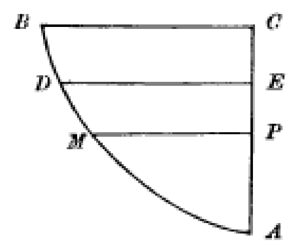
# IX.

## RÉSOLUTION D'UN PROBLÈME DE MECANIQUE.

Journal für die reine und angewandte Mathematik, herausgegeben von Crelle, Bd. I, Berlin 1826.




Soit $BDMA$ une courbe quelconque. Soit $BC$ une droite horizontale et $CA$ une droite verticale. Supposons qu'un point sollicité par la pesanteur se meuve sur la courbe, un point quelconque $D$ étant son point de départ. Soit $\tau$ le temps qui s'est écoulé quand le mobile est parvenu à un point donné $A$, et soit $a$ la hauteur $EA$. La quantité $\tau$ sera une certaine fonction de $a$, qui dépendra de la forme de la courbe. Réciproquement la forme de la courbe dépendra de cette fonction. Nous allons examiner comment, à l'aide d'une intégrale définie, on peut trouver l'équation de la courbe pour laquelle $\tau$ est une fonction continue donnée de $a$.

Soit $AM = s$, $AP = x$, et soit $t$ le temps que le mobile emploie à parcourir l'arc $DM$. D'après les règles de la mécanique on a $-\frac{ds}{dt} = \sqrt{a-x}$, donc $dt = -\frac{ds}{\sqrt{a-x}}$. Il s'ensuit, lorsqu'on prend l'intégrale depuis $x = a$ jusqu'à $x = 0$,

$$\tau = -\int_a^0 \frac{ds}{\sqrt{a-x}} = \int_0^a \frac{ds}{\sqrt{a-x}},$$

$\int_\alpha^\beta$ désignant que les limites de l'intégrale sont $x = \alpha$ et $x = \beta$. Soit maintenant

$$\tau = \varphi a$$

la fonction donnée, on aura
$$\varphi a = \int_0^a \frac{ds}{\sqrt{a-x}},$$
équation de laquelle on doit tirer $s$ en fonction de $x$. Au lieu de cette équation, nous allons considérer cette autre plus générale
$$\varphi a = \int_0^a \frac{ds}{(a-x)^n},$$
de laquelle nous chercherons à déduire l'expression de $s$ en $x$.

Désignons par $\Gamma\alpha$ la fonction
$$\Gamma\alpha = \int_0^1 dx \left(\log \frac{1}{x}\right)^{\alpha-1},$$
on a comme on sait
$$\int_0^1 y^{\alpha-1}(1-y)^{\beta-1} dy = \frac{\Gamma\alpha.\Gamma\beta}{\Gamma(a+\beta)},$$
où $\alpha$ et $\beta$ doivent être supérieurs à zéro. Soit $\beta = 1-n$, on trouvera
$$\int_0^1 \frac{y^{\alpha-1}dy}{(1-y)^n} = \frac{\Gamma\alpha.\Gamma(1-n)}{\Gamma(\alpha+1-n)},$$
d'où l'on tire, en faisant $z = ay$,
$$\int_0^a \frac{z^{\alpha-1}dz}{(a-z)^n} = \frac{\Gamma\alpha.\Gamma(1-n)}{\Gamma(\alpha+1-n)} a^{\alpha-n}.$$
En multipliant par $\dfrac{da}{(x-a)^{1-n}}$ et prenant l'intégrale depuis $a=0$ jusqu'à $a=x$, on trouve
$$\int_0^x \frac{da}{(x-a)^{1-n}} \int_0^a \frac{z^{\alpha-1}dz}{(a-z)^n} = \frac{\Gamma\alpha.\Gamma(1-n)}{\Gamma(\alpha+1-n)} \int_0^x \frac{a^{\alpha-n}da}{(x-a)^{1-n}}.$$
En faisant $a = xy$, on aura
$$\int_0^x \frac{a^{\alpha-n}da}{(x-a)^{1-n}} = x^\alpha \int_0^1 \frac{y^{\alpha-n}dy}{(1-y)^{1-n}} = x^\alpha \frac{\Gamma(\alpha-n+1)\Gamma n}{\Gamma(\alpha+1)},$$
donc
$$\int_0^x \frac{da}{(x-a)^{1-n}} \int_0^a \frac{z^{\alpha-1}dz}{(a-z)^n} = \Gamma n.\Gamma(1-n) \frac{\Gamma\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} x^\alpha.$$

