XI.

SUR L'INTÉGRATION DE LA FORMULE DIFFÉRENTIELLE $\frac{\varrho dx}{\sqrt{R}}$, R ET ϱ ÉTANT DES FONCTIONS ENTIÈRES.

Journal für die reine und angewandte Mathematik, herausgegeben von Crelle, Bd. 1, Berlin 1826.

1.

Si l'on différentie par rapport à x l'expression

$$z = \log \frac{p + q\sqrt{R}}{p - q\sqrt{R}}, \tag{1}$$

où p, q et R sont des fonctions entières d'une quantité variable x, on obtiendra

$$dz = \frac{dp + d(q\sqrt{R})}{p + q\sqrt{R}} - \frac{dp - d(q\sqrt{R})}{p - q\sqrt{R}},$$

ou

$$dz = \frac{(p - q\sqrt{R})[dp + d(q\sqrt{R})] - (p + q\sqrt{R})[dp - d(q\sqrt{R})]}{p^2 - q^2 R},$$

c'est-à-dire,

$$dz = \frac{2pd(q\sqrt{R}) - 2dp.q\sqrt{R}}{p^2 - q^2 R}.$$

Or

$$d(q\sqrt{R}) = dq\sqrt{R} + \frac{1}{2} q \frac{dR}{\sqrt{R}},$$

donc par substitution

$$dz = \frac{pqdR + 2(pdq - qdp)R}{(p^2 - q^2 R)\sqrt{R}},$$

par conséquent, en faisant

$$(2)\qquad pq\frac{dR}{dx}+2\left(p\frac{dq}{dx}-q\frac{dp}{dx}\right)R=M,$$
$$p^2-q^2R=N,$$

on aura

$$(3)\qquad dz=\frac{Mdx}{N\sqrt{R}},$$

où, comme on le voit aisément, M et N sont des fonctions entières de x. Or, z étant égal à $\log\dfrac{p+q\sqrt{R}}{p-q\sqrt{R}}$, on aura en intégrant

$$(4)\qquad \int\frac{Mdx}{N\sqrt{R}}=\log\frac{p+q\sqrt{R}}{p-q\sqrt{R}}.$$

Il s'ensuit que dans la différentielle $\dfrac{\varrho dx}{\sqrt{R}}$ on peut trouver une infinité de formes différentes pour la fonction rationnelle ϱ, qui rendent cette différentielle intégrable par des logarithmes, savoir par une expression de la forme $\log\dfrac{p+q\sqrt{R}}{p-q\sqrt{R}}$. La fonction ϱ contient, comme on le voit par les équations (2), outre R, encore deux fonctions indéterminées p et q; c'est par ces fonctions qu'elle sera déterminée.

On peut renverser la question et demander s'il est possible de supposer les fonctions p et q telles, que ϱ ou $\dfrac{M}{N}$ prenne une forme déterminée donnée. La solution de ce problème conduit à une foule de résultats intéressants, que l'on doit considérer comme autant de propriétés des fonctions de la forme $\displaystyle\int\frac{\varrho dx}{\sqrt{R}}$. Dans ce mémoire je me bornerai au cas où $\dfrac{M}{N}$ est une fonction entière de x, en essayant de résoudre ce problème général:

> "Trouver toutes les différentielles de la forme $\dfrac{\varrho dx}{\sqrt{R}}$, où ϱ et R sont des fonctions entières de x, dont les intégrales puissent s'exprimer par une fonction de la forme $\log\dfrac{p+q\sqrt{R}}{p-q\sqrt{R}}$."

2.

En différentiant l'équation

$$N=p^2-q^2R,$$

on obtient

$$dN = 2pdp - 2qdq.R - q^2dR;$$

donc en multipliant par p,

$$pdN = 2p^2dp - 2pqdq.R - pq^2dR,$$

c'est-à-dire, lorsqu'on remet à la place de p^2 sa valeur $N + q^2R$,

$$pdN = 2Ndp + 2q^2dp.R - 2pqdq.R - pq^2dR,$$

ou

$$pdN = 2Ndp - q[2(pdq - qdp)R + pqdR],$$

donc, puisque (2)

$$2(pdq - qdp)R + pqdR = Mdx,$$

on a

$$pdN = 2Ndp - qMdx,$$

ou bien

$$qM = 2N\frac{dp}{dx} - p\frac{dN}{dx},$$

donc

$$\frac{M}{N} = \left(2\frac{dp}{dx} - p\frac{dN}{Ndx}\right) : q. \tag{5}$$

Maintenant $\dfrac{M}{N}$ doit être une fonction entière de x; en désignant cette fonction par ϱ, on aura

$$q\varrho = 2\frac{dp}{dx} - p\frac{dN}{Ndx}.$$

Il s'ensuit que $p\dfrac{dN}{Ndx}$ doit être une fonction entière de x. En faisant

$$N = (x+a)^m\,(x+a_1)^{m_1}\dots(x+a_n)^{m_n}\,,$$

on aura

$$\frac{dN}{Ndx} = \frac{m}{x+a} + \frac{m_1}{x+a_1} + \dots + \frac{m_n}{x+a_n},$$

donc l'expression

$$p\left(\frac{m}{x+a} + \frac{m_1}{x+a_1} + \dots + \frac{m_n}{x+a_n}\right)$$

doit de même être une fonction entière, ce qui ne peut avoir lieu à moins que le produit $(x+a)\dots(x+a_n)$ ne soit facteur de p. Il faut donc que

$$p = (x+a)\dots(x+a_n)\,p_1,$$

p_1 étant une fonction entière. Or

$$N = p^2 - q^2 R,$$

donc

$$(x+a)^m \dots (x+a_n)^{m_n} = p_1^2 (x+a)^2 \, (x+a_1)^2 \dots (x+a_n)^2 - q^2 R.$$

Comme R n'a pas de facteur de la forme $(x+a)^2$, et comme on peut toujours supposer que p et q n'ont pas de facteur commun, il est clair que

$$m = m_1 = \cdots = m_n = 1,$$

et que

$$R = (x+a)\,(x+a_1)\dots(x+a_n)\,R_1,$$

R_1 étant une fonction entière. On a donc

$$N = (x+a)\,(x+a_1)\dots(x+a_n)\,, \qquad R = NR_1,$$

c'est-à-dire que N doit être facteur de R. On a de même $p = Np_1$. En substituant ces valeurs de R et de p dans les équations (2), on trouvera les deux équations suivantes

$$(6) \qquad \begin{aligned} &p_1^2 N - q^2 R_1 = 1, \\ &\frac{M}{N} = p_1 q \frac{dR}{dx} + 2\left(p\frac{dq}{dx} - q\frac{dp}{dx}\right) R_1 = \varrho. \end{aligned}$$

La première de ces équations détermine la forme des fonctions p_1, q, N et R_1; celles-ci étant déterminées, la seconde équation donnera ensuite la fonction ϱ. On peut aussi trouver cette dernière fonction par l'équation (5).

3.

Maintenant tout dépend de l'équation

$$(7) \qquad p_1^2 N - q^2 R_1 = 1.$$

Cette équation peut bien être résolue par la méthode ordinaire des coefficiens indéterminés, mais l'application de cette méthode serait ici extrêmement prolixe, et ne conduirait guère à un résultat général. Je vais donc prendre une autre route, semblable à celle qu'on emploie pour la résolution des équations indéterminées du second degré à deux inconnues. La seule différence est, qu'au lieu de nombres entiers, on aura à traiter des fonctions entières. Comme dans la suite nous aurons souvent besoin de parler du degré d'une fonction, je me servirai de la lettre δ pour désigner ce degré, en sorte que δP désignera le degré de la fonction P, par exemple,

$$\delta\left(x^m + ax^{m-1} + \ldots\right) = m,$$
$$\delta\left(\frac{x^5 + cx}{x^3 + e}\right) = 2,$$
$$\delta\left(\frac{x + e}{x^2 + k}\right) = -1, \quad \text{etc.}$$

D'ailleurs, il est clair que les équations suivantes auront lieu:

$$\delta(PQ) = \delta P + \delta Q,$$
$$\delta\left(\frac{P}{Q}\right) = \delta P - \delta Q,$$
$$\delta\left(P^m\right) = m\delta P;$$

de plus

$$\delta\left(P + P'\right) = \delta P,$$

si $\delta P'$ est moindre que δP. De même je désignerai, pour abréger, la partie entière d'une fonction rationnelle u par Eu, en sorte que

$$u = Eu + u'$$

où $\delta u'$ est négatif. Il est clair que

$$E\left(s + s'\right) = Es + Es',$$

donc, lorsque $\delta s'$ est négatif,

$$E\left(s + s'\right) = Es.$$

Relativement à ce signe, on aura le théorème suivant:

"Lorsque les trois fonctions rationnelles u, v et z ont la propriété que

$$u^2 = v^2 + z$$

on aura, si $\delta z < \delta v$, $Eu = \pm Ev$."

En effet, on a par définition

$$u = Eu + u',$$
$$v = Ev + v',$$

$\delta u'$ et $\delta v'$ étant négatifs; donc en substituant ces valeurs dans l'équation $u^2 = v^2 + z$,

$$(Eu)^2 + 2u'Eu + u'^2 = (Ev)^2 + 2v'Ev + v'^2 + z.$$

Il s'ensuit

$$(Eu)^2-(Ev)^2=z+v'^2-u'^2+2v'Ev-2u'Eu=t,$$

ou bien,

$$(Eu+Ev)(Eu-Ev)=t.$$

On voit aisément que $\delta t<\delta v$; au contraire $\delta(Eu+Ev)(Eu-Ev)$ est au moins égal à δv, si $(Eu+Ev)(Eu-Ev)$ n'est pas égal à zéro. Il faut donc nécessairement que $(Eu+Ev)(Eu-Ev)$ soit nul, ce qui donne

$$Eu=\pm Ev. \quad \text{c. q. f. d.}$$

Il est clair que l'équation (7) ne saurait subsister à moins qu'on n'ait

$$\delta\left(Np_1^2\right)=\delta\left(R_1q^2\right),$$

c'est-à-dire,

$$\delta N+2\delta p_1=\delta R_1+2\delta q,$$

d'où

$$\delta\left(NR_1\right)=2\left(\delta q-\delta p_1+\delta R_1\right).$$

Le plus grand exposant de la fonction R doit donc être un nombre pair. Soit $\delta N=n-m$, $\delta R_1=n+m$.

4.

Cela posé, au lieu de l'équation

$$p_1^2N-q^2R_1=1,$$

je vais proposer la suivante

(8) $$p_1^2N-q^2R_1=v,$$

où v est une fonction entière dont le degré est moindre que $\dfrac{\delta N+\delta R_1}{2}$. Cette équation, comme on le voit, est plus générale; elle peut être résolue par le même procédé.

