Tóm tắt các tiêu chuẩn xét sự hội tụ, phân kỳ của chuỗi số

Giải tích 1 (Trường Đại học Sài Gòn)

I. Chuỗi số dương

Chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ là chuỗi số dương nếu $u_n \geq 0, \forall n \geq 1$.

* Các tiêu chuẩn đánh giá sự hội tụ, phân kỳ của chuỗi số dương

1. **Tiêu chuẩn so sánh thông thường**:

Xét sự hội tụ, phân kỳ của chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

*Thuật toán:

B1. Kiểm tra $u_n \geq 0, \forall n \geq 1$.

B2. Tìm v_n, w_n sao cho

$$0 \leq w_n \leq u_n \leq v_n, \forall n \geq 1 \Rightarrow 0 \leq \sum_{n=1}^{\infty} w_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} u_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} v_n$$

B3. Nếu chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ hội tụ thì chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ.

Nếu chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ phân kỳ thì chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ phân kỳ.

VD: Xét sự hội tụ, phân kỳ của chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}.2^n}$.

Giải.

Theo đề bài ta có $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}.2^n} > 0, \forall n \geq 1$.

Ta thấy $0 \leq \frac{1}{\sqrt{n}.2^n} \leq \frac{1}{2^n}, \forall n \geq 1 \Rightarrow 0 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}.2^n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$. (1)

Mà $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ hội tụ vì đây là cấp số nhân lùi vô hạn với công bội $q = \frac{1}{2} < 1$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}.2^n}$ hội tụ.

2. **Tiêu chuẩn so sánh giới hạn:**

Xét sự hội tụ, phân kỳ của chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

*Thuật toán:

B1. Kiểm tra $u_n \geq 0, \forall n \geq 1$.

B2. Tìm $v_n \ge 0, \forall n \ge 1,$ sao cho: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = A.$

B3. Áp dụng các tính chất sau

. Nếu A=1 thì $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ với $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$.

. Nếu A=0 thì $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ hội tụ $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ.

. Nếu $A = +\infty$ thì $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ phân kỳ $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ phân kỳ.

VD: Xét sự hội tụ, phân kỳ của chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3n+8}{n^4+2n^2+5}$.

Giải.

Theo đề bài ta có $u_n = \frac{3n+8}{n^4+2n^2+5} > 0, \forall n \ge 1.$

Ta thấy khi $n \to \infty$ thì $3n+8 \to \infty, n^4+2n^2+5 \to \infty$ nên $3n+8, n^4+2n^2+5$ là các VCL. Khi đó, $3n+8 \sim 3n, n^4+2n^2+5 \sim n^4.$

Suy ra $u_n = \frac{3n+8}{n^4+2n^2+5} \sim \frac{3n}{n^4} = \frac{3}{n^3}$. Chọn $v_n = \frac{3}{n^3} \ge 0, \forall n \ge 1.$

Ta có

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3n+8}{n^4+2n^2+5}}{\frac{3}{n^3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n+8}{n^4+2n^2+5}.\frac{n^3}{3}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3n^4+8n^3}{3n^4+6n^2+15} = \frac{3}{3} = 1.$$

$\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3n+8}{n^4+2n^2+5}$ cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ với chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n^3}$. (1)

Mà $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n^3} = 3.\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ hội tụ vì s=3>1. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3n+8}{n^4+2n^2+5}$ hội tụ.

*Chú ý: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ hội tụ khi s>1, phân kỳ khi $s \le 1$.

3. **Tiêu chuẩn D'Alembert:**

Xét sự hội tụ, phân kỳ của chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

*Thuật toán:

B1. Kiểm tra $u_n \geq 0, \forall n \geq 1$.

B2. Tính $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = D$.

B3. Áp dụng các tính chất sau

. Nếu D<1 thì $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ.

. Nếu D>1 thì $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ phân kỳ.

. Nếu D=1: Không kết luận được gì, làm lại cách khác.

VD: Xét sự hội tụ, phân kỳ của chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^4}$.

Giải.

Theo đề bài ta có: $u_n = \frac{2^n}{n^4} > 0, \forall n \geq 1 \Rightarrow u_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)^4}$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)^4}}{\frac{2^n}{n^4}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}}{(n+1)^4} \cdot \frac{n^4}{2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n.2^1}{(n+1)^4} \cdot \frac{n^4}{2^n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2.n^4}{(n+1)^4} = \frac{2}{1} = 2 > 1.$$

Áp dụng tiêu chuẩn D'Alembert ta có $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^4}$ hội tụ.

4. **Tiêu chuẩn Cauchy**:

Xét sự hội tụ, phân kỳ của chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

*Thuật toán:

B1. Kiểm tra $u_n \geq 0, \forall n \geq 1$.

B2. Tính $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = C$.

B3. Áp dụng các tính chất sau

. Nếu C<1 thì $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ.

