Bài tập toán rời rạc

BÀI TẬP ÔN MÔN: TOÁN RỜI RẠC

1. Trên giá sách có 6 quyển sách khác nhau tiếng Anh, 8 quyển sách khác nhau tiếng Pháp, và 10 quyển sách khác nhau tiếng Đức.
a) Có bao nhiêu cách chọn 3 quyển sách cùng ngôn ngữ.
b) Có bao nhiêu cách chọn 3 quyển sách, mỗi thứ một quyển.
c) Có bao nhiêu cách chọn 2 quyển sách mà 2 ngôn ngữ.

Đáp số
a) C(6,3)+C(8,3)+C(10,3)
b) 6x8x10
c) 6x8+6x10+8x10

2. Trên giá sách có 6 quyển sách giống nhau tiếng Anh, 8 quyển sách giống nhau tiếng Pháp, và 10 quyển sách giống nhau tiếng Đức.
a) Có bao nhiêu cách chọn 5 quyển sách bất kỳ.
b) Có bao nhiêu cách chọn 5 quyển sách, mỗi thứ ít nhất một quyển.
c) Có bao nhiêu cách chọn 5 quyển sách mà sách tiếng Anh không quá 2 quyển.

Giải
a) Số nghiệm phương trình $x_1+x_2+x_3=5$ với $x_1,x_2,x_3\geq 0$ là C(5+3-1,3-1) = C(7,2)=21
b) Số nghiệm phương trình $x_1+x_2+x_3=5$ với $x_1,x_2,x_3\geq 1$ là C(2+3-1,3-1) = C(5,2)=10
c) Số nghiệm phương trình $x_1+x_2+x_3=5$ với $0\leq x_1\leq 2$ và $x_2,x_3\geq 0$ là C(7,2)- C(5,2)=11

3. Có bao nhiêu cách sắp n cô gái và n cậu con trai ngồi vào một dãy 2n ghế nếu xen kẻ giới tính.

Giải
Giả sử 2n vị trí được đánh số từ 1 đến 2n. Xét 2 trường hợp cho vị trí n cô gái:
a) Lẻ: Có n! cách sắp xếp n cô gái vào vị trí chẵn và n! cách sắp xếp n cậu con trai vào vị trí chẵn. Theo nguyên lý nhân, trường hợp này có $(n!)^2$ cách.
b) Chẵn: Tương tự, trường hợp này cũng có $(n!)^2$ cách.
Theo nguyên lý cộng, ĐS= $2(n!)^2$

4. Đếm số xâu nhị phân gồm n bit có đúng k bit 0 và không có 2 bit 0 liên tiếp.

Giải
Để tạo ra xâu này, đầu tiên đặt vào n-k bit 1 thành hàng. Sau đó , để không có 2 bit 0 liên tiếp phải đặt k bit 0 vào n-k+1 khoảng trống giữa các bit 1 (kể cả 2 đầu). Số cách chọn k vị trí cho k bit 0 từ n-k+1 vị trí là C(n-k+1, k).

5. a) Đếm số cách sắp xếp 9 viên bi cùng màu vào 3 túi A, B, C.
b) Đếm số cách sắp xếp 9 viên bi gồm 2 bi xanh, 3 bi đỏ và 4 bi vàng thành một hàng.

c) Đếm số cách sắp xếp 9 viên bi gồm 2 bi xanh, 3 bi đỏ và 4 bi vàng vào 3 túi A,B,C.

Câu c , cách giải là lần lượt xếp xanh đỏ vàng bằng cách giải lần lượt 3pt sau:
a+b+c = 2 xanh
a+b+c = 3 đỏ
a+b+c = 4 vàng

Đáp số
a) C(9+3-1, 3-1)=C(11,2) = 55
b) P(9; 2,3,4)=9!/(2!3!4!) = 1260
c) C(2+3-1, 3-1) x C(3+3-1, 3-1) x C(4+3-1, 3-1) = C(4, 2) x C(5,2) x C(6,2) =900

6. Đếm số nghiệm nguyên của:
a) $x + y + z = 10$ với $x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0$.
b) $x + y \leq 10$ với $x\geq 0, y\geq 0$.
c) $x + y + z = 13$ với $x\geq 0, y\geq 1, z\geq 2$.
d) $x + y + z = 10$ với $0\leq x\leq 3, 0\leq y\leq 4, 0\leq z\leq 5$.