Soit t la partie entière de la fonction fractionnaire $\dfrac{R_1}{N}$, et soit t' le reste; cela posé, on aura

(9) $$R_1=Nt+t',$$

et il est clair que t doit être du degré $2m$, lorsque $\delta N=n-m$ et $\delta R_1=n+m$. En substituant cette expression de R_1 dans l'équation (8), on en tirera

(10) $$\left(p_1^2-q^2t\right)N-q^2t'=v.$$

Soit maintenant

$$(11)\qquad t = t_1^2 + t_1{}',$$

on peut toujours déterminer t_1 de manière que le degré de $t_1{}'$ soit moindre que m. A cet effet, faisons

$$\begin{aligned} t &= \alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_{2m} x^{2m}, \\ t_1 &= \beta_0 + \beta_1 x + \cdots + \beta_m x^m, \\ t_1' &= \gamma_0 + \gamma_1 x + \cdots + \gamma_{m-1} x^{m-1}; \end{aligned}$$

cela posé, l'équation (11) donnera

$$\begin{aligned} &\alpha_{2m} x^{2m} + \alpha_{2m-1} x^{2m-1} + \alpha_{2m-2} x^{2m-2} + \cdots + \alpha_{m-1} x^{m-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0 \\ &\quad = \beta_m^2 x^{2m} + 2\beta_m \beta_{m-1} x^{2m-1} + \left(\beta_{m-1}^2 + 2\beta_m \beta_{m-2}\right) x^{2m-2} + \ldots \\ &\qquad + \gamma_{m-1} x^{m-1} + \gamma_{m-2} x^{m-2} + \cdots + \gamma_1 x + \gamma_0. \end{aligned}$$

De cette équation on déduira, en comparant les coefficiens entre eux,

$$\begin{aligned} \alpha_{2m} &= \beta_m^2, \\ \alpha_{2m-1} &= 2\beta_m \beta_{m-1}, \\ \alpha_{2m-2} &= 2\beta_m \beta_{m-2} + \beta_{m-1}^2, \\ \alpha_{2m-3} &= 2\beta_m \beta_{m-3} + 2\beta_{m-1} \beta_{m-2}, \\ \alpha_{2m-4} &= 2\beta_m \beta_{m-4} + 2\beta_{m-1} \beta_{m-3} + \beta_{m-2}^2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_m &= 2\beta_m \beta_0 + 2\beta_{m-1} \beta_1 + 2\beta_{m-2} \beta_2 + \ldots, \\ \gamma_{m-1} &= \alpha_{m-1} - 2\beta_{m-1} \beta_0 - 2\beta_{m-2} \beta_1 - \ldots, \\ \gamma_{m-2} &= \alpha_{m-2} - 2\beta_{m-2} \beta_0 - 2\beta_{m-3} \beta_1 - \ldots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \gamma_2 &= \alpha_2 - 2\beta_2 \beta_0 - \beta_1^2, \\ \gamma_1 &= \alpha_1 - 2\beta_1 \beta_0, \\ \gamma_0 &= \alpha_0 - \beta_0^2. \end{aligned}$$

Les $m+1$ premières équations donnent toujours, comme il est aisé de le voir, les valeurs des $m+1$ quantités β_m, $\beta_{m-1} \ldots \beta_0$, et les m dernières équations donnent les valeurs de γ_0, γ_1, $\gamma_2 \ldots \gamma_{m-1}$. L'équation supposée (11) est donc toujours possible.

Substituant dans l'équation (10), au lieu de t, sa valeur tirée de l'équation (11), on aura

$$(12)\qquad \left(p_1^2 - q^2 t_1^2\right) N - q^2 \left(N t_1' + t'\right) = v;$$

d'où l'on tire

$$\left(\frac{p_1}{q}\right)^2 = t_1^2 + t_1' + \frac{t'}{N} + \frac{v}{q^2 N}.$$

En remarquant que

$$\delta\left(t_1' + \frac{t'}{N} + \frac{v}{q^2 N}\right) < \delta t_1,$$

on aura, par ce qui précède,

$$E\left(\frac{p_1}{q}\right) = \pm E t_1 = \pm t_1,$$

donc

$$p_1 = \pm t_1 q + \beta, \quad \text{où} \ \ \delta\beta < \delta q,$$

ou bien, comme on peut prendre t_1 avec le signe qu'on voudra,

$$p_1 = t_1 q + \beta.$$

En substituant cette expression, au lieu de p_1 dans l'équation (12), elle se changera en

$$(13) \qquad \left(\beta^2 + 2\beta t_1 q\right) N - q^2 s = v,$$

où, pour abréger, on a fait

$$N t_1' + t' = s.$$

De cette équation il est facile de tirer

$$\left(\frac{q}{\beta} - \frac{t_1 N}{s}\right)^2 = \frac{N\left(t_1^2 N + s\right)}{s^2} - \frac{v}{s\beta^2},$$

ou, puisque $t_1^2 N + s = R_1$ (car $R_1 = tN + t'$, $s = N t_1{}' + t'$, et $t = t_1^2 + t_1{}'$),

$$\left(\frac{q}{\beta} - \frac{t_1 N}{s}\right)^2 = \frac{R_1 N}{s^2} - \frac{v}{s\beta^2}.$$

Soit maintenant

$$R_1 N = r^2 + r', \ \ \text{où} \ \ \delta r' < \delta r',$$

on aura

$$\left(\frac{q}{\beta} - \frac{t_1 N}{s}\right)^2 = \left(\frac{r}{s}\right)^2 + \frac{r'}{s^2} - \frac{v}{s\beta^2}.$$

Or, on voit aisément que

$$\delta\left(\frac{r'}{s^2} - \frac{v}{s\beta^2}\right) < \delta\left(\frac{r}{s}\right),$$

donc

$$E\left(\frac{q}{\beta} - \frac{t_1 N}{s}\right) = E\left(\frac{r}{s}\right),$$

et par suite

$$E\left(\frac{q}{\beta}\right)=E\left(\frac{r+t_1N}{s}\right);$$

donc en faisant

$$E\left(\frac{r+t_1N}{s}\right)=2\mu,$$

on aura

$$q=2\mu\beta+\beta_1,\ \text{ où }\ \delta\beta_1<\delta\beta.$$

En substituant cette expression de q dans l'équation (13), on aura

$$\beta^2N+2\beta t_1N\left(2\mu\beta+\beta_1\right)-s\left(4\mu^2\beta^2+4\mu\beta_1\beta+\beta_1^2\right)=v,$$

c'est-à-dire,

$$\beta^2\left(N+4\mu t_1N-4s\mu^2\right)+2\left(t_1N-2\mu s\right)\beta\beta_1-s\beta_1^2=v.$$

Faisant pour abréger

$$\begin{aligned}&s_1=N+4\mu t_1N-4s\mu^2,\\&t_1N-2\mu s=-r_1,\end{aligned}\tag{14}$$

on obtient

$$s_1\beta^2-2r_1\beta\beta_1-s\beta_1^2=v.\tag{15}$$

Puisque $E\left(\frac{r+t_1N}{s}\right)=2\mu$, on a

$$r+t_1N=2s\mu+\varepsilon,\ \text{ où }\ \delta\varepsilon<\delta s,$$

par suite la dernière des équations (14) donnera

$$r_1=r-\varepsilon.$$

En multipliant l'expression de s_1 par s, on obtient

$$ss_1=Ns+4\mu t_1Ns-4s^2\mu^2=Ns+t_1^2N^2-\left(2s\mu-t_1N\right)^2.$$

Or $2s\mu-t_1N=r_1$, donc

$$ss_1=Ns+t_1^2N^2-r_1^2,\quad \text{et}\quad r_1^2+ss_1=N\left(s+t_1^2N\right);$$

de plus on a

$$s+t_1^2N=R_1,$$

donc

$$r_1^2+ss_1=NR_1=R.\tag{16}$$

D'après ce qui précède on a $R=r^2+r'$, donc

$$r^2-r_1^2=ss_1-r',\ \left(r+r_1\right)\left(r-r_1\right)=ss_1-r'.$$

Or puisque $\delta r' < \delta r$, il suit de cette équation que

$$\delta\,(ss_1) = \delta\,(r + r_1)\,(r - r_1)\,,$$

c'est-à-dire, puisque $r - r_1 = \varepsilon$, où $\delta\varepsilon < \delta r$,

$$\delta s + \delta s_1 = \delta r + \delta\varepsilon.$$

Or $\delta s > \delta\varepsilon$, donc

$$\delta s_1 < \delta r.$$

On a de plus $s = Nt_1{}' + t'$, où $\delta t' < \delta N$ et $\delta t_1{}' < \delta t_1$, donc

$$\delta s < \delta N + \delta t_1.$$

Mais $R = N\left(s + t_1^2 N\right)$, par conséquent,

$$\delta R = 2\delta t_1 + 2\delta N,$$

et puisque $\delta R = 2\delta r = 2\delta r_1$, on aura

$$\delta t_1 + \delta N = \delta r_1.$$

On en conclut

$$\delta s < \delta r_1.$$

L'équation $p_1^2 N - q^2 R_1 = v$ est donc transformée en celle-ci:

$$s_1\beta^2 - 2r_1\beta\beta_1 - s\beta_1^2 = v,$$

où

$$\delta r_1 = \frac{1}{2}\delta R = n, \quad \delta\beta_1 < \delta\beta, \quad \delta s < n, \quad \delta s_1 < n.$$

On obtient cette équation, comme on vient de le voir, en faisant

$$(17) \qquad \begin{aligned} p_1 &= t_1 q + \beta, \\ q &= 2\mu\beta + \beta_1, \end{aligned}$$

t_1 étant déterminé par l'équation

$$t = t_1^2 + t_1{}', \quad \text{où } \delta t_1{}' < \delta t_1, \quad t = E\left(\frac{R_1}{N}\right),$$

et μ par l'équation,

$$2\mu = E\left(\frac{r + t_1 N}{s}\right),$$

où

$$r^2 + r' = R_1 N, \quad s = Nt_1' + R_1 - Nt.$$

De plus on a

$$(18) \qquad \begin{cases} r_1 = 2\mu s - t_1 N, \\ s_1 = N + 4\mu t_1 N - 4s\mu^2, \\ r_1^2 + ss_1 = R_1 N = R. \end{cases}$$

Il s'agit maintenant de l'équation (15).

5.

Résolution de l'équation: $s_1\beta^2 - 2r_1\beta\beta_1 - s\beta_1^2 = v$, *où* $\delta s < \delta r_1$, $\delta s_1 < \delta r_1$, $\delta v < \delta r_1$, $\delta\beta_1 < \delta\beta$.

