II.

SUR L'INTÉGRALE DÉFINIE $\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{c-1}\left(l\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1} dx.$

Dans les Exercices de calcul intégral de M. Legendre on trouve l'expression suivante

$$\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{c-1}dx = \frac{\Gamma a.\Gamma c}{\Gamma(a+c)} \tag{1}$$

donc

$$\log\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{c-1}dx = \log\Gamma a + \log\Gamma c - \log\Gamma(a+c).$$

En différentiant par rapport à a et à c, et remarquant que

$$\frac{dl\Gamma(a)}{da} = La - C$$

on aura

$$\frac{\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{c-1}lx.dx}{\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{c-1}dx} = La - L(a+c),$$

$$\frac{\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{c-1}l(1-x).dx}{\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{c-1}dx} = Lc - L(a+c).$$

Ces deux équations combinées avec l'équation (1), donnent

$$\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{c-1}lx.dx = [La - L(a+c)]\frac{\Gamma a.\Gamma c}{\Gamma(a+c)},$$

$$\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{c-1}l(1-x)dx = [Lc - L(a+c)]\frac{\Gamma a.\Gamma c}{\Gamma(a+c)}.$$

La dernière équation peut aussi se déduire de l'avant-dernière en échangeant a et c entre eux, et mettant $1-x$ à la place de x.

Lorsque $c=1$, on a, à cause de $L(1+a)=\frac{1}{a}+L(a)$, et $\Gamma(a+1)=a\Gamma(a)$,

$$\int_0^1 x^{a-1} lx.dx = -\frac{1}{a^2},$$

résultat connu, et

$$\int_0^1 x^{a-1} l(1-x)dx = -\frac{L(1+a)}{a},$$

donc

$$L(1+a) = -a\int_0^1 x^{a-1} l(1-x)dx.$$

En développant $(1-x)^{c-1}$ en série, on trouvera

$$\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{c-1} l\left(\frac{1}{x}\right)dx$$
$$= \int_0^1 x^{a-1} l\left(\frac{1}{x}\right)dx - (c-1)\int_0^1 x^{a} l\left(\frac{1}{x}\right)dx + \frac{(c-1)(c-2)}{2}\int_0^1 x^{a+1} l\left(\frac{1}{x}\right)dx - \dots;$$

or $\int_0^1 x^k l\left(\frac{1}{x}\right)dx = \frac{1}{(k+1)^2}$, donc

$$\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{c-1} l\left(\frac{1}{x}\right)dx$$
$$= \frac{1}{a^2} - (c-1)\frac{1}{(a+1)^2} + \frac{(c-1)(c-2)}{2}.\frac{1}{(a+2)^2} - \frac{(c-1)(c-2)(c-3)}{2.3}.\frac{1}{(a+3)^2} + \dots;$$

mais $\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{c-1} l\left(\frac{1}{x}\right)dx = [L(a+c)-La]\frac{\Gamma a.\Gamma c}{\Gamma(a+c)}$, donc

$$[L(a+c)-La]\frac{\Gamma a.\Gamma c}{\Gamma(a+c)}$$
$$= \frac{1}{a^2} - (c-1)\frac{1}{(a+1)^2} + \frac{(c-1)(c-2)}{2}.\frac{1}{(a+2)^2} - \frac{(c-1)(c-2)(c-3)}{2.3}.\frac{1}{(a+3)^2} + \dots. \tag{2}$$

Soit par exemple $c=1-a$, on a

$$L(a+c)-La = -La,\ \Gamma(a+c)=1,$$
$$\Gamma a.\Gamma c = \Gamma a.\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin a\pi};$$

donc

$$-La\cdot\frac{\pi}{\sin a\pi} = \frac{1}{a^2} + \frac{a}{(a+1)^2} + \frac{a(a+1)}{2(a+2)^2} + \frac{a(a+1)(a+2)}{2.3.(a+3)^2} + \dots.$$

Soit $a=\frac{1}{2}$, on a $-La = 2\log 2$, $\sin\frac{\pi}{2}=1$, donc

$$2\pi\log 2 = 2^2 + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{2.5^2} + \frac{3.5}{2^2.3.7^2} + \frac{3.5.7}{2^3.3.4.9^2} + \dots.$$

