I.

LES FONCTIONS TRANSCENDANTES $\Sigma\frac{1}{a^2}$, $\Sigma\frac{1}{a^3}$, $\Sigma\frac{1}{a^4}$, $\ldots\Sigma\frac{1}{a^n}$ EXPRIMÉES PAR DES INTÉGRALES DÉFINIES.

Si l'on différentie plusieurs fois de suite la fonction $\Sigma\frac{1}{a}$, on aura

$$\frac{d\Sigma\frac{1}{a}}{da}=\frac{\Sigma d\frac{1}{a}}{da}=-\Sigma\frac{1}{a^2},$$
$$\frac{d^2\Sigma\frac{1}{a}}{da^2}=\frac{\Sigma d^2\left(\frac{1}{a}\right)}{da^2}=+2\Sigma\frac{1}{a^3},$$
$$\frac{d^3\Sigma\frac{1}{a}}{da^3}=\frac{\Sigma d^3\left(\frac{1}{a}\right)}{da^3}=-2.3\Sigma\frac{1}{a^4},$$
$$\frac{d^n\Sigma\frac{1}{a}}{da^n}=\frac{\Sigma d^n\left(\frac{1}{a}\right)}{da^n}=\pm 2.3.4\ldots n.\Sigma\frac{1}{a^{n+1}},$$

où le signe $+$ a lieu, lorsque n est pair, et le signe $-$, lorsque n est impair.

On en conclut réciproquement

$$\Sigma\frac{1}{a^2}=-\frac{d\Sigma\frac{1}{a}}{da},\quad \Sigma\frac{1}{a^3}=+\frac{d^2\Sigma\frac{1}{a}}{2.da^2},\quad \Sigma\frac{1}{a^4}=-\frac{d^3\Sigma\frac{1}{a}}{2.3.da^3}+\quad\text{etc.},$$
$$\Sigma\frac{1}{a^n}=\pm\frac{d^{n-1}\Sigma\frac{1}{a}}{1.2.3\ldots(n-1)da^{n-1}}=\pm\frac{d^{n-1}L(a)}{2.3\ldots(n-1)da^{n-1}}.$$

Or on a $\Sigma\frac{1}{a}=L(a)=\int_0^1\frac{x^{a-1}-1}{x-1}dx$. On en tire, en différentiant par rapport à

a,

$$\frac{d\Sigma\frac{1}{a}}{da} = \int_0^1 \frac{x^{a-1}(lx)}{x-1}dx,$$
$$\frac{d^2\Sigma\frac{1}{a}}{da^2} = \int_0^1 \frac{x^{a-1}(lx)^2}{x-1}dx,$$
$$\frac{d^3\Sigma\frac{1}{a}}{da^3} = \int_0^1 \frac{x^{a-1}(lx)^3}{x-1}dx,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\frac{d^{n-1}\Sigma\frac{1}{a}}{da^{n-1}} = \int_0^1 \frac{x^{a-1}(lx)^{n-1}}{x-1}dx.$$

En substituant ces valeurs, on aura

$$\Sigma\frac{1}{a^2} = -\int_0^1 \frac{x^{a-1}lx}{x-1}dx,$$
$$\Sigma\frac{1}{a^3} = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^{a-1}(lx)^2}{x-1}dx,$$
$$\Sigma\frac{1}{a^4} = -\frac{1}{2.3}\int_0^1 \frac{x^{a-1}(lx)^3}{x-1}dx,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\Sigma\frac{1}{a^{2n}} = -\frac{1}{2.3.4\dots(2n-1)}\int_0^1 \frac{x^{a-1}(lx)^{2n-1}}{x-1}dx,$$
$$\Sigma\frac{1}{a^{2n+1}} = +\frac{1}{2.3.4\dots 2n}\int_0^1 \frac{x^{a-1}(lx)^{2n}}{x-1}dx.$$

En général, quel que soit α, on aura

$$\Sigma\frac{1}{a^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 \frac{x^{a-1}\left(l\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1}}{x-1}dx.$$

Désignons $\Sigma\frac{1}{a^\alpha}$ par $L(a,\alpha)$, nous aurons

$$L(a,\alpha) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 \frac{x^{a-1}\left(l\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1}}{x-1}dx + C. \tag{1}$$

En développant $\frac{x^{a-1}}{x-1}$ en série infinie, il viendra

$$L(a,\alpha) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left[\int_0^1 x^{a-2}\left(l\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1}dx + \int_0^1 x^{\alpha-3}\left(l\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1}dx + \int_0^1 x^{a-4}\left(l\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1}dx + \dots\right];$$

or $\displaystyle\int_0^1 x^{a-k-1}\left(l\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1}dx=\frac{\Gamma(\alpha)}{(a-k)^{\alpha}}$, par conséquent

$$L(a,\,\alpha)=\frac{1}{(a-1)^{\alpha}}+\frac{1}{(a-2)^{\alpha}}+\frac{1}{(a-3)^{\alpha}}+\cdots+C,$$

où C est une constante indépendante de a. Pour la trouver, faisons dans (1) $a=1$, ce qui donne $L(1,\,\alpha)=0$ et $x^{a-1}=x^0=1$; par conséquent

$$C=-\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1\frac{\left(l\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1}}{x-1}dx.$$