En divisant l'équation

(19)
$$s_1\beta^2 - 2r_1\beta_1\beta_1 - s\beta_1^2 = v,$$

par $s_1\beta_1^2$, on obtient

$$\frac{\beta^2}{\beta_1^2} - 2\frac{r_1}{s_1}\frac{\beta}{\beta_1} - \frac{s}{s_1} = \frac{v}{s_1\beta_1^2},$$

donc

$$\left(\frac{\beta}{\beta_1} - \frac{r_1}{s_1}\right)^2 = \left(\frac{r_1}{s_1}\right)^2 + \frac{s}{s_1} + \frac{v}{s_1\beta_1^2}.$$

On tire de là, en remarquant que $\delta\left(\frac{s}{s_1} + \frac{v}{s_1\beta_1^2}\right) < \delta\left(\frac{r_1}{s_1}\right)$,

$$E\left(\frac{\beta}{\beta_1} - \frac{r_1}{s_1}\right) = \pm E\left(\frac{r_1}{s_1}\right),$$

donc

$$E\left(\frac{\beta}{\beta_1}\right) = E\left(\frac{r_1}{s_1}\right)\cdot(1\pm 1),$$

où l'on doit prendre le signe $+$, car l'autre signe donnerait $E\left(\frac{\beta}{\beta_1}\right) = 0$; donc

$$E\left(\frac{\beta}{\beta_1}\right) = 2E\left(\frac{r_1}{s_1}\right),$$

par conséquent, en faisant

$$E\left(\frac{r_1}{s_1}\right) = \mu_1,$$

on aura

$$\beta = 2\beta_1, \quad u_1 + \beta_2, \text{ où } \delta\beta_2 < \delta\beta_1.$$

Substituant cette valeur de β dans l'équation proposée, on a

$$s_1\left(\beta_2^2 + 4\beta_1\beta_2\mu_1 + 4\mu_1^2\beta_1^2\right) - 2r_1\beta_1\left(\beta_2 + 2\mu_1\beta_1\right) - s\beta_1^2 = v,$$

ou bien

(20)
$$s_2\beta_1^2 - 2r_2\beta_1\beta_2 - s_1\beta_2^2 = -v,$$

où

$$r_2 = 2\mu_1 s_1 - r_1, \quad s_2 = s + 4r_1\mu_1 - 4s_1\mu_1^2.$$

L'équation $E\left(\frac{r_1}{s_1}\right) = \mu_1$ donne

$$r_1 = \mu_1 s_1 + \varepsilon_1, \text{ où } \delta\varepsilon_1 < \delta s_1.$$

On obtient par là,

$$r_2 = r_1 - 2\varepsilon_1,$$
$$s_2 = s + 4\varepsilon_1\mu_1,$$

donc, comme il est facile de le voir,

$$\delta r_2 = \delta r_1, \quad \delta s_2 < \delta r_2.$$

L'équation (19) a par conséquent la même forme que l'équation (20); on peut donc appliquer à celle-ci la même opération, c'est-à-dire en faisant

$$\mu_2 = E\left(\frac{r_2}{s_2}\right), \quad r_2 = s_2\mu_2 + \varepsilon_2, \quad \beta_1 = 2\mu_2\beta_2 + \beta_3,$$

on aura

$$s_3\beta_2^2 - 2r_3\beta_2\beta_3 - s_2\beta_3^2 = v,$$

où

$$r_3 = 2\mu_2 s_2 - r_2 = r_2 - 2\varepsilon_2,$$
$$s_3 = s_1 + 4r_2\mu_2 - 4s_2\mu_2^2 = s_1 + 4\varepsilon_2,\ \mu_2,$$
$$\delta\beta_3 < \delta\beta_2.$$

En continuant ce procédé, on obtiendra, après $n-1$ transformations, cette équation:

$$s_n\beta_{n-1}^2 - 2r_n\beta_{n-1}\beta_n - s_{n-1}\beta_n^2 = (-1)^{n-1}v, \tag{21}$$
$$\text{où} \ \ \delta\beta_n < \delta\beta_{n-1}.$$

Les quantités s_n, r_n, β_n, sont déterminées par les équations suivantes:

$$\beta_{n-1} = 2\mu_n\beta_n + \beta_{n+1},$$
$$\mu_n = E\left(\frac{r_n}{s_n}\right),$$
$$r_n = 2\mu_{n-1}s_{n-1} - r_{n-1},$$
$$s_n = s_{n-2} + 4r_{n-1}\mu_{n-1} - 4s_{n-1}\mu_{n-1}^2.$$

A ces équations on peut ajouter celles-ci:

$$r_n = \mu_n s_n + \varepsilon_n,$$
$$r_n = r_{n-1} - 2\varepsilon_{n-1},$$
$$s_n = s_{n-2} + 4\varepsilon_{n-1}\mu_{n-1}.$$

Or, les nombres $\delta\beta$, $\delta\beta_1$, $\delta\beta_2 \ldots \delta\beta_n$, etc. formant une série décroissante, on doit nécessairement, après un certain nombre de transformations, trouver un β_n égal à zéro. Soit donc

$$\beta_m = 0,$$

l'équation (21) donnera, en posant $n=m$,

$$s_m\beta_{m-1}^2=(-1)^{m-1}v. \tag{22}$$

Voila l'équation générale de condition pour la résolubilité de l'équation (19); s_m dépend des fonctions s, s_1, r_1, et β_{m-1} doit être pris de manière à satisfaire à la condition

$$\delta s_m+2\delta\beta_{m-1}<\delta r.$$

L'équation (22) fait voir, que pour tous les s, s_1 et r_1, on peut trouver une infinité de valeurs de v, qui satisfont à l'équation (19).

En substituant dans l'équation proposée, au lieu de v, sa valeur $(-1)^{m-1}s_m\beta_{m-1}^2$, on obtiendra

$$s_1\beta^2-2r_1\beta\beta_1-s\beta_1^2=(-1)^{m-1}s_m\beta_{m-1}^2,$$

équation toujours résoluble. On voit aisément que β et β_1 ont le facteur commun β_{m-1}. Donc, si l'on suppose que β et β_1 n'ont pas de facteur commun, β_{m-1} sera indépendant de x. On peut donc faire $\beta_{m-1}=1$, d'où résulte cette équation,

$$s_1\beta^2-2r_1\beta\beta_1-s\beta_1^2=(-1)^{m-1}s_m.$$

Les fonctions β, β_1, $\beta_2\ldots$ sont déterminées par l'équation

$$\beta_{n-1}=2\mu_n\beta_n+\beta_{n+1},$$

en posant successivement $n=1,\,2,\,3\ldots m-1$ et en remarquant que $\beta_m=0$. On obtient par là

$$\begin{aligned}
\beta_{m-2}&=2\mu_{m-1}\beta_{m-1},\\
\beta_{m-3}&=2\mu_{m-2}\beta_{m-2}+\beta_{m-1},\\
\beta_{m-4}&=2\mu_{m-3}\beta_{m-3}+\beta_{m-2},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\beta_3&=2\mu_4\beta_4+\beta_5,\\
\beta_2&=2\mu_3\beta_3+\beta_4,\\
\beta_1&=2\mu_2\beta_2+\beta_3,\\
\beta&=2\mu_1\beta_1+\beta_2.
\end{aligned}$$

Ces équations donnent

$$\frac{\beta}{\beta_1} = 2\mu_1 + \frac{1}{\frac{\beta_1}{\beta_2}},$$
$$\frac{\beta_1}{\beta_2} = 2\mu_2 + \frac{1}{\frac{\beta_2}{\beta_3}},$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{\beta_{m-3}}{\beta_{m-2}} = 2\mu_{m-2} + \frac{1}{\frac{\beta_{m-2}}{\beta_{m-1}}},$$
$$\frac{\beta_{m-2}}{\beta_{m-1}} = 2\mu_{m-1}.$$

On en tire par des substitutions successives:

$$\frac{\beta}{\beta_1} = 2\mu_1 + \cfrac{1}{2\mu_2 + \cfrac{1}{2\mu_3 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{2\mu_{m-2} + \cfrac{1}{2\mu_{m-1}}}}}}.$$

On aura donc les valeurs de β et de β_1 en transformant cette fraction continue en fraction ordinaire.

6.

En substituant dans l'équation

$$p_1^2 N - q^2 R_1 = v$$

pour v sa valeur $(-1)^{m-1} s_m$, on aura

$$p_1^2 N - q^2 R_1 = (-1)^{m-1} s_m,$$

où

$$q = 2\mu\beta + \beta_1,$$
$$p_1 = t_1 q + \beta,$$

donc

$$\frac{p_1}{q} = t_1 + \frac{\beta}{q} = t_1 + \frac{1}{\frac{q}{\beta}};$$

or

$$\frac{q}{\beta} = 2\mu + \frac{\beta_1}{\beta};$$

par conséquent,

$$\frac{p_1}{q}=t_1+\cfrac{1}{2\mu+\cfrac{1}{2\mu_1+\cfrac{1}{2\mu_2+\cfrac{1}{\ddots+\cfrac{1}{2u_{m-1}}}}}}.$$

L'équation

$$p_1^2N-q^2R_1=v$$

donne

$$\left(\frac{p_1}{q}\right)^2=\frac{R_1}{N}+\frac{v}{q^2N},$$

$$\frac{p_1}{q}=\sqrt{\frac{R_1}{N}+\frac{v}{q^2N}};$$

donc en supposant m infini

$$\frac{p_1}{q}=\sqrt{\frac{R_1}{N}};$$

donc

$$\sqrt{\frac{R_1}{N}}=t_1+\cfrac{1}{2\mu+\cfrac{1}{2\mu_1+\cfrac{1}{2\mu_2+\cfrac{1}{2\mu_3+\cfrac{1}{\text{etc.}}}}}}$$

On trouve donc les valeurs de p_1 et de q par la transformation de la fonction $\sqrt{\frac{R_1}{N}}$ en fraction continue.[1]

7.

Soit maintenant $v=a$, l'on aura

$$s_m=(-1)^{m-1}a.$$

[1] L'équation ci-dessus n'exprime pas une égalité absolue. Elle indique seulement d'une manière abrégée, comment on peut trouver les quantités t_1, μ, μ_1, $\mu_2\ldots$. Si toutefois la fraction continue a une valeur, celle-ci sera toujours égale it $\sqrt{\frac{R_1}{N}}$.

Donc si l'équation

$$p_1^2 N - q^2 R_1 = a,$$

est résoluble, il faut qu'au moins une des quantités,

$$s,\ s_1,\ s_2 \ldots s_m,\ \text{ etc.}$$

soit indépendante de x.

D'autre part, lorsqu'une de ces quantités est indépendante de x, il est toujours possible de trouver deux fonctions entières p_1 et q qui satisfassent à cette équation. En effet, lorsque $s_m = a$, on aura les valeurs de p_1 et de q en transformant la fraction continue

$$\frac{p_1}{q} = t_1 + \cfrac{1}{2\mu + \cfrac{1}{2\mu_1 + \cfrac{1}{2\mu_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{2\mu_{m-1}}}}}}$$

en fraction ordinaire. Les fonctions s, s_1, s_2, etc., sont en général, comme il est aisé de le voir, du degré $n-1$, lorsque NR_1 est du degré $2n$. L'équation de condition

$$s_m = a,$$

donnera donc $n-1$ équations entre les coefficiens des fonctions N et R_1; il n'y a donc que $n+1$ de ces coefficiens qu'on puisse prendre arbitrairement, les autres sont déterminés par les équations de condition.

8.

De ce qui précède, il s'ensuit qu'on trouve toutes les valeurs de R_1 et de N, qui rendent la différentielle $\frac{\varrho dx}{\sqrt{R_1 N}}$ intégrable par une expression de la forme

$$\log \frac{p + q\sqrt{R_1 N}}{p - q\sqrt{R_1 N}},$$

en faisant successivement les quantités s, s_1, $s_2 \ldots s_m$, indépendantes de x.

Puisque $p = p_1 N$, on a de même,

$$\int \frac{\varrho dx}{\sqrt{R_1 N}} = \log \frac{p_1\sqrt{N} + q\sqrt{R_1}}{p_1\sqrt{N} - q\sqrt{R_1}};$$

ou bien

$$(23)\qquad \begin{cases} \displaystyle\int \frac{\varrho dx}{\sqrt{R_1 N}} = \log \frac{y\sqrt{N}+\sqrt{R_1}}{y\sqrt{N}-\sqrt{R}}, \\ \text{où} \\ y = t_1 + \cfrac{1}{2\mu + \cfrac{1}{2\mu_1 + \cfrac{1}{2\mu_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{2\mu_{m-1}}}}}}, \end{cases}$$

en supposant s_m égal à une constante.