7. Đếm số xâu chữ lập được từ các chữ cái trong từ sau, yêu cầu phải dùng tất cả các chữ cái:
a) COMPUTER
b) SUCCESS
c) MISSISSIPPI

8. Trong mặt phẳng xOy lấy ngẫu nhiên 5 điểm toạ độ nguyên. Chứng tỏ rằng có ít nhất một trung điểm của các đoạn nối chúng có toạ độ nguyên.

Không thi

Giải
Trung bình cộng của hai số nguyên là nguyên nếu hai số có cùng tính chẵn/lẻ. Một điểm P(x,y) có 4 trường hợp chẵn/lẻ cho x và y là (c,c), (c,l),(l,c),(l,l). Nếu có 5 điểm thì theo nguyên lý Dirichlet phải có hai điểm rơi vào cùng một trường hợp và trung điểm của đoạn thẳng nối hai này có tọa độ nguyên .

9. Cho tam giác đều ABC với độ dài cạnh là 2. Phải lấy ngẫu nhiên trong tam giác ABC ít nhất bao nhiêu điểm để đảm bảo có hai điểm cách nhau không quá 1.

Giải
Chia tam giác đều ABC thành 4 tam giác đều cạnh 1 bởi trung điểm các cạnh. Theo nguyên lý Dirichlet nếu có 5 điểm trong tam giác đều ABC phải có hai điểm trong tam giác đều cạnh 1 và chúng cách nhau không quá 1. Với 4 điểm như A, B, C, O (tâm của ABC) thì không đảm bảo, vì: AB = AC = BC = 2>1 và $OA = OB = OC = \frac{2}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}2 = \frac{2}{\sqrt{3}} > 1$.

Vậy 5 điểm là ít nhất.

10. Một võ sĩ thi đấu liên tục trong 10 ngày, mỗi ngày ít nhất 1 trận và tổng số không quá 15 trận. Chứng tỏ rằng có những ngày liên tiếp võ sĩ đã thi đấu đúng 4 trận.

Giải
Gọi a_i là số trận đấu cho đến hết ngày thứ i (i=1..10).
Có $1\leq a_1<a_2< \ldots <a_9<a_{10}\leq 15$.
Nên $5\leq a_1+4<a_2+4< \ldots <a_9+4<a_{10}+4\leq 19$.
20 số trong hai dãy nhận giá trị trong {1..19}. Theo nguyên lý Dirichlet phải có hai số bằng nhau. Do cả hai dãy đều là dãy tăng ngặt, nên hai số bằng nhau phải thuộc hai dãy khác nhau. Hay, có $a_i+4 = a_j$. Nghĩa là $a_j - a_i = 4$: từ ngày i+1 đến hết ngày j võ sĩ đã đấu đúng 4 trận.

11. Chứng tỏ rằng số hữu tỷ là một số thập phân vô hạn tuần hoàn.

Giải

Gọi số hữu tỷ x=p/q với p, q nguyên và q>0. Xét $d_1, d_2, ..., d_{q+1}$ là dãy chữ số thập phân khi chia p cho q và $r_1, r_2, ..., r_{q+1}$ là dãy số dư tương ừng. Có $0 \le r_1, r_2, ..., r_{q+1} \le q-1$. Theo nguyên lý Dirichlet phải có hai số bằng nhau, $r_i = r_j$. Tương ứng trong dãy chữ số thập phân $d_1, d_2, ..., d_{q+1}$ có $d_i=d_j$. Vậy dãy chữ số thập phân tuần hoàn. Hay số hữu tỷ là một số thập phân vô hạn tuần hoàn.

12. Một người lên cầu thang có thể bước mỗi bước 1, 2, hoặc 3 bậc.

a) Lập hệ thức truy hồi và điều kiện đầu để đếm số cách người đó đi lên cầu thang n bậc.

b) Đếm số cách người đó đi lên cầu thang 10 bậc.

Giải

a) Gọi a_n là số cách lên cầu thang n bậc. Có hệ thức truy hồi

$a_n = a_{n-1}+a_{n-2}+a_{n-3}$ với $a_1=1$, $a_2=2$, $a_3=4$.

b) Dãy số $\{ a_n \}$ bắt đầu từ a_1 đến a_{10} là {1,2,4,7,13,24,44,81,149, 274}.

Số cách người đó đi lên cầu thang 10 bậc là $a_{10} =274$.

