Universidad de Granada

DEPARTAMENTO DE ÁLGEBRA

Práctica 1 – Criptografía

Práctica 1 – Criptografía

Aritmética Modular

Aritmética Modular

Autores: Alexander Moreno Borrego
Carlos Jesus Fernandez Basso

Correos: alexmobo@correo.ugr.es
mkarloos@correo.ugr.es

DNI: 39906263-K

Grupo: 3

Profesor: Jesús García Miranda

Contenido

Especificación

Esta práctica nos introduce en algunos algoritmos de aritmética modular que son necesarios para el desarrollo de la criptografía de clave pública. Se trata de conocer e implementar algunos de ellos, y de observar las diferencias del tiempo de cálculo entre distintas operaciones. A lo largo de toda la práctica se utilizarán números naturales con un número elevado de cifras, por lo que será necesario optar por un lenguaje de programación que admita dichos cálculos, o bien adaptar, mediante el uso de bibliotecas específicas, el habitual para llevar a cabo estas tareas.

Para el desarrollo de la práctica es conveniente recordar el algoritmo extendido de Euclides, junto con su aplicación para calcular inversos modulares. No obstante, estos algoritmos no son objeto de la práctica.

Lo que hay que realizar es lo siguiente:

1. Implementar un programa que pida como entrada 3 números naturales (a, b y m) y dé como salida el número a^b mod m.
2. Implementar un programa que pida como entrada 3 números naturales (a, b y p) y decida si existe $\log_a b$ mod p, y caso de que exista, debe dar una solución. La solución puede no ser única. En tal caso, se puede optar por:
    a. Dar una solución cualquiera.
    b. Dar la menor solución.
    c. Dar todas las soluciones menores que p.

    Para que el algoritmo funcione bien, el número p debe ser primo. En principio no hay que comprobar si, una vez introducidos los números, el tercer número es primo.

3. Realizar un estudio de los tiempos que emplea cada uno de los dos algoritmos anteriores. Para eso, tomamos números primos desde 5 cifras en adelante. Si p es uno de esos números primos, entonces:
    a. Elegimos al azar dos números a y b, menores que p, pero del mismo tamaño. Estos números podemos tomarlos nosotros. No es necesario utilizar una función que genere números aleatorios.
    b. Calculamos $c = a^b$ mod p, y medimos el tiempo que tarda.
    c. Calculamos $\log_a b$ mod p, y medimos el tiempo que tarda.

    Si llegado un número primo para el que estamos haciendo la prueba el algoritmo tarda mucho, no es necesario seguir con el siguiente.

A continuación va una lista de posibles números primos.

46381

768479

9476407

36780481

562390847

1894083629

65398261921

364879542899

8590365927553

28564333765949

123456789101119

4. Resolver uno de los cuatro problemas siguientes:
    a. Factorización de números enteros.
    b. Cálculo de raíces cuadradas modulares.
    c. Sistemas de congruencias.
    d. Curvas elípticas.

Descripción de los algoritmos

Potenciación modular

El siguiente pseudocódigo es el que implementa la función de potenciación modular:

```
función pot_mod2(a, b, m) hacer
    x ← 1
    mientras b > 0 hacer
        si b%2 == 1 hacer
            x ← (x*a)%m
        fin si
        a ← (a*a)%m
        b ← b/2
    fin mientras
    devolver x
fin función
```

Logaritmo discreto

El pseudocódigo siguiente es el pseudocódigo que hemos diseñado para la función de logaritmo discreto.

```
función log_dis(a, c, p) hacer
    s ← ⌈√p⌉
    r ← Array vacío
    t ← Array vacío
    para i desde 0 hasta s-1 hacer
        r.insertarPorDetras([a^(s·(i+1)) mod p, i])
        t.insertarPorDetras([(c · a^i mod p) mod p, i])
    fin para
    r ← ordenar(r)
    t ← ordenar(t)
    soluciones ← Array vacío
    para cada elemento i en r hasta
        j ← 0
        mientras j <= i[0] YY j < len(t) hacer
            si i[0] == t[j][0] hacer
                solucion ← (s*(i[1]+1))-t[j][1]
                si solucion < p hacer
                    soluciones.insertarPorDetras(solucion)
                fin si
                j ← j + 1
            fin si
        fin mientras
    fin para
    devolver ordenar(soluciones)
fin función
```

Esta solución que hemos propuesto devuelve todas las soluciones inferiores a p.

Curvas elípticas

Como el título indica hemos elegido realizar el problema de las curvas elípticas porque nos ha parecido realmente interesante ya que es el problema que se usa actualmente en el campo de la criptografía.

Un problema que nos hemos encontrado a la hora de calcular un punto de la curva elíptica mediante otros dos puntos de la misma curva es el de tener que calcular el módulo de una potencia negativa: $x = a^{-1}\ mod\ p$.

Para poder calcularlo hemos usado la formula $x = \frac{-p \cdot n+1}{a}$. De este modo, dando valores negativos a n, elegimos el primer resultado entero de la siguiente división.