Soit $a = 1 - x$, $c = 2x - 1$, on aura en remarquant que $L(1-x) - Lx = \pi \cot \pi x$,

$$\begin{aligned}
&-\pi . \cot \pi x . \frac{\Gamma(1-x).\Gamma(2x-1)}{\Gamma x} \\
&= \frac{1}{(1-x)^2} - \frac{2x-2}{(2-x)^2} + \frac{(2x-2)(2x-3)}{2(3-x)^2} - \frac{(2x-2)(2x-3)(2x-4)}{2.3.(4-x)^2} + \dots .
\end{aligned}$$

En échangeant a et c entre eux dans l'équation (2), on obtient

$$[L(a+c) - Lc]\frac{\Gamma a.\Gamma c}{\Gamma(a+c)} = \frac{1}{c^2} - (a-1)\frac{1}{(c+1)^2} + \frac{(a-1)(a-2)}{2(c+2)^2} - \dots .$$

En divisant l'équation (2) par celle-ci membre à membre, on aura

$$\frac{L(a+c) - L(a)}{L(a+c) - L(c)} = \frac{\frac{1}{a^2} - \frac{c-1}{(a+1)^2} + \frac{(c-1)(c-2)}{2(a+2)^2} - \dots}{\frac{1}{c^2} - \frac{a-1}{(c+1)^2} + \frac{(a-1)(a-2)}{2(c+2)^2} - \dots}.$$

De cette équation on tirera, en y faisant $c = 1$,

$$L(1+a) = a - \frac{a(a-1)}{2^2} + \frac{a(a-1)(a-2)}{2.3^2} - \dots ,$$

donc en écrivant $-a$ pour a,

$$L(1-a) = -\left(a + \frac{a(a+1)}{2^2} + \frac{a(a+1)(a+2)}{2.3^2} + \dots\right),$$

et en mettant $a - 1$ au lieu de a,

$$La = (a-1) - \frac{(a-1)(a-2)}{2^2} + \frac{(a-1)(a-2)(a-3)}{2.3^2} - \dots ;$$

on tire de là

$$\begin{aligned}
&L(1-a) - La = \pi . \cot \pi a \\
&= -\left(2a - 1 + \frac{a(a+1) - (a-1)(a-2)}{2^2} + \frac{a(a+1)(a+2) + (a-1)(a-2)(a-3)}{2.3^2} + \dots\right).
\end{aligned}$$

Si dans l'équation (2) on pose $a = 1$, on aura

$$[L(c+1) - L(1)]\frac{\Gamma(1).\Gamma c}{\Gamma(c+1)} = \frac{L(1+c)}{c} = 1 - \frac{(c-1)}{2^2} + \frac{(c-1)(c-2)}{2.3^2} - \dots$$

comme auparavant. En faisant $c = 0$, il vient

$$\frac{L(1)}{0} = \frac{0}{0} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}.$$

Nous avons vu que

$$\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{c-1} l\left(\frac{1}{x}\right) dx = [L(a+c) - La]\frac{\Gamma a.\Gamma c}{\Gamma(a+c)}.$$

En différentiant cette équation logarithmiquement, il viendra

$$\frac{\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{c-1}\left(l\frac{1}{x}\right)^2 dx}{\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{c-1} l\left(\frac{1}{x}\right) dx} = -\frac{\frac{dL(a+c)}{da}-\frac{dL(a)}{da}}{L(a+c)-La} + L(a+c) - L(a).$$

Or on a $\frac{dLa}{da} = -\Sigma\frac{1}{a^2}$; soit $\Sigma\frac{1}{a^2} = L'(a)$, on aura

$$\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{c-1}\left(l\frac{1}{x}\right)^2 .dx$$
$$= \left[(L'(a+c)-L'a) + (L(a+c)-La)^2\right]\frac{\Gamma a.\Gamma c}{\Gamma(a+c)}.$$

Si l'on désigne $\Sigma\frac{1}{a^3}$ par $L''a$, $L\frac{1}{a^4}$ par $L'''a$ etc., on obtiendra par des différentiations répétées

$$\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{c-1}\left(l\frac{1}{x}\right)^3 dx$$
$$= \left[2\left(L''(a+c)-L''a\right) + 3\left(L'(a+c)-L'a\right)\left(L(a+c)-La\right) + \left(L(a+c)-La\right)^3\right]\frac{\Gamma a.\Gamma c}{\Gamma(a+c)},$$
$$\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{c-1}\left(l\frac{1}{x}\right)^4 dx$$
$$= \text{ etc.}$$

