IV.

L'INTÉGRALE FINIE $\Sigma^n \varphi x$ EXPRIMÉE PAR UNE INTÉGRALE SIMPLE.

Magazin for Naturvidenskaberne, Aargang III, Bind 2, Christiania 1825.

On peut comme on sait, au moyen du théorème de *Parseval* exprimer l'intégrale finie $\Sigma^n \varphi x$ par une intégrale définie double, mais si je ne me trompe, on n'a pas exprimé la même intégrale par une intégrale définie simple. C'est ce qui est l'objet de ce mémoire.

En désignant par φx une fonction quelconque de x, il est aisé de voir qu'on peut toujours supposer

$$\varphi x = \int e^{vx} fv.dv, \tag{1}$$

l'intégrale étant prise entre deux limites quelconques de v, indépendantes de x. La fonction fv désigne une fonction de v, dont la forme dépend de celle de φx. En supposant $\Delta x = 1$, on aura en prenant l'intégrale finie des deux membres de l'équation (1)

$$\Sigma \varphi x = \int e^{vx} \frac{fv}{e^v - 1} dv, \tag{2}$$

où il faut ajouter une constante arbitraire. En prenant une seconde fois l'intégrale finie, on obtiendra

$$\Sigma^2 \varphi x = \int e^{vx} \frac{fv}{(e^v - 1)^2} dv.$$

En général on trouvera

$$\Sigma^n \varphi x = \int e^{vx} \frac{fv}{(e^v - 1)^n} dv. \tag{3}$$

Pour compléter cette intégrale il faut ajouter au second membre une fonction de la forme

$$C + C_1 x + C_2 x^2 + \ldots + C_{n-1} x^{n-1},$$

C, C_1, C_2 etc. étant des constantes arbitraires.

Il s'agit maintenant de trouver la valeur de l'intégrale définie $\int e^{vx}\frac{fv}{(e^v-1)^n}dv$. Pour cela je me sers d'un théorème dû à M. *Legendre* (Exerc. de calc. int. t. II, p. 189), savoir que

$$\frac{1}{4}\frac{e^v+1}{e^v-1}-\frac{1}{2v}=\int_0^{\frac{1}{0}}\frac{dt.\sin vt}{e^{2\pi t}-1}.$$

On tire de cette équation

$$\frac{1}{e^v-1}=\frac{1}{v}-\frac{1}{2}+2\int_0^{\frac{1}{0}}\frac{dt.\sin vt}{e^{2\pi t}-1}. \tag{4}$$

En substituant cette valeur de $\frac{1}{e^v-1}$ dans l'équation (2), on aura

$$\Sigma\varphi x=\int e^{vx}\frac{fv}{v}dv-\frac{1}{2}\int e^{vx}fv.dv+2\int_0^{\frac{1}{0}}\frac{dt}{e^{2\pi t}-1}\int e^{vx}fv.\sin vt.dv.$$

L'intégrale $\int e^{vx}fv.\sin vt.dv$ se trouve de la manière suivante. En remplaçant dans l'équation (1) x successivement par $x+t\sqrt{-1}$ et $x-t\sqrt{-1}$, on obtiendra

$$\varphi(x+t\sqrt{-1})=\int e^{vx}e^{vt\sqrt{-1}}fv.dv,$$
$$\varphi(x-t\sqrt{-1})=\int e^{vx}e^{-vt\sqrt{-1}}fv.dv,$$

d'où l'on tire, en retranchant et divisant par $2\sqrt{-1}$,

$$\int e^{vx}\sin vt.fv.dv=\frac{\varphi(x+t\sqrt{-1})-\varphi(x-t\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}}.$$

Ainsi l'expression de $\Sigma\varphi x$ devient

$$\Sigma\varphi x=\int\varphi x.dx-\frac{1}{2}\varphi x+2\int_0^{\frac{1}{0}}\frac{dt}{e^{2\pi t}-1}\frac{\varphi(x+t\sqrt{-1})-\varphi(x-t\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}}.$$