Les quantités R_1, N, p_1 et q étant ainsi déterminées, on trouve ϱ par l'équation (5). Cette équation donne, en mettant $p_1 N$ au lieu de p, et ϱ au lieu de $\dfrac{M}{N}$,

$$\varrho = \left(p_1 \frac{dN}{dx} + 2N \frac{dp_1}{dx}\right) : q.$$

Il s'ensuit que

$$\delta\varrho = \delta p_1 + \delta N - 1 - \delta q = \delta p - \delta q - 1.$$

Or on a vu que $\delta p - \delta q = n$, donc

$$\delta\varrho = n - 1.$$

Donc si la fonction R ou $R_1 N$ est du degré $2n$, la fonction ϱ sera nécessairement du degré $n-1$.

9.

Nous avons vu plus haut que

$$R = R_1 N;$$

mais on peut toujours supposer que la fonction N est constante. En effet on a

$$\int \frac{\varrho dx}{\sqrt{R_1 N}} = \log \frac{p_1\sqrt{N}+q\sqrt{R_1}}{p_1\sqrt{N}-q\sqrt{R_1}},$$

et par conséquent,

$$\int \frac{\varrho dx}{\sqrt{R_1 N}} = \frac{1}{2}\log\left(\frac{p_1\sqrt{N}+q\sqrt{R_1}}{p_1\sqrt{N}-q\sqrt{R_1}}\right)^2 = \frac{1}{2}\log \frac{p_1^2 N + q^2 R_1 + 2p_1 q\sqrt{R_1 N}}{p_1^2 N + q^2 R_1 - 2p_1 q\sqrt{R_1 N}};$$

ou, en faisant $p_1^2 N + q^2 R_1 = p'$ et $2p_1 q = q'$,

$$\int \frac{2\varrho dx}{\sqrt{R}} = \log \frac{p' + q'\sqrt{R}}{p' - q'\sqrt{R}}.$$

Il est clair que p' et q' n'ont pas de facteur commun; on peut donc toujours poser

$$N = 1.$$

Au lieu de l'équation $p_1^2 N - q_2 R_1 = 1$, on a alors celle-ci,

$$p'^2 - q'^2 R = 1,$$

dont on obtient la solution en faisant $N = 1$ et mettant R au lieu de R_1.

Ayant $N = 1$, on voit aisément que

$$t = R; \quad t_1 = r; \quad R = r^2 + s;$$

donc

$$(24) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{p'}{q'} = r + \cfrac{1}{2\mu + \cfrac{1}{2\mu_1 + \cfrac{1}{2\mu_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{2\mu_{m-1}}}}}}, \\ R = r^2 + s, \\ \mu = E\left(\dfrac{r}{s}\right), \qquad r = s\mu + \varepsilon, \\ r_1 = r - 2\varepsilon, \qquad s_1 = 1 + 4\varepsilon\mu, \\ \mu_1 = E\left(\dfrac{r_1}{s_1}\right), \quad r_1 = s_1\mu_1 + \varepsilon_1, \\ r_2 = r_1 - 2\varepsilon_1, \quad s_2 = s + 4\varepsilon_1,\ \mu_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \mu_n = E\left(\dfrac{r_n}{s_n}\right), \qquad r_n = \mu_n s_n + \varepsilon_n, \\ r_{n+1} = r_n - 2\varepsilon_n, \quad s_{n+1} = s_{n-1} + 4\varepsilon_n\mu_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \mu_{m-1} = E\left(\dfrac{r_{m-1}}{s_{m-1}}\right), \quad r_{m-1} = \mu_{m-1}s_{m-1} + \varepsilon_{m-1}, \\ r_m = r_{m-1} - 2\varepsilon_{m-1}, \quad s_m = s_{m-2} + 4\varepsilon_{m-1}\mu_{m-1} = a. \end{array} \right.$$

Ayant déterminé les quantités R, r, μ, $\mu_1 \dots \mu_{m-1}$ par ces équations, on aura

$$(25)\qquad \begin{cases} \displaystyle\int \frac{\varrho dx}{\sqrt{R}} = \log \frac{p' + q'\sqrt{R}}{p' - q'\sqrt{R}}, \\ \text{où} \\ \displaystyle\varrho = \frac{2}{q'}\frac{dp'}{dx}, \end{cases}$$

ce qui résulte de l'équation (5) en y posant $N = 1$.

10.

On peut donner à l'expression $\log \dfrac{p_1\sqrt{N} + q\sqrt{R_1}}{p_1\sqrt{N} - q\sqrt{R_1}}$ une forme plus simple, savoir,

$$\log \frac{p_1\sqrt{N} + q\sqrt{R_1}}{p_1\sqrt{N} - q\sqrt{R_1}} = \log \frac{t_1\sqrt{\Lambda} + \sqrt{R_1}}{t_1\sqrt{N} - \sqrt{R_1}} + \log \frac{r_1 + \sqrt{R}}{r_1 - \sqrt{R}}$$
$$+ \log \frac{r_2 + \sqrt{R}}{r_2 - \sqrt{R}} + \cdots + \log \frac{r_m + \sqrt{R}}{r_m - \sqrt{R}},$$

ce qu'on peut démontrer comme il suit. Soit

$$\frac{\alpha_m}{\beta_m} = t_1 + \cfrac{1}{2\mu + \cfrac{1}{2\mu_1 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{2\mu_{m-1}}}}},$$

on a par la théorie des fractions continues,

$$\text{(a)}\qquad \alpha_m = \alpha_{m-2} + 2\mu_{m-1}\alpha_{m-1},$$

$$\text{(b)}\qquad \beta_m = \beta_{m-2} + 2\mu_{m-1}\beta_{m-1}.$$

De ces équations on tire, en éliminant μ_{m-1},

$$\alpha_m\beta_{m-1} - \beta_m\alpha_{m-1} = -\left(\alpha_{m-1}\beta_{m-2} - \beta_{m-1}\alpha_{m-2}\right),$$

donc

$$\alpha_m\beta_{m-1} - \beta_m\alpha_{m-1} = (-1)^{m-1},$$

ce qui est connu.

Les deux équations (a) et (b) donnent encore

$$\alpha_m^2 = \alpha_{m-2}^2 + 4\alpha_{m-1}\alpha_{m-2}\mu_{m-1} + 4\mu_{m-1}^2\alpha_{m-1}^2,$$
$$\beta_m^2 = \beta_{m-2}^2 + 4\beta_{m-1}\beta_{m-2}\mu_{m-1} + 4\mu_{m-1}^2\beta_{m-1}^2.$$

Il s'ensuit que

$$\alpha_m^2 N - \beta_m^2 R_1 = \alpha_{m-2}^2 N - \beta_{m-2}^2 R_1 + 4\mu_{m-1}\left(\alpha_{m-1}\alpha_{m-2}N - \beta_{m-1}\beta_{m-2}R_1\right) + 4\mu_{m-1}^2\left(\alpha_{m-1}^2 N - \beta_{m-1}^2 R_1\right).$$

Or on a

$$\alpha_m^2 N - \beta_m^2 R_1 = (-1)^{m-1} s_m,$$
$$\alpha_{m-1}^2 N - \beta_{m-1}^2 R_1 = (-1)^{m-2} s_{m-1},$$
$$\alpha_{m-2}^2 N - \beta_{m-2}^2 R_1 = (-1)^{m-3} s_{m-2},$$

donc, en substituant,

$$s_m = s_{m-2} + 4(-1)^{m-1}\mu_{m-1}\left(\alpha_{m-1}\alpha_{m-2}N - \beta_{m-1}\beta_{m-2}R_1\right) - 4\mu_{m-1}^2 s_{m-1}.$$

Mais, d'après ce qui précède, on a

$$s_m = s_{m-2} + 4\mu_{m-1}r_{m-1} - 4s_{m-1}\mu_{m-1}^2,$$

donc

$$r_{m-1} = (-1)^{m-1}\left(\alpha_{m-1}\alpha_{m-2}N - \beta_{m-1}\beta_{m-2}R_1\right).$$

Soit

$$z_m = \alpha_m\sqrt{N} + \beta_m\sqrt{R_1}, \quad \text{et} \quad z_m' = \alpha_m\sqrt{N} - \beta_m\sqrt{R_1},$$

on aura en multipliant,

$$z_m z_{m-1}' = \alpha_m\alpha_{m-1}N - \beta_m\beta_{m-1}R_1 - \left(\alpha_m\beta_{m-1} - \alpha_{m-1}\beta_m\right)\sqrt{NR_1};$$

mais on vient de voir qu'on a

$$\alpha_m\beta_{m-1} - \alpha_{m-1}\beta_m = (-1)^{m-1}, \qquad \alpha_m\alpha_{m-1}N - \beta_m\beta_{m-1}R_1 = (-1)^m r_m;$$

on tire de là

$$z_m z_{m-1}' = (-1)^m\left(r_m + \sqrt{R}\right),$$

et de la même manière,

$$z_m' z_{m-1} = (-1)^m\left(r_m - \sqrt{R}\right);$$

on en tire en divisant,

$$\frac{z_m}{z_m'}\frac{z_{m-1}'}{z_{m-1}} = \frac{r_m + \sqrt{R}}{r_m - \sqrt{R}};$$

ou, en multipliant par $\dfrac{z_{m-1}}{z_{m-1}'}$,

$$\frac{z_m}{z_m'} = \frac{r_m + \sqrt{R}}{r_m - \sqrt{R}}\frac{z_{m-1}}{z_{m-1}'}.$$

En faisant successivement $m=1, 2, 3 \ldots m$, on aura,

$$\frac{z_1}{z_1'} = \frac{r_1+\sqrt{R}}{r_1-\sqrt{R}}\frac{z_0}{z_0'}$$

$$\frac{z_2}{z_2'} = \frac{r_2+\sqrt{R}}{r_2-\sqrt{R}}\frac{z_1}{z_1'}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{z_m}{z_m'} = \frac{r_m+\sqrt{R}}{r_m-\sqrt{R}}\frac{z_{m-1}}{z_{m-1}'}$$

d'où l'on tire,

$$\frac{z_m}{z_{m'}} = \frac{z_0}{z_0{}'}\frac{r_1+\sqrt{R}}{r_1-\sqrt{R}}\frac{r_2+\sqrt{R}}{r_2-\sqrt{R}}\frac{r_3+\sqrt{R}}{r_3-\sqrt{R}}\cdots\frac{r_m+\sqrt{R}}{r_m-\sqrt{R}}.$$

Or on a

$$z_0 = \alpha_0\sqrt{N}+\beta_0\sqrt{R_1} = t_1\sqrt{N}+\sqrt{R_1},$$
$$z_0' = \alpha_0\sqrt{N}-\beta_0\sqrt{R_1} = t_1\sqrt{N}-\sqrt{R_1},$$

et

$$\frac{z_m}{z_m{}'} = \frac{\alpha_m\sqrt{N}+\beta_m\sqrt{R_1}}{\alpha_m\sqrt{N}-\beta_m\sqrt{R_1}},$$

donc

$$\frac{\alpha_m\sqrt{N}+\beta_m\sqrt{R_1}}{\alpha_m\sqrt{N}-\beta_m\sqrt{R_1}} = \frac{t_1\sqrt{N}+\sqrt{R_1}}{t_1\sqrt{N}-\sqrt{R_1}}\cdot\frac{r_1+\sqrt{R}}{r_1-\sqrt{R}}\cdot\frac{r_2+\sqrt{R}}{r_2-\sqrt{R}}\cdots\frac{r_m+\sqrt{R}}{r_m-\sqrt{R}},$$

et en prenant les logarithmes

(26) $$\log\frac{\alpha_m\sqrt{N}+\beta_m\sqrt{R_1}}{\alpha_m\sqrt{N}-\beta_m\sqrt{R_1}}$$
$$= \log\frac{t_1\sqrt{N}+\sqrt{R_1}}{t_1\sqrt{N}-\sqrt{R_1}} + \log\frac{r_1+\sqrt{R}}{r_1-\sqrt{R}} + \log\frac{r_2+\sqrt{R}}{r_2-\sqrt{R}} + \cdots + \log\frac{r_m+\sqrt{R}}{r_m-\sqrt{R}},$$

ce qu'il fallait démontrer.