Or d'après une propriété connue de la fonction $\Gamma$, on a

$$\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma\alpha;$$

on aura donc en substituant:

$$\int_0^x \frac{da}{(x-a)^{1-n}}\int_0^a \frac{z^{\alpha-1}dz}{(a-z)^n}=\frac{x^\alpha}{\alpha}\Gamma n.\Gamma(1-n).$$

En multipliant par $\alpha\varphi\alpha.d\alpha$, et intégrant par rapport à $\alpha$, on trouve

$$\int_0^x \frac{da}{(x-a)^{1-n}}\int_0^a \frac{\left(\int\varphi\alpha.\alpha z^{\alpha-1}d\alpha\right)dz}{(a-z)^n}=\Gamma n.\Gamma(1-n)\int\varphi\alpha.x^\alpha d\alpha.$$

Soit

$$\int\varphi\alpha.x^\alpha d\alpha=fx,$$

on en tire en différentiant,

$$\int\varphi\alpha.\alpha x^{\alpha-1}d\alpha=f'x,$$

donc

$$\int\varphi\alpha.\alpha z^{\alpha-1}d\alpha=f'z;$$

par conséquent

$$\int_0^x \frac{da}{(x-a)^{1-n}}\int_0^a \frac{f'z.dz}{(a-z)^n}=\Gamma n.\Gamma(1-n)fx,$$

ou, puisque $\Gamma n.\Gamma(1-n)=\dfrac{\pi}{\sin n\pi}$,

(1) $$fx=\frac{\sin n\pi}{\pi}\int_0^x \frac{da}{(x-a)^{1-n}}\int_0^a \frac{f'z.dz}{(a-z)^n}.$$

A l'aide de cette équation, il sera facile de tirer la valeur de $s$ de l'équation

$$\varphi a=\int_0^a \frac{ds}{(a-x)^n}.$$

Qu'on multiplie cette équation par $\dfrac{\sin n\pi}{\pi}\dfrac{da}{(x-a)^{1-n}}$, et qu'on prenne l'intégrale depuis $a=0$ jusqu'à $a=x$, on aura

$$\frac{\sin n\pi}{\pi}\int_0^x \frac{\varphi a.da}{(x-a)^{1-n}}=\frac{\sin n\pi}{\pi}\int_0^x \frac{da}{(x-a)^{1-n}}\int_0^a \frac{ds}{(a-x)^n},$$

donc en vertu de l'équation (1)

$$s = \frac{\sin n\pi}{x} \int_0^x \frac{\varphi a.da}{(x-a)^{1-n}}.$$

Soit maintenant $n = \frac{1}{2}$, on obtient

$$\varphi a = \int_0^a \frac{ds}{\sqrt{a-x}}$$

et

$$s = \frac{1}{\pi} \int_0^x \frac{\varphi a.da}{\sqrt{x-a}}.$$

Cette équation donne l'arc $s$ par l'abscisse $x$, et par suite la courbe est entièrement déterminée.

Nous allons appliquer l'expression trouvée à quelques exemples.

I. Soit

$$\varphi a = \alpha_0 a^{\mu_0} + \alpha_1 a^{\mu_1} + \cdots + \alpha_m a^{\mu_m} = \Sigma \alpha a^{\mu}$$

la valeur de $s$ sera

$$s = \frac{1}{\pi} \int_0^x \frac{da}{\sqrt{x-a}} \Sigma \alpha \alpha^{\mu} = \frac{1}{\pi} \Sigma \left( \alpha \int_0^x \frac{a^{\mu} da}{\sqrt{x-a}} \right).$$

