu quả không?

—HẾT—