Maintenant pour trouver la valeur de l'intégrale générale

$$\Sigma^n\varphi x=\int e^{vx}fv\frac{dv}{(e^v-1)^n},$$

posons

$$\frac{1}{(e^v-1)^n}=(-1)^{n-1}\left(A_{0,n}p+A_{1,n}\frac{dp}{dv}+A_{2,n}\frac{d^2p}{dv^2}+\ldots+A_{n-1,n}\frac{d^{n-1}p}{dv^{n-1}}\right)$$

où p est égal à $\frac{1}{e^v-1}$, $A_{0,n}$, $A_{1,n}\ldots$ étant des coefficiens numériques qui doivent être déterminés. Si l'on différentie l'équation précédente, on a

$$\frac{ne^v}{(e^v-1)^{n+1}}=(-1)^n\left(A_{0,n}\frac{dp}{dv}+A_{1,n}\frac{d^2p}{dv^2}+\ldots+A_{n-1,n}\frac{d^np}{dv^n}\right).$$

Or

$$\frac{ne^v}{(e^v-1)^{n+1}}=\frac{n}{(e^v-1)^n}+\frac{n}{(e^v-1)^{n+1}},$$

donc

$$\frac{ne^v}{(e^v-1)^{n+1}} = n(-1)^{n-1}\left(A_{0,\,n}p + A_{1,\,n}\frac{dp}{dv} + \ldots + A_{n-1,\,n}\frac{d^{n-1}p}{dv^{n-1}}\right)$$
$$+\, n(-1)^n\left(A_{0,\,n+1}p + A_{1,\,n+1}\frac{dp}{dv} + \cdots + A_{n,\,n+1}\frac{d^n p}{dv^n}\right).$$

En comparant ces deux expressions de $\frac{ne^v}{(e^v-1)^{n+1}}$, on en déduit les équations suivantes:

$$A_{0,\,n+1} - A_{0,\,n} = 0 \qquad \text{ɔ:} \qquad \Delta A_{0,\,n} = 0,$$
$$A_{1,\,n+1} - A_{1,\,n} = \frac{1}{n}A_{0,\,n} \qquad \text{ɔ:} \qquad \Delta A_{1,\,n} = \frac{1}{n}A_{0,\,n},$$
$$A_{2,\,n+1} - A_{2,\,n} = \frac{1}{n}A_{1,\,n} \qquad \text{ɔ:} \qquad \Delta A_{2,\,n} = \frac{1}{n}A_{1,\,n},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots$$
$$A_{n-1,\,n+1} - A_{n-1,\,n} = \frac{1}{n}A_{n-2,\,n} \qquad \text{ɔ:} \qquad \Delta A_{n-1,\,n} = \frac{1}{n}A_{n-2,\,n},$$
$$A_{n,\,n+1} = \frac{1}{n}A_{n-1,\,n},$$

d'où l'on tire

$$A_{0,\,n} = 1,\; A_{1,\,n} = \Sigma\frac{1}{n},\; A_{2,\,n} = \Sigma\left(\frac{1}{n}\Sigma\frac{1}{n}\right),\; A_{3,\,n} = \Sigma\left[\frac{1}{n}\Sigma\left(\frac{1}{n}\Sigma\frac{1}{n}\right)\right] \quad \text{etc.}$$
$$A_{n,\,n+1} = \frac{1}{n}\frac{1}{n-1}\frac{1}{n-2}\cdots\frac{1}{2}.\frac{1}{1}.A_{0,\,1} = \frac{1}{\Gamma(n+1)}.$$

Cette dernière équation servira à déterminer les constantes qui rentrent dans les expressions de $A_{1,\,n}$, $A_{2,\,n}$, $A_{3,\,n}$ etc.

