X.

DÉMONSTRATION D'UNE EXPRESSION DE LAQUELLE LA FORMULE BINOME EST UN CAS PARTICULIER.

Journal für die reine und angewandte Mathematik, herausgegeben von Crelle, Bd. 1, Berlin 1826.

Cette expression est la suivante:

$$\begin{aligned}(x+\alpha)^n = &x^n + \frac{n}{1}\alpha(x+\beta)^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}\alpha(\alpha-2\beta)(x+2\beta)^{n-2} + \dots\\ &+ \frac{n(n-1)\dots(n-\mu+1)}{1.2\dots\mu}\alpha(\alpha-\mu\beta)^{\mu-1}(x+\mu\beta)^{n-\mu} + \dots\\ &+ \frac{n}{1}\alpha(\alpha-(n-1)\beta)^{n-2}(x+(n-1)\beta) + \alpha(\alpha-n\beta)^{n-1};\end{aligned}$$

x, α et β sont des quantités quelconques, n est un nombre entier positif.

Lorsque $n=0$, l'expression donne

$$(x+\alpha)^0 = x^0,$$

qu'il fallait. Or on peut, comme il suit, démontrer que si l'expression subsiste pour $n=m$, elle doit aussi subsister pour $n=m+1$, c'est-à-dire qu'elle est vraie en général.

Soit

$$\begin{aligned}(x+\alpha)^m = &x^m + \frac{m}{1}\alpha(x+\beta)^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2}\alpha(\alpha-2\beta)(x+2\beta)^{m-2} + \dots\\ &+ \frac{m}{1}\alpha(\alpha-(m-1)\beta)^{m-2}(x+(m-1)\beta) + \alpha(\alpha-m\beta)^{m-1}.\end{aligned}$$

En multipliant par $(m+1)dx$ et intégrant, on trouve

$$(x+\alpha)^{m+1} = x^{m+1} + \frac{m+1}{1}\alpha(x+\beta)^m + \frac{(m+1)m}{1.2}\alpha(\alpha-2\beta)(x+2\beta)^{m-1} + \dots$$
$$+\frac{m+1}{1}\alpha(\alpha-m\beta)^{m-1}(x+m\beta)+C,$$

C étant la constante arbitraire. Pour trouver sa valeur posons $x=-(m+1)\beta$, les deux dernières équations donneront

$$(\alpha-(m+1)\beta)^m = (-1)^m\left[(m+1)^m\beta^m - m^m\alpha\beta^{m-1}\right.$$
$$\left.+\frac{m}{2}(m-1)^{m-1}\alpha(\alpha-2\beta)\beta^{m-2} - \frac{m(m-1)}{2.3}(m-2)^{m-2}\alpha\left(\alpha-3\beta^2\beta^{m-3}+\dots\right]\right.,$$
$$(\alpha-(m+1)\beta)^{m+1} = (-1)^{m+1}\left[(m+1)^{m+1}\beta^{m+1} - (m+1)m^m\alpha\beta^m\right.$$
$$\left.+\frac{(m+1)m}{2}(m-1)^{m-1}\alpha(a-2\beta)\beta^{m-1} - \dots\right] + C.$$

Multipliant la première de ces équations par $(m+1)\beta$ et ajoutant le produit à la seconde, on trouve

$$C = (\alpha-(m+1)\beta)^{m+1} + (m+1)\beta(\alpha-(m+1)\beta)^m,$$

ou bien

$$C = \alpha(\alpha-(m+1)\beta)^n.$$

Il s'ensuit que l'équation proposée subsiste de même pour $n=m+1$. Or elle a lieu pour $n=0$; donc elle aura lieu pour $n=0$, 1, 2, 3 etc. c'est-à-dire pour toute valeur entière et positive de n.

Si l'on fait $\beta=0$, on obtient la formule binome. Si l'on fait $\alpha=-x$, on trouve

$$0 = x^n - \frac{n}{1}x(x+\beta)^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}x(x+2\beta)^{n-1} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}x(x+3\beta)^{n-1} + \dots$$

ou en divisant par x,

$$0 = x^{n-1} - \frac{n}{1}(x+\beta)^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}(x+2\beta)^{n-1} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}(x+3\beta)^{n-1} + \dots$$

ce qui est d'ailleurs connu; car le second membre de cette équation n'est autre chose que

$$(-1)^n\Delta^n\left(x^{n-1}\right),$$

en faisant la différence constante égale à β.