. Nếu C>1 thì $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ phân kỳ.

. Nếu C=1: Không kết luận được gì, làm lại cách khác.

VD: Xét sự hội tụ, phân kỳ của chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n+1)}$.

Giải.

Ta có $u_n = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n+1)} \geq 0, \forall n \geq 1.$

Áp dụng tiêu chuẩn Cauchy, ta có:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n+1)}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{\frac{n(n+1)}{n}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty} A \quad \boxed{\text{(có dạng } 1^{\infty})}. \ (*)$$

với $A = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n+1} \Rightarrow \ln A = \ln\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n+1}$

$$\Rightarrow \ln A = (n+1).\ln\left(\frac{n-1}{n+1}\right) = (n+1)\ln\left(1+\frac{-2}{n+1}\right)$$

$\ln x^n = n.\ln x$

-TH: $\infty^0, 1^\infty, 0^\infty$

sd ln

NOTE!

. Ta tính $\lim_{n\to\infty}(n+1)\ln\left(1+\frac{-2}{n+1}\right)$ (có dạng $\infty.0$)

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{-2}{n+1}\right)}{\frac{1}{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left[\ln\left(1+\frac{-2}{n+1}\right)\right]'}{\left(\frac{1}{n+1}\right)'} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{1+\frac{-2}{n+1}}.\left(1+\frac{-2}{n+1}\right)'}{-\frac{1}{(n+1)^2}.(n+1)'}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{1+\frac{-2}{n+1}}.\frac{2}{(n+1)^2}}{-\frac{1}{(n+1)^2}} = -\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{-2}{n+1}}.\frac{2}{(n+1)^2}.(n+1)^2 = -\lim_{n\to\infty}\frac{2}{1+\frac{-2}{n+1}}$$

$$= -\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\frac{n+1-2}{n+1}} = -\lim_{n\to\infty}2.\frac{n+1}{n-1} = -2\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n-1} = -2.\frac{1}{1} = -2.$$

Suy ra $\ln A = -2 \Rightarrow A = e^{-2} = \frac{1}{e^2}$. (**)

Từ (*) và (**) suy ra $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{e^2} = \frac{1}{e^2} < 1$.

Vậy chuỗi số đã cho $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n+1)}$ hội tụ.

5. Tiêu chuẩn tích phân suy rộng:

Xét sự hội tụ, phân kỳ của chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

*Thuật toán:

B1. Kiểm tra $u_n \geq 0, \forall n \geq 1$.

B2. Chọn $f(n) = u_n, \forall n \geq 1$. Tính $\int_1^{+\infty} f(n)dn$.

B3. Áp dụng các tính chất sau:

. Nếu $\int_1^{+\infty} f(n)dn$ hội tụ thì $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ.

. Nếu $\int_1^{+\infty} f(n)dn$ phân kỳ thì $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ phân kỳ.

VD: Xét sự hội tụ, phân kỳ của chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$.

Giải.

Theo đề bài ta có $u_n = \frac{1}{n^3} > 0, \forall n \geq 1$.

Chọn $f(n) = u_n = \frac{1}{n^3}, \forall n \geq 1$. Ta tính $\int_1^{+\infty} f(n)dn = \int_1^{+\infty}\frac{1}{n^3}dn$

Ta thấy $\int_1^{+\infty}\frac{1}{n^3}dn = \int_1^{+\infty}\frac{1}{x^3}dx$ hội tụ vì s=3>1. Vậy chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ hội tụ.

II. Chuỗi số đan dấu:

1. Định nghĩa:

Chuỗi số gọi là chuỗi đan dấu nếu nó có dạng:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n = u_1 - u_2 + u_3 - \ldots + (-1)^{n-1}u_n + \ldots,$$

hoặc $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$, hoặc $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n$.

2. Tiêu chuẩn hội tụ Leibnitz:

Xét sự hội tụ, phân kỳ của chuỗi đan dấu $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$.

*Thuật toán:

. B1: Viết biểu thức của u_n, u_1, u_2, u_3,...

. B2: Nếu chuỗi đan dấu $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ thỏa mãn 2 điều kiện sau:

+ ĐK1: $u_1 > u_2 > u_3 > ... > u_n > ..., \forall n \geq 1$. Tức là $\{u_n\}$ là dãy giảm.

+ ĐK2: Tính $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

Thì chuỗi đan dấu $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ sẽ hội tụ và có tổng $S \leq u_1$.

*Còn nếu chuỗi đan dấu $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ vi phạm 1 trong 2 điều kiện trên thì chuỗi đan dấu $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ phân kỳ.

đã biết chuỗi đang dấu.

VD: Xét sự hội tụ, phân kỳ của chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$. $= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}$

Ta có:

$u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$

$\Rightarrow \begin{cases} u_1 = 1 \\ u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ u_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \cdots \\ u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \end{cases}$

Ta thấy

áp dng tiêu chun Leibnitz

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}} =$