13. Giả sử tiền lãi gửi ngân hàng là 2% một năm.

a) Lập hệ thức truy hồi và điều kiện đầu để tính số tiền trong tài khoản sau n năm.

b) Tính số tiền trong tài khoản sau 10 năm, nếu tiền gửi ban đầu là 105 triệu.

Giải

a) Gọi t_n là số tiền có trong tài khoản sau n năm. Có hệ thức truy hồi

$t_n = 1{,}02\, t_{n-1}$.

b) Với $t_0=105$, giải được $t_n=1{,}02^n t_0$ có $t_{10} =1{,}02^{10}$x105 (triệu).

14. Cho dãy số $\{a_n\}$ thoả mãn hệ thức truy hồi:

$a_n= 5a_{n-1}- 6a_{n-2}$; $a_0=0$ và $a_1=1$.

a) Giải hệ thức truy hồi trên.

b) Viết hàm đệ quy A(n) để tính a_n.

c) Viết hàm lặp a(n) để tính a_n.

15. Cho dãy số $\{a_n\}$ thoả mãn hệ thức truy hồi:

$a_n= 6a_{n-1}- 9a_{n-2}$; $a_0=1$ và $a_1=3$.

a) Giải hệ thức truy hồi trên.

b) Viết hàm A(n) để tính a_n.

16. Viết chương trình sinh tất cả các hoán vị của tập X={1, 2, ..., n}.

17. Viết chương trình sinh tất cả các chỉnh hợp lặp chập k của tập X={1, 2, ..., n}.

18. Viết chương trình sinh tất cả các chỉnh hợp không lặp chập k của tập X={1, 2, ..., n}.

19. Viết chương trình phát sinh tất cả các tổ hợp chập k của tập X={1, 2, ..., n}.

20. Tìm dạng tuyển chuẩn tắc đầy đủ của biểu thức sau:

a) $f(x, y, z) = yz + x\bar{z}$

b) $f(x, y, z) = x + y + x\bar{z}$

Đáp số

a) $f(x, y, z) = xyz + \bar{x}yz + xy\bar{z} + x\bar{y}\bar{z}$

b) $f(x, y, z) = xyz + xy\bar{z} + x\bar{y}z + x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}yz + \bar{x}y\bar{z}$

21. Tìm biểu thức tối thiểu của các biểu thức Boole bậc hai sau đây:

a) $E_1 = xy + x\bar{y}$

b) $E_2 = xy + \bar{x}y + \bar{x}\bar{y}$

c) $E_3 = xy + \bar{x}\bar{y}$

Giải

a) $E_1 = xy + x\bar{y} = x(y + \bar{y}) = x.1 = x$

b) $E_2 = xy + \bar{x}y + \bar{x}\bar{y} = xy + \bar{x}y + \bar{x}y + \bar{x}\bar{y} = (x + \bar{x})y + \bar{x}(y + \bar{y}) = 1.y + \bar{x}.1 = y + \bar{x}$

c) $E_3 = xy + \bar{x}\bar{y}$ (không rút gọn được nữa)