En différentiant l'équation (2) par rapport à a, on aura

$$\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{c-1}\left(l\frac{1}{x}\right)^2 dx$$
$$=2\left(\frac{1}{a^3} - \frac{c-1}{1}.\frac{1}{(a+1)^3} + \frac{(c-1)(c-2)}{1.2}.\frac{1}{(a+2)^3} - \frac{(c-1)(c-2)(c-3)}{1.2.3}.\frac{1}{(a+3)^3} + \dots\right),$$
$$\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{c-1}\left(l\frac{1}{x}\right)^3 dx$$
$$=2.3\left(\frac{1}{a^4} - \frac{c-1}{1}.\frac{1}{(a+1)^4} + \frac{(c-1)(c-2)}{1.2}.\frac{1}{(a+2)^4} - \frac{(c-1)(c-2)(c-3)}{1.2.3}.\frac{1}{(a+3)^4} + \dots\right),$$

et en général

$$\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{c-1}\left(l\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1} dx$$
$$=\Gamma\alpha\left(\frac{1}{a^\alpha} - \frac{c-1}{1}.\frac{1}{(a+1)^\alpha} + \frac{(c-1)(c-2)}{1.2}.\frac{1}{(a+2)^\alpha} - \frac{(c-1)(c-2)(c-3)}{1.2.3}.\frac{1}{(a+3)^\alpha} + \dots\right).$$

Or la fonction $\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{c-1}\left(l\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1} dx$ est exprimable par les fonctions Γ, L, L', L'',… $L^{(\alpha-1)}$, donc la somme de la série infinie

$$\frac{1}{a^\alpha} - \frac{c-1}{1}.\frac{1}{(a+1)^\alpha} + \frac{(c-1)(c-2)}{1.2}.\frac{1}{(a+2)^\alpha} - \dots$$

est exprimable par ces mêmes fonctions.

Il y a encore d'autres intégrales qui peuvent s'exprimer par les mêmes fonctions. En effet, soit

$$\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{c-1}\left(l\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1}dx=\varphi(a,\,c),$$

on obtiendra par des différentiations successives par rapport à c,

$$\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{c-1}l(1-x)\left(l\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1}dx=\varphi' c,$$

$$\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{c-1}[l(1-x)]^2\left(l\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1}dx=\varphi'' c,$$

$$\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{c-1}[l(1-x)]^3\left(l\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1}dx=\varphi''' c,$$

et en général

$$\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{c-1}[l(1-x)]^{\beta-1}\left(l\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1}dx=\varphi^{(\beta-1)} c.$$

Or on a $\varphi(a,\,c)=(-1)^{\alpha-1}\dfrac{d^{\alpha-1}\frac{\Gamma a}{\Gamma(a+c)}}{da^{\alpha-1}}$, donc en substituant cette valeur, on obtiendra l'expression générale suivante,

$$\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{c-1}[l(1-x)]^n(lx)^m dx=\frac{d^{m+n}\frac{\Gamma a.\Gamma c}{\Gamma(a+c)}}{da^m.dc^n},$$

et cette fonction est, comme nous venons de le voir, exprimable par les fonctions Γ, L, L', L'', $\ldots L^{(n-1)}\ldots L^{(m-1)}$.

On sait que

$$\text{(A)}\qquad \int_0^1 \left(l\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1}dx=\Gamma\alpha.$$

En différentiant par rapport à α on aura

$$\int_0^1 \left(l\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1} ll\left(\frac{1}{x}\right)dx=\frac{d\Gamma\alpha}{d\alpha}=\frac{\frac{d\Gamma\alpha}{\Gamma\alpha}\Gamma\alpha}{d\alpha}=\Gamma\alpha.\frac{dl\Gamma\alpha}{d\alpha},$$

or $\dfrac{dl\Gamma\alpha}{d\alpha}=L\alpha-C$, donc

$$\int_0^1 \left(l\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1} ll\left(\frac{1}{x}\right)dx=\Gamma\alpha\cdot(L\alpha-C);$$

en différentiant encore, on aura

$$\int_0^1 \left(l\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1} \left(ll\frac{1}{x}\right)^2 dx = \Gamma\alpha \left[(L\alpha - C)^2 - L'\alpha\right].$$