11.

En différentiant l'expression $z = \log\dfrac{\alpha_m\sqrt{N}+\beta_m\sqrt{R_1}}{\alpha_m\sqrt{N}-\beta_m\sqrt{R_1}}$, on aura, après les réductions convenables,

$$dz = \frac{2\left(\alpha_m d\beta_m - \beta_m d\alpha_m\right)NR_1 - \alpha_m\beta_m\left(R_1 dN - N dR_1\right)}{\left(\alpha_m^2 N - \beta_m^2 R_1\right)\sqrt{NR_1}}.$$

Or on a

$$\alpha_m^2 N - \beta_m^2 R_1 = (-1)^{m-1} s_m,$$

donc en faisant

$$(27)\qquad (-1)^{m-1}\varrho_m = 2\left(\alpha_m\frac{d\beta_m}{dx} - \beta_m\frac{d\alpha_m}{dx}\right)NR_1 - \alpha_m\beta_m\left(\frac{R_1dN - NdR_1}{dx}\right),$$

on aura

$$dz = \frac{\varrho_m}{s_m}\frac{dx}{\sqrt{NR_1}},$$

et

$$z = \int\frac{\varrho_m}{s_m}\frac{dx}{\sqrt{NR_1}},$$

donc

$$\int\frac{\varrho_m}{s_m}\frac{dx}{\sqrt{NR_1}} = \log\frac{\alpha_m\sqrt{N}+\beta_m\sqrt{R_1}}{\alpha_m\sqrt{N}-\beta_m\sqrt{R_1}},$$

ou bien

$$(28)\qquad \int\frac{\varrho_m}{s_m}\frac{dx}{\sqrt{R}} = \log\frac{t_1\sqrt{N}+\sqrt{R_1}}{t_1\sqrt{N}-\sqrt{R_1}} + \log\frac{r_1+\sqrt{R}}{r_1-\sqrt{R}} + \cdots + \log\frac{r_m+\sqrt{R}}{r_m-\sqrt{R}}.$$

Dans cette expression s_m est tout au plus du degré $(n-1)$ et ϱ_m est nécessairement du degré $(n-1+\delta s_m)$, ce dont on peut se convaincre de la manière suivante. En différentiant l'équation

$$(29)\qquad \alpha_m^2N - \beta_m^2R_1 = (-1)^{m-1}s_m,$$

on trouvera la suivante

$$2\alpha_m d\alpha_m N + \alpha_m^2 dN - 2\beta_m d\beta_m . R_1 - \beta_m^2 dR_1 = (-1)^{m-1}ds_m,$$

ou, en multipliant par $\alpha_m N$,

$$\alpha_m^2N\left(2Nd\alpha_m + \alpha_m dN\right) - 2\alpha_m\beta_m d\beta_m NR_1 - \beta_m^2\alpha_m NdR_1 = (-1)^{m-1}\alpha_m Nds_m.$$

Mettant ici à la place de α_m^2N, sa valeur tirée de l'équation (29), on aura

$$\begin{aligned}(-1)^{m-1}s_m\left(2Nd\alpha_m + \alpha_m dN\right) + \beta_m[2NR_1\beta_m d\alpha_m + \alpha_m\beta_m R_1 dN\\ - 2\alpha_m d\beta_m NR_1 - \beta_m\alpha_m NdR_1] = (-1)^{m-1}\alpha_m Nds_m,\end{aligned}$$

c'est-à-dire,

$$\begin{aligned}\beta_m\left[2\left(\alpha_m d\beta_m - \beta_m d\alpha_m\right)NR_1 - \alpha_m\beta_m\left(R_1dN - NdR_1\right)\right]\\ = (-1)^{m-1}\left[s_m\left(2Nd\alpha_m + \alpha_m dN\right) - \alpha_m Nds_m\right].\end{aligned}$$

En vertu de l'équation (27) le premier membre de cette équation est égal à $\beta_m(-1)^{m-1}\varrho_m dx$; donc on aura

$$(30)\qquad \beta_m\varrho_m = s_m\left(\frac{2Nd\alpha_m}{dx} + \frac{\alpha_m dN}{dx}\right) - \alpha_m\frac{Nds_m}{dx}.$$

Puisque $\delta s_m < n$, le second membre de cette équation sera nécessairement du degré $(\delta s_m + \delta N + \delta\alpha_m - 1)$, comme il est facile de le voir; donc

$$\delta\varrho_m = \delta s_m + \delta N + \delta\alpha_m - \delta\beta_m - 1.$$

Or de l'équation (29) il suit que

$$2\delta\alpha_m + \delta N = 2\delta\beta_m + \delta R_1,$$

donc

$$\delta\varrho_m = \delta s_m + \frac{\delta N + \delta R_1}{2} - 1;$$

ou, puisque $\delta N + \delta R_1 = 2n$,

$$\delta\varrho_m = \delta s_m + n - 1,$$

c'est-à-dire que ϱ_m est nécessairement du degré $(\delta s_m + n - 1)$. Il suit de là que la fonction $\dfrac{\varrho_m}{s_m}$ est du degré $(n-1)$.

Faisant dans la formule (28) $N = 1$, on aura $t_1 = r$, et par conséquent

$$(31) \qquad \int \frac{\varrho_m dx}{s_m\sqrt{R}} = \log\frac{r+\sqrt{R}}{r-\sqrt{R}} + \log\frac{r_1+\sqrt{R}}{r_1-\sqrt{R}} + \cdots + \log\frac{r_m+\sqrt{R}}{r_m-\sqrt{R}},$$

où, suivant l'équation (30),

$$\beta_m\varrho_m = 2s_m\frac{d\alpha_m}{dx} - \alpha_m\frac{ds_m}{dx}.$$

L'équation (28) donne, en faisant $s_m = a$,

$$(32) \qquad \int \frac{\varrho_m dx}{a\sqrt{R}} = \log\frac{t_1\sqrt{N}+\sqrt{R_1}}{t_1\sqrt{N}-\sqrt{R_1}} + \log\frac{r_1+\sqrt{R}}{r_1-\sqrt{R}} + \cdots + \log\frac{r_m+\sqrt{R}}{r_m-\sqrt{R}}$$

$$\text{où} \quad \beta_m\varrho_m = a\left(2N\frac{d\alpha_m}{dx} + \alpha_m\frac{dN}{dx}\right),$$

et lorsque $N = 1$,

$$(33) \qquad \int \frac{\varrho_m dx}{\sqrt{R}} = \log\frac{r+\sqrt{R}}{r-\sqrt{R}} + \log\frac{r_1+\sqrt{R}}{r_1-\sqrt{R}} + \cdots + \log\frac{r_m+\sqrt{R}}{r_m-\sqrt{R}},$$

$$\text{où} \quad \varrho_m = \frac{2}{\beta_m}\frac{da_m}{dx}.$$

D'après ce qui précède, cette formule a la même généralité que la formule (32), et donne toutes les intégrales de la forme $\int\frac{\varrho dx}{\sqrt{R}}$, où ϱ et R sont des fonctions entières, qui sont exprimables par une fonction logarithmique de la forme $\log\dfrac{p+q\sqrt{R}}{p-q\sqrt{R}}$.

12.

Dans l'équation (28) la fonction $\frac{\varrho_m}{s_m}$ est donnée par l'équation (30). Mais on peut exprimer cette fonction d'une manière plus commode à l'aide des quantités t_1, r_1, r_2, etc. μ, μ_1, μ_2, etc. En effet, soit

$$z_m = \log \frac{r_m + \sqrt{R}}{r_m - \sqrt{R}},$$

on aura en différentiant,

$$dz_m = \frac{dr_m + \frac{1}{2}\frac{dR}{\sqrt{R}}}{r_m + \sqrt{R}} - \frac{dr_m - \frac{1}{2}\frac{dR}{\sqrt{R}}}{r_m - \sqrt{R}},$$

ou en réduisant,

(33') $$dz_m = \frac{r_m dR - 2R dr_m}{r_m^2 - R} \frac{1}{\sqrt{R}}.$$

Or nous avons trouvé plus haut

$$s_m = s_{m-2} + 4\mu_{m-1} r_{m-1} - 4 s_{m-1} \mu_{m-1}^2,$$

donc en multipliant par s_{m-1},

$$s_m s_{m-1} = s_{m-1} s_{m-2} + 4\mu_{m-1} s_{m-1} r_{m-1} - 4 s_{m-1}^2 \mu_{m-1}^2,$$

c'est-à-dire,

$$s_m s_{m-1} = s_{m-1} s_{m-2} + r_{m-1}^2 - (2 s_{m-1} \mu_{m-1} - r_{m-1})^2.$$

Mais on a

$$r_m = 2 s_{m-1} \mu_{m-1} - r_{m-1},$$

donc en substituant cette quantité,

$$s_m s_{m-1} = s_{m-1} s_{m-2} + r_{m-1}^2 - r_m^2,$$

d'où l'on déduit par transposition,

$$r_m^2 + s_m s_{m-1} = r_{m-1}^2 + s_{m-1} s_{m-2}.$$

Il suit de cette équation que $r_m^2 + s_m s_{m-1}$ a la même valeur pour tous les m et par conséquent que

$$r_m^2 + s_m s_{m-1} = r_1^2 + s s_1;$$

or nous avons vu plus haut que $r_1^2 + s s_1 = R$, et par suite,

(34) $$R = r_m^2 + s_m s_{m-1}.$$

Substituant cette expression pour R dans l'équation (33′), on aura après les réductions convenables

$$dz_m = \frac{2dr_m}{\sqrt{R}} - \frac{ds_m}{s_m} \frac{r_m}{\sqrt{R}} - \frac{ds_{m-1}}{s_{m-1}} \frac{r_m}{\sqrt{R}};$$

mais puisque $r_m = 2s_{m-1}\mu_{m-1} - r_{m-1}$, le terme $-\dfrac{ds_{m-1}}{s_{m-1}}\dfrac{r_m}{\sqrt{R}}$ se transforme en $-2\mu_{m-1}\dfrac{ds_{m-1}}{\sqrt{R}} + \dfrac{ds_{m-1}}{s_{m-1}}\dfrac{r_{m-1}}{\sqrt{R}}$. On obtient donc

$$dz_m = (2dr_m - 2\mu_{m-1}ds_{m-1})\,\frac{1}{\sqrt{R}} - \frac{ds_m}{s_m}\frac{r_m}{\sqrt{R}} + \frac{ds_{m-1}}{s_{m-1}}\frac{r_{m-1}}{\sqrt{R}},$$

et en intégrant

$$\int \frac{ds_m}{s_m}\frac{r_m}{\sqrt{R}} = -z_m + \int (2dr_m - 2\mu_{m-1}ds_{m-1})\,\frac{1}{\sqrt{R}} + \int \frac{ds_{m-1}}{s_{m-1}}\frac{r_{m-1}}{\sqrt{R}}. \tag{35}$$