22. Tìm biểu thức tối thiểu của các biểu thức Boole bậc ba sau đây bằng bản đồ Karnaugh:

a) $E_1 = xyz + xy\bar{z} + x\bar{y}z + \bar{x}yz + \bar{x}\bar{y}z$

b) $E_2 = xyz + xy\bar{z} + \bar{x}y\bar{z} + \bar{x}\bar{y}z$

Giải

a) $E_1 = xy + z$

	yz	$y\bar{z}$	$\bar{y}\bar{z}$	$\bar{y}z$
x	1	1		1
$\bar{x}$	1			1

b) $E_2 = xy + y\bar{z} + \bar{x}\bar{y}z$

	yz	$y\bar{z}$	$\bar{y}\bar{z}$	$\bar{y}z$
x	1	1		
$\bar{x}$		1		1

23. Tìm biểu thức tối thiểu của các biểu thức Boole bậc bốn sau đây bằng bản đồ Karnaugh:

a) $E_1 = w\bar{x} + wxy + \bar{w}\,\bar{x}\,\bar{y} + \bar{w}xy\bar{z}$

b) $E_2 = wxyz + wxy\bar{z} + \bar{w}xy\bar{z} + \bar{w}\,\bar{x}\,\bar{y}z$

Giải

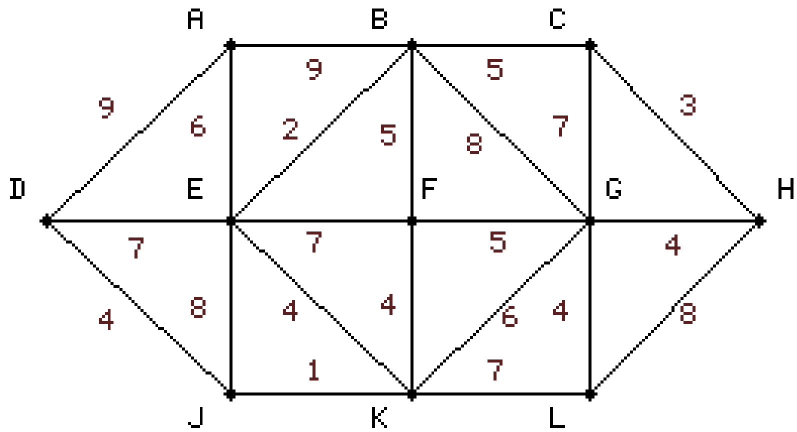
a) $E_1 = wy + \bar{x}\,\bar{y} + xy\bar{z}$

	yz	$y\bar{z}$	$\bar{y}\,\bar{z}$	$\bar{y}z$
wx	1	1		
$w\bar{x}$	1	1	1	1
$\bar{w}\,\bar{x}$			1	1
$\bar{w}x$		1		

b) $E_2 = wxy + \bar{w}y\bar{z} + \bar{w}\,\bar{x}\,\bar{y}z$

	yz	$y\bar{z}$	$\bar{y}\,\bar{z}$	$\bar{y}z$
wx	1	1		
$w\bar{x}$				
$\bar{w}\,\bar{x}$				1
$\bar{w}x$		1		

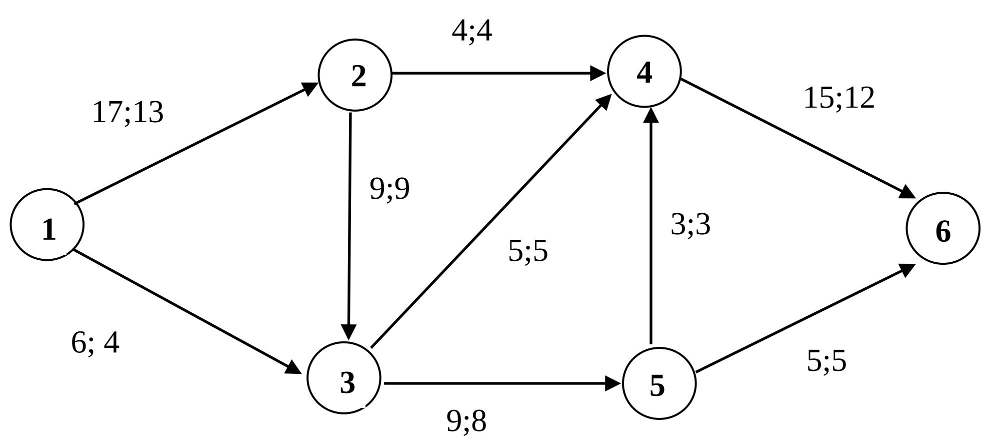
24. Cho đồ thị G=(V,E,W)



a) Tìm ma trận trọng số X của đồ thị G.
b) Tìm đường đi ngắn nhất từ D đến H .
c) Tìm đường đi ngắn nhất từ D đến H phải qua cạnh BG.
d) Tìm đường đi ngắn nhất từ D đến H phải qua cạnh AB và không qua cạnh CH.
e) Tìm cây khung nhỏ nhất của G.
f) Tìm cây khung nhỏ nhất của G không chứa cạnh JK.
g) Tìm cây khung nhỏ nhất của G có cạnh AD, AB và không chứa cạnh CH.

Hướng dẫn
c) Tìm đường đi ngắn nhất từ D đến B và từ G đến H.
d) Xóa cạnh CH, đặt W(CH)=∞.
g) Khởi đầu cho cây T là hai cạnh AD và AB.