Une expression générale pour la fonction

$$\int_0^1 \left(l\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1} \left(ll\frac{1}{x}\right)^n dx$$

peut se trouver aisément comme il suit. En différentiant l'équation (A) n fois de suite, on aura:

$$\int_0^1 \left(l\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1} \left(ll\frac{1}{x}\right)^n dx = \frac{d^n\Gamma\alpha}{d\alpha^n}.$$

or $\dfrac{dl\Gamma\alpha}{d\alpha} = L\alpha - C$, donc

$$l\Gamma\alpha = \int (L\alpha - C)d\alpha \quad \text{et} \quad \Gamma\alpha = e^{\int [L\alpha - C]d\alpha},$$

donc

$$\int_0^1 \left(l\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1} \left(ll\frac{1}{x}\right)^n dx = \frac{d^n e^{\int (L\alpha - C)d\alpha}}{d\alpha^n},$$

fonction qui est exprimable par les fonctions Γ, L, L', $L'' \dots L^{n-1}$.

Si l'on met e^y à la place de x, on a $l\dfrac{1}{x} = -y$, $ll\dfrac{1}{x} = l(-y)$, $dx = e^y dy$; donc

$$\int_{-\infty}^0 (-y)^{\alpha-1}[l(-y)]^n e^y dy = \frac{d^n e^{\int (L\alpha - C)d\alpha}}{d\alpha^n},$$

ou en changeant y en $-y$

$$\int_\infty^0 y^{\alpha-1}(ly)^n e^{-y} dy = -\frac{d^n e^{\int (L\alpha - C)d\alpha}}{d\alpha^n},$$

Faisant $y = z^{\frac{1}{\alpha}}$, on a $y^{\alpha-1}dy = \dfrac{1}{\alpha}d(y)^\alpha = \dfrac{1}{\alpha}dz$, $ly = \dfrac{1}{\alpha}lz$, $e^{-y} = e^{-\left(z^{\frac{1}{\alpha}}\right)}$, et par suite

$$\int_0^\infty (lz)^n e^{-\left(z^{\frac{1}{\alpha}}\right)} dz = \alpha^{n+1}\frac{d^n e^{\int (L\alpha - C)d\alpha}}{d\alpha^n}.$$

Si l'on met α au lieu de $\dfrac{1}{\alpha}$, on aura en posant $n = 0$,

$$\int_0^\infty e^{-x^\alpha}.dx = \frac{1}{\alpha}\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right);$$

en posant $n = 1$,

$$\int_0^\infty l\left(\frac{1}{x}\right) e^{-x^\alpha} dx = -\frac{1}{\alpha^2}\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)\left[L\left(\frac{1}{\alpha}\right) - C\right].$$

Si par exemple $\alpha = 2$, on aura

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} \quad \text{et} \quad \int_0^\infty l\left(\frac{1}{x}\right) e^{-x^2} dx = \frac{1}{4}\sqrt{\pi}(C + 2\log 2),$$

en remarquant que $L\left(\frac{1}{2}\right) = -2\log 2$. Il faut se rappeler que la constante C est égale à $0,57721566\ldots$

Si dans l'équation (A) on pose $x = y^n$, on trouvera

$$\int_0^1 y^{n-1}\left(l\frac{1}{y}\right)^{\alpha-1} dy = \frac{\Gamma\alpha}{n^\alpha}, \quad \text{lorsque } n \text{ est positif,}$$

$$\int_\infty^1 y^{n-1}\left(l\frac{1}{y}\right)^{\alpha-1} dy = \frac{\Gamma\alpha}{n^\alpha}, \quad \text{lorsque } n \text{ est négatif.}$$

En différentiant cette équation par rapport à α, on aura, lorsque n est positif,

$$\int_0^1 y^{n-1}\left(l\frac{1}{y}\right)^{\alpha-1} ll\left(\frac{1}{y}\right) dy = \frac{\Gamma\alpha}{n^\alpha}(L\alpha - C - \log n).$$

Soit, $y = e^{-x}$, on trouvera

$$\int_0^\infty e^{-nx} x^{\alpha-1} lx.dx = \frac{\Gamma\alpha}{n^\alpha}(L\alpha - C - \log n),$$

résultat qu'on peut aussi déduire aisément de l'équation

$$\int_0^\infty e^{-x^\alpha} l\left(\frac{1}{x}\right) dx = -\frac{1}{\alpha^2}\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)\left[L\left(\frac{1}{\alpha}\right) - C\right].$$