Si l'on fait $a = xy$, on aura

$$\int_0^x \frac{a^{\mu} da}{\sqrt{x-a}} = x^{\mu+\frac{1}{2}} \int_0^1 \frac{y^{\mu} dy}{\sqrt{1-y}} = x^{\mu+\frac{1}{2}} \frac{\Gamma(\mu+1)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\mu+\frac{3}{2}\right)},$$

donc

$$s = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\pi} \Sigma \frac{\alpha\Gamma(\mu+1)}{\Gamma\left(\mu+\frac{3}{2}\right)} x^{\mu+\frac{1}{2}},$$

ou, puisque $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$,

$$s = \sqrt{\frac{x}{\pi}} \left[ \alpha_0 \frac{\Gamma(\mu_0+1)}{\Gamma\left(\mu_0+\frac{3}{2}\right)} x^{\mu_0} + \alpha_1 \frac{\Gamma(\mu_1+1)}{\Gamma\left(\mu_1+\frac{3}{2}\right)} x^{\mu_1} + \cdots + \alpha_m \frac{\Gamma(\mu_m+1)}{\Gamma\left(\mu_m+\frac{3}{2}\right)} x^{\mu_m} \right].$$

Si l'on suppose p. ex. que $m = 0$, $\mu_0 = 0$, c'est-à-dire que la courbe cherchée soit isochrone, on trouve

$$s = \sqrt{\frac{x}{\pi}} \alpha_0 \frac{\Gamma(1)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} = \frac{\alpha_0}{\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \sqrt{\frac{x}{\pi}} = \frac{2\alpha_0}{x}\sqrt{x},$$

or $s = \frac{2\alpha_0}{\pi}\sqrt{x}$ est l'équation connue de la cycloide.

II. Soit

$$\begin{array}{l}
\varphi a \ \text{ depuis } \ a=0 \ \text{ jusqu'à, } \ a=a_0, \ \text{ égal à } \ \varphi_0 a \\
\varphi a \ \text{ depuis } \ a=a_0 \ \text{ jusqu'à } \ a=a_1, \ \text{ égal à } \ \varphi_1 a \\
\varphi a \ \text{ depuis } \ a=a_1 \ \text{ jusqu'à } \ a=a_2, \ \text{ égal à } \ \varphi_2 a \\
\dotfill \\
\varphi a \ \text{ depuis } \ a=a_{m-1} \ \text{ jusqu'à } \ a=a_m, \ \text{ égal à } \ \varphi_m a,
\end{array}$$

on aura

$$\pi s = \int_0^x \frac{\varphi_0 a.da}{\sqrt{a-x}}, \quad \text{depuis } \ x=0 \ \text{ jusqu'à } \ x=a_0,$$

$$\pi s = \int_0^{a_0} \frac{\varphi_0 a.da}{\sqrt{a-x}} + \int_{a_0}^x \frac{\varphi_1 a.da}{\sqrt{a-x}}, \quad \text{depuis } \ x=a_0 \ \text{ jusqu'à } \ x=a_1,$$

$$\pi s = \int_0^{a_0} \frac{\varphi_0 a.da}{\sqrt{a-x}} + \int_{a_0}^{a_1} \frac{\varphi_1 a.da}{\sqrt{a-x}} + \int_{a_1}^x \frac{\varphi_2 a.da}{\sqrt{a-x}}, \quad \text{depuis } \ x=a_1 \ \text{ jusqu'à } \ x=a_2,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\pi s = \int_0^{a_0} \frac{\varphi_0 a.da}{\sqrt{a-x}} + \int_{a_0}^{a_1} \frac{\varphi_1 a.da}{\sqrt{a-x}} + \dots + \int_{a_{m-2}}^{a_{m-1}} \frac{\varphi_{m-1} a.da}{\sqrt{a-x}} + \int_{a_{m-1}}^x \frac{\varphi_m a.da}{\sqrt{a-x}},$$
$$\text{depuis } \ x=a_{m-1} \ \text{ jusqu'à } \ x=a_m,$$

où il faut remarquer que les fonctions $\varphi_0 a$, $\varphi_1 a$, $\varphi_2 a \dots \varphi_m a$ doivent être telles que

$$\varphi_0 a_0 = \varphi_1 a_0, \ \varphi_1 a_1 = \varphi_2 a_1, \ \varphi_2 a_2 = \varphi_3 a_2, \quad \text{etc.},$$

car la fonction $\varphi a$ doit nécessairement être continue.