On tire de là

$$L(a,\,\alpha)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1\frac{x^{a-1}-1}{x-1}\left(l\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1}dx,$$

où α peut être positif, négatif où zéro. On a

$$x^{a-1}=\left(\frac{1}{x}\right)^{-a+1}=1-(a-1)\left(l\frac{1}{x}\right)+\frac{(a-1)^2}{2}\cdot\left(l\frac{1}{x}\right)^2-\frac{(a-1)^3}{2.3}\left(l\frac{1}{x}\right)^3+\text{ etc.}$$

Substituant cette valeur, on aura

$$L(a,\alpha)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left\{(a-1)\int_0^1\frac{\left(l\frac{1}{x}\right)^{\alpha}}{1-x}dx-\frac{(a-1)^2}{2}\int_0^1\frac{\left(l\frac{1}{x}\right)^{\alpha+1}}{1-x}dx+\frac{(a-1)^3}{2.3}\int_0^1\frac{\left(l\frac{1}{x}\right)^{\alpha+2}}{1-x}dx-\ldots\right\}.$$

Considérons l'expression $\displaystyle\int_0^1\frac{\left(l\frac{1}{x}\right)^{k}}{1-x}dx$. En développant $\dfrac{1}{1-x}$, on aura

$$\int\frac{\left(l\frac{1}{x}\right)^{k}}{1-x}dx=\int\left(l\frac{1}{x}\right)^{k}dx+\int x\left(l\frac{1}{x}\right)^{k}dx+\int x^2\left(l\frac{1}{x}\right)^{k}dx+\ldots;$$

or $\displaystyle\int_0^1 x^n\left(l\frac{1}{x}\right)^{k}dx=\frac{\Gamma(k+1)}{(n+1)^{k+1}}$, donc

$$\int_0^1\frac{\left(l\frac{1}{x}\right)^{k}}{1-x}dx=\Gamma(k+1)\left(1+\frac{1}{2^{k+1}}+\frac{1}{3^{k+1}}+\frac{1}{4^{k+1}}+\ldots\right),$$

donc enfin

$$\begin{aligned}L(a,\,\alpha)=&\frac{(a-1).\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)}\left(1+\frac{1}{2^{\alpha+1}}+\frac{1}{3^{\alpha+1}}+\frac{1}{4^{\alpha+1}}+\ldots\right)\\&-\frac{(a-1)^2.\Gamma(\alpha+2)}{2.\Gamma(\alpha)}\left(1+\frac{1}{2^{\alpha+2}}+\frac{1}{3^{\alpha+2}}+\frac{1}{4^{\alpha+2}}+\ldots\right)\\&+\frac{(a-1)^3.\Gamma(\alpha+3)}{2.3.\Gamma(\alpha)}\left(1+\frac{1}{2^{\alpha+3}}+\frac{1}{3^{\alpha+3}}+\frac{1}{4^{\alpha+3}}+\ldots\right)\\&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

or on a $\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha)$, $\Gamma(\alpha+2)=\alpha(\alpha+1)\Gamma(\alpha)$ et en général $\Gamma(\alpha+k)=\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+k-1)\Gamma(\alpha)$. Substituant ces valeurs, on obtient

$$\begin{aligned}L(a,\,\alpha)=&\frac{a-1}{1}\alpha\left(1+\frac{1}{2^{\alpha+1}}+\frac{1}{3^{\alpha+1}}+\frac{1}{4^{\alpha+1}}+\ldots\right)\\&-\frac{(a-1)^2}{1.2}\alpha(\alpha+1)\left(1+\frac{1}{2^{\alpha+2}}+\frac{1}{3^{\alpha+2}}+\frac{1}{4^{\alpha+2}}+\ldots\right)\\&+\frac{(a-1)^3}{1.2.3}\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\left(1+\frac{1}{2^{\alpha+3}}+\frac{1}{3^{\alpha+3}}+\frac{1}{4^{\alpha+3}}+\ldots\right)\\&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

Si l'on pose a infini, on aura

$$L(\infty,\,\alpha)=1+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}+\frac{1}{4^\alpha}+\ldots,$$

donc en désignant $L(\infty,\,\alpha)$ par $L'(\alpha)$

$$L(a,\alpha)=\alpha.(a-1)L'(\alpha+1)-\frac{\alpha(\alpha+1)}{2}(a-1)^2L'(\alpha+2)+\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{2.3}(a-1)^3L'(\alpha+3)-\ldots.$$