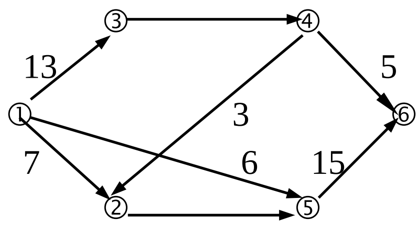
25. Chứng tỏ luồng sau là luồng cực đại



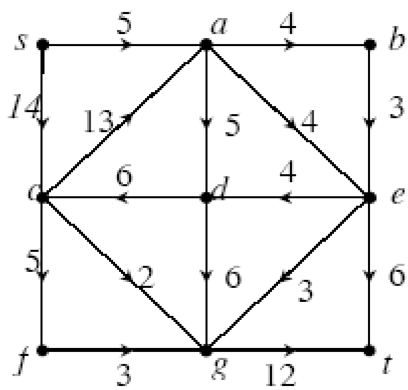
Giải

Với lát cắt $V_1=\{1,2,3,5\}$, $V_2=\{4,6\}$ thì giá trị lát cắt bằng 17 và bằng giá trị luồng. Vậy, theo định lý Ford-Fulkerson, đây là luồng cực đại.

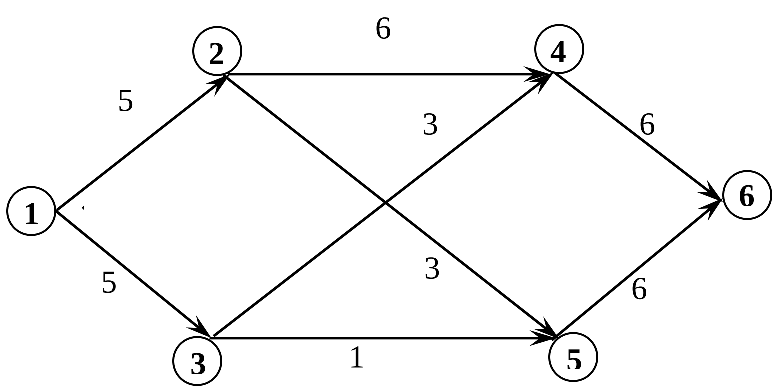
26. Tìm luồng cực đại trên các mạng sau a)



b)



c)



Đáp số

a) Fmax=20
b) Fmax = 18
c) Fmax = 9

****

Đề mẫu

Câu 1 : Cho tập chữ số **X** = { 0,1} và tập chữ cái **Y** = {A, B, C, D}.

Gọi **S** = $s_1s_2..s_n$ là xâu ký tự độ dài *n* gồm các ký tự trong **X** hoặc trong **Y**.

a) Đếm số xâu ký tự **S**.
b) Đếm số xâu ký tự **S** không có chữ cái.
c) Đếm số xâu ký tự **S** có đúng hai chữ cái.
d) Đếm số xâu ký tự **S** không có hai chữ cái liền nhau.

Câu 2:

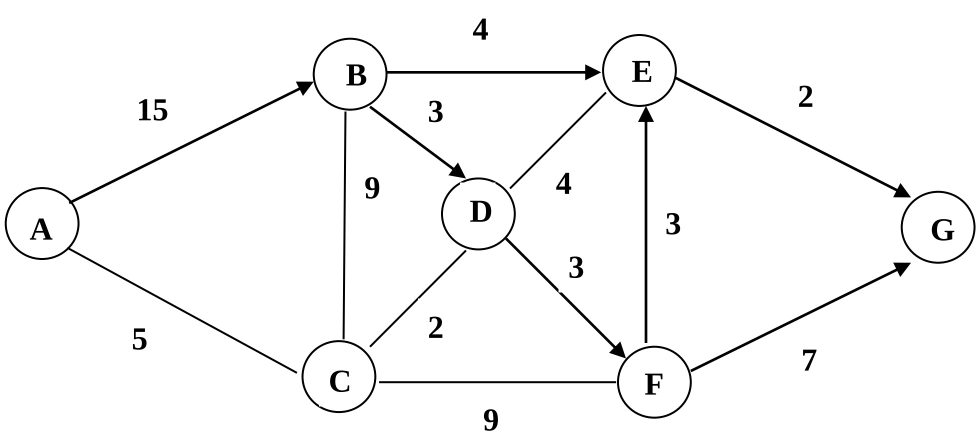
a) Trong tháng 4 vừa qua (30 ngày), một cán bộ văn phòng ngày nào cũng nhận nhất 1 email và cả tháng anh ta đếm được 50 email. Chứng tỏ rằng có những ngày liên tiếp anh ta đã nhận đúng 9 email.
b) Nhóm bạn gồm 7 người, quy định với nhau: mỗi người phải gửi thư cho đúng 5 bạn khác. Chứng tỏ rằng phải có ít nhất lá thư không được hồi âm.