Ayant ainsi déterminé les coefficiens $A_{0,\,n}$, $A_{1,\,n}$, $A_{2,\,n}$ etc., on aura, en substituant dans l'équation (3) au lieu de $\frac{1}{(e^v-1)^n}$ sa valeur,

$$\Sigma^n\varphi x = (-1)^{n-1}\int e^{vx}fv.dv\left(A_{0,\,n}p + A_{1,\,n}\frac{dp}{dv} + \ldots + A_{n-1,\,n}\frac{d^{n-1}p}{dv^{n-1}}\right);$$

maintenant on a

$$p = \frac{1}{v} - \frac{1}{2} + 2\int_0^{\frac{1}{0}}\frac{dt.\sin vt}{e^{2\pi t}-1},$$

d'où l'on tire en différentiant

$$\frac{dp}{dv} = -\frac{1}{v^2} + 2\int_0^{\frac{1}{0}}\frac{tdt.\cos vt}{e^{2\pi t}-1},$$
$$\frac{d^2p}{dv^2} = \frac{2}{v^3} - 2\int_0^{\frac{1}{0}}\frac{t^2dt.\sin vt}{e^{2\pi t}-1},$$
$$\frac{d^3p}{dv^3} = -\frac{2.3}{v^4} - 2\int_0^{\frac{1}{0}}\frac{t^3dt.\cos vt}{e^{2\pi t}-1} \quad \text{etc.};$$

donc en substituant

$$\Sigma^n\varphi x = \int\left(A_{n-1,\,n}\frac{\Gamma n}{v^n} - A_{n-2,\,n}\frac{\Gamma(n-1)}{v^{n-1}} + \ldots + (-1)^{n-1}A_{0,\,n}\frac{1}{v} + (-1)^n.\frac{1}{2}\right)e^{vx}fv.dv$$
$$+\,2(-1)^{n-1}\iint_0^{\frac{1}{0}}\frac{P\sin vt.dt}{e^{2\pi t}-1}e^{vx}fv.dv + 2(-1)^{n-1}\iint_0^{\frac{1}{0}}\frac{Q\cos vt.dt}{e^{2.Tt}-1}e^{vx}fv.dv.$$

De l'équation $\varphi x = \int e^{vx} fv.dv$ on tire en intégrant:

$$\int \varphi x.dx = \int e^{vx} fv \frac{dv}{v},$$
$$\int^2 \varphi x.dx^2 = \int e^{vx} fv \frac{dv}{v^2},$$
$$\int^3 \varphi x.dx^3 = \int e^{vx} fv \frac{dv}{v^3} \text{ etc.;}$$

de plus on a

$$\int \sin vt.e^{vx} fv.dv = \frac{\varphi(x+t\sqrt{-1}) - \varphi(x-t\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}},$$
$$\int \cos vt.e^{vx} fv.dv = \frac{\varphi(x+t\sqrt{-1}) + \varphi(x-t\sqrt{-1})}{2},$$

donc on aura en substituant

$$\Sigma^n \varphi x = A_{n-1,\,n}\Gamma n \int^n \varphi x.dx^n - A_{n-2,\,n}\Gamma(n-1)\int^{n-1} \varphi x.dx^{n-1} + \ldots + (-1)^{n-1}\int \varphi x.dx$$
$$+ (-1)^n.\frac{1}{2}\varphi x + 2(-1)^{n-1}\int_0^{\frac{1}{0}} \frac{Pdt}{e^{2\pi t}-1}\frac{\varphi(x+t\sqrt{-1}) - \varphi(x-t\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}}$$
$$+ 2(-1)^{n-1}\int_0^{\frac{1}{0}} \frac{Qdt}{e^{2\pi t}-1}\frac{\varphi(x+t\sqrt{-1}) + \varphi(x-t\sqrt{-1})}{2}$$

où

$$P = A_{0,\,n} - A_{2,\,n}t^2 + A_{4,\,n}t^4 - \ldots,$$
$$Q = A_{1,\,n}t - A_{3,\,n}t^3 + A_{5,\,n}t^5 - \ldots.$$