Cette expression est, comme on le voit, une formule de réduction pour les intégrales de la forme $\int \dfrac{ds_m}{s_m}\dfrac{r_m}{\sqrt{R}}$. Car elle donne l'intégrale $\int \dfrac{ds_m}{s_m}\dfrac{r_m}{\sqrt{R}}$ par une autre intégrale de la même forme et par une intégrale de la forme $\int \dfrac{tdx}{\sqrt{R}}$ où t est une fonction entière. Mettant dans cette formule à la place de m successivement m, $m-1$, $m-2 \ldots 3$, 2, 1, on obtiendra m équations semblables, dont la somme donnera la formule suivante (en remarquant que $r_0 = 2s\mu - r_1 = t_1N$ en vertu de l'équation $r_1 + t_1N = 2s\mu$)

$$\begin{aligned}\int \frac{ds_m}{s_m}\sqrt{n} = {}&-(z_1 + z_2 + z_3 + \cdots + z_m) + \int \frac{ds}{s}\frac{t_1N}{\sqrt{R}}\\ &+ \int 2\,(dr_1 + dr_2 + \cdots + dr_m + \mu ds - \mu_1 ds_1 - \cdots - \mu_{m-1}ds_{m-1})\,\frac{1}{\sqrt{R}}.\end{aligned}$$

On peut encore réduire l'intégrale $\int \dfrac{ds}{s}\sqrt{N}$. En différentiant l'expression

$$z = \log \frac{t_1\sqrt{N} + \sqrt{R_1}}{t_1\sqrt{N} - \sqrt{R_1}},$$

on aura après quelques réductions,

$$dz = \frac{-2dt_1NR_1 - t_1\,(R_1dN - NdR_1)}{(t_1^2N - R_1)\sqrt{R}}.$$

Or on a

$$R_1 = t_1^2N + s;$$

substituant donc cette valeur de R_1 dans l'équation ci-dessus, on trouve

$$dz = (2Ndt_1 + t_1dN)\,\frac{1}{\sqrt{R}} - \frac{ds}{s}\frac{t_1N}{\sqrt{R}},$$

donc en intégrant

$$\int \frac{ds}{s}\frac{t_1N}{\sqrt{R}} = -z + \int (2Ndt_1 + t_1dN)\,\frac{1}{\sqrt{R}}.$$

L'expression de $\int \frac{ds_m}{s_m}\frac{r_m}{\sqrt{R}}$ se transforme par là en celle-ci,

$$\int \frac{ds_m}{s_m}\frac{r_m}{\sqrt{R}} = -\left(z + z_1 + z_2 + \cdots + z_m\right)$$
$$+\int \frac{2}{\sqrt{R}}\left(N dt_1 + \frac{1}{2}t_1 dN + dr_1 + \cdots + dr_m - \mu ds - \mu_1 ds_1 - \cdots - \mu_{m-1}ds_{m-1}\right),$$

ou, en mettant à la place des quantités z, z_1, $z_2 \ldots$ leurs valeurs,

$$\int \frac{ds_m}{s_m}\frac{r_m}{\sqrt{R}}$$
$$(36)\qquad = \int \frac{2}{\sqrt{R}}\left(N dt_1 + \frac{1}{2}t_1 dN + dr_1 + \cdots + dr_m + \mu ds - \mu_1 ds_1 - \cdots - \mu_{m-1}ds_{m-1}\right)$$
$$-\log\frac{t_1\sqrt{N}+\sqrt{R_1}}{t_1\sqrt{N}-\sqrt{R_1}} - \log\frac{r_1+\sqrt{R}}{r_1-\sqrt{R}} - \log\frac{r_2+\sqrt{R}}{r_2-\sqrt{R}} - \cdots - \log\frac{r_m+\sqrt{R}}{r_m-\sqrt{R}}.$$

Cette formule est entièrement la même que la formule (28); elle donne

$$(37)\qquad \frac{\varrho_m}{s_m}dx = -\frac{r_m ds_n}{s_m}$$
$$+2\left(N dt_1 + \frac{1}{2}t_1 dN + dr_1 + \cdots + dr_m - \mu ds - \cdots - \mu_{m-1}ds_{m-1}\right).$$

Mais l'expression ci-dessus dispense du calcul des fonctions α_m et β_m.

Si maintenant s_m est indépendant de x, l'intégrale $\int \frac{ds_m}{s_m}\frac{r_m}{\sqrt{R}}$ disparaît et l'on obtient la formule suivante:

$$(38)\qquad \int \frac{2}{\sqrt{R}}\left(\frac{1}{2}t_1 dN + N dt_1 + dr_1 + \cdots + dr_m - \mu ds - \cdots - \mu_{m-1}ds_{m-1}\right)$$
$$= \log\frac{t_1\sqrt{N}+\sqrt{R_1}}{t_1\sqrt{N}-\sqrt{R_1}} + \log\frac{r_1+\sqrt{R}}{r_1-\sqrt{R}} + \log\frac{r_2+\sqrt{R}}{r_2-\sqrt{R}} + \cdots + \log\frac{r_m+\sqrt{R}}{r_m-\sqrt{R}}.$$

Si dans l'expression (36) on fait $N = 1$, on a $t_1 = r$, et par suite

$$(39)\qquad r\int \frac{ds_m}{s_m}\frac{r_m}{\sqrt{R}} = \int \frac{2}{\sqrt{R}}\left(dr + dr_1 + \cdots + dr_m - \mu ds - \cdots - \mu_{m-1}ds_{m-1}\right)$$
$$-\log\frac{r+\sqrt{R}}{r-\sqrt{R}} - \log\frac{r_1+\sqrt{R}}{r_1-\sqrt{R}} - \cdots - \log\frac{r_m+\sqrt{R}}{r_m-\sqrt{R}}$$

et si l'on fait $s_m = a$:

$$(40)\qquad \int \frac{2}{\sqrt{R}}\left(dr + dr_1 + \cdots + dr_m - \mu ds - \mu_1 ds_1 - \cdots - \mu_{m-1}ds_{m-1}\right)$$
$$= \log\frac{r+\sqrt{R}}{r-\sqrt{R}} + \log\frac{r_1+\sqrt{R}}{r_1-\sqrt{R}} + \cdots + \log\frac{r_m+\sqrt{R}}{r_m-\sqrt{R}}.$$

En vertu de ce qui précède, cette formule a la même généralité que (38); elle donne par conséquent toutes les intégrales de la forme $\int \frac{t dx}{\sqrt{R}}$, où t est une fonction entière, qui peuvent être exprimées par une fonction de la forme $\log \dfrac{p+q\sqrt{R}}{p-q\sqrt{R}}$.

13.

Nous avons vu ci-dessus que

$$\sqrt{\frac{R_1}{N}} = t_1 + \cfrac{1}{2\mu + \cfrac{1}{2\mu_1 + \cfrac{1}{2\mu_n + \cfrac{1}{2\mu_3 + \cfrac{1}{\ddots}}}}}$$

donc, lorsque $N=1$,

$$\sqrt{R} = r + \cfrac{1}{2\mu + \cfrac{1}{2\mu_1 + \cfrac{1}{2\mu_2 + \cfrac{1}{2\mu_3 + \cfrac{1}{\ddots}}}}}$$

En général les quantités μ, μ_1, μ_2, $\mu_3 \ldots$ sont différentes entre elles. Mais lorsqu'une des quantités s, s_1, $s_2 \ldots$ est indépendante de x, la fraction continue devient *périodique*. On peut le démontrer comme il suit.

On a

$$r_{m+1}^2 + s_m s_{m+1} = R = r^2 + s,$$

donc, lorsque $s_m = a$,

$$r_{m+1}^2 - r^2 = s - a s_{m+1} = (r_{m+1} + r)\,(r_{m+1} - r)\,.$$

Or $\delta r_{m+1} = \delta r$, $\delta s < \delta r$, $\delta s_{m+1} < \delta r$, donc cette équation ne peut subsister à moins qu'on n'ait en même temps,

$$r_{m+1} = r, \qquad s_{m+1} = \frac{s}{a}.$$

Or, puisque $\mu_{m+1} = E\left(\dfrac{r_{m+1}}{s_{m+1}}\right)$ on a de même

$$\mu_{m+1} = aE\left(\frac{r}{s}\right);$$

mais $E\left(\frac{r}{s}\right)=\mu$, donc
$$\mu_{m+1}=a\mu.$$

On a de plus
$$s_{m+2}=s_m+4\mu_{m+1}r_{m+1}-4\mu_{m+1}^2s_{m+1},$$
donc ayant $s_m=a$, $r_{m+1}=r$, $\mu_{m+1}=a\mu$ on en conclut
$$s_{m+2}=a\left(1+4\mu r-4\mu^2 s\right);$$
or $s_1=1+4\mu r-4\mu^2 s$, donc
$$s_{m+2}=as_1.$$

On a de même
$$r_{m+2}=2\mu_{m+1}s_{m+1}-r_{m+1}=2\mu s-r,$$
donc, puisque $r_1=2\mu s-r$,
$$r_{m+2}=r_1,$$
d'où l'on tire
$$\mu_{m+2}=E\left(\frac{r_{m+2}}{s_{m+2}}\right)=\frac{1}{a}E\left(\frac{r_1}{s_1}\right),$$
donc
$$\mu_{m+2}=\frac{\mu_1}{a}.$$

En continuant ce procédé on voit sans peine qu'on aura en général
$$\left\{\begin{array}{l} r_{m+n}=r_{n-1}, \qquad s_{m+n}=a^{\pm1}s_{n-1}, \\ \mu_{m+n}=a^{\mp1}\mu_{n-1}. \end{array}\right. \tag{41}$$
Le signe supérieur doit être pris lorsque n est pair et le signe inférieur dans le cas contraire.

Mettant dans l'équation
$$r_m^2+s_{m-1}s_m=r^2+s$$
a à la place de s_m, on aura
$$(r_m-r)(r_m+r)=s-as_{m-1}.$$
Il s'ensuit que
$$r_m=r, \qquad s_{m-1}=\frac{s}{r}.$$
Or on a $\mu_m=E\left(\frac{r_m}{s_m}\right)$, donc
$$\mu_m=\frac{1}{a}Er;$$

c'est-à-dire

$$\mu_m = \frac{1}{a} r.$$

On a de plus

$$r_m + r_{m-1} = 2 s_{m-1} \mu_{m-1},$$

c'est-à-dire, puisque $r_m = r$, $s_{m-1} = \frac{s}{a}$,

$$r + r_{m-1} = \frac{2s}{a} \mu_{m-1}.$$

Mais $r + r_1 = 2s\mu$, donc

$$r_{m-1} - r_1 = \frac{2s}{a} \left(\mu_{m-1} - a\mu\right).$$

On a

$$r_{m-1}^2 + s_{m-1} s_{m-2} = r_1^2 + s s_1,$$

c'est-à-dire, puisque $s_{m-1} = \frac{s}{a}$,

$$\left(r_{m-1} + r_1\right)\left(r_{m-1} - r_1\right) = \frac{s}{a} \left(a s_1 - s_{m-2}\right).$$

Or nous avons vu que

$$r_{m-1} - r_1 = \frac{2s}{a} \left(\mu_{m-1} - a\mu\right),$$

donc en substituant,

$$2\left(r_{m-1} + r_1\right)\left(\mu_{m-1} - a\mu\right) = a s_1 - s_{m-2}.$$

Cette équation donne, en remarquant que $\delta'\left(r_{m-1} + r_1\right) > \delta\left(a s_1 - s_{m-2}\right)$,

$$\mu_{m-1} = a\mu,\ s_{m-2} = a s_1,$$

et par conséquent.

$$r_{m-1} = r_1.$$

Par un procédé semblable on trouvera aisément,

$$r_{m-2} = r_{2,}, \quad s_{m-3} = \frac{1}{a} s_2, \quad \mu_{m-2} = \frac{\mu_1}{a},$$

et en général

$$(42) \qquad \left\{ \begin{array}{l} r_{m-n} = r_n, \quad s_{m-n} = a^{\pm 1} s_{n-1}, \\ \mu_{m-n} = a^{\mp 1} \mu_{n-1}. \end{array} \right.$$

14.