Câu 3 : Cho hàm *Boole* bậc ba sau đây:

$$F(x,y,z) = xy\bar{z} + x\bar{y}z + x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}y\bar{z} + \bar{x}\bar{y}\bar{z}$$

a) Lập bảng chân trị của F(x,y,z).
b) Dùng bản đồ *Karnaugh* để tìm biểu thức tối thiểu của F(x,y,z).

Câu 4: Cho đồ thị có trọng số G = (V, E, W) như sau:



a) Dùng thuật toán *Dijkstra* để tìm đường đi ngắn nhất từ đỉnh **A** đến đỉnh **G**.
b) Đồ thị vô hướng **H** có được từ đồ thị **G** bằng cách xóa hướng của tất cả các cạnh. Vẽ đồ thị **H**.
c) Đồ thị **H** có phải là đồ thị *Euler* không? Vì sao?
d) Dùng thuật toán *Kruskal* để tìm cây khung nhỏ nhất **T** của đồ thị **H**.

ĐÁP ÁN

Câu 1 : Cho tập chữ số **X** = { 0,1} và tập chữ cái **Y** = {A, B, C, D}.

Gọi **S** = $s_1s_2..s_n$ là xâu ký tự độ dài *n* gồm các ký tự trong **X** và trong **Y**.

a) Đếm số xâu ký tự **S**.

b) Đếm số xâu ký tự **S** không có chữ cái.

c) Đếm số xâu ký tự **S** có đúng hai chữ cái.

d) Đếm số xâu ký tự **S** không có hai chữ cái liền nhau.

Giải

a) $\forall$i=1..n, s_i có 6 cách chọn. Số xâu ký tự **S** là $\mathbf{6^n}$.

b) $\forall$i=1..n, s_i có 2 cách chọn. Số xâu ký tự **S** là $\mathbf{2^n}$.

c) Có C(n,2) cách chọn 2 vị trí để đặt 2 chữ cái, mỗi vị trí có 4 cách chọn 1 chữ cái để đặt. Hay có 4^2C(n,2) cách đặt 2 chữ cái vào 2 vị trí. n-2 còn lại, mỗi vị trí có 2 cách chọn chũ số. Hay số cách chọn n-2 chữ số là 2^{n-2}.

Theo nguyên lý nhân, số xâu ký tự S có đúng hai chữ cái là

$\mathbf{4^2 x C(n,2)\ x 2^{n-2} = n(n-1)2^{n+1}}$

d) Gọi a_n là s số xâu ký tự **S** không có hai chữ cái liền nhau. Xét hai trường hợp cho s_n là:

i) s_n là chữ số: s_n có 2 cách chọn, mỗi cách chọn thì số xâu S bằng số xâu $s_1s_2..s_{n-1}$ không có hai chữ cái liền nhau và bằng a_{n-1}. Theo nguyên lý nhân, số xâu S trong trường hợp này là $2a_{n-1}$.

ii) s_n là chữ cái thì s_{n-1} là chữ số: $s_{n-1}s_n$ có 2x4=8 cách chọn , mỗi cách chọn thì số xâu S bằng số xâu $s_1s_2..s_{n-2}$ không có hai chữ cái liền nhau và bằng a_{n-2}. Theo nguyên lý nhân, số xâu S trong trường hợp này là $8a_{n-2}$.

Có hệ thức truy hồi: $a_n = 2a_{n-1}+8a_{n-2}$ với 2 giá trị đầu là a_0 =1, a_1 =6.

Phương trình đặc trưng: $x^2 = 2x+8 \leftrightarrow x^2 - 2x-8 = 0$ có nghiệm $x_1 = 4$, $x_2 = -2$.

$a_n= b4^n + d(-2)^n$.

a_0 =1, a_1 =6 $\rightarrow$ b=4/3 và d=-1/3

Vậy $a_n = (4^{n+1} - (-2)^n)/3$.