En faisant p. ex. $n=2$, on aura

$$\Sigma^2\varphi x = \iint \varphi x.dx^2 - \int \varphi x.dx + \frac{1}{2}\varphi x - 2\int_0^{\frac{1}{0}} \frac{dt}{e^{2\pi t}-1}\frac{\varphi(x+t\sqrt{-1}) - \varphi(x-t\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}}$$
$$-2\int_0^{\frac{1}{0}} \frac{tdt}{e^{2.\pi t}-1}\frac{\varphi(x+t\sqrt{-1}) + \varphi(x-t\sqrt{-1})}{2}.$$

Soit p. ex. $\varphi x = e^{ax}$, on aura

$$\varphi(x \pm t\sqrt{-1}) = e^{ax}e^{\pm at\sqrt{-1}},\ \int e^{ax}dx = \frac{1}{a}e^{ax},\ \iint e^{ax}dx^2 = \frac{1}{a^2}e^{ax},$$

donc, en substituant et divisant par e^{ax},

$$\frac{1}{(e^a-1)^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} - 2\int_0^{\frac{1}{0}} \frac{dt.\sin at}{e^{2\pi t}-1} - 2\int_0^{\frac{1}{0}} \frac{tdt.\cos at}{e^{2\pi t}-1}.$$

Le cas le plus remarquable est celui où $n=1$. On a alors, comme on l'a vu précédemment:

$$\Sigma\varphi x = C + \int \varphi x.dx - \frac{1}{2}\varphi x + 2\int_0^{\frac{1}{0}} \frac{dt}{e^{2\pi t}-1}\frac{\varphi(x+t\sqrt{-1}) - \varphi(x-t\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}}.$$

En supposant que les deux intégrales $\Sigma\varphi x$ et $\int \varphi x dx$ s'annulent pour $x=a$, il est clair qu'on aura:

$$C=\frac{1}{2}\varphi a-2\int_0^{\frac{1}{0}}\frac{dt}{e^{2\pi t}-1}\frac{\varphi(a+t\sqrt{-1})-\varphi(a-t\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}};$$

donc

$$\Sigma\varphi x=\int\varphi x.dx-\frac{1}{2}(\varphi x-\varphi a)+2\int_0^{\frac{1}{0}}\frac{dt}{e^{2\pi t}-1}\frac{\varphi(x+t\sqrt{-1})-\varphi(x-t\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}}$$
$$-2\int_0^{\frac{1}{0}}\frac{dt}{e^{2\pi t}-1}\frac{\varphi(a+t\sqrt{-1})-\varphi(a-t\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}}.$$

Si l'on fait $x=\infty$, en supposant que φx et $\int\varphi x.dx$ s'annulent pour cette valeur de x, on aura:

$$\varphi a+\varphi(a+1)+\varphi(a+2)+\varphi(a+3)+\ldots \text{ in inf.}$$
$$=\int_a^{\frac{1}{0}}\varphi x.dx+\frac{1}{2}\varphi a-2\int_0^{\frac{1}{0}}\frac{dt}{e^{2\pi t}-1}\frac{\varphi(a+t\sqrt{-1})-\varphi(a-t\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}}.$$

Soit p. ex. $\varphi x=\frac{1}{x^2}$, on aura

$$\frac{\varphi(a+t\sqrt{-1})-\varphi(a-t\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}}=\frac{-2at}{(a^2+t^2)^2},$$

donc

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{(a+1)^2}+\frac{1}{(a+2)^2}+\ldots=\frac{1}{2a^2}+\frac{1}{a}+4a\int_0^{\frac{1}{0}}\frac{tdt}{(e^{2\pi t}-1)\,(a^2+t^2)^2},$$

et en faisant $a=1$

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\ldots=\frac{\pi^2}{6}=\frac{3}{2}+4\int_0^{\frac{1}{0}}\frac{tdt}{(e^{2\pi t}-1)\,(1+t^2)^2}.$$