A. Soit m un nombre pair, $2k$.

Dans ce cas on voit aisément, en vertu des équations (41) et (42), que les quantités $r,\ r_1,\ r_2 \ldots s,\ s_1,\ s_2 \ldots,\ \mu,\ \mu_1,\ \mu_2 \ldots$ forment les séries suivantes:

0	1	..	$2k-2$	$2k-1$	$2k$	$2k+1$	$2k+2$	..	$4k-1$	$4k$	$4k+1$	$4k+2$	$4k+3$	etc.
r	r_1	..	r_2	r_1	r	r	r_1	..	r_2	r_1	r	r	r_1	etc.
s	s_1	..	as_1	$\frac{s}{a}$	a	$\frac{s}{a}$	as_1	..	s_1	s	1	s	s_1	etc.
μ	μ_1	..	$\frac{\mu_1}{a}$	$a\mu$	$\frac{r}{a}$	$a\mu$	$\frac{\mu_1}{a}$	..	μ_1	μ	r	μ	μ_1	etc.

B. Soit m un nombre impair, $2k-1$.

Dans ce cas l'équation

$$s_{m-n} = a^{\pm 1} s_{n-1} \quad \text{ou} \quad s_{2k-n-1} = a^{\pm 1} s_{n-1}$$

donne, pour $n = k$,

$$s_{k-1} = a^{\pm 1} s_{k-1}, \quad \text{donc} \quad a = 1.$$

Les quantités $r,\ r_1$ etc. $s,\ s_1$ etc.,$\|,\ \|_1$ etc. forment les séries suivantes:

0	1	..	$k-2$	$k-1$	k	$k+1$	..	$2k-2$	$2k-1$	$2k$	$2k+1$	etc.
r	r_1	..	r_{k-2}	r_{k-1}	r_{k-1}	r_{k-2}	..	r_1	r	r	r_1	etc.
s	s_1	..	s_{k-2}	s_{k-1}	s_{k-2}	s_{k-3}	..	s	1	s	s_1	etc.
μ	μ_1	..	μ_{k-2}	μ_{k-1}	μ_{k-2}	μ_{k-3}	..	μ	r	μ	μ_1	etc.

On voit par là que, lorsqu'une des quantités $s,\ s_1,\ s_2 \ldots$ est indépendante de x, la fraction continue résultant de $\sqrt{R}$ est toujours périodique et de la forme suivante, lorsque $s_m = a$:

$$\sqrt{R} = r + \cfrac{1}{2\mu + \cfrac{1}{2\mu_1 + \cfrac{1}{\ddots \cfrac{1}{\frac{2\mu_1}{a} + \cfrac{1}{2a\mu + \cfrac{1}{\frac{2r}{a} + \cfrac{1}{2a\mu + \cfrac{1}{\frac{2\mu_1}{a} + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{2\mu + \cfrac{1}{2r + \cfrac{1}{2\mu + \cfrac{1}{\ddots}}}}}}}}}}}}$$

Lorsque m est impair, on a de plus $a = 1$, et par suite

$$\sqrt{R} = r + \cfrac{1}{2\mu + \cfrac{1}{2\mu_1 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{2\mu_1 + \cfrac{1}{2\mu + \cfrac{1}{2r + \cfrac{1}{2\mu + \cfrac{1}{2\mu_1 + \cfrac{1}{\ddots}}}}}}}}}$$

La réciproque a également lieu; c'est-à-dire que, lorsque la fraction continue résultant de $\sqrt{R}$ a la forme ci-dessus, s_m sera indépendant de x. En effet, soit

$$\mu_m = \frac{r}{a},$$

on tire de l'équation $r_m = s_m \mu_m + \varepsilon_m$,

$$r_m = \frac{r}{a} s_m + \varepsilon_m.$$

Or, puisque $r_m = r_{m-1} - 2\varepsilon_{m-1}$, où $\delta\varepsilon_{m-1} < \delta r$, il est clair que

$$r_m = r + \gamma_m, \text{ où } \delta\gamma_m < \delta r.$$

On en tire

$$r\left(1 - \frac{s_m}{a}\right) = \varepsilon_m - \gamma_m,$$

et par conséquent $s_m = a$, ce qu'il fallait démontrer. En combinant cela avec ce qui précède, on trouve la proposition suivante:

"Lorsqu'il est possible de trouver pour ϱ une fonction entière telle, que

$$\int \frac{\varrho dx}{\sqrt{R}} = \log \frac{y + \sqrt{R}}{y - \sqrt{R}},$$

la fraction continue résultant de $\sqrt{R}$ est périodique, et a la forme suivante:

$$\sqrt{R} = r + \cfrac{1}{2\mu + \cfrac{1}{2\mu_1 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{2\mu_1 + \cfrac{1}{2\mu + \cfrac{1}{2r + \cfrac{1}{2\mu + \cfrac{1}{2\mu_1 + \text{etc.}}}}}}}}}$$

et réciproquement, lorsque la fraction continue résultant de $\sqrt{R}$ a cette forme, il est toujours possible de trouver pour ϱ une fonction entière qui satisfasse à l'équation,

$$\int \frac{\varrho dx}{\sqrt{R}} = \log \frac{y + \sqrt{R}}{y - \sqrt{R}}.$$

La fonction y est donnée par l'expression suivante:

$$y = r + \cfrac{1}{2\mu + \cfrac{1}{2\mu_1 + \cfrac{1}{2\mu_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{2\mu + \cfrac{1}{2r}}}}}}.$$

Dans cette proposition est contenue la solution complète du problème proposé au commencement de ce mémoire.

15.

Nous venons de voir que, lorsque s_{2k-1} est indépendant de x, on aura toujours $s_k = s_{k-2}$, et lorsque s_{2k} est indépendant de x, on aura $s_k = cs_{k-1}$, où c est constant. La réciproque a également lieu, ce qu'on peut démontrer comme il suit.

I. Soit d'abord $s_k = s_{k-2}$, on a

$$r_{k-1}^2 + s_{k-1}s_{k-2} = r_k^2 + s_k s_{k-1};$$

or $s_k = s_{k-2}$, donc

$$r_k = r_{k-1}.$$

De plus

$$r_k = \mu_k s_k + \varepsilon_k,$$

$$r_{k-2} = \mu_{k-2}s_{k-2} + \varepsilon_{k-2},$$

donc

$$r_k - r_{k-2} = s_k\left(\mu_k - \mu_{k-2}\right) + \varepsilon_k - \varepsilon_{k-2}.$$

Mais

$$r_k = r_{k-1}, \qquad r_{k-2} = r_{k-1} + 2\varepsilon_{k-2},$$

donc, en substituant, on trouve

$$0 = s_k\left(\mu_k - \mu_{k-2}\right) + \varepsilon_k + \varepsilon_{k-2}.$$

Cette équation donne, en remarquant que $\delta\varepsilon_k < \delta s_k$, $\quad \delta\varepsilon_{k-2} < \delta s_{k-2}$,

$$\mu_k = \mu_{k-2}, \qquad \varepsilon_k = -\varepsilon_{k-2}.$$

Or $r_{k+1} = r_k - 2\varepsilon_k$, donc, en vertu de la dernière équation,

$$r_{k+1} = r_{k-1} + 2\varepsilon_{k-2},$$

et, puisque $r_{k-1} = r_{k-2} - 2\varepsilon_{k-2}$, on en conclut

$$r_{k+1} = r_{k-2}.$$

On a

$$r_{k+1}^2 + s_k s_{k+1} = r_{k-2}^2 + s_{k-2}s_{k-3},$$

donc, puisque $r_{k+1} = r_{k-2}$, $s_k = s_{k-2}$, on a aussi

$$s_{k+1} = s_{k-3}.$$

En combinant cette équation avec celles-ci,

$$r_{k+1} = \mu_{k+1} s_{k+1} + \varepsilon_{k+1}, \quad r_{k-3} = \mu_{k-3} s_{k-3} + \varepsilon_{k-3},$$

on obtiendra

$$r_{k+1} - r_{k-3} = s_{k+1} (\mu_{k+1} - \mu_{k-3}) + \varepsilon_{k+1} - \varepsilon_{k-3}.$$

Or on a $r_{k+1} = r_{k-2}$, et $r_{k-2} = r_{k-3} - 2\varepsilon_{k-3}$, par conséquent

$$0 = s_{k+1} (\mu_{k+1} - \mu_{k-3}) + \varepsilon_{k+1} + \varepsilon_{k-3}.$$

Il s'ensuit que

$$\mu_{k+1} = \mu_{k-3}, \ \varepsilon_{k+1} = -\varepsilon_{k-3}.$$

En continuant de cette manière, on voit aisément qu'on aura en général

$$r_{k+n} = r_{k-n-1}, \quad \mu_{k+n} = \mu_{k-n-2}, \quad s_{k+n} = s_{k-n-2}.$$

En posant dans la dernière équation $n = k - 1$, on trouvera

$$s_{2k-1} = s_{-1}.$$

Or il est clair que s_{-1} est la même chose que 1; car on a en général

$$R = r_m^2 + s_m s_{m-1}$$

donc en faisant $m = 0$,

$$R = r^2 + s s_{-1}$$

mais $R = r^2 + s$, donc $s_{-1} = 1$, et par conséquent

$$s_{2k-1} = 1.$$

II. Soit en second lieu $s_k = c s_{k-1}$, on a

$$r_k = \mu_k s_k + \varepsilon_k,$$

$$r_{k-1} = \mu_{k-1} s_{k-1} + \varepsilon_{k-1},$$

donc

$$r_k - r_{k-1} = s_{k-1} (c\mu_k - \mu_{k-1}) + \varepsilon_k - \varepsilon_{k-1}.$$

Or $r_k - r_{k-1} = -2\varepsilon_{k-1}$, donc

$$0 = s_{k-1} (c\mu_k - \mu_{k-1}) + \varepsilon_k + \varepsilon_{k-1}.$$

Cette équation donne

$$\mu_k = \frac{1}{c} \mu_{k-1}, \quad \varepsilon_k = -\varepsilon_{k-1}.$$

Donc des équations

$$r_k - r_{k-1} = -2\varepsilon_{k-1}, \quad r_{k+1} - r_k = -2\varepsilon_k,$$

on déduit en ajoutant

$$r_{k+1}=r_{k-1}.$$

On a de plus

$$r_{k+1}^2+s_k s_{k+1}=r_{k-1}^2+s_{k-1}s_{k-2},$$

et, puisque $r_{k+1}=r_{k-1}$ et $s_k=cs_{k-1}$, on en conclut

$$s_{k+1}=\frac{1}{c}s_{k-2}.$$

En continuant de cette manière, on aura,

$$s_{2k}=c^{\pm 1},$$

c'est-à-dire que s_{2k} est indépendant de x.