Si dans la formule (1) on met $\frac{m}{a}$ au lieu de a, on aura

$$L\left(\frac{m}{a},\,\alpha\right)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1\frac{\left(x^{\frac{m}{a}-1}-1\right)\left(l\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1}}{x-1}dx.$$

Faisant $x^{\frac{1}{a}}=y$, x devient $=y^a$, $dx=ay^{a-1}$, $\left(l\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1}=a^{\alpha-1}\left(l\frac{1}{y}\right)^{\alpha-1}$ et par suite

$$L\left(\frac{m}{a},\,\alpha\right)=\frac{a^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1\frac{(y^{m-a}-1)\left(l\frac{1}{y}\right)^{\alpha-1}y^{a-1}}{y^a-1}dy=\frac{a^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1\frac{y^{m-1}-y^{a-1}}{y^a-1}\left(l\frac{1}{y}\right)^{\alpha-1}dy.$$

On tire de là

$$L\left(\frac{m}{a},\,\alpha\right)=-\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1\frac{\left(l\frac{1}{y}\right)^{\alpha-1}}{y-1}dy+\frac{a^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1\frac{y^{m-1}\left(l\frac{1}{y}\right)^{\alpha-1}}{y^a-1}dy.$$

Si maintenant $m-1<a$, ce qu'on peut supposer, la fraction $\frac{y^{m-1}}{y^a-1}$ est résoluble en fractions partielles de la forme $\frac{A}{1-cy}$. On aura donc

$$L\left(\frac{m}{a},\,\alpha\right)=\left\{A\int_0^1\frac{\left(l\frac{1}{y}\right)^{\alpha-1}}{1-cy}dy+A'\int_0^1\frac{\left(l\frac{1}{y}\right)^{\alpha-1}}{1-c'y}dy+\ldots\right\}\frac{a^\alpha}{\Gamma(\alpha)}.$$

Si l'on développe $\frac{1}{1-cy}$ en série, on voit que

$$\int\frac{\left(l\frac{1}{y}\right)^{\alpha-1}}{1-cy}dy=\int\left(l\frac{1}{y}\right)^{\alpha-1}dy+c\int y\left(l\frac{1}{y}\right)^{\alpha-1}dy+c^2\int y^2\left(l\frac{1}{y}\right)^{\alpha-1}dy+\ldots$$

or $\int_0^1 \left(l\frac{1}{y}\right)^{\alpha-1} y^k dy = \frac{\Gamma(\alpha)}{(k+1)^\alpha}$, donc

$$\int_0^1 \frac{\left(l\frac{1}{y}\right)^{\alpha-1}}{1-cy} dy = \Gamma(\alpha)\left(1+\frac{c}{2^\alpha}+\frac{c^2}{3^\alpha}+\frac{c^3}{4^\alpha}+\dots\right),$$

donc en désignant $1+\frac{c}{2^\alpha}+\frac{c^2}{3^\alpha}+\frac{c^3}{4^\alpha}+\dots$ par $L'(\alpha, c)$, on aura

$$\int_0^1 \frac{\left(l\frac{1}{y}\right)^{\alpha-1}}{1-cy}.dy = \Gamma(\alpha).L'(\alpha, c);$$

on obtiendra donc enfin:

$$L\left(\frac{m}{a}, \alpha\right) = a^\alpha \left[A.L'(\alpha, c) + A'.L'(\alpha, c') + A''.L'(\alpha, c'') + \text{ etc. } \right].$$

La fonction $L\left(\frac{m}{a}, \alpha\right)$ peut donc, lorsque m et a sont des nombres entiers, être exprimée sous forme finie à l'aide des fonctions $\Gamma(\alpha)$ et $L'(\alpha, c)$. Soit par exemple $m=1$, $a=2$, on aura

$$L\left(\frac{1}{2}, \alpha\right) = \frac{2^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \frac{1-y}{y^2-1}\left(l\frac{1}{y}\right)^{\alpha-1} dy = -\frac{2^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \frac{\left(l\frac{1}{y}\right)^{\alpha-1}}{1+y} dy.$$

On a par conséquent $A=-1$ et $c=-1$, donc

$$L\left(\frac{1}{2}, \alpha\right) = -2^\alpha.L'(\alpha, -1) = -2^\alpha\left(1-\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}-\frac{1}{4^\alpha}+\dots\right).$$

Lorsque α est un nombre entier, on sait que la somme de cette série peut s'exprimer par le nombre π ou par le logarithme de 2. Soit $\alpha=1$, on a $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots=\log 2$, donc $L\left(\frac{1}{2}, 1\right) = L\left(\frac{1}{2}\right) = -2\log 2$.

En posant $\alpha=2$, on a $1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\dots=\frac{\pi^2}{12}$, donc

$$L\left(\frac{1}{2}, 2\right) = -\frac{\pi^2}{3}.$$

On peut en général exprimer $L\left(\frac{1}{2}, 2n\right)$ par $-M\pi^{2n}$, où M est un nombre rationnel.