Câu 2 :

a) Trong tháng 11 vừa qua (30 ngày), một cán bộ văn phòng ngày nào cũng nhận nhất 1 email và cả tháng anh ta đếm được 50 email. Chứng tỏ rằng có những ngày liên tiếp anh ta đã nhận đúng 9 email.

b) Nhóm bạn gồm 7 người, quy định với nhau: mỗi người phải gửi thư cho đúng 5 bạn khác. Chứng tỏ rằng phải có ít nhất lá thư không được hồi âm.

Giải

a) Gọi a_i là số email nhận được từ đầu tháng cho đến hết ngày i (i=1,2,...30).

Có $1<a_1<a_2<...<a_{30} = 50$

$\rightarrow 9+1<9+a_1<9+a_2<...<9+a_{30} = 9+50 = 59$

60 số $a_1,a_2,...<a_{30}$, $9+a_1,9+a_2,...<9+a_{30}$ nhận giá trị trong {1..59}. Theo nguyên lý Dirichlet phải có $a_i+9 = a_k$ (vì hai bộ số tăng) $\rightarrow$ a_k-a_i=9. Hay từ ngày i+1 đến hết ngày k đã nhận được 9 email.

b) Bài toán biểu diễn bằng đồ thị G như sau: Mỗi người là một đỉnh, mỗi lá thư là một cạnh. Chứng minh bằng phản chứng. Nếu tất cả các lá thư gửi đi đều được hồi âm thì đồ thị G là đồ thị vô hướng gồm 7 đỉnh và mỗi đỉnh đều có bậc 5. Tổng bậc của các đỉnh là 7x5=35. Mâu thuẩn, theo định lý bắt tay thì tổng bậc của các đỉnh bằng 2 lần số cạnh (số chẵn). Vậy phải có ít nhất một lá thư không được hồi âm.

Câu 3 : Cho hàm Boole bậc ba sau đây:

$$F(x,y,z) = xy\bar{z} + x\bar{y}z + x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}y\bar{z} + \bar{x}\bar{y}\bar{z}$$

a) Lập bảng chân trị của F(x,y,z).

b) Dùng bản đồ Karnaugh để tìm biểu thức tối thiểu của F(x,y,z).

Giải

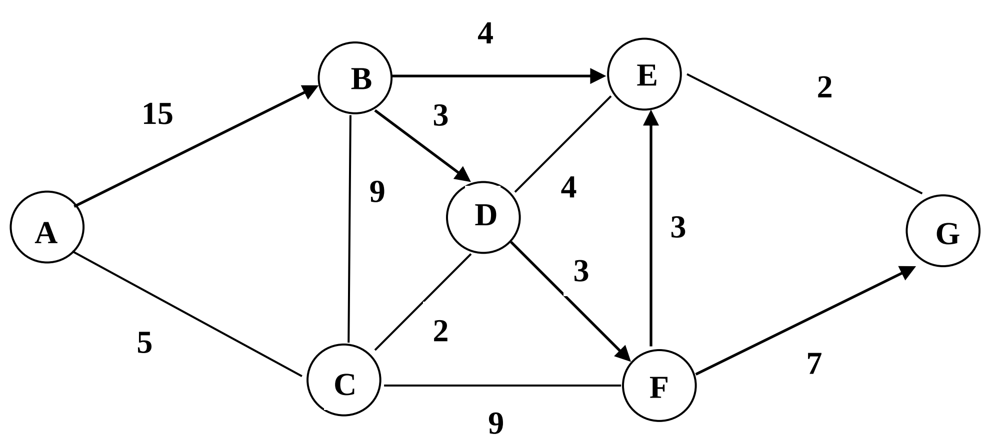
a) Bảng chân trị của F(x,y,z). b) Bản đồ Karnaugh

x	y	Z	F(x,y,z)
1	1	1	0
1	1	0	1
1	0	1	1
1	0	0	1
0	1	1	0
0	1	0	1
0	0	1	0
0	0	0	1

	yz	$y\bar{z}$	$\bar{y}\bar{z}$	$\bar{y}z$
x		1	1	1
$\bar{x}$		1	1	

Biểu thức tối thiểu $F(x,y,z) = x\bar{y} + \bar{z}$

Câu 3 : Cho đồ thị có trọng số G = (V, E, W) như sau:



a) Dùng thuật toán *Dijkstra* để tìm đường đi ngắn nhất từ đỉnh **A** đến đỉnh **G**.
b) Đồ thị vô hướng **H** có được từ đồ thị **G** bằng cách xóa hướng của tất cả các cạnh. Vẽ đồ thị **H**.
c) Đồ thị **H** có phải là đồ thị Euler không? Vì sao?
d) Dùng thuật toán *Kruskal* để tìm cây khung nhỏ nhất **T** của đồ thị **H**.