Estudio de los tiempos

Estos serán los números con los que probaremos la funcionalidad de las funciones descritos anteriormente.

a	b	m o p
6540	7345	46381
74465	93624	768479
594637	662499	9476407
6347215	7694996	36780481
67754367	98548869	562390847
546552345	876889113	1894083629
2314567863	7658999244	65398261921
76898990876	99999999999	364879542899
347586977583	885455823590	8590365927553
3259874594584	7567458467455	28564333765949
75637476563633	97263447823703	123456789101119

Resutados potenciación modular

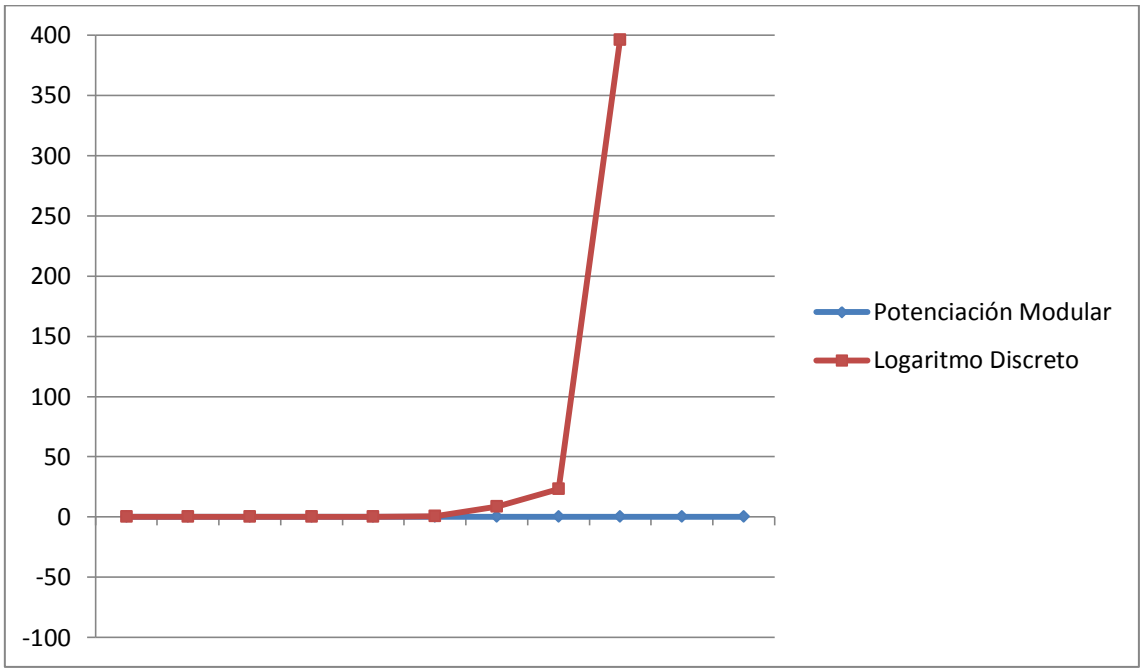
a	b	m o p	Resultado	T (s)
6540	7345	46381	42382	0
74465	93624	768479	626960	0
594637	662499	9476407	9386511	0
6347215	7694996	36780481	12511599	0
67754367	98548869	562390847	220123032	0
546552345	876889113	1894083629	659348229	0
2314567863	7658999244	65398261921	5031006446	0
76898990876	99999999999	364879542899	189160340104	0
347586977583	885455823590	8590365927553	7706581485996	0
3259874594584	7567458467455	28564333765949	25493951987847	0
75637476563633	97263447823703	123456789101119	46007993118002	0

Resultados logaritmo discreto

a	b	m o p	Resultado	T (s)
6540	7345	46381	27506	0,025
74465	93624	768479	105425	0,033
594637	662499	9476407	-	0,047
6347215	7694996	36780481	-	0,092
67754367	98548869	562390847	155172064	0,372
546552345	876889113	1894083629	-	0,702
2314567863	7658999244	65398261921	35335328857	8,757
76898990876	99999999999	364879542899	31067818263 213507589712	23,355
347586977583	885455823590	8590365927553	-	396,157
3259874594584	7567458467455	28564333765949	-	-
75637476563633	97263447823703	123456789101119	-	-

Las tablas anteriores muestran como la potenciación modular es una operación más sencilla de realizar que el cálculo del logaritmo discreto. Como curiosidad debemos decir que, al realizar el logaritmo discreto de los penúltimos números, el programa lanzó la excepción de *"Out of Mempory"* debido a la magnitud de los números con los que trabaja.

A partir de la sexta prueba es demasiado el tiempo que se tarda en obtener una solución al problema del cálculo del logaritmo discreto.



Podemos ver en la gráfica como el tiempo de resolución, si se puede resolver, del cálculo del logaritmo discreto obedece a una función exponencial.

Manual de uso de la aplicación

SSOO Windows

Para ejecutar el archivo ejecutable en Windows es tan sencillo como hacer doble clic sobre el archive .jar.

SSOO Linux o Mac

Para ejecutar el archive en Linux o Mac se necesita seguir una serie de pasos muy sencillos. Son los siguientes:

1. Abrir el terminal
2. Situarse en la carpeta donde tengamos el archivo ejecutable
3. Ejecutar la línea de comandos

java –jar <nombre_archivo>.jar