Cette propriété des quantités s, s_1, s_2 etc. fait voir que l'équation $s_{2k}=a$ est identique avec l'équation $s_k=a^{\pm 1}s_{k-1}$ et que l'équation $s_{2k-1}=1$ est identique avec l'équation $s_k=s_{k-2}$. Il s'ensuit que, lorsqu'on cherche la forme de R qui convient à l'équation $s_{2k}=a$, on peut au lieu de cette équation poser $s_k=a^{\pm 1}s_{k-1}$, et que, lorsqu'on cherche la forme de R qui convient à l'équation $s_{2k-1}=1$, il suffit de faire $s_k=s_{k-2}$, ce qui abrége beaucoup le calcul.

16.

En vertu des équations (41) et (42) on peut donner à l'expression (40) une forme plus simple.

a) Lorsque m est pair et égal à $2k$, on a

$$(43)\quad \begin{cases} \displaystyle\int \frac{2}{\sqrt{R}}\left(dr+dr_1+\cdots+dr_{k-1}+\frac{1}{2}dr_k-\mu ds-\mu_1 ds_1-\cdots-\mu_{k-1}ds_{k-1}\right) \\ \displaystyle=\log\frac{r+\sqrt{R}}{r-\sqrt{R}}+\log\frac{r_1+\sqrt{R}}{r_1-\sqrt{R}}+\cdots+\log\frac{r_{k-1}+\sqrt{R}}{r_{k-1}-\sqrt{R}}+\frac{1}{2}\log\frac{r_k+\sqrt{R}}{r_k-\sqrt{R}}. \end{cases}$$

b) Lorsque m est impair et égal à $2k-1$, on a

$$(44)\quad \begin{cases} \displaystyle\int \frac{2}{\sqrt{R}}\left(dr+dr_1+\cdots+d_{r_{k-1}}-\mu ds-\mu_1 ds_1-\cdots-\mu_{k-2}ds_{k-2}-\frac{1}{2}\mu_{k-1}ds_{k-1}\right) \\ \displaystyle\qquad=\log\frac{r+\sqrt{R}}{r-\sqrt{R}}+\log\frac{r_1+\sqrt{R}}{r_1-\sqrt{R}}+\cdots+\log\frac{r_{k-1}+\sqrt{R}}{r_{k-1}-\sqrt{R}}. \end{cases}$$

17.

Pour appliquer ce qui précède à un exemple, prenons l'intégrale

$$\int \frac{\varrho dx}{\sqrt{x^4+\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta}}.$$

On a ici $\delta R=4$, donc les fonctions s, s_1, s_2, $s_3\ldots$ sont du premier degré, et par suite l'équation $s_m=$ const. ne donne qu'une seule équation de condition entre les quantités, α, β, γ, δ, ε.

Faisant

$$x^4+\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta=\left(x^2+ax+b\right)^2+c+ex$$

on aura

$$r=x^2+ax+b, \quad s=c+ex.$$

Pour abréger le calcul, nous ferons $c=0$. Dans ce cas on a $s=ex$, et par conséquent,

$$\mu=E\left(\frac{r}{s}\right)=E\left(\frac{x^2+ax+b}{ex}\right);$$

c'est-à-dire

$$\mu=\frac{x}{e}+\frac{a}{e}, \quad \varepsilon=b$$

De plus

$$r_1=r-2\varepsilon=x^2+ax+b-2b=x^2+ax-b,$$

$$s_1=1+4\varepsilon\mu=1+4b\frac{x+a}{e}=\frac{4b}{e}x+\frac{4ab}{e}+1,$$

$$\mu_1=E\left(\frac{r_1}{s_1}\right)=E\frac{x^2+ax-b}{\frac{4b}{e}x+\frac{4ab}{e}+1}=\frac{e}{4b}x-\frac{e^2}{16b^2},$$

$$\varepsilon_1=r_1-\mu_1 s_1=\frac{ae}{4b}+\frac{e^2}{16b^2}-b,$$

$$s_2=s+4\varepsilon_1\mu_1=\left(\frac{ae^2}{4b^2}+\frac{e^3}{16b^3}\right)x-\frac{e^2}{4b^2}\left(\frac{ae}{4b}+\frac{e^2}{16b^2}-b\right).$$

Soit maintenant en premier lieu s_1 constant. Alors l'équation

$$s_1=\frac{4b}{e}x+\frac{4ab}{e}+1$$

donne

$$b=0,$$

par conséquent,

$$r=x^2+ax,$$

$$\int \frac{2}{\sqrt{R}}\left(dr-\frac{1}{2}\mu ds\right)=\log\frac{r+\sqrt{R}}{r-\sqrt{R}},$$

ou, puisque $\mu = \dfrac{x+a}{e}$, $s = ex$,

$$\int \frac{(3x+a)dx}{\sqrt{(x^2+ax)^2+ex}} = \log \frac{x^2+ax+\sqrt{R}}{x^2+ax-\sqrt{R}}.$$

Cette intégrale se trouve aussi facilement en divisant le numérateur et le dénominateur de la différentielle par $\sqrt{x}$.

Soit en deuxième lieu s_2 constant. Dans ce cas la formule (43) donne, k étant égal à l'unité,

$$\int \frac{2}{\sqrt{R}}\left(dr + \frac{1}{2}dr_1 - \mu ds\right) = \log \frac{r+\sqrt{R}}{r-\sqrt{R}} + \frac{1}{2}\log \frac{r_1+\sqrt{R}}{r_1-\sqrt{R}}.$$

Or l'équation $s_2 =$ const. donne $s_1 = cs$, donc

$$\frac{4b}{e}x + \frac{4ab}{e} + 1 = cex.$$

L'équation de condition sera donc $\dfrac{4ab}{e} + 1 = 0$, c'est-à-dire

$$e = -4ab,$$

donc

$$R = \left(x^2+ax+b\right)^2 - 4abx.$$

De plus, ayant $\mu = \dfrac{x+a}{e}$, $r = x^2+ax+b$, $r_1 = x^2+ax-b$, on aura la formule,

$$\int \frac{(4x+a)dx}{\sqrt{(x^2+ax+b)^2-4abx}} = \log \frac{x^2+ax+b+\sqrt{R}}{x^2+ax+b-\sqrt{R}} + \frac{1}{2}\log \frac{x^2+ax^2-b+\sqrt{R}}{x^2+ax-b-\sqrt{R}}.$$

Soit en troisième lieu s_3 constant. Cette équation donne $s = s_2$, c'est-à-dire

$$\frac{ae}{4b} + \frac{e^2}{16b^2} - b = 0.$$

On en tire

$$e = -2b\left(a \pm \sqrt{a^2+4b}\right).$$

La formule (44) donne par conséquent, puisque $k = 2$,

$$\int \frac{\left(5x + \frac{3}{2}a \mp \frac{1}{2}\sqrt{a^2+4b}\right)dx}{\sqrt{(x^2+ax+b)^2 - 2bx\left(a \pm \sqrt{a^2+4b}\right)}} = \log \frac{x^2+ax+b+\sqrt{R}}{x^2+ax+b-\sqrt{R}} + \log \frac{x^2+ax-b+\sqrt{R}}{x^2+ax-b-\sqrt{R}}.$$

Si par exemple $a = 0$, $b = 1$, on aura cette intégrale:

$$\int \frac{(5x-1)dx}{\sqrt{(x^2+1)^2-4x}} = \log \frac{x^2+1+\sqrt{(x^2+1)^2-4x}}{x^2+1-\sqrt{(x^2+1)^2-4x}} + \log \frac{x^2-1+\sqrt{(x^2+1)^2-4x}}{x^2-1-\sqrt{(x^2+1)^2-4x}}.$$

Soit en quatrième lieu s_4 constant. Cela donne $s_2 = cs_1$, c'est-à-dire

$$\left(\frac{ae^2}{4b^2}+\frac{e^3}{16b^3}\right)x-\frac{e^2}{4b^2}\left(\frac{ae}{4b}+\frac{e^2}{16b^2}-b\right)=\frac{4cb}{e}x+\left(\frac{4ab}{e}+1\right)c.$$

On en tire, en comparant les coefficiens et éliminant ensuite c,

$$\frac{e}{16b^3}(e+4ab)^2=-\frac{e}{b}\left(\frac{ae}{4b}+\frac{e^2}{16b^2}-b\right),$$

$$(e+4ab)^2=16b^3-e(e+4ab),$$

$$e^2+6abe=8b^3-8a^2b^2,$$

$$e=-3ab\mp\sqrt{8b^3+a^2b^2}=-b\left(3a\pm\sqrt{a^2+8b}\right).$$

En vertu de cette expression la formule (43) donne,

$$\int\frac{\left(6x+\frac{3}{2}a-\frac{1}{2}\sqrt{a^2+8b}\right)dx}{\sqrt{(x^2+ax+b)^2-b\left(3a+\sqrt{a^2+8b}\right)x}}=\log\frac{x^2+ax+b+\sqrt{R}}{x^2+ax+b-\sqrt{R}}$$

$$+\log\frac{x^2+ax-b+\sqrt{R}}{x^2+ax-b-\sqrt{R}}+\frac{1}{2}\log\frac{x^2+ax+\frac{1}{4}a\left(a-\sqrt{a^2+8b}\right)+\sqrt{R}}{x^2+ax+\frac{1}{4}a\left(a-\sqrt{a^2+8b}\right)-\sqrt{R}}.$$

Si l'on fait par exemple $a=0$, $b=\dfrac{1}{2}$, on obtiendra

$$\int\frac{\left(x+\frac{1}{6}\right)dx}{\sqrt{x^4+x^2+x+\frac{1}{4}}}=\frac{1}{6}\log\frac{x^2+\frac{1}{2}+\sqrt{x^4+x^2+x+\frac{1}{4}}}{x^2+\frac{1}{2}-\sqrt{x^4+x^2+x+\frac{1}{4}}}$$

$$+\frac{1}{6}\log\frac{x^2+-\frac{1}{2}+\sqrt{x^4+x^2+x+\frac{1}{4}}}{x^2-\frac{1}{2}-\sqrt{x^4+x^2+x+\frac{1}{4}}}+\frac{1}{12}\log\frac{x^2+\sqrt{x^4+x^2+x+\frac{1}{4}}}{x^2-\sqrt{x^4+x^2+x+\frac{1}{4}}}$$

On peut continuer de cette manière et trouver un plus grand nombre d'intégrales. Ainsi par exemple l'intégrale

$$\int\frac{\left(x+\frac{\sqrt{5}+1}{14}\right)dx}{\sqrt{\left(x^2+\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2+(\sqrt{5}-1)^2x}}$$

peut s'exprimer par des logarithmes.

Nous avons ici cherché les intégrales de la forme $\displaystyle\int\frac{\varrho dx}{\sqrt{R}}$ qui peuvent s'exprimer par une fonction logarithmique de la forme $\log\dfrac{p+q\sqrt{R}}{p-q\sqrt{R}}$. On pourrait rendre le problème encore plus général, et chercher en général toutes les intégrales de la forme ci-dessus qui pourraient s'exprimer d'une manière quelconque par des logarithmes; mais on ne trouverait pas d'intégrales nouvelles. On a en effet ce théorème remarquable:

> "Lorsqu'une intégrale de la forme $\int \frac{\varrho dx}{\sqrt{R}}$, où ϱ et R sont des fonctions entières de x, est exprimable par des logarithmes, on peut toujours l'exprimer de la manière suivante:
>
> $$\int \frac{\varrho dx}{\sqrt{R}} = A \log \frac{p + q\sqrt{R}}{p - q\sqrt{R}},$$
>
> où A est constant, et p et q des fonctions entières de x."

Je démontrerai ce théorème dans une autre occasion.