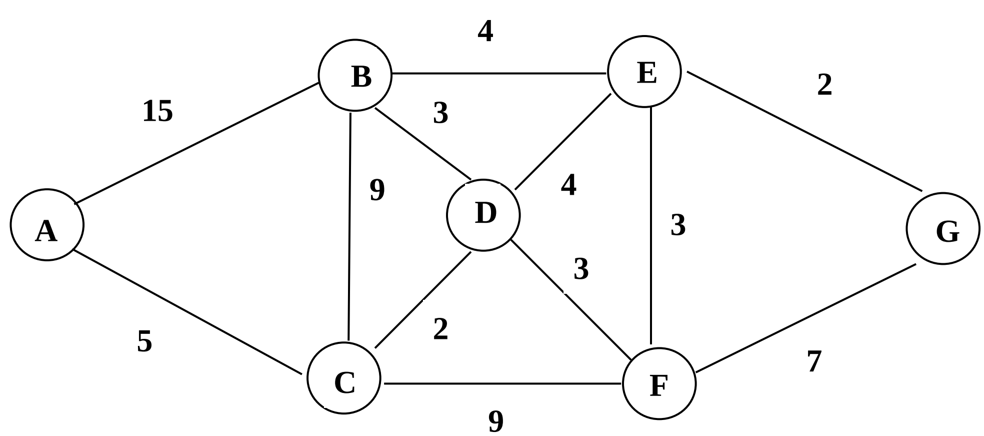
Giải

a) Các bước tìm đường đi ngắn nhất từ đỉnh **A** đến đỉnh **G**

T	V_i	D_A	D_B	D_C	D_D	D_E	D_F	D_G
{A..G}	-	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞
{B..G}	A	*	15	5	∞	∞	∞	∞
{B,D..G}	C	-	14	*	7		14	
{B, E..G}	D	-	14	-	*	11	10	
{B,E,G}	F	-	14	-	-	11	*	17
{B,G}	E	-	14	-	-	*	-	13
{B}	G	-	14	-	-	-	-	*

Đường đi ngắn nhất là A →C→D→E→G và độ dài là 13

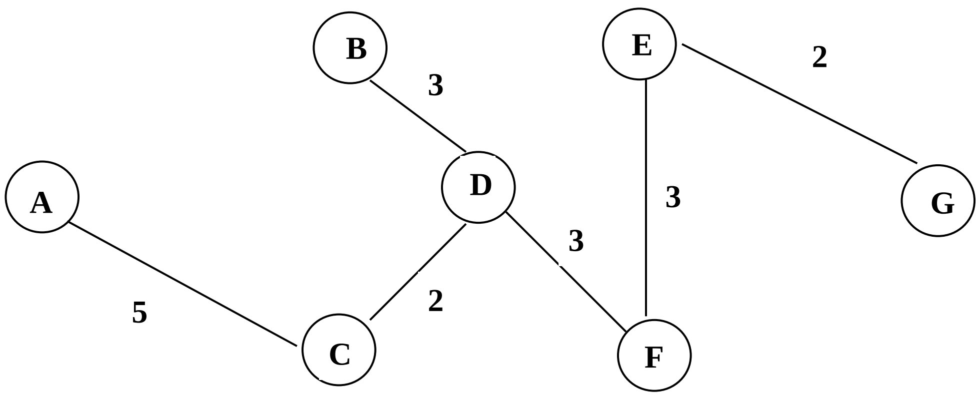
b) Đồ thị H như sau:



c) Đồ thị H là đồ thị Euler . Vì H liên thông và không có đỉnh bậc lẻ.
d) Đồ thị có 7 đỉnh nên cây T có 6 cạnh.
Các bước tìm cây khung nhỏ nhất T của đồ thị H

Cạnh	trọng số	e_T
CD	2	1
EG	2	2
BD	3	3
DF	3	4
EF	3	5

BE	4	tạo chu trình
DE	4	tạo chu trình
AC	5	6
FG	7	-
BC	9	-
CF	9	-
AB	15	-



Trọng số cây T là **18**.
